КООРДИНАТЫ — числа, величины, по к-рым находится (определяется) положение какого-либо элемента (точки) в некоторой совокупности (множестве M), например на плоскости поверхности, в пространстве, на многообразии. В ряде разделов математики и физики К. именуются по-другому, напр. К. элемента (вектора) векторного пространства наз. его компонентами, К. в произведении множеств — проекции на один из его сомножителей, в теории относительности системы К.— это системы отсчета, и т. п. Часто встречается ситуация, когда ввести достаточно разумные и удобные К. глобально на всем множестве невозможно (напр., точкам сферы в отличие от плоскости нельзя взаимно однозначно и непрерывно сопоставить пары чисел), и тогда вводят понятие локальных координат. Таково, напр., положение в теории многообразий.

Совокупность К. организуется в с и с т е м у к о о р д и н а т (с и с т е м у о т н е с е н и я, с и с т е м у р е ф е р е н ц и и), или *карту*, причем К. взаимно однозначно соответствуют элементам множества M. В этом — основа м е т о д а к о о р д и н а т, истоками к-рого принято считать работы П. Ферма (P. Fermat, 1636) и Р. Декарта (R. Descartes, 1637). Впрочем, еще Аполлоний Пергский (3—2 вв. до н. э.) определял конич. сечения с помощью того, что сейчас [следуя Г. Лейбницу (G. Leibniz, 1694)] называют К., хотя числовых значений они не имели. Но широта и долгота в «Географии» Птолемея (2 в. н. э.) были уже числовыми К. В 14 в. Н. Орем (N. Oresme) пользовался К. на плоскости для построения графиков, называя долготой и широтой то, что теперь называется абсциссой и ординатой.

Попытки обойтись без введения К. извне, сохранить, так сказать, «чистоту» теории, себя не оправдали [напр., синтетические конструкции *проективных координат*, культивировавшиеся К. Штаудтом (Ch. Staudt, 1847), оказалось возможным заменить простыми алгебраич. эквивалентами, что привело к понятию проективной геометрии над телом]. Впрочем не пропал вкус и, так сказать, к в н у т р е н н е м у с п о с о б у введения К. (в отличие от в н е ш н е г о с п о с о б а привнесения К. извне), основанному на оценке положения координируемого объекта относительно нек-рых, выбранных a priori стандартных подмножеств, напр. линий, поверхностей и т. п. (называемых в этом случае к о о р д и н а т н ы м и л и н и я м и, п о в е р х н о с т я м и и т. п.). Это в особенности относится к множествам, в определении к-рых участвуют числа (напр., метрич. и векторные пространства), т. е. к весьма обширному и практически важному классу математич. объектов, чем и объясняется их широкое распространение.

Среди систем К. точек (т о ч е ч н ы х К.) выделяют т. н. л и н е й н ы е к о о р д и н а т ы, в к-рых координатными линиями служат прямые. Таковы, напр., *декартова прямоугольная система координат*, треугольные К. (см. *Тетраэдральные координаты*), *барицентрические координаты*, *проективные координаты*. Системы К., для к-рых не все координатные линии прямые, наз. криволинейными координатами. Такие К. используются как на плоскости (напр., *полярные координаты*, *эллиптические координаты*, *параболические*

координаты, *биполярные координаты*), так и на поверхностях (*геодезические координаты*, *изотермические координаты* и др.). Многие специальные виды систем криволинейных К. вводятся при использовании сетей линий, отвечающих тем или иным условиям. Из них наиболее важный класс — *ортогональные системы* координат, в к-рых координатные линии пересекаются под прямым углом.

Различные виды К. на плоскости (или на поверхности) обобщаются на случай пространства. Напр., понятие полярных К. на плоскости приводит к понятию полярных К. в пространстве (*сферических координат* и *цилиндрических координат*); понятие биполярных К. на плоскости — к понятиям *тороидальных координат*, *бицилиндрических координат* и биполярных К. в пространстве; понятие эллиптических К. на плоскости — к понятию *эллипсоидальных координат* в пространстве.

Иногда потребности удобства и наглядности приводят к отступлению от равенства количества чисел, являющихся К. точек множества и его размерностью. По тем же причинам допускается нарушение в отдельных точках взаимной однозначности координатного отображения (таковы, напр., полярные К.).

В тех случаях, когда изучаемое многообразие M негомеоморфно области евклидова пространства, бывает удобно использовать и з б ы т о ч н ы е К., в к-рых число К. больше размерности M. Такие К., как правило,— *однородные координаты*.

Часто говорят о К. прямых, плоскостей и других геометрич. объектов, понимая под этим К. в каком-либо пространстве, точками к-рого являются прямые, плоскости и т. д. (см., напр., *Грассмана многообразие*). Равноправие точек и прямых в геометрии двух измерений и равноправие точек и плоскостей в геометрии трех измерений согласно *двойственности принципу* позволяют ввести К., с помощью к-рых могут быть определены положения прямых и плоскостей. Таковы, напр., *тангенциальные координаты*.

Метод К. стал полезным не только на пути алгоритмизации рассуждений (сведению их к вычислениям), но и для обнаружения новых фактов и связей (так, напр., непротиворечивость евклидовой геометрии посредством К. сводится к непротиворечивости арифметики). И хотя ряд разделов математики, напр. *римановa геометрия*, может быть изложен в «бескоординатном» виде, конкретные результаты чаще добываются методом К., а точнее, выбором удобных для данной задачи координатных систем (напр., выразительность ряда задач механики достигается именно в специальных К., в к-рых «разделяются» переменные).

М. И. Войцеховский, А. Б. Иванов.

КОПРЕДСТАВЛЕНИЕ г р у п п ы — задание группы ее образующими и соотношениями между ними.

КОПРИСОЕДИНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление группы Ли G, контрагредиентное к *присоединенному представлению* Ad этой группы. К. п. действует в пространстве $\mathfrak{g}^*$, дуальном к пространству алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

Если G — вещественная матричная группа, т. е. подгруппа в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, то $\mathfrak{g}$ — подпространство в пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ вещественных матриц порядка n.

Пусть $\mathfrak{g}^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ относительно билинейной формы

$$(X, Y) \longmapsto \operatorname{tr} XY \text{ в } \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}),$$

V — какое-нибудь подпространство в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$, дополнительное к $\mathfrak{g}^{\perp}$, P — оператор проектирования на V параллельно $\mathfrak{g}^{\perp}$. Тогда $\mathfrak{g}^*$ отождествляется с V и К. п. задается формулой

$$K(g)\, X = P(gXg^{-1}),\ g \in G,\ X \in V.$$

Соответствующее представление алгебры $\mathfrak{g}$ также наз. К. п. В рассматриваемом случае оно имеет вид

$$K(X)\, Y = P(XY - YX),\ X \in \mathfrak{g},\ Y \in V.$$

К. п. играет основную роль в *орбит методе* (см. [2]). Каждая G-орбита Ω в К. п. несет на себе каноническую G-инвариантную гамильтонову структуру (см. *Гамильтонова система*). Другими словами, на каждой орбите Ω имеется однозначно определенная невырожденная G-инвариантная замкнутая дифференциальная 2-форма B_{Ω} (откуда все G-орбиты в К. п. четномерны). Явное выражение для B_{Ω} можно получить следующим образом. Пусть $F \in \mathfrak{g}^*$, Ω — орбита, проходящая через точку F, а ξ и η — касательные векторы к Ω в точке F. Найдутся такие X и Y из $\mathfrak{g}$, что

$$\xi = K(X)F,\ \eta = K(Y)F.$$

Тогда

$$B_{\Omega}(\xi, \eta) = \langle F, [X, Y] \rangle.$$

Для каждого $X \in \mathfrak{g}$ векторное поле $\xi_X(F) = K(X)F$ является гамильтоновым относительно B_{Ω}; в качестве его производящей функции (генератора) можно взять элемент X, рассматриваемый как линейная функция на $\mathfrak{g}^*$.

Стабилизатор точки, орбита которой имеет максимальную размерность в К. п., коммутативен [1]. Возникающие на каждой орбите скобки Пуассона порождают единую скобку Березина, задающую структуру *Ли локальной алгебры* в пространстве гладких функций на $\mathfrak{g}^*$ (см. [3]). Координатное выражение этой скобки имеет вид

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i, j, k} c_{ij}^k x_k \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j},$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Лит.: [1] Bernat P. [и др.], Représentations des groupes de Lie résolubles, P., 1972; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [3] его же, «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 57—76.

А. А. Кириллов.

КОПРОИЗВЕДЕНИЕ семейства объектов категории — понятие, описывающее на языке морфизмов конструкции прямой суммы модулей или разъединенного объединения (букета) множеств. Пусть A_i, $i \in I$,— индексированное семейство объектов категории $\mathfrak{M}$. Объект S, вместе с морфизмами $\sigma_i : A_i \to S$, наз. копроизведением семейства A_i, $i \in I$, если для всякого семейства морфизмов $\alpha_i : A_i \to X$, $i \in I$, существует такой единственный морфизм $\alpha : S \to X$, что $\sigma_i \alpha = \alpha_i$, $i \in I$. Морфизмы σ_i наз. вложениями копроизведения; К. обозначается $\coprod_{i \in I}^* A_i(\sigma_i)$ или $\coprod_{i \in I}^* A_i$, или $S = A_1 * \ldots * A_n$ в случае $I = \{1, \ldots, n\}$. Морфизм α, входящий в определение К., иногда обозначается $\coprod_{i \in I}^* \alpha_i$ или $(*)_{i \in I} \alpha_i$. К. семейства объектов определено однозначно с точностью до изоморфизма, оно ассоциативно и коммутативно. Понятие К. двойственно понятию *произведения*.

К. пустого семейства объектов является левым нулем (инициальным объектом) категории. В абелевой категории К. часто наз. прямой суммой семей-

ства объектов A_i, $i \in I$, и обозначается $\sum_{i \in I} A_i$ или $A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_n$ в случае $I = \{1, \ldots, n\}$. В большинстве категорий структуризованных множеств К. семейства объектов совпадает со свободным произведением этого семейства и, как правило, требует специального описания. Так, в категории групп К.— это свободное произведение групп, в категориях модулей — прямая сумма модулей и т. д.

В категории с нулевыми морфизмами для К. $S = \Pi^*_{i \in I} A_i(\sigma_i)$ существуют такие однозначно определенные морфизмы $\pi_i : S \to A_i$, что $\sigma_i \pi_i = 1_A$, $\sigma_i \pi_j = 0$. В абелевой категории К. и произведение конечного семейства объектов совпадают.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974. *М. Ш. Цаленко.*

КО-*Н*-ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, двойственное *Н-пространству*.

КОПСЕВДОГАЛИЛЕЕВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, двойственное *псевдогалилееву пространству*. Оно является частным случаем *полугиперболического пространства*.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

КОПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, получаемое из псевдоевклидова путем применения принципа двойственности проективного пространства такой же размерности; обозначение ${}^lR^*_n$. К. п. ${}^lR^*_n$ является пространством с проективной метрикой, к-рая вводится в соответствии с общим определением проективных метрик путем выделения абсолюта в соответствующем по размерности проективном пространстве. Проективная метрика псевдоевклидова пространства ${}^lR_n$ определяется абсолютом, состоящим из совокупности $(n-1)$-плоскости и вещественной $(n-2)$-квадрики в этой плоскости, поэтому проективная метрика соответствующего двойственного К. п. ${}^lR^*_n$ определяется двойственным к указанному абсолютом: вещественным (абсолютным) конусом 2-го порядка с точечной вершиной, принимаемой в качестве абсолютной точки. Абсолютный конус делит К. п. ${}^lR^*_n$ на две области, в к-рых скалярный квадрат векторов имеет постоянный знак. Эти области изображают многообразия соответствующих плоскостей псевдоевклидова пространства, двойственного для данного ${}^lR^*_n$. Изотропные плоскости псевдоевклидова пространства изображают точки абсолюта ${}^lR^*_n$. В зависимости от расположения относительно абсолютного конуса и абсолютной точки (вершины) различают четыре типа прямых: эллиптические прямые, пересекающие абсолютный конус в двух мнимо сопряженных точках; гиперболические прямые, пересекающие абсолютный конус в двух вещественных точках; параболические прямые, проходящие через абсолютную точку; изотропные прямые — параболические, к-рые касаются абсолютного конуса.

В соответствующем по принципу двойственности псевдоевклидовом пространстве прямые первых двух типов изображаются пучками плоскостей, пересекающихся соответственно по евклидовым и псевдоевклидовым $(n-2)$-плоскостям, параболические прямые — пучками параллельных плоскостей, а изотропные — пучками плоскостей, пересекающихся по изотропным $(n-2)$-плоскостям.

Расстояние между точками К. п. ${}^lR^*_n$ определяется с учетом двойственного характера этого пространства по отношению к соответствующему псевдоевклидову пространству ${}^lR_n$. Пусть точкам X и $Y \subset {}^lR^*_n$ соответствуют плоскости в ${}^lR_n$ с нормальными уравнениями

$$(u, x) + u_0 = 0; \ (v, y) + v_0 = 0$$

так, что

$$x^0 = \rho u_0,\ x^i = \rho u_i;\ y^0 = \rho v_0,\ y^i = \rho v_i;$$

причем

$$(uEu) = \pm 1,\ (vEv) = \pm 1,$$

где E — линейный оператор, определяющий скалярное произведение в ${}^lR_n$. Расстояние δ между точками $X(x^0, x)$ и $Y(y^0, y)$ определяется соотношением

$$\cos^2 \frac{\delta}{\rho} = \frac{(xEy)^2}{(xEx)(yEy)},$$

где ρ — мнимое или действительное число, называемое радиусом кривизны пространства ${}^lR_n^*$.

В случае, когда плоскости в пространстве ${}^lR_n$, отвечающие точкам X и Y, параллельны, за расстояние между точками принимается расстояние d между этими параллельными плоскостями:

$$d = |y^0 - x^0|, \quad \text{когда } (xEx) > 0,$$

$$d = i\,|y^0 - x^0|, \quad \text{когда } (xEx) < 0.$$

Геометрия на различных типах прямых пространства ${}^lR_n^*$ определяется типом проективной метрики на этих прямых. Так, гиперболич. прямая несет на себе проективную метрику гиперболич. пространства и т. д.

За величину угла между двумя плоскостями в К. п. ${}^lR_n^*$ принимается нормированное расстояние между соответствующими им по принципу двойственности точками псевдоевклидова пространства ${}^lR_n$. Угол между двумя плоскостями равен нормированному расстоянию между точками этих плоскостей, являющихся полюсами $(n-2)$-плоскости их пересечения относительно квадрик, высекаемых абсолютным конусом на данных плоскостях, причем во всех случаях определяется тот угол, к-рый не содержит абсолютной точки. В частности, в пространстве ${}^1R_2^*$ угол между двумя прямыми равен нормированному расстоянию между такими двумя точками данных прямых, к-рые вместе с точкой пересечения этих прямых гармонически делят точки пересечения с абсолютными прямыми.

Движениями К. п. ${}^lR_n^*$ наз. такие его преобразования, к-рые индуцируются движениями двойственного ему псевдоевклидова пространства. Движения К. п. ${}^lR_n^*$ описываются (как и движения псевдоевклидова пространства ${}^lR_n$) псевдоортогональными операторами индекса l.

Вследствие двойственного характера свойств плоскостей ${}^1R_2^*$ и ${}^1R_2$ геометрия плоскости ${}^1R_2^*$ может быть получена из геометрии плоскости ${}^1R_2$, в частности геометрия треугольника в плоскости ${}^1R_2^*$. Основные соотношения между длинами сторон и величинами углов выражаются формулами, аналогичными для треугольников в коевклидовой плоскости (см. *Коевклидово пространство*), но с применением гиперболич. функций вместо соответствующих тригонометрических.

Пусть в треугольнике ABC внутренний угол B содержит абсолютную точку. Между длинами сторон a, b, c и величинами углов $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ имеют место соотношения

$$b = a + c,$$

$$\frac{\hat{A}}{\operatorname{sh}\frac{a}{\rho}} = \frac{\hat{B}}{\operatorname{sh}\frac{b}{\rho}} = \frac{\hat{C}}{\operatorname{sh}\frac{c}{\rho}},$$

$$\hat{A}^2 = \hat{B}^2 + \hat{C}^2 - 2\hat{B}\hat{C}\operatorname{ch}\frac{a}{\rho}.$$

На плоскости ${}^1R_2^*$ метрика расстояний является гиперболической проективной, а метрика углов — пара-

болической. В 3-пространстве ${}^1R_3^*$ проективная метрика на плоскости является гиперболической, на прямой — эллиптической, а метрика в пучках плоскостей — параболической (псевдоевклидовой) метрикой.

К. п.— предельный случай гиперболических пространств.

Лит.: [1] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [2] Яглом И. М., Розенфельд Б. А., Ясинская Е. У., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 5, с. 51—113.

Л. А. Сидоров.

КОРАЗМЕРНОСТЬ — 1) К. (или фактор-размерность) подпространства L в векторном пространстве V — размерность факторпространства V/L; она обозначается $\operatorname{codim}_V L$ или просто $\operatorname{codim} L$ и совпадает с размерностью прямого дополнения к L в V. Справедливо равенство

$$\dim L+\operatorname{codim} L=\dim V.$$

Если M и N — два подпространства в V, имеющие конечные К., то $M\cap N$ и $M+N$ также имеют конечные К., причем

$$\operatorname{codim}(M+N)+\operatorname{codim}(M\cap N)=\operatorname{codim} M+\operatorname{codim} N.$$

2) К. подмногообразия N в дифференцируемом многообразии M — К. касательного подпространства $T_x(N)$ в касательном пространстве $T_x(M)$ в точке $x\in N$. Если M и N конечномерны, то

$$\operatorname{codim} N=\dim M-\dim N.$$

Если M и N — дифференцируемые многообразия, L — подмногообразие в N, $f: M\to N$ — дифференцируемое отображение, трансверсальное подмногообразию L, то

$$\operatorname{codim} f^{-1}(L)=\operatorname{codim} L.$$

3) К. алгебраического подмногообразия (или аналитического пространства) Y в алгебраическом многообразии (аналитическом пространстве) X — разность

$$\operatorname{codim} Y=\dim X-\dim Y.$$

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] его же, Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, пер. с франц., М., 1975; [3] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977.

В. Е. Говоров, А. Ф. Харшиладзе.

КОРАССЛОЕНИЕ — тройка (X, i, Y), где X, Y — топологич. пространства, $i: X\to Y$ — вложение, обладающее следующим свойством существования продолжающей гомотопии для полиэдров: для любых полиэдра K, отображения $f: Y\to K$ и гомотопии

$$F: X\times[0,\ 1]\to K$$

с

$$F|\,(X\times\{0\})=f\circ i$$

существует гомотопия

$$G: Y\times[0,\ 1]\to K$$

с

$$G\circ(i\times id)=F,$$

где

$$(i\times id): X\times[0,\ 1]\to Y\times[0,\ 1].$$

Если это свойство выполнено для любых топологич. пространств, то К. (X, i, Y) наз. парой Борсука (впрочем, термин «К.» употребляется и в смысле «пара Борсука»). Пространство $Y/i(X)$ наз. кослоем К. (X, i, Y). Цилиндрическая конструкция превращает любое непрерывное отображение в К. и позволяет построить последовательность

$$X\to Y\to Y/i(X)\to C_1\to C_2\to\dots$$

топологич. пространств, в к-рой $C_1 \sim SX$ (SX — *надстройка* над X) — кослой отображения $Y \to Y/i(X)$, превращенного в К., $C_2 \sim SY$ — кослой отображения $Y/i(X) \to C_1$ и т. д. Если (X, i, Y) — К. пунктированных пространств, то для любого пунктированного полиэдра K индуцированная последовательность

$$[X, K] \leftarrow [Y, K] \leftarrow [Y/i(X), K] \leftarrow [C_1, K] \leftarrow \dots$$

есть точная последовательность пунктированных множеств; здесь все члены, начиная с четвертого,— группы, а начиная с седьмого,— абелевы группы.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

А. Ф. Харшиладзе.

КОРЕНЬ — 1) К. степени n из числа a — число $x = \sqrt[n]{a}$, n-я степень x^n к-рого равна a.

2) К. алгебраического уравнения над полем K

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

— элемент $c \in K$, к-рый после подстановки его вместо x обращает уравнение в тождество. К. этого уравнения наз. также и К. многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Если c является К. многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится без остатка на $x-c$ (см. *Безу теорема*). Всякий многочлен $f(x)$ с действительными или комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один, вообще говоря, комплексный К. Многочлен $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x) = a_0(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — К. многочлена $f(x)$. Если среди К. $c_1, c_2, \dots, c_n$ многочлена $f(x)$ встречаются равные, то общее их значение наз. кратным корнем.

3) К. из единицы — элемент поля k, удовлетворяющий уравнению $x^m = 1$ при нек-ром натуральном m. К. из единицы образуют подгруппу в мультипликативной группе поля k. Обратно, любая конечная подгруппа мультипликативной группы поля k состоит из К. из единицы и является циклической. В частности, такова подгруппа U_n всех К. из единицы заданной степени n, содержащихся в алгебраич. замыкании $\bar{k}$ поля k, т. е. всех $\zeta \in \bar{k}$, удовлетворяющих уравнению $\zeta^n = 1$. Если n взаимно просто с характеристикой поля k (или эта характеристика равна 0), то порядок группы U_n равен n и образующие этой группы наз. первообразными корнями степени n из единицы. Число таких корней в группе U_n равно значению функции Эйлера $\varphi(n)$, т. е. числу вычетов по модулю n, взаимно простых с n. В поле характеристики $p > 0$ не существует К. из единицы степени p, отличных от 1.

В случае, когда поле k конечно порождено над своим простым подполем, число К. из единицы, содержащихся в k, конечно.

В поле комплексных чисел число z является К. из единицы степени n тогда и только тогда, когда $|z| = 1$ и $\arg z = 2\pi m/n$ с целыми m и n, т. е. когда

$$z = e^{2\pi im/n} = \cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n};$$

при этом первообразные К. выделяются условием $(m, n) = 1$. На комплексной плоскости К. из единицы степени n лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, что объясняет связь К. из единицы с задачей о делении круга.

К. из единицы появляются в теории чисел в качестве значений ряда важных теоретико-числовых функций (абелевы числовые характеры, символ Лежандра, функция Мёбиуса, символ норменного вычета и т. д.). В теории полей и алгебраич. теории чисел важную роль играют поля, получаемые присоединением К. из единицы

к нек-рому основному полю (см. *Круговое поле*, *Круговое расширение*, *Куммера расширение*).

Лит.: [1] Ван-дер-Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

Л. В. Кузьмин.

КОРНА НЕРАВЕНСТВО — неравенство для вектор-функций $v_i(x^j)$, $i, j=1, \ldots, n$, и их производных, определенных в нек-рой ограниченной области A пространства $\mathbb{R}^n$:

$$\int_A \sum_{i,\,j=1}^{n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right)^2 dx + \\ + \int_A \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \geqslant c \| v \|_1^2, \qquad (1)$$

где

$$\| v \|_1 = \int_A \left\{ \sum_{i,\,j=1}^{n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right)^2 + \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \right\} dx. \qquad (2)$$

К. н. справедливо и для вектор-функций из пространства $H_1(A)$, полученного пополнением пространства $C^1(A)$ по норме (2). Иногда неравенство (1) наз. в т о р ы м К. н., а п е р в ы м К. н. считается неравенство (1) без второго слагаемого в левой части.

К. н. предложено А. Корном (A. Korn, 1908) для получения априорной оценки решения неоднородных уравнений теории упругости.

Лит.: [1] Фикера Г., Теоремы существования в теории упругости, пер. с англ., М., 1974.

М. И. Войцеховский.

КОРНЕВАЯ СИСТЕМА — конечное множество R векторов векторного пространства V над полем $\mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами: 1) R не содержит нулевого вектора и порождает V; 2) для каждого $\alpha \in R$ существует такой элемент α^* сопряженного к V пространства V^*, что $\alpha^*(\alpha)=2$ и что эндоморфизм $s_\alpha : x \longmapsto x - \alpha^*(x)\alpha$ пространства V переводит R в себя; 3) $n(\alpha, \beta)=\beta^*(\alpha) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha, \beta \in R$.

Впервые наборы векторов, обладающие перечисленными свойствами, возникли в теории полупростых комплексных алгебр Ли как системы весов присоединенного представления максимального тора такой алгебры (см. *Вес* представления, *Ли полупростая алгебра*). Позже было обнаружено, что такие системы векторов естественно появляются и во многих других разделах математики, напр. в алгебраической геометрии [4], [7], в теории особенностей [7], в теории целочисленных квадратичных форм [5]. С К. с. оказались также связанными нек-рые вопросы теории чисел [6].

Общие свойства К. с. Эндоморфизм s_α является *отражением* относительно α и определен свойствами 1) и 2) однозначно. Кег α^* является множеством неподвижных точек эндоморфизма s_α и $s_\alpha(\alpha)=-\alpha$. Элементы из R наз. к о р н я м и К. с. R, $\dim V$ — р а н г о м. К. с. R наз. п р и в е д е н н о й, если для любого $\alpha \in R$ вектор $-\alpha$ является единственным корнем, коллинеарным с α. Множество $R^*=\{\alpha^* | \alpha \in R\}$ есть К. с. в V^*, для к-рой $\alpha^{**}=\alpha$ при всех $\alpha \in R$; она наз. д у а л ь н о й (или о б р а т н о й) К. с. к R. Конечная группа $A(R)$, образованная всеми автоморфизмами пространства V, переводящими R в себя, наз. г р у п п о й а в т о м о р ф и з м о в К. с. R. Подгруппа $W(R)$ в $A(R)$, порожденная отражениями s_α, $\alpha \in R$, наз. г р у п п о й В е й л я К. с. R. Если V — прямая сумма своих подпространств V_i, $i=1, \ldots, l$, и R_i — К. с. в V_i, то $R=\bigcup_{i=1}^{l} R_i$ — К. с. в V, она наз. п р я м о й с у м м о й К. с. R_i. Непустая К. с. R наз. н е п р и в о д и м о й, если R не является прямой суммой двух непустых К. с. Всякая К. с. является прямой суммой некоторого набора неприводимых К. с. и это разложение определено однозначно с точностью до порядка слагаемых.

Связные компоненты множества $V - \bigcup_{\alpha \in R} \mathrm{Ker}\, \alpha^*$ являются открытыми симплициальными конусами и наз. камерами К. с. R в V (см. *Камера*). Группа Вейля действует просто транзитивно на множестве всех камер. Замыкание $\overline{C}$ камеры C является фундаментальной областью дискретной группы $W(R)$. Пусть $L_1, \ldots, L_r$ — стенки камеры C. Для каждой стенки L_i существует единственный корень α_i такой, что $L_i = \mathrm{Ker}\, \alpha_i^*$ и α_i лежит по ту же сторону от L_i, что и C. Семейство корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ образует базис в V, который наз. базисом К. с., определенным камерой C. Говорят также, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — набор простых корней, определенный камерой C. Группа $W(R)$ порождена отражениями s_{α_i}, $i = 1, \ldots, r$, причем $(s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{m_{ij}} = 1$, где m_{ij} — порядок $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j}$, — система определяющих соотношений для $W(R)$, так что $W(R)$ — *Кокстера группа*. Группа $A(R)$ есть полупрямое произведение подгруппы всех элементов из $A(R)$, оставляющих множество $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ инвариантным, и $W(R)$.

Выбор камеры C определяет отношение порядка в V (согласованное со структурой векторного пространства), при к-ром положительными считаются линейные комбинации простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ с неотрицательными коэффициентами. Всякий корень оказывается либо положительным, либо отрицательным, а все его координаты в базисе $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — целочисленными. Подгруппа $Q(R)$ в V, порожденная К. с. R, является решеткой (т. е. дискретной подгруппой ранга r), инвариантной относительно группы Вейля $W(R)$. Ее элементы наз. радикальными весами К. с. R. Группы Вейля К. с. могут быть охарактеризованы среди всех дискретных линейных групп, порожденных отражениями, как такие, к-рые не имеют ненулевых неподвижных векторов и обладают инвариантной решеткой. Если $Q(R)$ рассматривать как группу параллельных переносов пространства V, то полупрямое произведение $W_a(R)$ группы $W(R)$ на $Q(R)$ наз. аффинной группой Вейля К. с. R. $W_a(R)$ является дискретной группой преобразований пространства V, порожденной отражениями в гиперплоскостях

$$L_{\alpha, k} = \{v \in V \mid \alpha^*(v) = k\},$$

где $\alpha \in R$, $k \in \mathbb{Z}$. Факторпространство пространства V по $W_a(R)$ компактно; если R неприводима, то фундаментальной областью для $W_a(R)$ будет симплекс.

На V может быть выбрана (неоднозначно) билинейная симметрическая положительно определенная форма $(,)$, инвариантная относительно $W(R)$. Эта форма снабжает V структурой евклидова пространства, в к-ром элементы из $W(R)$ являются ортогональными преобразованиями, а отражение s_α, $\alpha \in R$, имеет для всех $x \in V$ вид

$$s_\alpha(x) = x - 2(x, \alpha)\, \alpha/(\alpha, \alpha).$$

С помощью формы $(\ ,\ )$ пространства V и V^* могут быть отождествлены, и тогда $\alpha^* = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$, а условие 3) определения К. с. означает, что $n(\alpha, \beta) = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta) \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha, \beta \in R$.

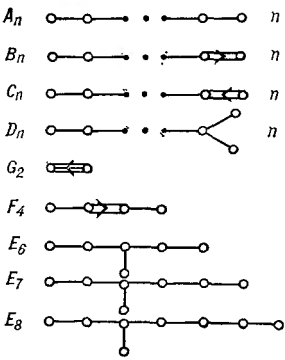
Введение формы $(,)$ позволяет говорить о метрических соотношениях между корнями, в частности об угле между корнями и о длине корня. Величина угла оказывается не зависящей от выбора формы $(,)$, а если К. с. R неприводима, то это верно и для отношения длин двух корней.

Классификация К. с. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — некоторый фиксированный базис приведенной К. с. R и $n_{ij} = n(\alpha_i, \alpha_j)$. Матрица $\|n_{ij}\|$, $1 \leqslant i, j \leqslant r$, наз. матрицей Картана К. с. R; в ней $n_{ii} = 2$, а n_{ij} при $i \neq j$ могут быть равны 0, -1, -2 или -3. С точностью до перестановки индексов эта матрица не зависит от выбора бази-

са. Две К. с. с одинаковыми матрицами Картана изоморфны.

С К. с. обычно связывают граф Кокстера К. с., вершинами к-рого служат элементы базиса $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, причем вершины α_i и α_j соединены одним, двумя, тремя ребрами или не соединены вовсе в случаях, когда произведение $n_{ij}n_{ji}$ равно соответственно 1, 2, 3 или 0. К. с. неприводима тогда и только тогда, когда ее граф Кокстера связен. Граф Кокстера определяет лишь углы между парами корней базиса; по нему не восстанавливается матрица Картана (но восстанавливается группа Вейля): существуют дуальные неизоморфные К. с. с одинаковыми графами Кокстера. Однако матрица Картана (а с ней и К. с.) полностью определяется ориентированным графом Кокстера, наз. также схемой простых корней К. с. R. Ориентация вводится по правилу: если простые корни α_i и α_j не ортогональны и имеют разную длину, то на двух или трех ребрах, соединяющих i-ю и j-ю вершины, ставится знак неравенства $>$, ориентированный в сторону вершины, отвечающей корню меньшей длины. В нек-рых случаях над каждой вершиной графа Кокстера надписывают число, пропорциональное квадрату длины соответствующего корня (с общим для всех корней коэффициентом пропорциональности); по такому взвешенному графу также однозначно восстанавливается К. с.

Полный список попарно неизоморфных неприводимых приведенных К. с., заданных своими схемами простых корней, следующий:

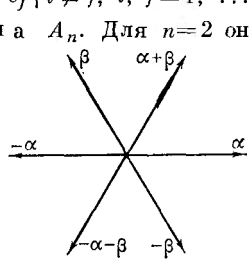


Конструкция неприводимых К. с. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, $(,)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, для к-рого $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, и Γ_n — решетка в $\mathbb{R}^n$, порожденная векторами $e_1, \ldots, e_n$.

1) Пусть V — гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, ортогональная вектору $e_1 + \ldots + e_{n+1}$. Тогда

$$R = \{\alpha \in V \cap \Gamma_{n+1} \mid (\alpha, \alpha) = 2\} =$$
$$= \{e_i - e_j \mid i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n+1\}$$

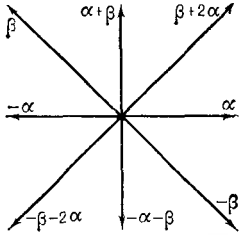
есть К. с. типа A_n. Для $n=2$ она имеет вид



2) Множество векторов

$$\{\alpha \in \Gamma_n \mid (\alpha, \alpha) = 1 \text{ или } 2\} =$$
$$= \{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j \mid i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n\}$$

в $\mathbb{R}^n$ есть К. с. типа B_n. Для $n=2$ она имеет вид



3) К. с. типа C_n дуальна системе B_n и состоит из векторов

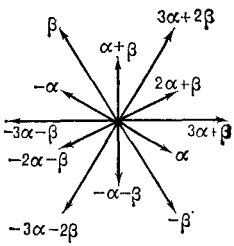
$$\{\pm e_i \pm e_j,\ \pm 2e_i \mid i \neq j;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n\}.$$

4) Множество векторов

$$\{\alpha \in \Gamma_n \mid (\alpha,\ \alpha)=2\} = \{\pm e_j \pm e_j \mid i \neq j;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$$

в $\mathbb{R}^n$ есть К. с. типа D_n.

5) К. с. типа G_2 имеет вид



и может быть описана как множество целых алгебраич. чисел кругового поля, порожденного кубич. корнем из единицы с нормой 1 или 3.

6) Множество векторов

$$\left\{\pm e_i,\ \pm e_i \pm e_j,\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \mid i \neq j;\right.$$
$$\left. i,\ j=1,\ \ldots,\ 4\right\}$$

в $\mathbb{R}^4$ есть К. с. типа F_4.

7) Множество векторов

$$\left\{\pm e_i \pm e_j,\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{m(i)}e_i\right\},$$

где

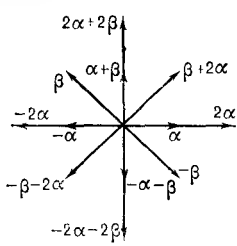
$$\left\{\sum m(i) = 0 \bmod 2 \mid i \neq j;\ i,\ j=1,\ \ldots,\ 8\right\}$$

в $\mathbb{R}^8$ есть К. с. типа E_8.

8) К. с. типа E_6 может быть получена как пересечение К. с. типа E_8 с подпространством в $\mathbb{R}^8$, натянутым на $e_1,\ \ldots,\ e_6$.

9) К. с. типа E_7 может быть получена как пересечение К. с. типа E_8 с подпространством в $\mathbb{R}^8$, натянутым на $e_1,\ \ldots,\ e_7$.

10) В каждой размерности $n \geqslant 1$ существует ровно одна (с точностью до изоморфизма) неприведенная неприводимая К. с. BC_n. Она есть объединение указанных выше К. с. B_n и C_n. Для $n=2$ такая система имеет вид



Об аффинных К. с. см. [6].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли..., пер. с франц., М., 1972; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [4] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [5] Milnor J., Husemoller D., Symmetric bilinear forms, B.—Hdlb.— N. Y., 1973; [6] Макдональд И. Г., «Математика», 1972, т. 16, № 4, с. 3—49; [7] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 3—65. *В. Л. Попов.*

КОРНЕВОЙ ВЕКТОР линейного преобразования A векторного пространства V над полем k — вектор $v \in V$, лежащий в ядре линейного преобразования $(A-\lambda E)^n$, где $\lambda \in k$, n — целое положительное число, зависящее от A и v. Число λ будет непременно собственным значением преобразования A. Если при этом $(A-\lambda E)^{n-1}v \neq 0$, то говорят, что v — К. в. высоты n, принадлежащей λ.

Понятие К. в. обобщает понятие собственного вектора преобразования A: собственные векторы — это в точности К. в. высоты 1. Множество V_λ К. в., принадлежащих фиксированному собственному значению λ, является линейным подпространством в V, инвариантным относительно A. Оно наз. корневым подпространством, принадлежащим собственному значению λ. К. в., принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы; в частности, $V_\lambda \bigcap V_\mu = 0$, если $\lambda \neq \mu$.

Пусть V конечномерно. Если все корни характеристич. многочлена преобразования A лежат в k (напр., когда k алгебраически замкнуто), то V раскладывается в прямую сумму различных корневых подпространств:

$$V = V_\alpha \oplus V_\beta \oplus \ldots \oplus V_\delta. \qquad (*)$$

Это разложение является частным случаем весового разложения векторного пространства V относительно расщепляемой нильпотентной алгебры Ли L линейных преобразований: алгеброй L в этом случае служит одномерная подалгебра, порожденная преобразованием A в алгебре Ли всех линейных преобразований пространства V (см. *Вес* представления).

Если в нек-ром базисе матрица преобразования A является *жордановой матрицей*, то компоненты разложения (*) могут быть описаны следующим образом: корневое подпространство V_λ есть линейная оболочка множества тех векторов базиса, к-рые отвечают жордановым клеткам с собственным числом λ.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Линейная алгебра, М., 1974; [2] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970. *В. Л. Попов.*

КОРНИША — ФИШЕРА РАЗЛОЖЕНИЕ — асимптотическое разложение разности между соответствующими квантилями нормального распределения и какого-либо близкого к нему распределения по степеням малого параметра; изучено Э. Корнишем и Р. Фишером [1]. Если $F(x, t)$ — функция распределения, зависящая от параметра t, $\Phi(x)$ — функция нормального распределения с параметрами (0, 1), причем $F(x, t) \to \Phi(x)$ при $t \to 0$, то при определенных условиях на $F(x, t)$ К.— Ф. р. функции $x = F^{-1}[\Phi(z), t]$ (F^{-1} — функция, обратная к F) имеет вид

$$x = z + \sum_{i=1}^{m-1} S_i(z)\, t^i + O(t^m), \qquad (1)$$

где $S_i(z)$ — некоторые многочлены от z. Аналогично определяется К.— Ф. р. функции $z = \Phi^{-1}[F(x, t)]$ (Φ^{-1} — функция, обратная к Φ) по степеням x:

$$z = x + \sum_{i=1}^{m-1} Q_i(x)\, t^i + O(t^m), \qquad (2)$$

где $Q_i(x)$ — некоторые многочлены от x. Формула (2) получается при разложении функции Φ^{-1} в ряд Тейлора в точке $\Phi(x)$ и использовании Эджворта разложения. Разложение (1) является обращением формулы (2).

Если X — случайная величина с функцией распределения $F(x,\ t)$, то величина $Z=Z(X)=\Phi^{-1}[F(X,\ t)]$ имеет нормальное распределение с параметрами (0, 1) и, как следует из (2), функция распределения величины

$$\tilde{Z}=X+\sum_{i=1}^{m-1} Q_i(X)\,t_i$$

лучше аппроксимируется при $t\to 0$ функцией $\Phi(x)$, чем функция $F(x,\ t)$. Если X имеет нулевое математич. ожидание и единичную дисперсию, то первые члены разложения (1) имеют следующий вид

$$x=z+[\gamma_1 h_1(z)]+[\gamma_2 h_2(z)+\gamma_1^2 h_3(z)]+\ldots,$$

где $\gamma_1=\varkappa_3/\varkappa_2^{3/2}$, $\gamma_2=\varkappa_4/\varkappa_2^2$, $\varkappa_r$ есть r-й семиинвариант X, $h_1(z)=\frac{1}{6}H_2(z)$, $h_2(z)=-\frac{1}{36}[2H_3(z)+H_1(z)]$, $H_r(z)$ — многочлены Эрмита, определяемые соотношением

$$\varphi(z)\,H_r(z)=(-1)^r\frac{d^r\varphi(z)}{dz^r}\quad(\varphi(z)=\Phi'(z)).$$

О разложениях для величин с предельными законами из семейства распределений Пирсона см. [3]. См. также *Случайных величин преобразование.*

Лит.: [1] Cornish E. A., Fisher R. A., «Rev. Inst. internat. statist.», 1937, v. 5, p. 307—20; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [3] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, с. 129—55. *В. И. Пагурова.*

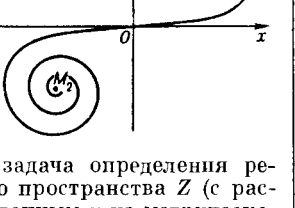
КОРНЮ СПИРАЛЬ, клотоида, клофоида,— плоская трансцендентная кривая (см. рис.), натуральное уравнение к-рой имеет вид

$$r=\frac{a}{s},$$

где r — радиус кривизны, $a=\text{const}$, s — длина дуги. Параметрические уравнения:

$$x=\int_0^s \cos\frac{s^2}{2a}\,ds,\quad y=\int_0^s \sin\frac{s^2}{2a}\,ds.$$

К. с. касается оси абсцисс в начале координат. Асимптотические точки: $M_1(\sqrt{\pi a}/2,\ \sqrt{\pi a}/2)$ и $M_2(-\sqrt{\pi a}/2,\ -\sqrt{\pi a}/2)$.



К. с. иногда наз. спиралью Эйлера по имени Л. Эйлера (L. Euler), у к-рого она впервые встречается (1744). Начиная с работ А. Корню (A. Cornu, 1874) К. с. широко используется в практике расчета дифракции света.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

КОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА — задача определения решения $z=R(u)$ из метрического пространства Z (с расстоянием $\rho_Z(\cdot,\cdot)$) по исходным данным u из метрического пространства U (с расстоянием $\rho_U(\cdot,\cdot)$), для к-рой выполнены следующие условия: а) для всякого $u\in U$ существует решение $z\in Z$; б) решение определяется однозначно; в) задача устойчива на пространствах $(Z,\ U)$: для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых $u_1,\ u_2\in U$ из неравенства $\rho_U(u_1,\ u_2)\leqslant\delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\rho_Z(z_1,\ z_2)\leqslant\varepsilon$, где $z_1=R(u_1)$, $z_2=R(u_2)$.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из перечисленных условий корректности, наз. *некорректными задачами.*

КОРРЕЛОГРАММА временно́го ряда $x_1,\ \ldots,\ x_T$ — совокупность сериальных (выборочных)

коэффициентов корреляции

$$r_t = \frac{\frac{1}{T-t}\sum_{s=1}^{T-t}(x_s-\overline{x})(x_{s+t}-\overline{x})}{\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}(x_s-\overline{x})^2}, \quad t=1, 2, \ldots,$$

где $\overline{x}$ — выборочное среднее ряда

$$\overline{x}=\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}x_s.$$

Иногда К. наз. график r_t как функции от t. К. является эмпирической мерой статистической связи между членами последовательности $\{x_t\}$. В анализе временных рядов К. используется для статистич. выводов о вероятностной модели, предлагаемой для описания и объяснения наблюдаемой последовательности данных.

Теоретической К. иногда наз. нормированную *корреляционную функцию* (стационарной) случайной последовательности $\{X_t\}$:

$$\rho_t=\frac{\operatorname{cov}(X_s, X_{s+t})}{\mathsf{D}(X_s)}, \quad t=1, 2, \ldots,$$

где

$$\operatorname{cov}(X_s, X_{s+t})=\mathsf{E}(X_s-\mathsf{E}X_s)(X_{s+t}-\mathsf{E}X_{s+t})$$

— ковариация случайных величин X_s, X_{s+t}, а $\mathsf{D}(X_s)$ — дисперсия случайной величины X_s. Если рассматривать $\{x_t\}$ как реализацию случайной последовательности $\{X_t\}$, то выборочная К. $\{r_t\}$ при достаточно общих предположениях дает состоятельные и асимптотически нормальные оценки для теоретической К. $\{\rho_t\}$ (см. [3]).

Хотя описания стационарной случайной последовательности в корреляционных и спектральных терминах с математич. точки зрения эквивалентны, в статистич. анализе временны́х рядов области применений корреляционных и спектральных методов разделяются в зависимости от исходного материала и конечной цели анализа. Если спектральный анализ дает представление о наличии и интенсивностях периодич. компонент временно́го ряда, то корреляционные методы удобнее применять при исследовании статистич. связей между последовательными значениями наблюдаемых данных. В статистич. практике методы, основанные на К., используются обычно в тех случаях, когда есть основания предполагать наличие достаточно простой стохастич. модели (авторегрессия, скользящие средние или смешанная модель авторегрессии и скользящих средних невысоких порядков), порождающей данный временно́й ряд (напр., в эконометрии). В таких моделях теоретическая К. $\{\rho_t\}$ обладает выраженной особенностью (обращение в нуль для всех достаточно больших значений t в модели скользящих средних, экспоненциальное убывание с возможной осцилляцией в моделях авторегрессии), наличие подобной особенности у выборочной К. может служить указанием на ту или иную гипотетическую вероятностную модель. Для проверки согласия и оценки параметров выбранной модели разработаны статистические методы, основанные на распределениях сериальных коэффициентов корреляции.

Лит.: [1] Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Хеннан Э., Многомерные временные ряды, пер. с англ., М., 1974. *А. С. Холево.*

КОРРЕЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТ — числовая характеристика совместного распределения двух случайных величин, выражающая их взаимосвязь. К. к. $\rho=\rho(X_1, X_2)$ для случайных величин X_1 и X_2 с математич. ожиданиями $a_1=\mathsf{E}X_1$ и $a_2=\mathsf{E}X_2$ и ненулевы-

ми дисперсиями $\sigma_1^2 = \mathsf{D}X_1$ и $\sigma_2^2 = \mathsf{D}X_2$ определяется равенством

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathsf{E}(X_1 - a_1)(X_2 - a_2)}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

К. к. для X_1 и X_2 совпадает с *ковариацией* для нормированных величин $(X_1 - a_1)/\sigma_1$ и $(X_2 - a_2)/\sigma_2$. К. к. симметричен относительно X_1 и X_2 и инвариантен относительно изменения начала отсчета и масштаба. При этом $-1 \leqslant \rho \leqslant 1$. Значение К. к. как одной из возможных мер взаимосвязи определяется следующими его свойствами: 1) если величины X_1 и X_2 независимы, то $\rho(X_1, X_2) = 0$ (обратное утверждение в общем случае неверно), о величинах, для к-рых $\rho = 0$, говорят, что они некоррелированы; 2) $|\rho| = 1$ тогда и только тогда, когда величины связаны линейной функциональной зависимостью:

$$X_2 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - a_1) + a_2.$$

Трудность интерпретации ρ как меры взаимозависимости заключается в том, что равенство $\rho = 0$ может иметь место как для независимых, так и для зависимых случайных величин, в общем случае для независимости необходимо и достаточно равенство нулю их *максимального коэффициента корреляции*. Таким образом, К. к. не исчерпывает все виды связи между случайными величинами и является лишь мерой линейной зависимости. При этом степень линейной зависимости характеризуется следующим образом: величина

$$\hat{X}_2 = \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - a_1) + a_2$$

дает линейное представление X_2 по X_1, наилучшее в том смысле, что

$$\mathsf{E}(X_2 - \hat{X}_2)^2 = \min_{c_1,\, c_2} \mathsf{E}(X_2 - c_1 X_1 - c_2)^2,$$

см. также *Регрессия*. Характеристиками корреляции между несколькими случайными величинами служат *частный коэффициент корреляции* и *множественный коэффициент корреляции*. О способах проверки гипотез независимости и исследования корреляции с помощью К. к. см. *Корреляция*.

А. В. Прохоров.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА — матрица коэффициентов корреляции нескольких случайных величин. Если $X_1, \ldots, X_n$ — случайные величины с ненулевыми дисперсиями $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$, то элементы ρ_{ij} при $i \neq j$ равны *корреляции коэффициентам* $\rho(X_i, X_j)$, а при $i = j$ равны 1. Свойства К. м. P определяются свойствами *ковариационной матрицы* Σ в силу соотношения: $\Sigma = BPB$, где B — диагональная матрица с диагональными элементами $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

А. В. Прохоров.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ действительного случайного процесса $\{X(t); t \in T\}$ — функция аргументов $t, s \in T$, определяемая равенством

$$B(t, s) = \mathsf{E}[X(t) - \mathsf{E}X(t)][X(s) - \mathsf{E}X(s)].$$

Для того чтобы К. ф. была определена, следует предположить, что процесс $X(t)$ при всех $t \in T$ имеет конечный второй момент $\mathsf{E}X(t)^2$. Параметр t пробегает здесь некоторое подмножество T действительной прямой и обычно интерпретируется как «время», однако совершенно аналогично определяется К. ф. случайной функции, заданной на множестве произвольной природы, в частности К. ф. случайного поля, когда T — подмножество конечномерного пространства. Если $\boldsymbol{X}(t) = [X_1(t), \ldots, X_n(t)]$ — многомерный случайный процесс (случайная функция), то его К. ф. наз. матричнозначная функция

$$B(t, s) = \|B_{ij}(t, s)\|_{i,\, j=1}^{n},$$

где

$$B_{ij}(t, s) = \mathsf{E}[X_i(t) - \mathsf{E}X_i(t)][X_j(s) - \mathsf{E}X_j(s)]$$

— взаимная корреляционная функция процессов $X_i(t)$, $X_j(t)$.

К. ф. является важной характеристикой случайного процесса. Если $X(t)$ — *гауссовский процесс*, то его К. ф. $B(t, s)$ и среднее значение $\mathsf{E}X(t)$ (т. е. первые и вторые моменты) однозначно определяют конечномерные распределения, а значит и процесс в целом. В общем случае первых двух моментов заведомо недостаточно для полного описания случайного процесса. Напр., одинаковую К. ф. $B(t, s)=e^{-a|t-s|}$ имеют гауссовский марковский стационарный процесс, траектории к-рого непрерывны, и так наз. телеграфный сигнал — точечный марковский стационарный процесс, принимающий два значения ± 1. Однако К. ф. определяет ряд важных свойств процесса — так наз. свойства второго порядка (т. е. выражающиеся в терминах вторых моментов). В силу этого, а также благодаря своей относительной простоте, корреляционные методы широко используются как в теории случайных процессов, так и в ее статистич. приложениях (см. *Корелограмма*).

Скорость и характер убывания корреляций при $|t-s| \to \infty$ дают представление об эргодических свойствах процесса. Условия на скорость убывания корреляций в той или иной форме присутствуют в предельных теоремах для случайных процессов. Локальные свойства 2-го порядка, такие как среднеквадратичные непрерывность, дифференцируемость, дают полезную, хотя и весьма грубую характеристику локального поведения процесса. Исследование свойств траекторий в терминах К. ф. с большой полнотой проведено в гауссовском случае (см. *Выборочная функция*). Одним из наиболее завершенных разделов теории случайных процессов является теория линейной экстраполяции и фильтрации, позволяющая находить оптимальные линейные алгоритмы прогноза и аппроксимации случайных процессов, основываясь на знании К. ф.

Характеристическим свойством К. ф. является положительная определенность:

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} c_i \bar{c}_j B(t_i,\ t_j) \geqslant 0$$

для любого n, любых комплексных $c_1, \ldots, c_n$ и любых $t_1, \ldots, t_n \in T$. В наиболее важном случае стационарного в широком смысле процесса $B(t, s)$ зависит от разности аргументов: $B(t, s)=R(t-s)$. Условие положительной определенности принимает тогда вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j R(t_i - t_j) \geqslant 0.$$

Если $R(t)$ дополнительно непрерывна при $t=0$ (что соответствует среднеквадратичной непрерывности процесса $X(t)$), то

$$R(t) = \int e^{it\lambda} F(d\lambda),$$

где $F(d\lambda)$ — положительная конечная мера; здесь λ пробегает всю действительную прямую, если $T=(-\infty, \infty)$ (случай «непрерывного времени»), или отрезок $[-\pi, \pi]$, если $T=\{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ (случай «дискретного времени»). Мера $F(d\lambda)$ наз. спектральной мерой случайного процесса. Таким образом, корреляционные и спектральные свойства стационарного случайного процесса оказываются тесно связанными; напр., скорость убывания корреляций при $t \to \infty$ соответствует степени гладкости спектральной плотности $f(\lambda)=F(d\lambda)/d\lambda$ и т. п.

В статистической механике К. ф. наз. также совместная плотность вероятности $\rho(x_1, \ldots, x_m)$ нахождения m различных частиц рассматриваемой системы в точках $x_1, \ldots, x_m$; совокупность этих функций однозначно определяет соответствующее точечное случайное поле

Лит.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, М., 1965. *А. С. Холево.*

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ в статистической механике — функция, описывающая влияние частиц или групп частиц друг на друга и эффекты взаимодействия подсистем рассматриваемой системы.

В классической статистич. механике К. ф. $G_2(1, 2)$, $G_3(1, 2, 3)$, ... определяются соотношениями

$$F_2(1, 2)=F_1(1)F_1(2)+G_2(1, 2),$$

$$F_3(1, 2, 3)=F_1(1)F_1(2)F_1(3)+F_1(1)G_2(2, 3)+F_1(2)G_2(1, 3)+$$
$$+F_1(3)G_2(1, 2)+G_3(1, 2, 3), \ldots,$$

где символами 1, 2, ... в аргументах функций обозначена совокупность координат $\mathbf{r}$ и импульсов $\boldsymbol{p}$ соответственно 1-й, 2-й, ... частицы, $F_s(1, \ldots, s)$ — приведенные функции распределения

$$F_s(1, 2, \ldots, s)=V^{\circ}\left(1-\frac{1}{N}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{s-1}{N}\right)\int D_1 d(s+1)\ldots dN,$$

V — объем системы, N — число частиц, $D_1=D_1(1, 2, \ldots, N)$ — функция распределения в фазовом пространстве в момент времени t с нормировкой

$$\int D_t(1, 2, \ldots, N)\, d1\ldots dN=1.$$

Закон изменения D_t во времени характеризуется уравнением Лиувилля $\partial D_t/\partial t=\Lambda D_t$, в к-ром Λ представляет не зависящий явно от времени оператор Лиувилля. Обычно рассматривается случай, когда Λ состоит из суммы аддитивной части и бинарной части, характеризующей взаимодействия между частицами:

$$\Lambda=\sum\nolimits_{1\leqslant j\leqslant N}\Lambda(j)+\sum\nolimits'_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant N}\Lambda(j_1, j_2).$$

Согласно принципу ослабления корреляции К. ф. удовлетворяют граничным условиям $G_s(1, 2, \ldots, s)\to 0$ при $\max\{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|, \ldots, |\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_s|, \ldots, |\mathbf{r}_{s-1}-\mathbf{r}_s|\}\to\infty$.

К. ф. $G_1(1)=F_1(1)$, $G_2(1, 2), \ldots, G_3(1, \ldots, s)$ являются функциональными производными функционала

$$G_s(1, 2, \ldots, s)=\left(\frac{\delta^s A_t(u)}{\delta u(1)\,\delta u(2)\ldots\delta u(s)}\right)_{u=0}$$

$A_t(u)$, связанного с так наз. производящим функционалом

$$L_t(u)=\int\left\{\prod\nolimits_{1\leqslant j\leqslant N}\left(1+\frac{\mathbf{v}}{N}u(j)\right)\right\}D_t\, d1\ldots dN$$

соотношением

$$L_t(u)=e^{A_t(u)}.$$

Функционал $A_t(u)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial A_t(u)}{\partial t}=\int u(1)\Lambda(1)\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(1)}\,d1+\frac{1}{2}\int\left\{u(1)\,u(2)+\right.$$
$$\left.+\frac{N}{\mathbf{V}}u(1)+\frac{N}{\mathbf{V}}u(2)\right\}\Lambda(1, 2)\left\{\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(1)}\frac{\delta A_t(u)}{\delta u(2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^2 A_t(u)}{\delta u(1)\,\delta u(2)}\right\}d1\,d2.$$

В квантовой статистич. механике К. ф. являются операторными величинами и определяются соотношениями:

$$F_2(1, 2)=S(1, 2)\{F_1(1)F_1(2)\}+G_2(1, 2),$$

$$F_3(1, 2, 3)=S(1, 2, 3)\{F_1(1)F_1(2)F_1(3)\}+$$
$$+\frac{1}{2}S(1, 2, 3)\{F_1(1)G_2(2, 3)+F_1(2)\,G_2(1, 3)+$$
$$+F_1(3)\,G_2(1, 2)\}+G_3(1, 2, 3), \ldots, \qquad (*)$$

где $S(1, 2)$, $S(1, 2, 3)$ — операторы симметризации для бозе-систем и антисимметризации для ферми-систем. К. ф. (*), наз. матрицей плотности, удовлетворяет квантовомеханич. уравнению Лиувилля (см. [2]).

В квантовой статистич. механике помимо К. ф. (*) рассматриваются К. ф., построенные на обычных термодинамических средних (см. [3]), и К. ф., построенные на квазисредних (см. [3]).

Билинейные комбинации К. ф. (как квантовые, так и классические) дают функции Грина (см. [5]). Для К. ф. справедливы спектральные представления, Боголюбова неравенство, вариации среднего значения теорема (см. [4]).

Иногда используют К. ф., соответствующие так наз. разложению Кирквуда (см. [6]); пространственно-временную К. ф. (см. [8]).

К. ф. могут быть интерпретированы как характеристики вероятностных мер (см. [9]).

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, М.— Л., 1946; [2] Боголюбов Н. Н., Гуров К. П., «Ж. экспериментальной и теоретич. физики», 1947, т. 17, в. 7, с. 614—28; [3] Боголюбов Н. Н., Избранные труды, т. 3, К., 1971; [4] Боголюбов Н. Н., (мл.), Садовников Б. И., Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975; [5] Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В., «Докл. АН СССР», 1959, т. 126, № 1, с. 53—56; [6] Либов Р., Введение в теорию кинетических уравнений, пер. с англ., М., 1974; [7] Исихара А., Статистическая физика, пер. с англ., М., 1973; [8] Рюэль Д., Статистическая механика. Строгие результаты, пер. с англ., М., 1971; [9] Престон К. Дж., Гиббсовские состояния на счетных множествах, пер. с англ., М., 1977.

А. Н. Ермилов, А. М. Курбатов.

КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ОТНОШЕНИЕ — характеристика зависимости между случайными величинами. Именно, К. о. случайной величины Y по случайной величине X называется выражение

$$\eta^2_{Y|X} = 1 - \mathsf{E}\left[\frac{\mathsf{D}(Y|X)}{\mathsf{D}Y}\right],$$

где $\mathsf{D}Y$ — дисперсия Y, $\mathsf{D}(Y|X)$ — условная дисперсия Y при данном X, характеризующая рассеяние Y около условного математич. ожидания $\mathsf{E}(Y|X)$ при данном значении X. Всегда $0 \leqslant \eta^2_{Y|X} \leqslant 1$. Равенство $\eta^2_{Y|X} = 0$ соответствует некоррелированным случайным величинам; $\eta^2_{Y|X} = 1$ тогда и только тогда, когда имеется точная функциональная связь между Y и X; в случае линейной зависимости Y от X К. о. совпадает с квадратом коэффициента корреляции. К. о. несимметрично относительно X и Y, поэтому наряду с $\eta^2_{Y|X}$ рассматривается $\eta^2_{X|Y}$ — К. о. X по Y, определяемое аналогичным образом. Между $\eta^2_{Y|X}$ и $\eta^2_{X|Y}$ нет какой-либо простой зависимости. См. также *Корреляция*.

А. В. Прохоров.

КОРРЕЛЯЦИЯ — зависимость между случайными величинами, не имеющая, вообще говоря, строго функционального характера. В отличие от функциональной зависимости К., как правило, рассматривается тогда, когда одна из величин зависит не только от данной другой, но и от ряда случайных факторов. Зависимость между двумя случайными событиями проявляется в том, что условная вероятность одного из них при наступлении другого отличается от безусловной вероятности. Аналогично, влияние одной случайной величины на другую характеризуется условными распределениями одной из них при фиксированных значениях другой. Пусть X и Y — случайные величины с заданным совместным распределением вероятностей, m_X и m_Y — математич. ожидания X и Y, σ^2_X и σ^2_Y — дисперсии X и Y, ρ — коэффициент К. между X и Y. Если для каждого возможного значения $X=x$ определено условное математич. ожидание $y(x)=\mathsf{E}[Y \mid X=x]$ величины Y, то

функция $y(x)$ наз. *регрессией* величины Y по X, а ее график — линией регрессии Y по X. Зависимость Y от X проявляется в изменении средних значений Y при изменении X, хотя при каждом фиксированном значении $X=x$ величина Y остается случайной величиной с определенным рассеянием. Для выяснения вопроса, насколько точно регрессия передает изменение Y при изменении X, используется условная дисперсия Y при данном значении $X=x$ или ее средняя величина (мера рассеяния Y около линии регрессии)

$$\sigma^2_{Y\mid X}=\mathsf{E}\,[Y-\mathsf{E}\,(Y\mid X=x)]^2.$$

Если X и Y независимы, то все условные математич. ожидания Y не зависят от x и совпадают с безусловным: $y(x)=m_Y$, при этом $\sigma^2_{Y|X}=\sigma^2_Y$. При точной функциональной зависимости Y от X величина Y при каждом данном $X=x$ принимает лишь одно определенное значение и $\sigma^2_{Y|X}=0$. Аналогично определяется $x(y)=\mathsf{E}[X|Y=y]$ — регрессия X по Y. Естественным показателем концентрации распределения вблизи линии регрессии $y(x)$ служит *корреляционное отношение*

$$\eta^2_{Y\mid X}=1-\sigma^2_{Y\mid X}/\sigma^2_Y.$$

Величина $\eta^2_{Y|X}=0$ тогда и только тогда, когда регрессия имеет вид $y(x)=m_Y$, в этом случае коэффициент К. ρ равен 0 и величина Y не коррелирована с X. Если регрессия Y по X линейна, т. е. линия регрессии — прямая

$$y(x)=m_Y+\rho\,\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X),\ \text{то}\ \sigma^2_{Y\ X}=\sigma^2_Y(1-\rho^2)\ \text{и}\ \eta^2_{Y\ X}=\rho^2;$$

если, кроме того, $|\rho|=1$, то Y связана с X точной линейной зависимостью, если же $\eta^2_{Y|X}=\rho^2<1$, то между Y и X нет функциональной зависимости. Точная функциональная зависимость Y от X, отличная от линейной, имеет место тогда и только тогда, когда $\rho^2<\eta^2_{Y\ X}=1$. Практическое использование коэффициента К. в качестве меры отсутствия зависимости справедливо (за редким исключением) лишь тогда, когда совместное распределение X и Y нормально (или близко к нормальному распределению), так как в этом случае из равенства $\rho=0$ следует независимость X и Y. Использование ρ как меры зависимости для произвольных случайных величин X и Y приводит часто к ошибочным выводам, так как ρ может равняться 0 даже при функциональной зависимости между величинами. Если двумерное распределение X и Y нормально, то обе линии регрессии суть прямые и ρ полностью определяет концентрацию распределения вблизи линий регрессии: при $|\rho|=1$ прямые регрессии сливаются в одну, что соответствует линейной зависимости между X и Y, при $\rho=0$ величины независимы.

При изучении связи между несколькими случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$ с заданным совместным распределением пользуются множественными и частными корреляционными отношениями и коэффициентами К. Последние вычисляются с помощью обычных коэффициентов К. между X_i и X_j, в совокупности образующих *корреляционную матрицу*. Мерой линейной связи между X_1 и совокупностью всех остальных величин $X_2, \ldots, X_n$ служит *множественный коэффициент корреляции*. Если взаимосвязь величин X_1 и X_2 предположительно определяется влиянием остальных величин $X_3, \ldots, X_n$, то показателем линейной связи между X_1 и X_2 при исключении влияния $X_2, \ldots, X_n$ является *частный коэффициент корреляции* X_1 и X_2 относительно $X_2, \ldots, X_n$.

О мерах К., основанных на *ранговых статистиках*, см. ст. *Кендалла коэффициент ранговой корреляции*, *Спирмена коэффициент ранговой корреляции*.

В математич. статистике разработаны методы оценки коэффициентов, характеризующих К. между случайными величинами или признаками, и методы проверки гипотез об их значениях, использующие их выборочные аналоги. Совокупность таких методов наз. корреляционным анализом. Корреляционный анализ статистич. данных заключает в себе следующие основные практич. приемы: 1) построение корреляционного поля и составление корреляционной таблицы; 2) вычисление выборочных корреляционных отношений или коэффициентов К.; 3) проверка статистич. гипотезы значимости связи. Дальнейшее исследование может заключаться в установлении конкретного вида зависимости между величинами (см. *Регрессия*).

Вспомогательными средствами при анализе выборочных двумерных данных являются корреляционное поле и корреляционная таблица. При нанесении на координатную плоскость выборочных точек получают корреляционное поле. По характеру расположения точек поля можно составить предварительное мнение о форме зависимости случайных величин (напр., о том, что одна величина в среднем возрастает или убывает при возрастании другой). Для численной обработки результаты обычно группируют и представляют в форме корреляционной таблицы. В каждой клетке этой таблицы приводятся численности n_{ij} тех пар (x, y), компоненты к-рых попадают в соответствующие интервалы группировки по каждой переменной. Предполагая длины интервалов группировки (по каждому из переменных) равными между собой, выбирают центры x_i (соответственно y_j) этих интервалов и числа n_{ij} в качестве основы для расчетов.

Более точную информацию о характере и силе связи, чем картина корреляционного поля, дают коэффициент К. и корреляционное отношение. Выборочный коэффициент корреляции определяется по формуле

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) n_{ij}}{\sqrt{\sum_i n_{i\cdot} (x_i - \overline{x})^2} \sqrt{\sum_j n_{\cdot j} (y_j - \overline{y})^2}},$$

где

$$n_{i\cdot} = \sum_j n_{ij}, \quad n_{\cdot j} = \sum_i n_{ij}$$

и

$$\overline{x} = \frac{\sum_i n_{i\cdot} x_i}{n}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_j n_{\cdot j} y_j}{n}.$$

При большом числе независимых наблюдений, подчиненных одному и тому же распределению, близкому к нормальному, $\hat{\rho}$ близок к истинному коэффициенту К. ρ. Во всех других случаях в качестве характеристики силы связи рекомендуется использовать корреляционное отношение, интерпретация к-рого не зависит от вида исследуемой зависимости. Выборочное значение $\hat{\eta}^2_{Y \cdot X}$ вычисляется по данным корреляционной таблицы:

$$\hat{\eta}^2_{Y|X} = \frac{\frac{1}{n} \sum_i n_{i\cdot} (\overline{y}_i - \overline{y})^2}{\frac{1}{n} \sum_j n_{\cdot j} (y_j - \overline{y})^2},$$

где числитель характеризует рассеяние условных средних значений $\overline{y}_i$ около безусловного среднего $\overline{y}$ (аналогично определяется выборочное значение $\hat{\eta}^2_{X|Y}$). Величина $\hat{\eta}^2_{Y \cdot X} - \hat{\rho}^2$ используется в качестве индикатора отклонения регрессии от линейной.

Проверка гипотезы значимости связи основывается на распределениях выборочных корреляционных характеристик. В случае нормального распределения величина выборочного коэффициента К. $\hat{\rho}$ считается значимо отличной от нуля, если выполняется неравенство

$$(\hat{\rho})^2 > \left[1 + \frac{n-2}{t_\alpha^2}\right]^{-1},$$

где t_α есть критическое значение t-распределения Стьюдента с $(n-2)$ степенями свободы, соответствующее выбранному уровню значимости α. В случае $\rho \neq 0$ обычно используют так наз. z-преобразование Фишера, заменяя величину $\hat{\rho}$ на z по формуле

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\hat{\rho})}{1-\hat{\rho}}.$$

Уже при сравнительно небольших n распределение величины z хорошо приближается нормальным распределением с математич. ожиданием, равным

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)},$$

и дисперсией, равной $1/(n-3)$. Исходя из этого, можно определить приближенные интервалы для истинного коэффициента К. ρ.

О распределении выборочного корреляционного отношения и о способах проверки гипотез о линейности регрессии см. [3].

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Айвазян С. А., Статистическое исследование зависимостей, М., 1968.

А. В. Прохоров.

КОРРЕЛЯЦИЯ, дуальное преобразование,— взаимно однозначное отображение $\varkappa$ проективного пространства Π_n на себя такое, что из $S_p \subset S_q$ следует $\varkappa(S_p) \supset \varkappa(S_q)$. При К. образом суммы подпространств является пересечение их образов и, наоборот, образом пересечения является сумма образов, в частности образ точки — гиперплоскость, а образ гиперплоскости — точка. Для существования К. пространства $\Pi_n(K)$ над телом K необходимо и достаточно, чтобы в K существовал инверсный автоморфизм: взаимно однозначное отображение $\alpha : K \to K$, при к-ром $\alpha(k_1+k_2)=\alpha(k_1)+\alpha(k_2)$, $\alpha(k_1k_2)=\alpha(k_2)\alpha(k_1)$; в этом случае $\Pi_n(K)$ оказывается двойственным самому себе. Примерами пространств, для к-рых существует К., являются вещественные ($K=\mathbb{R}$, $\alpha=id$), комплексные ($K=\mathbb{C}$, $\alpha : z \to \bar{z}$), кватернионные ($K=\mathbb{H}$, $\alpha : Q \to \bar{Q}$) проективные пространства.

Пусть Π_n интерпретируется как совокупность линейных подпространств (левого) линейного пространства $A^l_{n+1}(K)$ над телом K; полубилинейной формой на A_{n+1} наз. функция $f_\alpha(x, y)$, зависящая от инверсного автоморфизма α тела K и обладающая следующими свойствами:

$$f_\alpha(x+y, z) = f_\alpha(x, z) + f_\alpha(y, z),$$
$$f_\alpha(x, y+z) = f_\alpha(x, y) + f_\alpha(x, z),$$
$$f_\alpha(kx, y) = k f_\alpha(x, y),$$
$$f_\alpha(x, ky) = \alpha(k) f_\alpha(x, y).$$

В частности, если $\alpha = id$, то $f_\alpha(x, y)$ наз. билинейной формой,— напр., если $K=\mathbb{R}$; в случае $K=\mathbb{C}$ и $\alpha : z \to z$, то f_α наз. эрмитовой; если же $K=\mathbb{H}$ и $\alpha : Q \to \bar{Q}$, то f_α наз. симплектической. Тогда для любого $x \in A^l_{n+1}(K)$ образ К. $\varkappa(x)$ совпадает с совокупностью решений x уравнения $f_\alpha(x, X)=0$

(говорят также, что каждая К. $\varkappa$ представима полубилинейной формой $f_\alpha(x, y)$ — теорема Биркгофа — Неймана).

Подпространство W наз. нулевым относительно К. $\varkappa$, если $\varkappa(P)\supset P$ для любой точки $P\in W$. Если $\varkappa$ представима формой $f_\alpha(x, y)$, то $f_\alpha(x, x)=0$ для всех $x\in W$ (в частности, $f_\alpha(x, y)=-f_\alpha(y, x)$). Напр., строго изотропное подпространство (т. е. подпространство U такое, что $U\subset\varkappa(U)$) является нулевым, причем на нем $f(U, U)=0$; нулевая прямая либо неизотропна, либо строго изотропна. Все максимальные нулевые подпространства К. $\varkappa$ имеют одну и ту же размерность. Если $w=\Pi_n$, то К. наз. нульполярной (нулевой) и является (симплектическим) *поляритетом*.

Обобщение понятия К.— дуальное отображение $\varkappa$ проективных пространств: $\Pi_n(K)\to\check{\Pi}_n(L)$ — взаимно однозначное отображение такое, что если $Y\subset X\in\Pi_n$, то $\varkappa(X)\subset\varkappa(Y)\in\check{\Pi}_n$; оно существует, если есть инверсный изоморфизм $\alpha: K\to L$. Напр., пусть $L=K^*$ — совокупность элементов K, в к-рой операции сложения и умножения определены следующим образом: $x\overset{*}{+}y=x+y$, $x\overset{*}{\cdot}y=y\cdot x$ (см. *Проективная алгебра*, конструкция II). Тогда K^* — тело, инверсно изоморфное K; если $\Pi_n(K)$ — левое, то $\check{\Pi}_n(K^*)$ — правое проективные пространства, и они канонически двойственны друг другу.

М. П. Войцеховский.

КОРТЕВЕГА — де ФРИСА УРАВНЕНИЕ, КдФ-уравнение,— уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0;\quad x,\ t\in\mathbb{R}^1,\ u(x,\ t)\in\mathbb{R}^1,$$

предложено Д. Кортевегом и Г. де Фрисом [1] для описания распространения волн на мелкой воде. Оно может быть проинтегрировано с помощью метода обратной задачи теории рассеяния, к-рый основан на представлении К.— де Ф. у. в виде

$$\frac{\partial L}{\partial t}=[L,\ M]=LM-ML,$$

где $L=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,\ t)$ — одномерный оператор Шрёдингера, а

$$M=4\frac{\partial^3}{\partial x^3}-3\left(u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u\right).$$

Для К.— де Ф. у. однозначно разрешима задача Коши в классе быстроубывающих функций с начальным условием: $u(x)\in S(\mathbb{R}^1)$ (здесь $S(\mathbb{R}^1)$ — пространство Шварца). Пусть

$$s=\{r(k)\in S(\mathbb{R}^1);\ \varkappa_j,\ m_j>0,\ \varkappa_{j_1}\neq\varkappa_{j_2}\text{ при }j_1\neq j_2,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$$

— данные рассеяния для оператора Шрёдингера с потенциалом $u(x)$.

Тогда

$$r(k,\ t)=e^{8ik^3t}r(k),\ m_j(t)=e^{8\varkappa_j^3t}m_j,\ \varkappa_j(t)=\varkappa_j,$$

и решение $u(x,\ t)$ определяется по данным рассеяния $s(t)$ с помощью нек-рого интегрального уравнения. В случае $r(k)\equiv0$ последнее уравнение явно решается; возникающие таким образом потенциалы наз. безотражательными, а соответствующие решения К.— де Ф. у.— n-солитонными (см. *Солитон*).

К.— де Ф. у. записывается в гамильтоновом виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u},\quad H(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dx;$$

здесь фазовым пространством является пространство $S(\mathbb{R}^1)$, а скобки Пуассона задаются билинейной формой оператора $\frac{\partial}{\partial x}$. Отображение $u(x)\to s$ представляет собой каноническое преобразование к переменным типа

действие — угол. В новых переменных гамильтоновы уравнения явно интегрируются, и их решение дается указанными выше формулами. К.— де Ф. у. обладает бесконечным набором интегралов движения:

$$I_n(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} P_{2n-1}\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-2}u}{\partial x^{n-2}}\right)dx;$$

$$P_1=u,\ \ P_n=-\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n-1}P_{n-1-j}P_j,\ \ n>1.$$

Все эти интегралы движения находятся в инволюции, и порождаемые ими гамильтоновы системы (так наз. высшие уравнения Кортевега — де Фриса) вполне интегрируемы.

С помощью интегральных уравнений обратной задачи также находится решение задачи Коши для начального данного типа ступеньки:

$$\lim_{x\to-\infty}u(x)=c<0,\qquad \lim_{x\to+\infty}u(x)=0.$$

При $t\to+\infty$ в окрестности фронта решение $u(x,t)$ распадается на невзаимодействующие солитоны — происходит распад ступеньки.

В случае задачи Коши с периодическим начальным условием $u(x+T)=u(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, аналогом безотражательных потенциалов являются потенциалы, для к-рых оператор Шрёдингера имеет конечное число запрещенных зон,— конечнозонные потенциалы. Периодические и почти периодические конечнозонные потенциалы являются стационарными решениями высших К.— де Ф. у.; последние представляют собой вполне интегрируемые конечномерные гамильтоновы системы. Произвольный периодич. потенциал аппроксимируется конечнозонными. Пусть $E_j\in\mathbb{R}^1$; $E_{j_1}\neq E_{j_2}$ при $j_1\neq j_2$; $j=1,\ \ldots,\ 2g+1$ — края зон; а Γ — гиперэллиптическая кривая

$$y^2=\prod_{j=1}^{2g+1}(x-E_j)$$

над полем $\mathbb{C}$. Тогда действительнозначные почти периодические потенциалы с указанными краями зон, а также решения задачи Коши выражаются через θ-функции на многообразии Якоби $J(\Gamma)$ кривой Γ. При определенных соотношениях на края зон полученные решения будут периодическими. Если отказаться от условий $E_j\in\mathbb{R}^1$, то получатся комплекснозначные (возможно с полюсами) решения К.— де Ф. у., к-рые также наз. конечнозонными.

Лит.: [1] Korteweg D., de Vries G., «Phil. Mag.», 1895, v. 39, p. 422—43; [2] «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 19, p. 1095—97; [3] Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д., «Функциональный анализ и его приложения», 1971, т. 5, в. 4, с. 18—27; [4] Марченко В. А., Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля, К., 1972; [5] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 1, с. 55—136; [6] Кунин И. А., Теория упругих сред с микроструктурой, М., 1975.

Л. А. Тахтаджян.

КОРТЕЖ — конечная последовательность (допускающая повторения) элементов какого-нибудь множества X. К. обозначается посредством $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ или $x_1,x_2,\ldots,x_n$, где n — длина К. ($n\geqslant 0$), а x_i есть i-й член К. и $x_i\in X$ ($1\leqslant i\leqslant n$). При $n=0$ получается пустой кортеж, не имеющий членов.

В качестве синонимов термина «К.» можно использовать следующие понятия: *слово* в алфавите X (в этом случае обычно предполагается, что X конечно); элемент нек-рой декартовой степени множества X; элемент свободной полугруппы с множеством образующих X и единицей; функция, определенная на первых n натуральных числах ($n\geqslant 0$), со значениями в множестве X.

В. Н. Гришин.

КОС ТЕОРИЯ — раздел топологии и алгебры, изучающий косы и группы, составленные из их классов эквивалентности, и различные обобщения этих групп [1].

Коса из n нитей — объект, состоящий из двух параллельных плоскостей P_0 и P_1 в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, содержащих упорядоченные множества точек $a_1, \ldots, a_n \in P_0$ и $b_1, \ldots, b_n \in P_1$, и из n простых дуг $l_1, \ldots, l_n$, пересекающих каждую параллельную плоскость P_t между P_0 и P_1 однократно и соединяющих точки $\{a_i\}$ с точками $\{b_i\}$, $i=1, \ldots, n$.

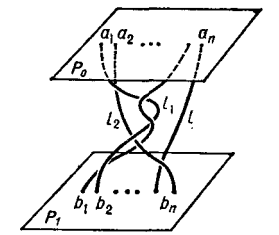


Рис. 1.

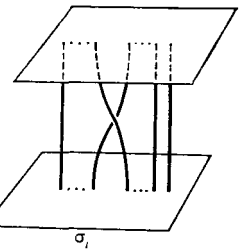


Рис. 2.

Считается, что a_i лежат на прямой L_a в P_0, точки b_i — на прямой L_b в P_1, параллельной L_a, причем b_i расположены под a_i для каждого i (см. рис. 1). Косы изображаются в проекции на плоскость, проходящую через L_a и L_b; эта проекция может быть приведена в общее положение так, что имеется только конечное число двойных точек, попарно лежащих в разных уровнях, и пересечения трансверсальны.

Нить l_i косы ω соединяет a_i с b_{k_i} и определяет подстановку $S^\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$. Если эта подстановка тождественна, то ω наз. крашеной (или чистой) косой. Транспозиции $(i\ i+1)$ отвечает простейшая коса σ_i (см. рис. 2).

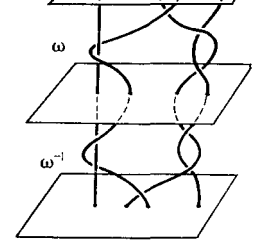


Рис. 3.

Во множестве всех кос с n нитями и с фиксированными P_0, P_1, $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ вводится отношение эквивалентности. Оно определяется гомеоморфизмами $h : \Pi \to \Pi$, где Π — область между P_0 и P_1, тождественными на $P_0 \cup P_1$, к-рые можно считать такими, что $h(P_t) = P_t$. Косы α и β эквивалентны, если существует такой гомеоморфизм h и $h(\alpha) = \beta$.

Классы эквивалентности, далее также называемые косами, образуют группу кос $B(n)$ относительно операции, определяемой следующим образом. Экземпляр Π' области Π помещается над другим экземпляром Π'' так, чтобы P_0'' совпала с P_1', a_i'' — с b_i', а затем $\Pi' \cup \Pi''$ сжимается вдвое. Образы кос $\omega' \in \Pi'$ и $\omega'' \in \Pi''$ дают косу $\omega'\omega''$, нить l_i к-рой получается продолжением l_i' с помощью l''_{k_i}, где $k_i \in S^{\omega'(i)}$. Единичная коса — класс эквивалентности, содержащий косу из n параллельных отрезков, коса ω^{-1}, обратная косе ω, определяется отражением в плоскости $P_{1/2}$. Условие $\omega\omega^{-1} = \varepsilon$ — на рис. 3. Отображение $\omega \to S^\omega$ определяет эпиморфизм $B(n)$ на группу $S(n)$ перестановок n элементов, ядром к-рого является подгруппа $K(n)$, соответствующая всем чистым косам, так что имеется точная последовательность

$$1 \to K(n) \to B(n) \to S(n) \to 1.$$

Группа кос $B(n)$ имеет две основные интерпретации. Первая — пространство конфигураций — получается отождествлением плоскостей P_t с помощью вертикальной проекции на P_0, при к-рой образы точек

$a_{it}=l_i \cap P_t$ при изменении t от 0 до 1 образуют след изотопии φ_t^ω множества $\bigcup a_i$ по P_0, причем $\varphi_1^\omega(\bigcup a_i)=\bigcup a_i$. Косе однозначно соответствует класс гомотопных петель в пространстве неупорядоченных наборов $G(n)$ из n попарно различных точек плоскости, и имеет место изоморфизм

$$\beta : B(n) \to \pi_1 G(n).$$

Для крашеных кос аналогично строится изоморфизм

$$\alpha : K(n) \to \pi_1 F(n),$$

где $F(n)$ — пространство упорядоченных наборов из n различных точек плоскости, так что $K(n)$ можно отождествить с подгруппой, отвечающей накрытию

$$p : F(n) \to G(n)=F(n)/S(n).$$

Вторая — г р у п п а г о м е о т о н и й — получается продолжениями изотопии φ_t^ω до изотопии $\tilde{\varphi}_t^\omega$ плоскости P_0, тождественной вне нек-рого диска, причем $\tilde{\varphi}_0^\omega=id$. При каждом t два такие продолжения отличаются на гомеоморфизм, тождественный в точках a_{it}. Косе однозначно соответствует компонента пространства гомеоморфизмов $Y(n)$ плоскости, отображающих множество $\bigcup a_i$ на себя, и имеет место изоморфизм

$$\gamma : B(n) \to \pi_0 Y(n).$$

Каждому гомеоморфизму $h \in Y$ сопоставляется автоморфизм свободной группы ранга n: $F_n=\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup a_i)$, определенный с точностью до внутреннего, к-рый в свою очередь дает гомоморфизм $B(n) \to \mathrm{Out}\ F_n=\mathrm{Aut}F_n/\mathrm{Inn}F_n$. Элементы образа наз. к о с о в ы м и а в т о м о р ф и з м а м и свободной группы. В частности, косе σ_i отвечает автоморфизм

$$\overline{\sigma}_i\colon\ \overline{\sigma}_i(x_i)=x_{i+1},\ \overline{\sigma}_i(x_{i+1})=x_{i+1}x_i x_{i+1}^{-1},\ \overline{\sigma}_i(x_j)=x_j,$$

если $j \pm i,\ i+1$ ($\{x_i\}$ — базис F_n). Любой косовой автоморфизм α обладает свойствами:

$$\alpha(x_i)=A_i x_i A_i^{-1},\ \ \alpha\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)=\prod_{i=1}^n x_i$$

с точностью до внутреннего (смысл A_i — ниже), эти свойства характеризуют косовые автоморфизмы.

Косы σ_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, являются образующими группы $B(n)$, т. е. $\omega=\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\ldots\sigma_{k_m}$, причем

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i \text{ при } |i-j|>1,\\ &\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i-1},\ 1 \leqslant i \leqslant n-2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Оказывается, что (1) — копредставление для $B(n)$ (см. рис. 4). Имеет место расщепляющая точная последова-

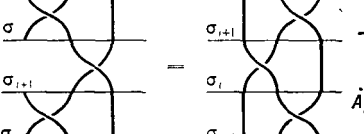


Рис. 4.

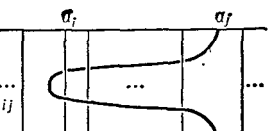


Рис. 5.

тельность (получающаяся из локально тривиального расслоения $F(n) \to F(n-1)$ со слоем $R^2 \setminus (a_1, \ldots, a_{n-1})$):

$$1 \to F_{n-1} \to K(n) \to K(n-1) \to 1,$$

к-рая приводит к нормальному ряду

$$K(n)=A_n \supset \ldots \supset A_1 \supset A_0=F_{n-1}$$

со свободными факторами A_i/A_{i-1}, причем A_i имеет «дополнение» U_{n-i}, изоморфное $K(n-i-1)$. Каждый

элемент $\omega \in B(n)$ может быть представлен единственным образом в виде

$$\omega = \omega_2 \ldots \omega_n \pi_\omega,$$

где π_ω — выбранный представитель для S^ω в $B(n)$, а $\omega_i \in A_{n-i+1} \cap U_i$. Приведение косы к такой форме наз. ее **причесыванием**. Это решает проблему тождества в $B(n)$.

Копредставление для $K(n)$ таково: образующие (см. рис. 5)

$$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_i^2\sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j-1} \subset A_i \cap U_{n-i+1};$$

соотношения

$$\left.\begin{array}{l} A_{rs}A_{ij} = A_{ij}A_{rs}, \text{ если } r \leqslant s < i < j \text{ или } i < r < s < j; \\ A_{rj}A_{ij} = A_{rj}, \text{ если } i = s; \\ A_{ij}A_{sj}A_{ij}A_{ij} = A_{sj}, \text{ если } r = i < j < s; \\ A_{rj}A_{sj}A_{rj}^{-1}A_{sj}^{-1}A_{ij}A_{rj}A_{sj} = A_{sj}A_{rj}, \text{ если } r < i < s < j. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Оно может быть получено как копредставление ядра естественного гомоморфизма в $S(n)$ абстрактной группы $B(n)$, заданной копредставлением (1) с помощью *Шрейера системы* $\prod_{j=2}^{n} M_{jk_j}$, $j \geqslant k_j \geqslant n$, где $M_{ji} = \sigma_{j-1} \ldots \sigma_i$.

Центр группы $B(n)$ — бесконечная циклич. группа, порожденная элементом $(\sigma_1 \ldots \sigma_n)^n$. Коммутант $B'(n)$ совпадает с $B''(n)$ при $n \geqslant 5$; $B'(3)$ изоморфна свободной группе ранга 2, а $B'(4)$ — полупрямому произведению двух таких групп. Фактор по коммутанту — бесконечная циклич. группа, порожденная образами σ_i. Элементы конечного порядка в $B(n)$ отсутствуют. Группа $K(n)$ переходит в себя при эндоморфизмах с неабелевым образом. В частности, $K(n) \cap B'(n)$ — вполне характеристич. подгруппа в $B(n)$, а также и в $K(n)$ (см. [15]).

Проблема сопряженности в $B(n)$ решается существенно сложнее проблемы тождества. Имеется единственная **нормальная по Гарсайду форма** косы $\omega = \Delta^m \Omega$, где $\Delta = (\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-2}) \ldots (\sigma_1\sigma_2)\sigma_1$ — так наз. элемент Гарсайда, Ω — положительная, т. е. имеющая запись через σ_i с положительными показателями, коса. Косе ω конечным числом операций, определяемых по i (сопряжение с нек-рыми элементами, выбор элементов максимальной степени и т. п.), сопоставляется нек-рое множество слов $\Sigma(\omega)$, из к-рого выбирается слово в нормальной форме $\Delta^+ T$ с минимальным T. Это — так наз. **верхняя форма** косы ω. Оказывается, что две косы сопряжены тогда и только тогда, когда их верхние формы совпадают (см. [7]).

Представление Бурау группы кос $B(n)$ в группу матриц над кольцом целочисленных многочленов одной переменной определяется соответствием:

$$b(\omega)\colon \sigma_i \longrightarrow \begin{Vmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{Vmatrix}$$

где I_k — единичная матрица порядка k. Матрица $b(\omega) - I_n$ есть приведенная матрица Александера (см. *Александера инварианты*) зацепления, полученного замыканием косы ω (см. ниже). Для крашеной косы из аналогичной матрицы Гаснера получается полная матрица Александера. Проблема точности этих представлений не решена (1982) (см. [2]).

То, что пространства $F(n)$ и $G(n)$ асферичны, дает возможность вычислить гомологии групп кос.

Гомологии $K(n)$ (см. [16]): гомологически $K(n)$ совпадает с произведением букетов окружностей, в к-рых число окружностей увеличивается от одной до $n-1$. Кольцо когомологий изоморфно внешнему градуированному кольцу, порожденному одномерными элементами $\omega_{ij} = \omega_{ji}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, с соотношениями

$\omega_{kl}\omega_{lm}+\omega_{lm}\omega_{mk}+\omega_{mk}\omega_{kl}=0$. В качестве ω_{kl} можно взять формы $\frac{1}{2\pi i}\frac{dz_k-dz_l}{z_k-z_l}$, отвечающие обходу диагоналей $z_k=z_l$.

Гомологии $B(n)$ (см. [8], [12]): гомоморфизм $B(n)\to S(n)$ может быть продолжен вложением $S(n)\to O(n)$; индуцированный гомоморфизм в когомологиях $H^*(O(n))\to H^*(B(n))$ эпиморфен, т. е. когомологии mod 2 группы $B(n)$ порождаются классами Штифеля—Уитни.

Имеется естественное отображение $G(n)$ в Ω^2S^2 — пространство сфероидов $S^2\to S^2$ (вокруг n точек берутся малые диски, к-рые канонически со степенью 1 отображаются в сферу, а все дополнение — в точку). Это отображение (см. [14]) устанавливает гомологич. эквивалентность предельного пространства $G(\infty)$ и $(\Omega^2S^2)_0$ (индекс означает, что берется компонента сфероидов степени 0). Относительно нестабильных групп гомологий $B(n)$ доказано [16], что они конечны, стабилизируются с ростом n и имеется правило повторения $H^iB(2n+1)=H^iB(2n)$. Дано [17] описание вычисления этих групп.

Приложения и обобщения. 1) Замкнутой косой наз. зацепление (n-компонентный *узел*) в $\mathbb{R}^3$, каждая компонента к-рого трансверсально пересекает полуплоскости, ограниченные одной и той же прямой — осью l замкнутой косы (см. рис. 6). Коса ω порождает замкнутую косу $\tilde{\omega}$ (замыкание ω) следующим образом. Цилиндр с основаниями на P_0 и P_1, содержащий внутри себя ω, изгибается в $\mathbb{R}^3$ так, что образующие переходят в окружности с центрами на прямой l, а основания совмещаются и каждая точка a_i совпадает с b_i. Тогда объединение нитей l_i перейдет в $\tilde{\omega}$. Обратно, каждое зацепление в $\mathbb{R}^3$ может быть представлено замкнутой косой. Эквивалентным косам отвечают изотопные зацепления и, более того, сопряженные косы дают изотопные зацепления. Обратное неверно, так как зацепление может быть представлено косами с разным числом нитей. Кроме того, косы $\omega\sigma_{n-1}$ и $\omega\sigma_{n-1}^{-1}$ не сопряжены в $B(n)$, но отвечают изотопным зацеплениям. Если две замкнутые косы эквивалентны как зацепления, то они могут быть получены одна из другой цепочкой элементарных преобразований двух типов (см. рис. 7). Эти операции интерпретируются в терминах копредставлений группы зацеплений, что дает алгебраич. переформулировку проблемы изотопности зацеплений в виде вопроса о системе групп $B(n)$. Копредставление группы зацепления $\tilde{\omega}$ имеет вид

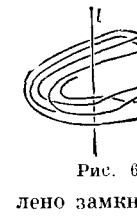


Рис. 6.

$$\{y_1,\ \ldots,\ y_n;\ y_i=A_iy_{k_i}A_i^{-1}\},$$

где соотношения определены косовым автоморфизмом $b\omega$. Обратно, каждое такое соотношение определяет косу.

2) Если разрезать поверхность рода g с помощью g непересекающихся сечений так, что получится сфера с $2g$ дырами, то гомеоморфизмы этой сферы с дырами, оставляющие на месте точки на краях дыр, определяют гомеоморфизмы поверхности, неподвижные на сечениях, и сами определяются с точностью до изотопии элементами группы $K(2g)$. Это дает представление группы кос в группе гомеотопий поверхности. Аналогично строится и представление $B(2g)$. Эти представления используются при изучении диаграмм Хегора *трехмерных многообразий*.

3) Отождествлением $\mathbb{R}^2$ с комплексной прямой $\mathbb{C}^1$ и сопоставлением неупорядоченному набору из n точек плоскости многочлена степени n, имеющего эти точки своими корнями, получается возможность отождествить

$G(n)$ с пространством многочленов с ненулевым дискриминантом. Так, этот факт позволил получить ряд результатов о непредставимости алгебраич. функций суперпозицией функций от меньшего числа переменных (см. [16]).

4) Пространства конфигураций для любого пространства X определяются аналогично $G(n)$ и $F(n)$ с заменой $\mathbb{R}^2$ на X. Фундаментальные группы этих пространств $B(X)$ и $K(X)$ наз. группами кос пространства X и чистых кос соответственно. Для многообразия M^n размерности больше 2 $\pi_1 F_n(X) \approx \Pi_{i=1}^n \pi_i M(i)$, и эти группы интереса не представляют. Для двумерного многообразия имеется естественное вложение $B(n)$ и $K(n)$ в $B_n(M^2)$ и $K_n(M^2)$, индуцированное вложением $\mathbb{R}^2 \subset M^2$. Для M^2, отличного от сферы и проективной плоскости, получается точная последовательность

$$1 \to \pi_1 K(2) \xrightarrow{e} \pi_1 K_n(M^2) \to \Pi_{i=1}^n \pi_i M_{(i)}^a;$$

для сферы гомоморфизм e является эпиморфизмом, полученным добавлением к (1) еще одного соотношения

$$\sigma_s \ldots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \ldots \sigma_1 = 1.$$

5) Если $p : X \to Y$ есть k-листное накрытие, то $p^{-1}\alpha$, где α — петля в Y, является петлей в пространстве конфигураций X, чем определяется гомоморфизм $\pi_1 Y \to B_k(X)$, к-рый усиливает монодромию накрытия и находит применение в алгебраич. геометрии.

6) Пусть $V^{\mathbb{C}}$ — комплексификация действительного векторного пространства V, а W — конечная неприводимая группа, порожденная отражениями, действующая в V (и, следовательно, в $V^{\mathbb{C}}$). Пусть s_i — порождающие отражения в плоскостях $P_i \subset V$ и D — их объединение.

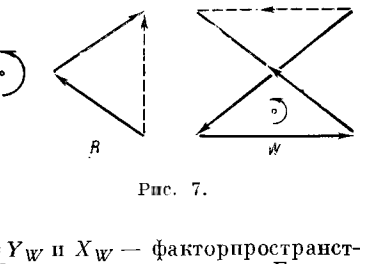


Рис. 7.

Пусть, наконец, $V^{\mathbb{C}}/D = Y_W$ и X_W — факторпространство. Группы $\pi_1 Y_W$ и $\pi_1 X_W$ наз. группами Брискорна, они естественно обобщают $K(n)$ и $B(n)$. Если $\operatorname{ord}(s_i s_j) = m_{ij}$, то $\pi_1 X_W$ имеет копредставление вида

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i \ldots = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \ldots,$$

где число сомножителей с каждой стороны равно m_{ij} (σ_i здесь соответствует камере Вейля). Для этих групп доказано, что X_W и Y_W являются пространствами типа $K(\pi, 1)$, решена проблема сопряженности. В алгебраич. геометрии пространства X_W появляются как дополнения к дискриминанту версальных деформаций рациональных особенностей (см. [12], [13]).

Лит.: [1] Artin E., «Ann. Math.», 1947, v. 48, p. 101—26, 643—49; [2] Birman J., «Ann. Math. St.», 1974, № 82; [3] Burau W., «Hamburg Abh.», 1932, Bd 9, S. 117—24; [4] Марков А. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1945, т. 16; [5] Gassner B., «Hamburg Abh.», 1961, Bd 25, S. 10—22; [6] Fadell E., Neuwirth L., «Math. Scand.», 1962, v. 10, p. 111—18; [7] Гарсайд Ф., «Математика», 1970, т. 14, № 4, с. 116—32; [8] Фукс Д. Б., «Функциональный анализ и его приложения», 1970, т. 4, № 2, с. 62—73; [9] Арнольд В. И., там же, № 1, с. 84—85; [10] Горин Е. А., Лин В. Я., «Матем. сб.», 1969, т. 78, с. 579—610; [11] Арнольд В. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1970, т. 21, с. 27—46; [12] Брискорн Э., «Математика», 1974, т. 18, № 3, с. 46—59; [13] Брискорн Э., Сайто К., там же, № 6, с. 56—79; [14] Deligne P., «Invent. Math.», 1972, v. 17, № 4, p. 273—302; [15] Лин В. Я., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 1, с. 173—74; [16] Арнольд В. И., «Матем. заметки», 1969, т. 5, № 2, с. 227—31; [17] Лин В. Я., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 17. М., 1979, с. 159—227.

А. В. Черняжский.

КОСАЯ ПРОИЗВОДНАЯ, наклонная производная,— производная функции f, заданной в окрестности точек нек-рой поверхности S, по направлению l, не совпадающему с направлением конормали нек-рого эллиптич. оператора в точках S. В краевых задачах для эллиптич. уравнений 2-го порядка К. п. может фигурировать в граничных условиях. В этом случае краевая задача наз. задачей с косой производной. См. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача с косой (наклонной) производной.

Если поле направлений l на S имеет вид $l=(l_1, \ldots, l_n)$, где l_i — функции точки $P \in S$, удовлетворяющие соотношению $\sum_{i=1}^{n}(l_i)^2=1$, то К. п. функции f как производная по направлению l имеет вид

$$\frac{df}{dl} \quad \sum_{i=1}^{n} l_i(P)\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad P=(x_1, \ldots, x_n),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — декартовы координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

А. И. Янушаускас.

КОСЕКАНС — одна из *тригонометрических функций*:

$$y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x};$$

другие обозначения: $\csc x$, $\operatorname{cosc} x$. Область определения — вся числовая прямая за исключением точек, абсциссы к-рых

$$x=\pi n, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

К.— функция неограниченная нечетная периодическая (с периодом 2π). Производная К.:

$$(\operatorname{cosec} x)'=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x.$$

Интеграл от К.:

$$\int \operatorname{cosec} x\, dx=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

К. разлагается в ряд

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}+\frac{31x^5}{15120}+\ldots, \quad 0<|x|<\pi.$$

Ю. А. Горьков.

КОСИНУС — одна из *тригонометрических функций*:

$$y=\cos x.$$

Область определения — вся числовая прямая, область значений — отрезок $[-1; 1]$; К.— функция четная периодическая с периодом 2π. К. и синус связаны формулой

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

К. и секанс связаны формулой

$$\cos x=\frac{1}{\sec x}.$$

Производная К.:

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

Интеграл от К.:

$$\int \cos x\, dx=\sin x+C.$$

К. разлагается в степенной ряд:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots, \quad -\infty<x<\infty.$$

Функция, обратная К., наз. арккосинусом.

К. и синус комплексного аргумента z связаны с показательной функцией формулой Эйлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z.$$

Если x — действительное число, то

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Если $z = ix$ (чисто мнимое число), то

$$\cos ix = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

где $\operatorname{ch} x$ — гиперболический косинус. *Ю. А. Горьков.*

КОСИНУС АМПЛИТУДЫ, эллиптический косинус,— одна из трех основных *Якоби эллиптических функций*, обозначаемая

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(u, k) = \cos \operatorname{am} u.$$

К. а. выражается следующим образом через сигма-функции Вейерштрасса, тета-функции Якоби или с помощью степенного ряда:

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}(u, k) = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_0(0)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_0(v)} =$$

$$= 1 - \frac{u^2}{2!} + (1 + 4k^2)\frac{u^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\frac{u^6}{6!} + \ldots,$$

где k — модуль эллиптической функции, $0 \leqslant k \leqslant 1$; $v = u/2\omega$, $2\omega = \pi\vartheta_3^2(0)$. При $k = 0, 1$ имеем соответственно $\operatorname{cn}(u, 0) = \cos u$, $\operatorname{cn}(u, 1) = 1/\operatorname{ch} u$.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. [с нем.], М., 1968, ч. 2, гл. 3. *Е. Д. Соломенцев.*

КОСИНУС ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ — см. *Гиперболические функции.*

КОСИНУСОВ ТЕОРЕМА: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними, т. е.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

где a, b, c — стороны треугольника, а C — угол между сторонами a и b. *Ю. А. Горьков.*

КОСИНУС-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ — см. *Фурье преобразование.*

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ — физическая постоянная, характеризующая свойства вакуума, к-рая иногда вводится в общей теории относительности. С учетом К. п. уравнения Эйнштейна имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} + \Lambda g_{ij},$$

где Λ — К. п., g_{ij} — метрический тензор, R_{ij} — тензор Риччи, R — кривизна пространства, T_{ij} — тензор энергии-импульса, c — скорость света, G — гравитационная постоянная. Эти уравнения являются уравнениями Лагранжа для действия

$$S = S_0 - \frac{c^3}{16\pi G}\int (R + 2\Lambda)\, dV,$$

где S_0 — действие для вещества, V — четырехмерный объем. К. п. была введена в общую теорию относительности [1] для того, чтобы уравнения гравитационного поля допускали пространственно однородное статическое решение (так. наз. космологическая модель Эйнштейна). После построения теории эволюционирующей космологич. модели Фридмана и получения ее наблюдательных подтверждений, отсутствие такого решения у исходных уравнений Эйнштейна не рассматривается как недостаток теории. Достоверных указаний на отличие К. п. от нуля нет. Однако наличие достаточно малой К. п. ($|\Lambda| \leqslant 10^{-55}\ см^{-2}$) не противоречит наблюдательным данным и общим физическим принципам.

Наличие К. п. может существенно изменять некоторые этапы эволюции наиболее распространенных космологич. моделей (см. [2]). В связи с этим космологич. модели с К. п. предлагалось использовать для объяснения нек-рых свойств распределения квазаров (см. [3], [4], [5]).

Член Λg_{ij} в уравнениях гравитационного поля можно включить в тензор энергии-импульса и рассматривать как тензор энергии импульса вакуума (см. [2]). В этом случае вакуум имеет плотность энергии $\varepsilon = c^4\Lambda/8\pi G$ и давление $p = -c^4\Lambda/8\pi G$, что соответствует уравнению состояния $p = -\varepsilon$. В теории с К. п. свойства вакуума сказываются уже в нерелятивистском приближении. Так, гравитационный потенциал точечной массы в теории с К. п. равен (см. [6]):

$$\varphi = -G\frac{m}{r} - \frac{\Lambda}{6}r^2c^2.$$

Член Λg_{ij} инвариантен по отношению к преобразованиям локальной группы Лоренца, что соответствует принципу лоренц-инвариантности вакуума в квантовой теории поля. Представление о К. п. как о величине, характеризующей плотность энергии и давление вакуума, в принципе позволяет связать представление о К. п. с представлениями квантовой теории поля. Имеется ряд формул, связывающих значение К. п. с фундаментальными физическими постоянными и возрастом Вселенной (см. [2]).

Лит.: [1] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 1, М., 1965, с. 601—12; [2] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Строение и эволюция Вселенной, М., 1975; [3] Petrosian V., Salpeter E., Szekeres P., «Astrophys. J.», 1967, v. 147, p. 1222—26; [4] Шкловский И. С., «Астрономический циркуляр», 1967, № 429; [5] Кардашёв Н. С., там же, № 430; [6] Толмен Р., Относительность, термодинамика и космология, пер. с англ., М., 1974.

Д. Д. Соколов.

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ — одно из основных понятий космологии как науки, описывающей Вселенную (окружающий нас мегамир) как целое, отвлекаясь от несущественных в этой связи деталей.

Математич. форма К. м. зависит от того, какая физич. теория кладется в основу описания движущейся материи: в соответствии с этим различают общерелятивистские, ньютонианские модели, модели стационарного состояния, модели с изменяющейся константой тяготения и т. д. Из них наиболее важны общерелятивистские. К К. м. можно отнести и астрономич. системы мира: системы Птолемея, Коперника и др. В современных К. м. для учета лишь существенных деталей вводится понятие об усреднении физич. характеристик по физически большому объему. Усредненные значения предполагаются непрерывными и (обычно) много раз дифференцируемыми. Возможность такого усреднения не является самоочевидной. Можно представить себе иерархическую модель Вселенной, в к-рой существуют качественно различные объекты все возрастающих масштабов. Однако имеющиеся наблюдательные данные не согласуются с такой моделью.

Процедура усреднения для общерелятивистских К. м. еще недостаточно обоснована математически. Трудность здесь состоит в том, что различные «микросостояния», дающие одну и ту же К. м. при усреднении, являются различными псевдоримановыми многообразиями, обладающими, возможно, даже различной топологич. структурой (см. также *Геометродинамика*).

Физической основой общерелятивистских К. м. является общая теория относительности Эйнштейна (иногда включая вариант с *космологической постоянной*, см. *Относительности теория*). Математич. формой общерелятивистских К. м. является геометрия в целом псевдоримановых многообразий. Считается, что топологич. структура многообразия должна предсказываться теоретически. Выбор того или иного топологич. строения К. м. затруднен тем, что модели, имеющие различную топологию и другие глобальные свойства, могут быть локально изометричны. Один из методов решения вопроса о топологии К. м. состоит в задании дополнительных постулатов, либо вытекающих из общетеоретич. соображений (напр., принцип причинно-

сти), либо являющихся опытными фактами (напр., постулат в [1] исходит из CP-неинвариантности). Обычно построение К. м. начинают с предположения того или иного типа симметрии, в связи с чем выделяются однородные и изотропные К. м., анизотропные однородные К. м. и др. (см. [2]). Впервые общерелятивистская К. м. была предложена А. Эйнштейном в 1917 (см. [3]). Эта модель была статистической однородной и изотропной и содержала Λ-член. Впоследствии была разработана нестационарная однородная изотропная модель, к-рая наз. фридмановской [4]. Предсказанная этой моделью нестационарность была обнаружена в 1929 (см. [5]). Фридмановская модель имеет варианты в зависимости от значений входящих в нее параметров. При плотности вещества ρ, меньшей или равной нек-рой критической плотности ρ_0, имеет место так наз. открытая модель, при $\rho>\rho_0$ — закрытая. Метрика фридмановской К. м. имеет в нек-рых координатах вид

$$ds^2=c^2\,dt^2-\left(\frac{Rt}{R_0}\right)^2\left[\frac{dr^2}{1-\frac{kr}{R_0^2}}+r\,(d\theta^2+\sin\theta\,d\varphi^2)\right],$$

где t — время, ρ и ρ_0 — средняя и так наз. критическая плотности вещества в данный момент времени, c — скорость света, r, θ и φ — координаты. Критическая плотность ρ_0 является нек-рой функцией времени, причем оказывается, что величина $\rho-\rho_0$ не меняет знак. При $k<1$ пространственное сечение $t=\text{const}$ является пространством Лобачевского, при $k=0$ — евклидовым пространством (однако сама К. м. не является плоской), при $k>0$ — сферическим пространством. Функция $R(t)$ (радиус мира) определяется из уравнений Эйнштейна и уравнений состояния. При одном ($k\leqslant 0$) или двух ($k>0$) значениях t функция R обращается в нуль. Одновременно обращаются в бесконечность средняя плотность, кривизна и другие физич. характеристики модели. Принято говорить, что в подобных точках К. м. имеет сингулярность. В зависимости от уравнения состояния говорят о холодной (давление $p=0$) или о горячей ($p=\varepsilon/3$, ε — плотность энергии) моделях. Открытие в 1965 изотропного равновесного излучения ($T\approx 3^\circ$K) подтверждает горячую модель. Несмотря на грубый характер фридмановских моделей, уже они передают основные черты строения Вселенной. О дальнейшем построении К. м. на их основе см. [1]. Развита теория эволюции малых отклонений К. м. от фридмановской модели. В результате этой эволюции, по-видимому, образуются скопления галактик и другие астрономич. объекты. Имеющиеся наблюдательные данные свидетельствуют в пользу того, что реальная Вселенная с хорошей степенью точности описывается фридмановской К. м. Эти данные, однако, не позволяют определить знак величины k (несколько более вероятным представляется $k<0$). Возможны иные топологич. интерпретации фридмановской К. м., к-рые получаются различными факторизациями (склейками) пространственного сечения. Наблюдательные данные накладывают лишь очень слабые ограничения на характер этих факторизаций (см. [1]). В логически последовательной теории построение К. м. должно начинаться с выбора многообразия — носителя псевдоримановой метрики. Однако метода такого выбора еще нет. Имеется лишь несколько ограничений возможного глобального строения К. м., основанных на принципе причинности и на факте несохранения комбинированной четности (см. [1]).

Предлагались многие иные К. м., в частности анизотропные однородные (см. [1], [6]).

До появления общерелятивистских К. м. неявно предполагалось, что распределение масс является изотропным, однородным и статическим. Однако это предположение приводит к так наз. гравитационному, фото-

метрическому и другим парадоксам (бесконечно большой гравитационный потенциал, бесконечно большая освещенность и др.). Общерелятивистские К. м. не содержат этих парадоксов (см. [2]). Рассматривая распределения масс, аналогичные тем, к-рые имеют место в общерелятивистских К. м., удалось получить хорошие ньютонианские приближения к нек-рым общерелятивистским К. м. (см. [1]). Эти К. м. также не содержат упомянутых парадоксов.

Лит.: [1] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., Релятивистская астрофизика, М., 1967; [2] Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, М., 1966; [3] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 1, М., 1965; [4] Friedman A. A., «Z. Phys.», 1922, Bd 10, S. 377—86; [5] Hubble E. P., «Proc. Nat. Acad. Sci.», 1929, v. 15, № 3, p. 168—73; [6] Penzias A. A., Wilson R. W., «Astrophys. J.», 1965, v. 142, p. 419—21; [7] Heckmann O., Schücking E., в кн.: Handbuch der Physik, Bd 53, B., 1959, S. 489—519; [8] Белинский В. А., Лифшиц Е. М., Халатников И. М., «Успехи физ. наук», 1970, т. 102, в. 3, с. 463—500; [9] Пенроуз Р., Структура пространства — времени, пер. с англ., М., 1972. *Д. Д. Соколов.*

КОСОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — 1) К. п. векторов — то же, что *псевдоскалярное произведение* векторов.

2) К. п. в эргодической теории — автоморфизм T пространства с мерой E (и порожденный им каскад $\{T^n\}$) такой, что E является прямым произведением двух пространств с мерой $X\times Y$ и действие T в E специальным образом согласовано с этой структурой прямого произведения. А именно:

$$T(x,\ y)=(R(x),\ S(x,\ y)),$$

где R — автоморфизм пространства с мерой X («базы»), а $S(x,\ \cdot)$ при фиксированном x является автоморфизмом пространства с мерой Y («слоя»). Понятие К. п. непосредственно переносится на случай эндоморфизмов, потоков и более общих групп и полугрупп преобразований.

Во многих примерах геометрич. и алгебраич. происхождения фазовое пространство E естественно определяется как нек-рое К. п. в топологич. смысле *(расслоение)*. Однако это не вызывает необходимости в обобщении приведенного определения К. п. в эргодической теории, ибо с метрической (в смысле теории меры) точки зрения нет различия между прямыми и косыми произведениями пространств. *Д. В. Аносов.*

3) К. п. в топологии — устаревшее название *расслоения* со структурной группой.

КОСОСИММЕТРИЧЕСКАЯ БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА, антисимметрическая билинейная форма,— билинейная форма f на унитарном A-модуле V (где A — коммутативное кольцо с единицей), удовлетворяющая условию:

$$f(v_1,\ v_2)=-f(v_2,\ v_1) \text{ для любых } v_1,\ v_2\in V.$$

Строение любой К. б. ф. f на конечномерном векторном пространстве V над полем характеристики $\neq 2$ полностью определяется ее индексом Витта $w(f)$ (см. *Витта теорема*, *Витта разложение*). А именно, V будет ортогональной (относительно f) прямой суммой ядра $V^{\perp}$ формы f и подпространства размерности $2w(f)$, на к-ром сужение формы f является нейтральной формой. Две К. б. ф. на V изометричны тогда и только тогда, когда их индексы Витта равны между собой. В частности, невырожденная К. б. ф. нейтральна, а размерность пространства V в этом случае четна.

Для любой К. б. ф. f на V существует базис $e_1,\ \ldots,\ e_n$, в к-ром матрица формы f имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & E_m & 0 \\ -E_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad (*)$$

где $m=w(f)$, а E_m — единичная матрица порядка m. Матрица К. б. ф. в произвольном базисе кососимметрична. Поэтому указанные выше свойства К. б. ф.

могут быть сформулированы и следующим образом: для любой кососимметрич. матрицы M над полем характеристики $\neq 2$ найдется такая невырожденная матрица P, что $P^{\tau}MP$ имеет вид (*). В частности ранг матрицы M четен, а определитель кососимметрич. матрицы нечетного порядка равен 0.

В случае поля характеристики 2 перечисленные утверждения сохраняют силу, если заменить условие кососимметричности формы f более сильным условием знакопеременности: $f(v, v)=0$ для любых $v \in V$ (для полей характеристики $\neq 2$ эти условия эквивалентны).

Эти результаты допускают обобщение на случай, когда A — коммутативное кольцо главных идеалов, V — свободный A-модуль конечной размерности и f — знакопеременная билинейная форма на V. А именно, в этих условиях существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$ модуля V и целое неотрицательное число $m \leqslant n/2$, что

$$0 \neq f(e_i, e_{i+m}) = \alpha_i \in A, \quad i=1, \ldots, m,$$

α_i делит α_{i+1} при $i=1, \ldots, m-1$, а в остальных случаях $f(e_i, e_j)=0$. Идеалы $A\alpha_i$ однозначно определяются указанными условиями, а модуль $V^{\perp}$ порождается элементами $e_{2m+1}, \ldots, e_n$.

Определитель знакопеременной матрицы нечетного порядка равен 0 для любого коммутативного кольца A с единицей. В случае, когда порядок знакопеременной матрицы M над A четен, элемент $\det M \in A$ является квадратом в A (см. *Пфаффиан*).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969.

В. Л. Попов.

КОСОСИММЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица A над полем характеристики $p \neq 2$ такая, что $A^{\tau}=-A$. Ранг К. м.— число четное. Любая квадратная матрица B над полем характеристики, отличной от 2, есть сумма симметрической и кососимметрической матриц:

$$B=\frac{1}{2}(B+B^{\tau})+\frac{1}{2}(B-B^{\tau}).$$

Ненулевые корни характеристич. многочлена действительной К. м.— чисто мнимые числа. Действительная К. м. подобна матрице

$$\operatorname{diag}[a_1, \ldots, a_t, 0, \ldots, 0],$$

где $a_j=\alpha_j \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, α_j — действительные числа, $j=1, \ldots, t$. Жорданова форма J комплексной К. м. обладает свойствами: 1) жорданова клетка $J_m(\lambda)$ с элементарным делителем $(x-\lambda)^m$, где $\lambda \neq 0$, повторяется в J столько же раз, сколько и клетка $J_m(-\lambda)$; 2) при четном m жорданова клетка $J_m(0)$ с элементарным делителем x^m повторяется в J четное число раз. Любая комплексная Ж. м. со свойствами 1) и 2) подобна нек-рой К. м.

Множество всех К. м. порядка n над полем k образует алгебру Ли над k относительно сложения матриц и коммутирования: $AB-BA$.

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967.

Д. А. Супруненко.

КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР — тензор над n-мерным векторным пространством E, инвариантный относительно операции *альтернирования* по нек-рой группе его индексов. Координаты К. т. обладают косой симметрией по соответствующей группе индексов, т. е. при перестановке местами двух индексов они изменяют свое значение на противоположное (в смысле аддитивного закона в поле K, над к-рым определено E), а при равенстве двух индексов они равны нулю.

Наиболее важное значение имеют К. т., не изменяющиеся при альтернировании по всей группе ковариантных или контравариантных индексов. Контравариант-

ный или ковариантный К. т. валентности r наз. r-в е к т о р о м, или п о л и в е к т о р о м, над E, соответственно над E^* — сопряженном к E пространством; они являются элементами внешней алгебры векторного пространства E. Внешнюю алгебру над E^* обычно наз. алгеброй внешних форм, отождествляя ковариантные К. т. валентности r с r-формами.

Лит. см. при ст. *Внешняя алгебра.* *И. Х. Сабитов.*

КОТАНГЕНС — одна из *тригонометрических функций*:

$$y \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$

другие обозначения: $\cot x$, $\operatorname{cotg} x$. Область определения — вся числовая ось, за исключением точек, абсциссы к-рых $x = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. К.— функция неограниченная нечетная периодическая (с периодом π). К. и тангенс связаны соотношением

$$\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x.$$

Функция, обратная К., наз. а р к к о т а н г е н с о м. Производная К.:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x.$$

Интеграл от К.:

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

К. разлагается в ряд

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \ldots, \quad 0 < |x| < \infty.$$

К. комплексного аргумента z — мероморфная функция, нули к-рой находятся в точках $z = \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. *Ю. А. Горьков.*

КОТЕЛЬНИКОВА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ — интерпретация многообразия прямых трехмерного *Лобачевского пространства* ${}^1S_3$ на комплексной плоскости $S_2(i)$ (или на ${}^1S_2(i)$). Всякой прямой пространства ${}^1S_3$ ставятся в соответствие плюккеровы координаты, определенные в этом случае с точностью до знака. С помощью этих координат прямых устанавливается соответствие между прямыми и их полярами в пространстве ${}^1S_3$, а также определяются векторы прямых и их поляр. Одна из двух взаимных поляр изображается вектором единичной длины, а другая — вектором мнимоединичной длины. Многообразие пар взаимно полярных прямых пространства ${}^1S_3$ изображается плоскостью $S_2(i)$ с радиусом кривизны, равным 1 или i, причем это соответствие является непрерывным. Изотропные прямые пространства ${}^1S_3$ изображаются точками абсолюта плоскости $S_2(i)$. Связная группа движений пространства ${}^1S_3(i)$ изоморфна группе движений плоскости $S_2(i)$.

Иногда К. и. понимается в более широком смысле как интерпретация многообразий прямых трехмерных пространств в виде комплексных или др. двумерных плоскостей (см. *Фубини интерпретация*).

К. и. впервые была предложена А. П. Котельниковым (см. [1]) и независимо от него Э. Штуди (см. [2]).

Лит.: [1] К о т е л ь н и к о в А. П., Проективная теория векторов, Казань, 1899; [2] S t u d y E., Geometrie der Dynamen, Lpz., 1903; [3] Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969. *Л. А. Сидоров.*

КОТЕСА ФОРМУЛЫ — формулы для приближенного вычисления определенных интегралов по значениям подинтегральной функции в конечном числе равноотстоящих точек, т. е. *квадратурные формулы* с равноотстоящими узлами. К. ф. имеют вид

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (*)$$

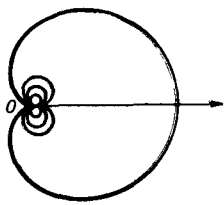
Числа $a_k^{(n)}$ наз. к о э ф ф и ц и е н т а м и К о т е с а, они определяются из того условия, чтобы формула (*) была точной для случаев, когда $f(x)$ является многочленом степени не выше n.

К. ф. предложены Р. Котесом (R. Cotes, 1722), в более общей форме были рассмотрены И. Ньютоном (I. Newton). См. *Ньютона — Котеса квадратурная формула.* *БСЭ-3.*

КОХЛЕОИДА – плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

К. имеет бесчисленное множество завитков, проходящих через полюс и касающихся полярной оси (см. рис.); полюс — особая точка бесконечной кратности. Каждая прямая, проведенная через полюс O, пересекает К. в точках, касательные в которых проходят через одну и ту же точку.



Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

КОЦЕПЬ — однородный элемент коцепной абелевой группы C^* (или, в общем случае, модуля), т. е. градуированной абелевой группы, снабженной эндоморфизмом δ степени $+1$, обладающим свойством $\delta\delta = 0$. Эндоморфизм δ наз. кограничным отображением, или кограницей.

Обычно коцепная группа C^* возникает как группа $\mathrm{Hom}(C_*, \mathbb{Z})$, или $\mathrm{Hom}(C_*, G)$, где G — произвольная абелева группа, наз. группой коэффициентов, а C_* — группа *цепей*, т. е. градуированная абелева группа, снабженная эндоморфизмом ∂ степени -1 — граничным отображением, или границей, причем $\partial\partial = 0$. При этом отображение δ в группе $C^* = \mathrm{Hom}(C_*, G)$ определяется как сопряженное к ∂: $(\delta f)\sigma = f(\partial\sigma)$, где $f \in C^*$, $\sigma \in C_*$.

Для топологич. пространства X определена группа $C_*(X)$ сингулярных цепей — абелева группа формальных конечных сумм $\Sigma a_i s_i$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, а s_i — произвольные сингулярные симплексы пространства X, т. е. непрерывные отображения в X стандартного симплекса. Сингулярной коцепью пространства X с коэффициентами в G наз. однородный элемент группы $C^*(X, G) = \mathrm{Hom}(C_*(X), G)$.

Аналогично, симплициальной n-коцепью симплициального разбиения X с коэффициентами в абелевой группе G наз. гомоморфизм $C_n(X) \to G$, где $C_n(X)$ — группа n-цепей разбиения X, т. е. группа формальных конечных сумм $\Sigma a_i s_i$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, а s_i суть n-симплексы разбиения X. В частности, коцепь в смысле Александрова — Чеха произвольного топологич. пространства X есть К. нерва нек-рого открытого покрытия пространства X.

Если X — клеточное разбиение (X_n — n-мерный остов X), то абелева группа $H^n(X_n, X_{n-1})$ наз. группой n-мерных клеточных коцепей разбиения X. Кограничный гомоморфизм $\delta: H^n(X_n, X_{n-1}) \to H^{n+1}(X_{n+1}, X_n)$ полагается совпадающим со связывающими отображениями тройки (X_{n+1}, X_n, X_{n-1}).

На практике часто группа C^* снабжается дополнительно мультипликативной структурой, т. е. представляет собой градуированную алгебру. В этих случаях кограничное отображение δ обладает свойством Лейбница: $\delta(xy) = (\delta x)y + (-1)^{\deg x} x(\delta y)$, здесь элемент $x \in C^*$ полагается однородным степени $\deg x$. Такой градуированной коцепной алгеброй является, напр., алгебра дифференциальных форм на гладком многообразии, в к-рой внешний дифференциал играет роль конграницы.

А. Ф. Харшиладзе.

КОЦИКЛ — *коцепь*, аннулируемая кограничным отображением, другими словами, коцепь, обращающаяся в нуль на ограничивающих цепях. Понятие К. обобщает понятие замкнутой дифференциальной формы на

гладком многообразии, интеграл к-рой по ограничивающей цепи равен нулю.

В соответствии с различными вариантами понятия коцепи имеются различные варианты понятия К. Напр., К. в смысле Александрова — Чеха топологич. пространства есть К. нерва нек-рого открытого покрытия его. Лишь одномерные К. с неабелевыми коэффициентами требуют отдельного обсуждения. Одномерный коцикл симплициального множества K с коэффициентами в неабелевой группе G представляет собой такую функцию $\sigma \to f(\sigma) \in G$, определенную на множестве K_1 одномерных симплексов из K, что $f(\sigma^{(0)})f(\sigma^{(2)}) = f(\sigma^{(1)})$ для любого двумерного симплекса $\sigma \in K$. Два К. f *и* g *наз.* **когомологичными**, если существует такая функция $h : K_0 \to G$, что $f(\tau)h(\tau^{(0)}) \cdot h(\tau^{(1)})g(\tau)$ для любого одномерного симплекса $\tau \in K$. Классы когомологии одномерных К. образуют пунктированное множество $H^1(K; G)$. Аналогично определяются одномерные К. и их когомологич. классы в смысле Александрова — Чеха с коэффициентами в пучке неабелевых групп. Классы когомологии этих К. связаны с расслоениями со структурной группой. *А. Ф. Харшиладзе.*

КОШИ ЗАДАЧА — одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными); состоит в отыскании решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так наз. начальным условиям (начальным данным). К. з. обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом и начальным состоянием, математич. выражением к-рых и являются уравнение и начальное условие (откуда терминология и выбор обозначений: начальные данные задаются при $t=0$, а решение отыскивается при $t \geqslant 0$). От краевых задач К. з. отличается тем, что область, в к-рой должно быть определено искомое решение, здесь заранее не указывается. Тем не менее и К. з. можно рассматривать как одну из краевых задач.

Основные вопросы, к-рые связаны с К. з., таковы.

1) Существует ли (хотя бы локально) решение К. з.?

2) Если решение существует, то какому пространству оно принадлежит, в частности, какова область его существования?

3) Является ли решение единственным?

4) Если решение единственно, то будет ли оно корректным, т. е. непрерывным (в каком-либо смысле) относительно начальных данных?

Простейшая К. з. состоит в том, что требуется найти определенную на полупрямой $x \geqslant x_0$ функцию $u(x)$, к-рая удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$\frac{du}{dx} = f(x, u) \tag{1}$$

(f — данная функция) и при $x = x_0$ принимает значение u_0:

$$u(x_0) = u_0. \tag{2}$$

Геометрически это означает, что в семействе интегральных кривых уравнения (1) на плоскости (x, u) разыскивается кривая, проходящая через точку (x_0, u_0).

Первое утверждение о существовании такой функции (при условии непрерывности f для всех x и непрерывной дифференцируемости ее по u) доказано О. Коши (A. Cauchy, 1820—30) и обобщено Э. Пикаром (E. Picard, 1891—96) (заменившим дифференцируемость условием Липшица по u). При этом решение К. з. оказывается единственным и непрерывно зависящим от начальных данных. Современные представления о К. з.— по существу далеко идущее обобщение этой задачи.

То, что вопросы 1) — 4) глубоко затрагивают суть дела, т. е. для утвердительного ответа на них требуются

определенные условия, иллюстрируется уже теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, решение К. з. для уравнения (1) с условием (2), где f задана на открытом множестве G и лишь непрерывна, существует на нек-ром интервале, зависящем от G и (x_0, u_0) (см. *Пеано теорема*), но может быть неединственным. Решение может существовать не во всех точках, где определено f.

Дословно так же формулируется К. з. для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. для обыкновенного дифференциального уравнения вида (1) с начальным условием (2), где $u = u(x)$ — функция со значением в конечномерном векторном пространстве E, $u(x_0) = u_0 \in E$, а $f(x, u)$ — функция, определенная в $\mathbb{R}^+ \times E$. Для существования, единственности и корректности решения К. з. и здесь достаточны условия Пикара.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков

$$\frac{d^n u}{dx^n} = f(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}).$$

К. з., в начальных данных к-рой участвуют, помимо самой функции, и ее производные

$$u(x_0) = u_0, \ u'(x_0) = u_0', \ \ldots, \ u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)},$$

стандартным приемом сводится к соответствующей задаче вида (1), (2).

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, не разрешимых относительно производной искомой функции, постановка К. з.— та же, разве что в большей степени опирается на ее геометрич. трактовку, но исследование может осложняться невозможностью (даже локальной) редукции уравнения к нормальной форме (1).

Если для обыкновенного дифференциального уравнения постановка и исследование К. з. не содержит принципиальных затруднений, то в случае дифференциальных уравнений с частными производными положение (и, в частности, ответы на вопросы 1) — 4)) существенно усложняется, даже если рассматриваемые функции достаточно регулярны. Это в значительной мере обусловлено многомерностью пространства независимых переменных и вытекающими из этого (алгебраическими) вопросами разрешимости. Так, условие разрешимости К. з. (в нек-ром смысле промежуточной между «обыкновенностью» и «частностью») для системы уравнений в полных дифференциалах

$$\omega^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} A_i^\alpha(x)\, dx^i = 0, \ i = 1, \ \ldots, \ n, \ \alpha = 1, \ \ldots, \ k < n,$$

состоящей в отыскании $(n-k)$-мерной интегральной поверхности, проходящей через данную точку, имеет вид

$$d\omega^\alpha \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k = 0$$

(в окрестности этой точки; здесь d, $\wedge$ — символы внешнего дифференциала и внешнего произведения соответственно) (см. *Фробениуса теорема*).

Для линейных дифференциальных уравнений с частными производными

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = f(x) \qquad (3)$$

К. з. ставится следующим образом. В нек-рой области G переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ найти решение, удовлетворяющее начальным условиям, т. е. принимающее вместе со своими производными до $(m-1)$-го порядка включительно заданные значения на нек-рой расположенной в G $(n-1)$-мерной гиперповерхности S (носители начальных условий). Начальные ус-

ловия можно задавать в виде производных от u по направлению единичной нормали ν к S:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\right|_S = \varphi_k,\ 0 \leqslant k \leqslant m-1, \tag{4}$$

где $\varphi_k(z)$, $x \in S$ — известные функции (данные Коши).

Аналогичным образом ставится К. з. и для нелинейных дифференциальных уравнений.

С К. з. связано понятие нехарактеристич. поверхности. Если неособое преобразование переменных $x \to x'$ «выпрямляет» поверхность S в окрестности точки x_0, переводя ее в участок гиперплоскости $x'_n = 0$, то в преобразованном уравнении (3) коэффициент при $\left(\frac{\partial}{\partial x'_n}\right)^m$ пропорционален величине

$$Q(x, \nu) = \sum\nolimits_{|d|=m} a_\alpha(x)\, \nu^d,\ \nu^d = \nu_1^{d_1}\nu_2^{d_2}\ldots\nu_n^{d_n}.$$

Поверхность S наз. нехарактеристической в точке x_0, если

$$Q(x_0, \nu) \neq 0. \tag{5}$$

В этом случае вблизи точки x_0 уравнений (3) можно записать в так наз. нормальной форме

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n'^m} = F\left(x'_i,\ \frac{\partial^d u}{\partial x'^d}\right),\ d = (d_1, \ldots, d_n),\ d_n < m. \tag{6}$$

К. з. обычно рассматривается, когда носителем начальных данных является характеристич. поверхность, т. е. когда условие (5) выполнено для всех $x_0 \in S$.

В теории К. з. важное место занимает *Коши — Ковалевской теорема*: если S — аналитич. поверхность в окрестности своей точки x_0, функции a_α, f и φ_k, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, аналитичны в этой окрестности и выполнено условие (5), то в окрестности точки существует аналитич. решение $u(x)$ К. з. (3), (4), к-рое в классе аналитич. функций единственно. В предположении аналитичности эта теорема справедлива и для общих нелинейных уравнений, если они могут быть приведены к нормальной форме (6), а также для систем таких уравнений. Эта теорема носит универсальный характер, поскольку она применима к аналитич. уравнениям независимо от их типа (эллиптического, гиперболического и т. д.) и дает существование решения в малом. Решение единственно в классе неаналитич. функций.

Для дифференциальных уравнений с частными производными порядка выше 1-го К. з. может оказаться некорректной, если в условиях теоремы Коши — Ковалевской отказаться от аналитичности уравнения или данных Коши. Иллюстрацией служит пример Адамара: К. з. для уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y),\quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) = 0$$

не имеет решения, если функция $\varphi_0(x, y)$ не является аналитической.

Широкий класс уравнений, для к-рых К. з. поставлена корректно, составляют гиперболич. уравнения. В этом случае К. з. носит глобальный характер, однако условия нехарактеристичности S при этом недостаточно. Необходимо, чтобы S была поверхностью пространственного типа. Модельным уравнением гиперболич. типа является волновое уравнение

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum\nolimits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \tag{7}$$

рассматриваемое в $(n+1)$-мерной области переменных

$(x,\ t)=(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)$. К. з. для этого уравнения с данными

$$u\ (x,\ 0)=\varphi_0\ (x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\ (x,\ 0)=\varphi_1\ (x)$$

на гиперплоскости $t=0$ однозначно разрешима для любых достаточно гладких функций φ_0, φ_1, и решение непрерывно зависит в метрике пространств C^k от этих функций. Для случаев $n=1$, $n=2$ и $n=3$ явный вид этого решения дается формулами Д'Аламбера, Пуассона и Кирхгофа соответственно:

$$u\ (x,\ t)=\frac{1}{2}\ [\varphi_0\ (x+t)+\varphi_0\ (x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_1\ (\tau)\ d\tau;$$

$$u\ (x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{|y-x|^2\leqslant t^2}\frac{\varphi_1\ (y)\ dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|y-x|^2\leqslant t^2}\frac{\varphi_0(y)\,dy}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}},$$

где

$$x=(x_1,\ x_2),\ y=(y_1,\ y_2);$$

$$u\ (x,\ t)=\frac{1}{4\pi}\,t\int_{|\xi|=1}\varphi_1\ (x+t\xi)\ d\sigma+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\int_{|\xi|=1}\varphi_0\ (x+t\xi)\ d\sigma\right],$$

где $x=(x_1, x_2, x_3)$, $\xi=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы $|\xi|=1$.

Множество точек на плоскости $t=0$, данные Коши на к-ром вполне определяют значение $u(x,\ t)$ решения волнового уравнения (7) в точке $(x,\ t)$, наз. областью зависимости для этой точки. Областями зависимости точки $(x,\ t)$ в случаях $n=1$, $n=2$ и $n=3$ являются отрезок, круг и шар, определяемые соотношением $|y-x|^2\leqslant t^2$ (в соответствующем пространстве $\mathbb{R}^n$). Если носителем данных Коши является нек-рая область S гиперплоскости $t=0$, то данные Коши в этой области влияют на решение во всех точках $(x,\ t)$ множества, для к-рого пересечение $S\cap\{|y-x|^2\leqslant t^2\}$ не пусто; это множество наз. областью влияния.

Множество точек $(x,\ t)\in\mathbb{R}^{n+1}$, на к-ром решение u вполне определяется по данным Коши на S, наз. областью определения $u(x,\ t)$ с начальными данными на S. В случае $n=1$, $n=2$ и $n=3$ область определения образуют все точки $(x,\ t)$, для к-рых отрезок, круг и шар $|y-x|^2\leqslant t^2$ соответственно расположены в S.

Эти результаты распространяются на более общий случай, когда носителем данных Коши является поверхность S пространственного типа, то есть поверхность, для к-рой величина Q в (5) сохраняет на S положительное значение.

Кроме К. з., для гиперболич. уравнений корректно поставлены и другие задачи, напр. *Коши характеристическая задача*, смешанная начально-краевая задача; в последней задаче решение имеется в $(n+1)$-мерном цилиндре с образующей, параллельной оси t, и с основанием S, представляющем собой нек-рую область в пространстве переменных $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ с границей Г. Носителем начальных условий служит S, а на боковой поверхности $\Gamma\times\{t>0\}$ цилиндра задается значение функции или ее нормальной производной (в случае уравнений 2-го порядка) или более общие краевые условия.

Для вырождающихся уравнений К. з. имеет свои особенности. Напр., если уравнение гиперболич. типа и носителем данных Коши является поверхность, на к-рой уравнение параболически вырождается, то в зависимости от характера вырождения принятие начальных условий может осуществляться с нек-рым весом.

Лит.: [1] Ковалевская С. В., Научные работы, М., 1948; [2] Адамар Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, пер. с франц., М., 1978; [3] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [4] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [5]

Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [6] Мизохата С., Теория уравнений с частными производными, пер. с япон., М., 1977; [7] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [8] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965. *А. П. Солдатов.*

КОШИ ЗАДАЧА; численные методы решения для обыкновенного дифференциального уравнения. Задачей Коши наз. задача определения функции или нескольких функций, удовлетворяющих одному или, соответственно, системе дифференциальных уравнений и принимающих заданные значения в нек-рой фиксированной точке. Пусть

$$y(x)=\{y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)\},$$

$$f(x,\ y)=\{f_1(x,\ y),\ f_2(x,\ y),\ \ldots,\ f_n(x,\ y)\}$$

— вектор-функции, определенные и непрерывные соответственно на отрезке $I=\{x,\ |\ x-a\ |\leqslant A\}$ и в замкнутой области $\Pi=\{(x,\ y),\ |x-a|\leqslant A,\ \|y-b\|\leqslant B\}$, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$. В этих обозначениях К. з. для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка записывается в виде

$$y'(x)=f(x,\ y),\ y(x_0)=y_0,\ x_0\in I,\ y_0\in\Pi. \qquad (1)$$

Вводя соответствующим образом новые неизвестные функции, можно привести к такому виду К. з. для любой системы обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка.

Решение задачи (1) существует, если функция $f(x, y)$ непрерывна в П. Для того чтобы это решение было единственным, достаточно, чтобы выполнялось условие Осгуда:

$$\|f(x,\ y_1)-f(x,\ y_2)\|\leqslant\omega(\|y_1-y_2\|), \qquad (2)$$

где функция $\omega(t)$ — такова, что

$$\int_{\varepsilon}^{c}\frac{dt}{\omega(t)}\longrightarrow\infty,\ \varepsilon\longrightarrow 0,\ c>0,$$

или более сильное условие Липшица:

$$\|f(x,\ y_1)-f(x,\ y_2)\|\leqslant L\|y_1-y_2\|. \qquad (3)$$

Величина L наз. постоянной Липшица. Если функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по y, то в качестве постоянной Липшица можно взять величину

$$L=\sup_{x\in I,\ y\in\Pi}\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|. \qquad (4)$$

Оценка (3) с постоянной Липшица (4) оказывается в ряде случаев слишком грубой для успешного применения численных методов решения К. з., несмотря на то, что теоретически решение этой задачи существует и оно единственно. Это происходит, в частности, в тех случаях, когда собственные значения матрицы $\frac{\partial f}{\partial y}$ имеют «большой разброс», т. е. наибольшее собственное значение в сотни или даже тысячи раз больше наименьшего собственного значения. Такие системы дифференциальных уравнений наз. жесткими системами, а соответствующие задачи — жесткими задачами Коши. Одним из источников возникновения жестких систем является сведение уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, напр. с помощью метода прямых.

Численные методы для обыкновенных дифференциальных уравнений представляют собой, как правило, одно или несколько соотношений, связывающих искомую функцию $y(x)$ в дискретной последовательности точке x_k, $k=0, 1, \ldots$, множество к-рых наз. сеткой. Ос-

новы численных методов вообще и для дифференциальных уравнений в частности были заложены Л. Эйлером (L. Euler). Его именем называется один из самых простых методов решения К. з., к-рый состоит в следующем. Пусть решение задачи (1) в окрестности точки x_k разложено в ряд Тейлора

$$y(x) = y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k) + y''(x_k)\frac{(x-x_k)^2}{2} + \dots$$

Если величина $x - x_k$ мала, то, отбрасывая члены порядка $(x-x_k)^2$ и более высокого, получают приближенное равенство

$$y(x) \approx y(x_k) + y'(x_k)(x - x_k), \qquad y'(x_k) = f(x_k,\ y(x_k)).$$

В точке x_{k+1} приближенное решение может быть вычислено по формуле

$$y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) f(x_k,\ y_k).$$

Это соотношение и наз. м е т о д о м Э й л е р а.

В дальнейшем численные методы были значительно усовершенствованы. Это развитие велось в основном в двух направлениях: методы, получившие в дальнейшем название *Рунге—Кутта методов* и конечноразностные методы, важнейшим представителем к-рых является *Адамса метод*.

К достоинствам методов Рунге — Кутта следует отнести то, что алгоритмы, получающиеся на их основе, являются однородными, т. е. не изменяющимися при переходе от одной точки сетки к другой. Кроме того, в методах Рунге — Кутта можно изменять шаг интегрирования в соответствии с требуемой точностью вычислений без значительного усложнения самого алгоритма (см. *Кутта — Мерсона метод*, *Рунге правило*). На основе этих методов созданы достаточно надежные двусторонние методы. Основным недостатком является то, что для вычисления приближенного решения в одной точке сетки требуется несколько вычислений правой части $f(x, y)$ дифференциального уравнения (1). Это приводит, в особенности при сложных правых частях, к значительному увеличению времени вычислений.

В конечноразностных методах, в том числе в методе Адамса, требуется лишь одно вычисление правой части на один узел сетки. Это является главным достоинством конечноразностных методов. Однако для того чтобы начать вычисления по какой-либо конечноразностной формуле, необходимо прежде вычислить дополнительные «начальные значения». Это приводит к тому, что алгоритм оказывается неоднородным — первые несколько значений должны вычисляться по другим формулам. Более существенным недостатком конечноразностных методов является невозможность простого изменения шага интегрирования, т. е. необходимость использовать сетки с постоянным шагом.

На основе конечноразностных методов разработаны так. наз. методы предсказания — уточнения, к-рые представляют собой пару конечноразностных формул, одна из к-рых (предсказывающая) является, как правило, явной, а вторая (уточняющая) — неявной, напр., предсказывающая:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}),$$

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n),$$

уточняющая:

$$f_n = f(x_n,\ y_n), \quad \bar{f}_n = f(x_n,\ \bar{y}_n).$$

Предсказывающе-уточняющие методы находят успешное применение при решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Несмотря на то, что дифференциальные уравнения высокого порядка формально сводятся к системе урав-

нений 1-го порядка, методы, приспособленные к конкретному виду дифференциального уравнения, иногда оказываются значительно более эффективными. В связи с этим развиваются конечноразностные методы, использующие производные высшего порядка, напр. *Штермера метод*.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Modern Numerical Methods for ordinary differential equations, Oxf., 1976.

В. В. Поспелов.

КОШИ ИНТЕГРАЛ — 1) К. и.— определенный интеграл от непрерывной функции одного действительного переменного. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, n$; предел

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i$$

наз. определенным интегралом по Коши от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

К. и.— частный случай *Римана интеграла*. Определение дано О. Коши в [1].

Лит.: [1] Cauchy A. L., Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, t. 1, P., 1823.

Л. Д. Кудрявцев.

2) К. и.— интеграл с ядром Коши

$$\frac{1}{2\pi i\,(\zeta-z)},$$

выражающий значения регулярной аналитич. функции $f(z)$ внутри контура L через ее значения на L. Точнее, пусть $f(z)$ — регулярная аналитич. функция комплексного переменного z в области D и L — замкнутая кусочно гладкая жорданова кривая, расположенная в D вместе со своей внутренностью G, причем обход L совершается против часовой стрелки. Тогда справедлива основная в теории аналитич. функций одного комплексного переменного интегральная формула Коши:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (1)$$

Стоящий справа в формуле (1) интеграл и наз. интегралом Коши.

Впервые, по-видимому, К. и., применительно к частным ситуациям, появляется в работах О. Коши [1].

К. и. характеризуется, таким образом, двумя условиями: 1) К. и. берется по замкнутой гладкой или хотя бы кусочно гладкой кривой L; 2) подинтегральная функция К. и. имеет вид

$$\frac{f(\zeta)}{2\pi i\,(\zeta-z)},$$

где $\zeta\in L$, а $f(z)$ — регулярная аналитич. функция на L и внутри L. Если в К. и. $z\in C\overline{G}$, т. е. если z расположена во внешности кривой L, то при сохранении условий 1) и 2):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=0, \quad z\in C\overline{G}. \qquad (2)$$

В частности, если L — окружность радиуса ρ с центром z, т. е.

$$L=\{\zeta=z+\rho e^{i\theta};\quad 0\leqslant\theta<2\pi\},$$

то из (1) следует

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z+\rho^{i\theta})\,d\theta,$$

т. е. значение $f(z)$ в любой точке $z\in D$ равно среднему арифметическому ее значений на любой достаточно малой окружности $L\subset D$ с центром z. Формула (1) позво-

ляет получить и все остальные элементарные свойства аналитич. функций.

Если, с другой стороны, $f(z)$ является регулярной аналитич. функцией в бесконечной области CG – внешности замкнутой кривой L и на L,

$$f(\infty)=\lim_{z\to\infty} f(z),$$

то справедлива интегральная формула Коши для бесконечной области:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\begin{cases} f(\infty)-f(z), & z\in C\overline{G};\\ f(\infty), & z\in G.\end{cases}$$

Пусть теперь Γ — некоторая, не обязательно замкнутая, кусочно гладкая кривая, расположенная в конечной плоскости $z\neq\infty$, $\varphi(\zeta)$ — непрерывная комплексная функция на Γ и z — точка, не лежащая на Γ. Интегралом типа Коши (и. т. К.) наз. обобщение К. и. в виде

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},\quad z\notin\Gamma. \tag{3}$$

Функцию $\varphi(\zeta)$ наз. иногда плотностью интеграла типа Коши. Простейшие свойства и. т. К.:

1) $F(z)$ — регулярная аналитич. функция переменного z в любой области, не содержащей точек Γ;

2) производные $F^{(n)}(z)$ выражаются формулами

$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}},\quad z\notin\Gamma;\quad n=0,\ 1,\ \ldots;$$

3) функция $F(z)$ регулярна в бесконечности, причем $F(\infty)=0$, $F(z)=O(1/z)$ при $z\to\infty$.

С точки зрения общей теории аналитич. функций и применений к механике и физике, основное значение имеет вопрос о существовании граничных значений и. т. К. при приближении к Γ и об их аналитич. выражении. К.и. (1) всюду внутри L равен $f(z)$, а во внешности он тождественно равен нулю. Поэтому, когда и.т.К. (3) обращается в К. и., т. е. когда выполняются условия 1) и 2), функция $F(z)$ при приближении к L слева (т. е. изнутри) имеет граничные значения $F^+(\zeta_0)=f(\zeta_0)$, и при этих значениях на L она непрерывна в каждой точке $\zeta_0\in L$ слева от L; при приближении к L справа (т. е. извне) $F(z)$ имеет граничные значения нуль, $F^-(\zeta_0)=0$, и при этих значениях на L она непрерывна в каждой точке $\zeta_0\in L$ справа от L. Т. обр., для К. и.

$$F^+(\zeta_0)-F^-(\zeta_0)=f(\zeta_0).$$

Для и. т. К. общего вида дело обстоит несколько сложнее. Пусть кривая Γ задана уравнением $\zeta=\zeta(s)$, s — длина ее дуги, отсчитываемая от какой-либо фиксированной точки, $\zeta_0=\zeta(s_0)$ — произвольно фиксированная точка на Γ и Γ_ε — та часть кривой Γ, к-рая остается после удаления из Γ меньшей дуги с концами $\zeta(s_0-\varepsilon)$ и $\zeta(s_0+\varepsilon)$. Если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0},\quad \zeta_0\in\Gamma, \tag{4}$$

то он наз. сингулярным, или особым, интегралом. Доказано, напр., что сингулярный интеграл (4) существует, если кривая Γ гладкая в окрестности отличной от концов Γ точки ζ_0, а плотность $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$|\varphi(\zeta')-\varphi(\zeta'')|\leqslant C\,|\zeta'-\zeta''|^\mu,\quad \mu>0.$$

При этих условиях существуют и граничные значения, к-рые выражаются формулами Сохоцкого:

$$F^\pm(\zeta_0)=\pm\frac{1}{2}\varphi(\zeta_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0},\quad \zeta_0\in\Gamma, \tag{5}$$

а функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ — непрерывны в окрестности

$\zeta_0 \in \Gamma$ соответственно слева и справа от Γ. В случае К. и. сингулярный интеграл равен $\frac{f(\zeta_0)}{2}$, $F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = f(\zeta_0)$, $F^+(\zeta_0) + F^-(\zeta_0) = f(\zeta_0)$.

В эквивалентной форме формулы (5) записываются так:

$$F^+(\zeta_0) - F^-(\zeta_0) = \varphi(\zeta_0), \tag{6}$$

$$F^+(\zeta_0) + F^-(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \zeta_0}, \quad \zeta_0 \in \Gamma. \tag{7}$$

Формулы Сохоцкого (5) — (7) имеют основное значение при решении *граничных задач теории аналитических функций*, *сингулярных интегральных уравнений*, связанных с и. т. К., а также при решении ряда задач гидродинамики, теории упругости и др.

Пусть Γ — произвольная, для простоты замкнутая, спрямляемая кривая длины l, $\psi = \psi(s)$ — угол между направлением оси Ox и касательной к Γ в точке $\zeta = \zeta(s) \in \Gamma$, рассматриваемый как функция длины дуги s, $\Phi(s)$ — комплексная функция длины дуги s ограниченной вариации на $[0, l]$. Выражение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{i\psi} d\Phi(s)}{\zeta - z}, \quad \zeta = \zeta(s), \quad z \notin \Gamma, \tag{8}$$

наз. *интегралом типа Коши — Стилтьеса* (и. т. К.—С.). Иначе говоря, и. т. К.— С. есть и. т. К. по произвольной конечной комплексной борелевской мере, сосредоточенной на Γ. Если функция $\Phi(s)$ абсолютно непрерывна, то и. т. К.—С. превращается в *интеграл типа Коши — Лебега* (и. т. К.—Л.), часто называемый также просто *интегралом типа Коши*:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \notin \Gamma, \tag{9}$$

где $\varphi(\zeta) = \varphi[\zeta(s)] - \Phi'(s)$.

Пусть ζ_0—точка Γ, в к-рой существует определенная касательная, наклоненная к оси Ox под углом ψ_0; такие точки имеются на спрямляемой кривой почти всюду. Пусть точка z находится на нек-рой прямой, проходящей через ζ_0 и наклоненной к нормали под углом α_0, на расстоянии $|z - \zeta_0| = \varepsilon$, т. е. $z = \zeta_0 \pm \varepsilon i e^{i(\psi_0 + \alpha_0)}$. Разность между и. т. К.— С. (8) и интегралом по Γ_ε

$$W(\zeta_0;\ \varepsilon,\ \alpha_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_\Gamma \frac{e^{i\psi} d\Phi(s)}{\zeta - z} - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{i\psi} d\Phi(s)}{\zeta - \zeta_0} \right]$$

определена во всех точках $\zeta_0 \in \Gamma$, в к-рых существует определенная касательная, т. е. почти всюду на Γ. В теории и. т. К.—С. важное значение имеет *основная лемма Привалова*: предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to 0} W(\zeta_0;\ \varepsilon,\ \alpha_0) = \pm\, \Phi'(\zeta_0)$$

осуществляется для всех точек $\zeta_0 \in \Gamma$, кроме, быть может, точек множества меры нуль на Γ, не зависящего от α_0, равномерно относительно α_0 в любом угле $|\alpha_0| < \pi/2 - \delta$, $\delta > 0$. Если сингулярный интеграл существует почти всюду на Γ, то и. т. К.—С. имеет почти всюду на Γ угловые граничные значения $F^\pm(\zeta_0)$, для к-рых справедливы *формулы Сохоцкого*:

$$F^\pm(\zeta_0) = \pm \frac{1}{2} \Phi'(s_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{i\psi} d\Phi(s)}{\zeta - \zeta_0}, \quad \zeta_0 \in \Gamma. \tag{10}$$

Верно и обратное: если и. т. К.—С. почти всюду на Γ имеет угловые граничные значения изнутри и извне Γ, то сингулярный интеграл существует и формулы (10) справедливы почти всюду на Γ. Полного решения проблемы необходимых и достаточных условий существования граничных значений в достаточно простых терминах для и. т. К.—С. и даже для и. т. К.—Л. пока (1982) не получено.

В отличие от рассмотренного выше случая и. т. К. по гладкой кривой Г, даже при наличии угловых граничных значений, и. т. К.—С. уже, вообще говоря, не является непрерывной функцией в окрестности точки $\zeta_0 \in \Gamma$ слева или справа от Г. Здесь известно, напр., что и. т. К.—Л. (9) непрерывен в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной спрямляемым контуром Г, при дополнительном условии, что его плотность $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет на Г условию Липшица

$$|\varphi(\zeta') - \varphi(\zeta'')| \leqslant C\,|\zeta' - \zeta''|, \quad \zeta', \zeta'' \in \Gamma.$$

Относительно и. т. К.—Л. (9) говорят, что он обращается в К. и.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (11)$$

понимаемый в смысле Лебега, если угловые граничные значения $F^+(\zeta_0)$ изнутри Г совпадают с $\varphi(\zeta_0)$ почти всюду на контуре Г. Иначе говоря, интеграл (9) обращается в К. и. (11), если угловые граничные значения $F^-(\zeta_0)$ извне Г равны нулю почти всюду на Г. Относящаяся сюда **теорема Голубева — Привалова** гласит: суммируемая функция $\varphi(\zeta)$ на Г тогда и только тогда представляет собой угловые граничные значения нек-рого К. и. изнутри Г, когда равны нулю все моменты

$$\int_\Gamma \zeta^n \varphi(\zeta)\,d\zeta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (12)$$

Если выполнены аналогичные (12) условия

$$\int_\Gamma \zeta^n e^{i\psi}\,d\Phi(s) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (13)$$

то и. т. К.—С. (8) обращается в **интеграл Коши — Стилтьеса** (и. К.—С.):

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{i\psi}\,d\Phi(s)}{\zeta - z}, \qquad (14)$$

т. е. угловые граничные значения $F^+(\zeta_0)$ изнутри Г совпадают с производной $\Phi'(s_0)$ почти всюду на Г или, иначе говоря, угловые граничные значения $F^-(\zeta_0)$ извне Г равны нулю почти всюду на Г. Условия (13) сразу обеспечивают абсолютную непрерывность функции $\Phi(s)$ на отрезке $[0, l]$, а следовательно, на самом деле в этом случае и. К.—С. (14) является **интегралом Коши — Лебега** (и. К.—Л.) с плотностью $\varphi(\zeta) = \varphi[\zeta(s)] = \Phi'(s)$. Таким образом, класс функций, представимых и. К.—С., совпадает с классом функций, представимых и. К.—Л.

Важной задачей представляется внутренняя характеризация классов функций, регулярных в области D, ограниченной замкнутой спрямляемой кривой Г, и представимых К. и. (11), и. т. К.—Л. (9) или и. т. К.—С. (8) (о наиболее важных классах $A(D)$, $B(D) = H_\infty(D)$, $H_p(D)$ и $N^*(D)$ см. в ст. *Граничные свойства аналитических функций*).

В простейшем случае, когда $D = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг и $\Gamma = \{z: |z| = 1\}$ — единичная окружность, и. т. К.—С., принимающий в этом случае вид

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta\,d\Phi(\theta)}{\zeta - z}, \quad |z| < 1, \quad \zeta = e^{i\theta}, \qquad (15)$$

изображает всегда функцию класса H_p, $0 < p < 1$. Обратная теорема неверна: совокупность функций классов H_p, $0 < p < 1$, шире, чем совокупность функций, представимых в виде (15). Напротив, совокупность функций, представимых в D и. К.—С. или К. и., совпадает с классом H_1.

В случае произвольной односвязной области D, ограниченной спрямляемой кривой Г, класс функций, представимых в D и. К.—С. или К. и., совпадает с классом Смирнова E_1 (см. *Граничные свойства аналитических*

функций). Характеристики классов функций, представимых и. т. К.—С. или и. т. К.—Л., значительно сложнее.

Пусть $f(z)$ — произвольная (не аналитическая) функция класса C^1 в конечной замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кусочно гладкой жордановой кривой L. Иногда интегральной формулой Коши наз. также следующее обобщение классич. формулы (1):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\,\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta - z} = \begin{cases} f(z), & z \in D; \\ 0, & z \in C\overline{D}, \end{cases} \qquad (16)$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi} + i\frac{\partial f}{\partial \eta}\right), \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Эта формула встречается, начиная, по-видимому, с работ Д. Помпею (D. Pompeiu, 1912). Она известна также как формула Помпею, формула Бореля — Помпею, формула Коши — Грина и находит многочисленные приложения в теории обобщенных аналитич. функций, сингулярных интегральных уравнений и в различных прикладных вопросах.

Пусть $f(z)$ — регулярная аналитич. функция многих комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$ в замкнутом поликруге $\overline{D}$, $D=\{z\in\mathbb{C}^n: |z_\nu - a_\nu| < r_\nu\}$. Тогда в каждой точке D функция $f(z)$ представима кратным интегралом Коши:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_T \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \qquad (17)$$

где $T=\{\zeta\in\mathbb{C}^n: |\zeta_\nu - a_\nu| = r_\nu, \ \nu=1, \ldots, n\}$ — остов поликруга, $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, $d\zeta = d\zeta_1 \ldots d\zeta_n$, $\zeta - z = (\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n)$. Формула (17) дает простейший аналог К. и. для окружности $L=\{z\in\mathbb{C}: |z-a|=r\}$, но при $n>1$ интегрирование в (17) распространено уже не на всю границу поликруга, а лишь на его остов. Вообще, пусть $D=D_1\times D_2\times \ldots \times D_n$ — поликруговая область в $\mathbb{C}^n$, составленная как произведение односвязных плоских областей D_ν с гладкими границами $\partial D_\nu = \{z_\nu = z_\nu(t_\nu), \ 0 \leqslant t_\nu \leqslant 1\}$, $T = \partial D_1 \times \partial D_2 \times \ldots \partial D_n$ — остов D, представляющий собой гладкое n-мерное многообразие. Формула (17) распространяется и на этот случай.

Большое значение в теории аналитич. функций многих комплексных переменных имеют более глубокие обобщения интегральной формулы Коши, в первую очередь такие, как *Лере формула*, названная самим Ж. Лере (J. Leray) формулой Коши — Фантапье, и *Бохнера — Мартинелли представление*. В связи с этим при $n>1$ изучаются в основном граничные свойства интегральных представлений, отличных от (17).

Лит.: [1] Cauchy A. L., Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites, Turin, 1831 (или Œuvres complètes, sér. 1, t. 8, P., 1892); [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, 1976; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [5] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [6] Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1918; [7] его же, Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [8] Хавинсон С. Я., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1963, М., 1965, с. 5—80; [9] Хведелидзе Б. В., в кн.: «Современные проблемы математики», т. 7, М., 1975, с. 5—162; [10] Calderón A. P., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1977, v. 74, № 4, p. 1324—27.

Е. Д. Соломенцев.

КОШИ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА: если $f(z)$ — регулярная аналитич. функция комплексного переменного z в односвязной области D на комплексной плоскости $\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$, то интеграл от $f(z)$, взятый по любой замкнутой спрямляемой кривой γ, расположенной в D, равен нулю, т. е.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Эквивалентная формулировка К. и. т. утверждает, что интеграл

$$\int_a^b f(z)\,dz, \quad a,\ b \in D,$$

не зависит от выбора пути интегрирования, соединяющего фиксированные точки a и b в области D. Именно такой в сущности и была первоначальная формулировка К. и. т., предложенная О. Коши в 1825 (см. [1]); близкие формулировки имеются в письмах К. Гаусса (C. Gauss, 1811). Доказательство О. Коши содержало дополнительное предположение непрерывности производной $f'(z)$; первое полное доказательство дано Э. Гурса [2]. Свойство аналитич. функций, выражаемое К. и. т., полностью характеризует последние (см. *Мореры теорема*), и потому из К. и. т. выводятся все основные свойства аналитич. функций.

В случае произвольной области D на плоскости $\mathbb{C}$ или на римановой поверхности К. и. т. может быть сформулирована так: если $f(z)$ — регулярная аналитич. функция в области D, то интеграл от $f(z)$ по любой спрямляемой замкнутой кривой $\gamma \subset D$, гомотопной нулю в D, равен нулю.

Распространением К. и. т. на случай аналитич. функций многих комплексных переменных является т е о р е м а К о ш и — П у а н к а р е: если $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$,— регулярная аналитич. функция в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, то для любой $(n+1)$-мерной поверхности $G \subset D$ с гладкой границей $\gamma = \partial G$ интеграл

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

где $f(z)dz$ — сокращенное обозначение голоморфной дифференциальной формы

$$f(z)\,dz = f(z_1, \ldots, z_n)\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n.$$

При $n=1$ поверхность G и область D имеют одинаковую размерность, $n+1=2n$ (случай классической К. и. т.); при $n>1$ размерность G меньше размерности D, $n+1<2n$. См. также *Вычет, Коши интеграл*.

Лит.: [1] C a u c h y A. L., Œuvres complètes, sér. 1, t. 4, P., 1890, p. 285; [2] G o u r s a t E., «Acta math.», 1884, v. 4, p. 197—200; [3] М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [4] В л а д и м и р о в В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [5] Ш а б а т Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

КОШИ КРИТЕРИЙ — 1) К. к. с х о д и м о с т и ч и с л о в о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т и: для того чтобы последовательность чисел (действительных или комплексных) x_n, $n=1, 2, \ldots$, имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ выполнялось неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

К. к. сходимости числовой последовательности обобщается в критерий сходимости точек полного метрич. пространства.

Последовательность точек $\{x_n\}$ полного метрич. пространства сходится в том и только в том случае, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что для всех $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$.

2) К. к. с у щ е с т в о в а н и я п р е д е л а ф у н к ц и й n п е р е м е н н ы х ($n \geqslant 1$). Пусть функция f определена на множестве X n-мерного пространства R^n и принимает числовые (действительные или комплексные) значения, a — предельная точка множества X (или символ ∞, в этом случае множество X неограничено). Конечный предел $\lim\limits_{x \to a,\ x \in X} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ найдется та-

кая окрестность $U=U(a)$ точки a, что для любых $x'\in U\cap X$ и $x''\in U\cap X$ выполняется неравенство

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

Этот критерий обобщается на более общие отображения: пусть X — топологич. пространство, a — его предельная точка, в к-рой выполняется первая аксиома счетности, Y — полное метрич. пространство и f — отображение X в Y. Для того чтобы существовал предел

$$\lim_{x\to a} f(x),$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала окрестность $U=U(a)$ точки a такая, что для всех $x'\in U$ и $x''\in U$ выполнялось неравенство

$$\rho(f(x''),\ f(x'))<\varepsilon.$$

3) К. к. равномерной сходимости семейства функций. Пусть X — некоторое множество, Y — топологич. пространство, удовлетворяющее в предельной точке $y_0\in Y$ первой аксиоме счетности, R — полное метрич. пространство, $f(x,\ y)$ — отображение множества $X\times Y$ в R, $x\in X$, $y\in Y$. Семейство отображений $f(x,\ y)$, отображающих при фиксированном $y\in Y$ множество X в R, является равномерно сходящимся на X при $y\to y_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность $U=U(y_0)$ точки y_0, что для всех $y'\in U$, $y''\in U$ и всех $x\in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x,\ y''),\ f(x,\ y'))<\varepsilon.$$

В частности, если Y — множество натуральных чисел и $f_n(x)=f(x,\ n)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X при $n\to\infty$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $x\in X$ и всех номеров $n\geqslant N$ и $m\geqslant N$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

4) К. к. сходимости ряда: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n\geqslant N$ и всех целых $p\geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{p}u_{n+k}\right|<\varepsilon.$$

Для кратных рядов аналогичный критерий сходимости наз. критерием Коши — Штольца. Напр., для того чтобы двойной ряд

$$\sum_{n,\ m=1}^{\infty}u_{nm}$$

сходился по прямоугольным частичным суммам

$$S_{nm}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}u_{kl},$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое N, что при всех $n\geqslant N$, $m\geqslant N$ и всех целых $p\geqslant 0$ и $q\geqslant 0$ выполнялось неравенство

$$|S_{n+p,\ m+q}-S_{nm}|<\varepsilon.$$

Эти критерии обобщаются на ряды в банаховых пространствах (вместо абсолютной величины берутся нормы соответствующих элементов).

5) К. к. равномерной сходимости ряда: пусть $u_n=u_n(x)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, — функции, определенные на нек-ром множестве X и принимающие числовые значения. Для того чтобы ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}u_n(x)$$

равномерно сходился на множестве X, необходимо и

достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер N, что для всех $n\geqslant N$, целых $p\geqslant 0$ и $x\in X$ выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{m+k}(x)\right|<\varepsilon.$$

Этот критерий также переносится на кратные ряды, причем не только на числовые, но и на ряды, члены к-рых принадлежат банаховым пространствам, т. е. когда $u_n(x)$ являются отображениями множества X в нек-рое банахово пространство.

6) К. к. сходимости несобственных интегралов: пусть функция f определена на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty<a<b\leqslant+\infty$, принимает на нем числовые значения и при любом $c\in(a, b)$ интегрируема (по Риману или по Лебегу) на отрезке $[a, c]$. Для того чтобы несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало такое $\eta\in(a, b)$, что для всех η' и η'', удовлетворяющих условию $\eta<\eta'<b$, $\eta<\eta''<b$, выполнялось неравенство

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Аналогичным образом критерий формулируется и для несобственных интегралов других типов, а также обобщается на случай, когда функция f зависит от нескольких переменных и ее значения лежат в банаховом пространстве.

7) К. к. равномерной сходимости несобственных интегралов: пусть функция $f(x, y)$ при каждом фиксированном $y\in Y$, где Y — некоторое множество, определена на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty<a<b\leqslant+\infty$, принимает числовые значения и при любом $c\in(a, b)$ интегрируема по x на отрезке $[a, c]$. Для того чтобы интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\,dx,\quad y\in Y,$$

равномерно сходился на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое $\eta\in(a, b)$, что для любых η' и η'', удовлетворяющих условиям $\eta<\eta'<b$, $\eta<\eta''<b$ и всех $y\in Y$, выполнялось неравенство

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Этот критерий также переносится на несобственные интегралы других типов, на случай функций многих переменных и на функции, значения к-рых лежат в банаховых пространствах.

Лит.: [1] Cauchy A. L., Analyse algébrique, P., 1821; [2] Stolz O., «Math. Ann.», 1884, Bd 24, S. 154—71; [3] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, пер. с англ., М., 1964; [4] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1971, т. 2, М., 1973; [5] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; [6] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [7] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 1, М., 1963.

Л. Д. Кудрявцев.

КОШИ МАТРИЦА линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — матрица, задающая *Коши оператор* $X(\theta, \tau)$ этой системы в нек-ром базисе пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), не зависящем от θ и τ.

В. М. Миллионщиков.

КОШИ НЕРАВЕНСТВО — 1) К. н. — неравенство для конечных сумм, имеющее вид:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n} a_k^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Доказано О. Коши (A. Cauchy, 1821); интегральный аналог — *Буняковского неравенство.*

2) К. н.— неравенство для модуля $|f^{(k)}(a)|$ производной регулярной аналитич. функции $f(z)$ в фиксированной точке a комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или для модуля коэффициента $|c_k|$ разложения $f(z)$ в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-a)^k.$$

К. н. имеют вид

$$|f^{(k)}(a)|\leqslant k!\,\frac{M(r)}{r^k},\quad |c_k|\leqslant\frac{M(r)}{r^k},\qquad (*)$$

где r — радиус любого круга $U=\{z\in\mathbb{C};\ |z-a|<r\}$, на к-ром функция $f(z)$ регулярна; $M(r)$ — максимум модуля $|f(z)|$ на окружности $|z-a|=r$. Неравенства $(*)$ встречаются в работах О. Коши (A. Cauchy, см., напр., [1]). Из них непосредственно вытекает неравенство Коши — Адамара (см. [2]):

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}}\leqslant\frac{1}{d(a,\,\partial D)},$$

где $d(a,\,\partial D)$ — расстояние от точки a до границы ∂D области голоморфности функции $f(z)$. В частности, для целой функции $f(z)$ в любой точке $a\in\mathbb{C}$ имеем

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{|f^{(k)}(a)|}{k!}}=0.$$

Для голоморфной функции $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)$, $n>1$, К. н. имеют вид

$$\left|\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}f(a)}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}}\right|\leqslant k_1!\ldots k_n!\,\frac{M(r_1,\ldots,r_n)}{r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}}$$

или

$$|c_{k_1,\ldots,k_n}|\leqslant\frac{M(r_1,\ldots,r_n)}{r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}},$$

$$a=(a_1,\ \ldots,\ a_n)\in\mathbb{C}^n,\quad k_1,\ \ldots,\ k_n=0,\ 1,\ \ldots,$$

где $c_{k_1,\ldots,k_n}$ — коэффициенты разложения $f(z)$ в степенной ряд

$$f(z)=\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1,\ldots,k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n};$$

$r_1,\ \ldots,\ r_n$ — радиусы поликруга $U^n=\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z_j-a_j|<r_j,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$, на к-ром $f(z)$ голоморфна; $M(r_1,\ \ldots,\ r_n)$ — максимум $|f(z)|$ на остове поликруга U^n.

Лит. см. при ст. *Коши — Адамара теорема.*

Е. Д. Соломенцев.

КОШИ ОПЕРАТОР системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t,\ x),\quad x\in\mathbb{R}^n,\qquad (1)$$

— зависящий от параметров θ и τ оператор $X(\theta,\ \tau)$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, сопоставляющий значению всякого решения $x(t)$ системы (1) в точке $t=\tau$ значение этого же решения в точке $t=\theta$:

$$X(\theta,\ \tau)x(\tau)=x(\theta).$$

Если система (1) линейная, т. е.

$$\dot{x}=A(t)x,\qquad (2)$$

где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $(\alpha,\ \beta)\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$ (или $(\alpha,\ \beta)\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^n)$), то К. о. при всяких $\theta,\ \tau\in(\alpha,\ \beta)$ есть невырожденное линейное отображение $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$), удовлетворяющее при всяких $\theta,\ \tau,\ \eta\in(\alpha,\ \beta)$ равенствам:

$$\left.\begin{aligned}&X(\theta,\ \theta)=I,\quad X(\theta,\ \tau)=X^{-1}(\tau,\ \theta),\\ &X(\theta,\ \eta)X(\eta,\ \tau)=X(\theta,\ \tau)\end{aligned}\right\}\qquad (3)$$

и неравенству

$$\| X(\theta, \tau)\| \leqslant \exp \left| \int_\tau^\theta \| A(t)\| dt \right|.$$

(Для нелинейной системы (1), удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши, равенства (3) тоже верны, с должными оговорками относительно областей определения входящих в них операторов.) Общее решение системы

$$\dot{x} = A(t)x + h(t),$$

где $h(\cdot)$— суммируемое на каждом отрезке отображение

$$(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ (или } (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{C}^n),$$

записывается через К. о. $X(\theta, \tau)$ системы (2) формулой *произвольных постоянных вариации*:

$$x(t) = X(t, \tau)\, x(\tau) + \int_\tau^t X(t, \theta)\, h(\theta)\, d\theta.$$

Для К. о. системы (2) имеет место *Лиувилля—Остроградского формула*

$$\det X(\theta, \tau) = \exp \int_\tau^\theta \operatorname{tr} A(\xi)\, d\xi,$$

где $\operatorname{tr} A(\xi)$ — след оператора $A(\xi)$.

Производная К. о. $X(\theta, \tau)$ системы (1) в точке $x \in \mathbb{R}^n$ равна К. о. системы уравнений в вариациях вдоль решения $x(t)$ системы (1), равного x при $t = \tau$ (предполагается, что график решения $x(t)$ при всех t, принадлежащих отрезку с концами θ и τ, содержится в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ такой, что f — непрерывное отображение $G \to \mathbb{R}^n$, имеющее непрерывную в G производную f'_x; это — одна из формулировок теоремы о дифференцируемости решения по начальному значению).

Для линейной системы (2) с постоянными коэффициентами ($A(t) \equiv A$) К. о. задается формулой

$$X(\theta, \tau) = \exp((\theta - \tau)A) \tag{4}$$

($\exp B$ для линейного оператора B определяется как $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$; при другом подходе за определение $\exp A$ можно принять формулу (4), положив в ней $\theta = \tau + 1$). Из формулы (4) видно, что К. о. зависит только от разности параметров $\theta - \tau$:

$$X(\theta + t, \tau + t) = X(\theta, \tau).$$

Это равенство — следствие автономности системы, имеющее место для всякой *автономной системы*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

обозначив для системы (5) К. о. $X(\theta, \tau)$ через $f^{\theta - \tau}$, получают из формул (3) следующие формулы:

$$f^0 = I; \quad (f^t)^{-1} = f^{-t}; \quad f^t f^\tau = f^{t+\tau}$$

(см. также *Динамическая система*, *Действие группы*).

Для линейной системы (2) с периодическими коэффициентами:

$$A(t + T) = A(t)$$

при нек-ром $T > 0$ и всех $t \in \mathbb{R}$ — выполняется тождество

$$X(\theta + T, \tau + T) = X(\theta, \tau)$$

при всех $\theta, \tau \in \mathbb{R}$; для такой системы оператор $X(\tau + T, \tau)$, где $\tau \in \mathbb{R}$ — любое, наз. оператором монодромии. Матрица, задающая оператор $X(\tau + T, \tau)$ (или, напр., $X(T, 0)$) в каком-либо базисе, наз. *монодромии матрицей*. Все операторы монодромии фиксированной линейной системы с периодическими коэффициентами подобны друг другу:

$$X(\theta + T, \theta) = X(\theta, \tau) X(\tau + T, \tau) X^{-1}(\theta, \tau),$$

поэтому спектр оператора монодромии $X(\tau+T,\ \tau)$ не зависит от τ. Собственные значения оператора монодромии наз. *мультипликаторами* такой системы, через них выражаются условия устойчивости и условной устойчивости системы (см. *Ляпунова характеристический показатель*, *Устойчивость по Ляпунову*, *Устойчивости теория*). Для систем (2) с периодическими комплексными коэффициентами:

$$A(\cdot):\mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^n),\ A(t+T)=A(t)$$

для нек-рого $T>0$ и всех $t\in\mathbb{R}$ — имеет место теорема Ляпунова:

$$X(\theta,\ \tau)=S_\tau(\theta)\exp((\theta-\tau)B_\tau),$$

где $B_\tau=\frac{1}{T}\ln X(\tau+T,\ \tau)$, а $S_\tau(\theta)$ при любых $\theta,\ \tau\in\mathbb{R}$ является невырожденным линейным оператором $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, периодически зависящим от θ:

$$S_\tau(\theta+T)=S_\tau(\theta).$$

Иногда К. о. наз. по-другому (напр., «матрицантом» — для линейной системы, или «оператором сдвига по траекторпям»). *В. М. Миллионщиков.*

КОШИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — то же, что *фундаментальная последовательность*.

КОШИ ПРИЗНАК — 1) К. п. сходимости числового ряда: если для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с неотрицательными членами существует такое число q, $0\leqslant q<1$, что, начиная с нек-рого номера, выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n}\leqslant q$, равносильное условию $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$, то данный ряд сходится. Если же, начиная с нек-рого номера, имеет место неравенство $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$ или даже менее того существует подпоследовательность u_{n_k}, $k=1,2,\ldots$, для членов к-рой имеет место неравенство $\sqrt[n_k]{u_{n_k}}\geqslant 1$, то ряд расходится.

В частности, если существует $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, если существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}>1$, то ряд расходится. Установлен О. Коши [1]. Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с членами u_n произвольных знаков из условия $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}>1$ следует расходимость ряда; из условия $\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1$ — абсолютная сходимость ряда.

2) К. п. интегральный, интегральный признак Коши — Маклорена: если для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с неотрицательными членами существует такая невозрастающая неотрицательная функция $f(x)$, определенная при $x\geqslant 1$, что $f(n)=u_n$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, то данный ряд сходится в том и только в том случае, когда сходится интеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$. Впервые дан в геометрич. форме К. Маклореном [2], а впоследствии вновь открыт О. Коши [3].

Лит.: [1] Cauchy A. L., Analyse algébrique, P., 1821, p. 132—35; [2] MacLaurin C., A treatise of fluxions, v. 1, Edinburgh, 1742, p. 289—90; [3] Cauchy A. L., Œuvres complètes, sér. 2, t. 7, P., 1889, p. 268—79; [4] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

КОШИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей с плотностью

$$p(x;\ \lambda,\ \mu)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2},\quad -\infty<x<\infty,$$

и функцией распределения

$$F(x;\ \lambda,\ \mu)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x-\mu}{\lambda},$$

где $-\infty<\mu<\infty$ и $\lambda>0$ — параметры. К. р. одновершинно и симметрично относительно точки $x=\mu$, являющейся модой и медианой этого распределения. Моменты положительного порядка, в том числе и математич. ожидание, не существуют. Характеристич. функция имеет вид $e^{i\mu t-\lambda|t|}$. Класс К. р. замкнут относительно линейных преобразований: если случайная величина X имеет К. р. с параметрами λ и μ, то случайная величина $Y=aX+b$ также имеет К. р. с параметрами $\lambda'=|a|\lambda$ и $\mu'=a\mu+b$. Класс К. р. замкнут относительно операции свертки:

$$p(x;\ \lambda_1,\ \mu_1)*\ldots*p(x;\ \lambda_n,\ \mu_n)=$$
$$=p(x;\ \lambda_1+\ldots+\lambda_n,\ \mu_1+\ldots+\mu_n), \qquad (*)$$

иначе, сумма независимых случайных величин с К. р. снова имеет К. р. Таким образом, К. р., также как нормальное распределение, принадлежит к классу устойчивых распределений, а именно, является симметричным устойчивым распределением с показателем 1. Следствием соотношения (*) является следующее свойство К. р.: если случайные величины $X_1,\ \ldots,\ X_n$ независимы и имеют одно и то же К. р., то арифметическое среднее $\frac{1}{n}(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ имеет такое же распределение, как и каждая величина X_k. Еще одна особенность К. р. состоит в том, что в семействе К. р. распределение суммы случайных величин может быть задано формулой (*), даже если величины зависимы: напр., если X и Y независимы и имеют одинаковое К. р., то случайные величины $X+X$ и $X+Y$ имеют одно и то же К. р. К. р. с параметрами $\lambda=1$ и $\mu=0$ есть t-распределение Стьюдента с числом степеней свободы, равным 1. К. р. с параметрами $(\lambda,\ \mu)$ совпадает с распределением случайной величины $\mu+\frac{X}{Y}$, где X и Y независимы и нормально распределены с параметрами $(0,\ \lambda^2)$ и $(0,\ 1)$ соответственно. Такое же К. р. имеет функция $\mu+\lambda\ \mathrm{tg}\ z$ случайной величины z, равномерно распределенной на отрезке $[-\pi/2,\ \pi/2]$. К. р. определяется также и в пространствах размерности больше единицы. К. р. рассмотрено О. Коши (A. Cauchy).

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967. *А. В. Прохоров.*

КОШИ ТЕОРЕМА — 1) К. т. о многогранниках: два замкнутых выпуклых многогранника конгруэнтны, если между их истинными гранями, ребрами и вершинами имеется сохраняющее инцидентность взаимно однозначное соответствие, причем соответствующие грани многогранников конгруэнтны. К. т.— первая теорема об однозначной определенности выпуклых поверхностей, поскольку многогранники, о к-рых идет речь в К. т., изометричны в смысле внутренней метрики. К. т. является частным случаем теоремы о том, что всякая замкнутая выпуклая поверхность однозначно определяется своей метрикой (см. [4]).

К. т. установлена О. Коши (см. [1]).

Лит.: [1] Cauchy A. L., «J. École polytechn.», 1813, t. 9, p. 87—98; [2] Александров А. Д., Выпуклые многогранники, М.— Л., 1950; [3] Адамар Ж., Элементарная геометрия, 3 изд., ч. 2, М., 1958; [4] Погорелов А. В., Однозначная определенность выпуклых поверхностей, М.— Л., 1949 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 29). *Е. В. Шикин.*

2) К. т. о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке: если функция f, значениями к-рой являются действительные числа, непрерывна на $[a,\ b]$ и число C лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то существует такая точка $\xi\in[a,\ b]$, что $f(\xi)=C$. В частности, если $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то существует такая точка ξ, что $f(\xi)=0$. В этой форме К. т. используют для выделения промежутков, в к-рых заведомо имеются нули рассматриваемой функции. Из К. т. следует, что образом промежутка числовой прямой при его непрерывном отображении в числовую прямую является также промежуток. К. т. до-

пускает обобщение на топологич. пространства: всякая непрерывная функция $f: X \to R^1$, определенная на связном топологич. пространстве X (R^1 — множество действительных чисел), принимающая какие-либо два значения, принимает и любое лежащее между ними, поэтому образ пространства X также промежуток числовой прямой.

К. т. была сформулирована независимо Б. Больцано (B. Bolzano, 1817) и О. Коши (A. Cauchy, 1821).

3) К. т. о среднем значении — обобщение формулы конечных приращений Лагранжа. Если функции f и g принимают действительные значения, непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b), причем $g' \neq 0$ на (a, b), а потому $g(a) \neq g(b)$, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

При $g(t)=t$, $a \leqslant t \leqslant b$, получается формула конечных приращений Лагранжа. Геометрич. смысл К. т. состоит в том, что на всякой непрерывной кривой $x=f(t)$, $y=g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, лежащей на плоскости xOy и имеющей в каждой точке $(f(t), g(t))$ касательную, есть точка $(f(\xi), g(\xi))$, в к-рой касательная параллельна хорде, соединяющей концы $(f(a), g(a))$ и $(f(b), g(b))$ рассматриваемой кривой.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

4) К. т. в теории групп: если порядок конечной группы G делится на простое число p, то G обладает элементами порядка p.

Теорема была доказана О. Коши (см. [1]) для групп подстановок.

Лит.: [1] Cauchy A. L., в кн.: Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. 3, P., 1844, p. 151—252; [2] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

КОШИ ФИЛЬТР — фильтр F в равномерном пространстве X такой, что для любого окружения V равномерной структуры пространства X существует множество, малое порядка V и принадлежащее F. Другими словами, К. ф.— это фильтр, содержащий сколь угодно малые множества в равномерном пространстве X. Понятие К. ф. обобщает понятие последовательности Коши в метрич. пространстве.

Всякий сходящийся фильтр есть К. ф. Всякий фильтр, мажорирующий К. ф., также есть К. ф. При равномерно непрерывном отображении образ базиса К. ф. есть базис К. ф. Равномерное пространство, в к-ром всякий К. ф. сходится, является полным пространством.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968. *Б. А. Ефимов.*

КОШИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА — задача отыскания решения дифференциальных уравнений или систем уравнений с частными производными по заданным его значениям на характеристических многообразиях.

Для широкого класса уравнений гиперболического и параболического типов в пространстве E_{n+1} независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ носителями данных могут служить определенным образом ориентированные незамкнутые n-мерные поверхности S. Если, напр., S является поверхностью пространственного типа, то *Коши задача* (с начальными данными на S) поставлена всегда корректно. В К. х. з. носителем данных является исключительно характеристическое многообразие (или ее определенная часть). В этом случае задача Коши может и вовсе не иметь решения, а если и имеет таковое, то оно может быть неединственным.

Напр., К. х. з. для уравнения ($n=1$, $x_1=x$)

$$u_{xt}=0$$

с данными на характеристике $t=0$

$$u(x,\ 0)=\tau(x),\quad u_t(x,\ 0)=\nu(x)$$

некорректна. Если решение К. х. з. существует, то из уравнения и из второго начального условия вытекает необходимое условие ее разрешимости: $\nu'(x)=0$, то есть решение К. х. з. может существовать лишь при $\nu(x)=\text{const}=\alpha$. В этом случае, если $\tau(x)\in C^2$, $t\geqslant 0$, решение действительно существует и задается формулой

$$u(x,\ t)=\tau(x)+\alpha t+\rho(t),$$

где $\rho(t)$ — любая функция класса C^2, $t\geqslant 0$, удовлетворяющая условиям $\rho(0)=\rho'(0)=0$.

Для существования решения К. х. з. для линейных систем гиперболических уравнений требуется, чтобы ранг расширенной матрицы системы был равен вдоль характеристической поверхности S рангу вырожденной матрицы.

Существует широкий класс гиперболических уравнений и систем, для к-рых в качестве носителя данных могут служить характеристические поверхности. Так, напр., для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}-u_{tt}=0, \tag{1}$$

когда характеристическая поверхность S представляет собой конус

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2-(t-t_0)^2=0, \tag{2}$$

К. х. з. ставится так: найти регулярное внутри конуса (2) решение $u(x,\ t)$ уравнения (1), принимающее на конусе (2) наперед заданные значения.

В случае пространственного переменного ($n=1$, $x_1=x$) конус (2) представляет собой пару прямых $(x-x_0)^2=(t-t_0)^2$, проходящих через точку $(x_0,\ t_0)$. Эти прямые разбивают плоскость E_2 переменных x, t на четыре угла. Пусть область Ω представляет один из этих углов. В этом случае характеристическую задачу принято наз. задачей Гурса: определить регулярное в области Ω решение $u(x,\ t)$ уравнения

$$u_{xx}-u_{tt}=0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u=\varphi \text{ при } x-x_0=t-t_0,\quad u=\psi \text{ при } x-x_0=t_0-t,$$
$$\varphi(x_0,\ t_0)=\psi(x_0,\ t_0).$$

Если характеристическая поверхность S является одновременно поверхностью вырождения типа или порядка, то К. х. з. может оказаться корректной.

Для уравнения

$$y^m u_{yy}-u_{xx}+au_x+bu_y+cu=f, \tag{3}$$

к-рое является гиперболическим при $y>0$, линия вырождения $y=0$ является характеристикой. При $0<m<1$ задача Коши

$$u(x,\ 0)=\tau(x),\quad u_y(x,\ 0)=\nu(x) \tag{4}$$

для уравнения (3) является корректной, а при $m\geqslant 1$ она становится некорректной. В этом случае естественно исследовать эту задачу как с видоизмененными начальными данными:

$$\lim_{y\to 0}\alpha(x,\ y)\,u(x,\ y)=\tau(x),\quad \lim_{y\to 0}\beta(x,\ y)\,u_y(x,\ y)=\nu(x),$$
$$\lim_{y\to 0}\alpha(x,\ y)=0,\quad \lim_{y\to 0}\beta(x,\ y)=0,$$

так и с неполными начальными данными, т. е. при отсутствии одного из условий (4).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 3 изд., М., 1976; [2] Годунов С. К., Уравнения математической физики, М., 1971; [3] Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, пер. с итал., М., 1957; [4] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [5] Би-

цадзе А. В., Калиниченко Д. Ф., Сборник задач по уравнениям математической физики, М., 1977; [6] Бицадзе А. В., Линейные уравнения с частными производными смешанного типа, в кн.: Тр. третьего Всесоюзного математического съезда, т. 3, М., 1958. *В. А. Елеев.*

КОШИ ЯДРО — функция вида $1/(t-x)$, являющаяся ядром *Коши интеграла*. Между К. я. и *Гильберта ядром* в случае единичной окружности существует связь:

$$\frac{dt}{t-\tau}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x-s}{2}+i\right)dx,$$

где

$$t=e^{ix},\ \tau=e^{is}.$$

Иногда К. я. наз. функцию вида $\frac{1}{2\pi i\,(t-x)}$.

А. Б. Иванов.

КОШИ — АДАМАРА ТЕОРЕМА: пусть задан степенной ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(z-a)^k \qquad (1)$$

и

$$\Lambda=\lim_{k\to\infty}\sup\sqrt[k]{|c_k|}.$$

Если $\Lambda=\infty$, то ряд (1) сходится только в точке $z=a$; если $0<\Lambda<\infty$, то ряд (1) абсолютно сходится в круге $|z-a|<R$ радиуса

$$R=\frac{1}{\Lambda} \qquad (2)$$

и расходится вне этого круга при $|z-a|>R$; если $\Lambda=0$, то ряд (1) абсолютно сходится при всех $z\in\mathbb{C}$. Содержание К.— А. т. выражается, таким образом, формулой Коши — Адамара (2), к-рую при этом следует понимать в расширенном смысле, включая равенства $1/\infty=0$ и $1/0=\infty$. Иначе говоря, содержание К.— А. т. состоит в том, что внутренность множества точек (абсолютной) сходимости ряда (1) есть круг $|z-a|<R$ радиуса (2). В случае действительного степенного ряда (1) формула (2) определяет радиус интервала сходимости $a-R<x<a+R$. В основном К.— А. т. была высказана О. Коши (A. Cauchy) в его лекциях [1], опубликованных в 1821, полную ясность в формулировку и доказательство внес Ж. Адамар [2].

Для степенных рядов

$$f(z)=\sum_{k_1,\ \ldots,\ k_n=0}^{\infty}c_{k_1\ldots k_n}(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n} \qquad (3)$$

по n комплексным переменным $z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)$, $n\geqslant 1$, обобщением формулы Коши — Адамара является следующее соотношение:

$$\lim_{|k|\to\infty}\sqrt[|k|]{|c_{k_1\ldots k_n}|\,r_1^{k_1}\ldots r_n^{k_n}}=1, \qquad (4)$$

$$|k|=k_1+\ldots+k_n,$$

к-рому удовлетворяют сопряженные радиусы сходимости $r_1,\ \ldots,\ r_n$ ряда (3) (см. *Круг сходимости*). Записав соотношение (4) в виде $\Phi(r_1,\ \ldots,\ r_n)=0$, получают уравнение, определяющее границу нек-рой логарифмически выпуклой *кратно круговой области* с центром a, к-рая и является внутренностью множества точек абсолютной сходимости ряда (3) при $n>1$.

Лит.: [1] Коши О. Л., Алгебраический анализ, пер. с франц., Лейпциг, 1864; [2] Hadamard J., «J. math. pures et appl.» (4), 1892, t. 8, p. 101—86; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [4] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

КОШИ — КОВАЛЕВСКОЙ ТЕОРЕМА — теорема, утверждающая существование (единственного) аналитич. решения задачи Коши в малом, если функции, задающие дифференциальное уравнение или систему этих уравнений и все начальные данные вместе с их нехарактеристическим носителем, являются аналитическими.

Для системы k дифференциальных уравнений с частными производными с k неизвестными функциями $u_1(x, x_0), \ldots, u_k(x, x_0)$ вида

$$\frac{\partial^m u_i}{\partial x_0^m} = F_i\left(x_0, x, u, \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n} u}{\partial x_0^{m_0} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right), \qquad (1)$$

где

$$i=1, \ldots, k, \ x=(x_1, \ldots, x_n), \ u=(u_1, \ldots, u_k),$$

$$\sum_{j=0}^{n} m_j \leqslant m, \ m_0 < m, \ m \geqslant 1,$$

К.— К. т. формулируется следующим образом: задача Коши

$$\left.\frac{\partial^j u_i}{\partial x_0^j}\right|_\sigma = \varphi_{ij}(x), \ i=1, \ldots, k; \ j=0, 1, \ldots, m-1, \qquad (2)$$

где $\sigma=\{(x, x_0), x_0=0, x\in\Omega_0\}$ — носитель начальных данных φ_{ij}, всегда имеет и притом единственное аналитич. решение $u(x, x_0)$ в нек-рой области Ω пространства переменных x_0, x, содержащей Ω_0, если F_i и φ_{ij} являются аналитич. функциями всех своих аргументов.

Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений вида

$$P(x, D)u \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m} A_\alpha(x) D^\alpha u = B(x), \qquad (3)$$

где $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами;

$$|\alpha| = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j$$

— порядок дифференциального оператора

$$D^\alpha = D_0^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \ j=0, 1, \ldots, n;$$

$A_\alpha(x)$, $x=(x_0, \ldots, x_n)$ — заданная квадратная матрица порядка N; $u(x)=\|u_j(x)\|$, $j=1, \ldots, N$,— искомый вектор-столбец; $B(x)$ — заданный вектор с N компонентами.

Вообще говоря, К.— К. т. не исключает существования неаналитических, помимо аналитического, решений задачи Коши. Однако для линейной системы дифференциальных уравнений (3) с аналитич. коэффициентами $A_\alpha(x)$ и условиями Коши на аналитической нехарактеристич. поверхности σ задача Коши имеет не более одного решения в нек-рой окрестности Ω_0 поверхности σ. При этом не предполагается аналитичность начальных данных и решения $u(x)$.

Решение задачи Коши (1), (2), существование к-рого гарантируется К.— К. т., может оказаться неустойчивым (т. к. малое изменение начальных данных $\varphi_{ij}(x)$ может вызвать сильное изменение решения), напр., в том случае, когда система (1) принадлежит эллиптич. типу. При неаналитических начальных данных задача Коши (1), (2) может потерять смысл, если не ограничиться случаем, когда система (1) является гиперболической.

К.— К. т. для широкого класса уравнений обобщена на случай, когда начальное многообразие является характеристическим в каждой точке (см. [1], [2]). В этом случае начальные функции не могут быть заданы произвольно; они должны удовлетворять определенным условиям, к-рые диктуются дифференциальным уравнением.

Характеристическая задача Коши может иметь неединственное решение. В частности, имеет место следующее утверждение. Пусть $P(x, D)$ — дифференциальный оператор порядка m с главной частью $P_m(x, D)$ и с вещественными аналитич. коэффициентами, определенный в окрестности Ω точки x^0 из евклидова прост-

ранства R^n, φ — вещественная аналитическая в Ω функция такая, что

$$\operatorname{grad}\varphi(x^0)\neq 0 \quad \text{и} \quad P_m(x, \operatorname{grad}\varphi)=0,$$

но $P_m^{(j)}(x, \operatorname{grad}\varphi)\neq 0$ для некоторого j при $x=x^0$. Тогда существует такая окрестность Ω_0 точки x^0 и аналитическая при $\varphi(x)\neq\varphi(x^0)$ функция $u(x)$ из класса $C^m(\Omega_0)$, что $P(x, D)u=0$ и

$$\sup u = \{x \mid x\in\Omega_0,\ \varphi(x)\leqslant\varphi(x_0)\}.$$

Если начальное многообразие является характеристическим вдоль нек-рых кривых, то, вообще говоря, решение характеристич. задачи Коши многозначно в нек-рой окрестности начальной поверхности и степень ветвления определяется геометрич. природой соответствующих характеристич. поверхностей. Теорема доказана С. В. Ковалевской (1875).

Лит.: [1] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [2] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965. *А. М. Нахушев.*

КОШИ—РИМАНА УСЛОВИЯ, Д'Аламбера — Эйлера условия,— условия на действительную $u=u(x, y)$ и мнимую $v=v(x, y)$ части функции комплексного переменного $w=f(z)=u+iv$, $z=x+iy$, обеспечивающие моногенность и аналитичность $f(z)$ как функции комплексного переменного.

Для того чтобы функция $w=f(z)$, определенная в нек-рой области D комплексной плоскости z, была моногенной в точке $z_0=x_0+iy_0$, т. е. имела производную в точке z_0 как функция комплексного переменного z, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части u и v были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) как функции действительных переменных x и y и чтобы, кроме того, в этой точке выполнялись условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Если К.— Р. у. выполнены, то производная $f'(z)$ представима в любой из следующих форм:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для того чтобы однозначная в области D функция $f(z)$ была аналитической в D, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части были дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими К.— Р. у. всюду в D. Функции u и v класса $C^2(D)$, удовлетворяющие К.— Р. у. (1), являются, каждая по отдельности, гармоническими функциями от x и y; условия (1) суть условия сопряженности этих двух гармонич. функций: зная одну из них, вторую можно найти интегрированием.

Условия (1) справедливы для любых двух ортогональных направлений s и n, ориентированных взаимно так же, как оси Ox и Oy в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}.$$

Напр., в полярных координатах (r, φ) при $r\neq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Введя операторы комплексного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

К.— Р. у. (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Таким образом, дифференцируемая функция $f(z, \bar{z})$ переменных z и $\bar{z}$ является аналитич. функцией от z тогда и только тогда, когда $\partial f/\partial \bar{z} = 0$.

Для аналитич. функций многих комплексных переменных $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, К.— Р. у. записываются в виде переопределенной при $n > 1$ системы уравнений с частными производными для функций

$$u = \operatorname{Re} f(z) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$v = \operatorname{Im} f(z) = v(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n):$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

или, при помощи операторов комплексного дифференцирования, в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Функции u и v класса C^2, удовлетворяющие условиям (2), являются при $n \geqslant 1$, каждая по отдельности, *плюригармоническими функциями* от переменных x_k и y_k. Плюригармонич. функции при $n > 1$ составляют собственный подкласс класса гармонич. функций. Условия (2) суть условия сопряженности двух плюригармонич. функций u и v: зная одну из них, другую можно найти интегрированием.

Условия (1) впервые, по-видимому, появились в работе Ж. Д'Аламбера [1]. В работе Л. Эйлера, доложенной Петербургской академии наук в 1777 (см. [2]), условия (1) получили впервые характер общего признака аналитичности функций. О. Коши пользовался соотношениями (1) для построения теории функций, начиная с мемуара, представленного Парижской академии наук в 1814 (см. [3]). Знаменитая диссертация Б. Римана (B. Riemann) об основах теории функций относится к 1851 (см. [4]).

Лит.: [1] D'Alembert J., Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, P., 1752; [2] Euler L., «Nova Acta Acad. Sc. Petrop.», 1797, v. 10, p. 3—19; [3] Cauchy A.-L., Œuvres complètes, sér. 1, t. 1, P., 1882, p. 319—506; [4] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 49—87; [5] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 1; [6] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976, ч. 1, гл. 1, ч. 2, гл. 1.

Е. Д. Соломенцев.

КОЭНА — МАКОЛЕЯ КОЛЬЦО, маколеево кольцо,— коммутативное локальное нётерово кольцо A, глубина $\operatorname{prof} A$ к-рого равна его размерности $\dim A$. Гомологич. характеризация К.— М. к. A состоит в том, что группы $\operatorname{Ext}^i_A(k, A)$ или группы локальных когомологий $H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ обращаются в нуль при всех $i < \dim A$; здесь $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал, а k — поле вычетов A. Можно дать определение К.— М. к., используя понятие регулярной последовательности. Так называется последовательность $a_1, \ldots, a_k$ элементов $\mathfrak{m}$ такая, что для всех i элемент a_i не делит нуль в $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Локальное кольцо A наз. К.— М. к., если существует регулярная последовательность $a_1, \ldots, a_k$, для к-рой факторкольцо $A/(a_1, \ldots, a_k)$ артиново. В этом случае $k = \operatorname{prof} A = \dim A$.

Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал в К.— М. к. A, то для его высоты $ht(\mathfrak{p})$ (см. *Высота идеала*) выполняется соотношение

$$ht(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = \dim A.$$

В частности, К.— М. к. равноразмерное и цепное. Фундаментальным результатом о К.—М. к. является сле-

дующая теорема о несмешанности. Пусть A есть d-мерное К.— М. к., а $a_1, \ldots, a_k$ — последовательность элементов A и $\dim(A/(a_1, \ldots, a_k)) = d-k$. Тогда последовательность $a_1, \ldots, a_k$ регулярна, и идеал $\mathfrak{A} = (a_1, \ldots, a_k)$ несмешанный, т. е. любой простой идеал, ассоциированный с $\mathfrak{A}$, имеет высоту k и ковысоту $d-k$. Теорема о несмешанности была доказана Ф. Маколеем [1] для кольца многочленов и И. Коэном [2] для кольца формальных степенных рядов.

Примеры К.— М. к. Регулярное локальное кольцо (и, вообще, любое кольцо Горенштейна) является К.— М. к.; любое артиново кольцо, любое одномерное приведенное кольцо, любое двумерное нормальное кольцо являются К.— М. к. Если A — локальное К.— М. к., то такими же будут его пополнение, кольцо формальных степенных рядов над A и любое конечное плоское расширение. К.— М. к. будет и полное пересечение в К.— М. к. A, т. е. факторкольцо вида $A/(a_1, \ldots, a_k)$, где последовательность $a_1, \ldots, a_k$ регулярна. Наконец, локализация К.— М. к. в простом идеале снова является К.— М. к. Это позволяет расширить определение К.— М. к. на произвольные кольца и схемы. А именно, нётерово кольцо A (схема X) наз. кольцом Коэна — Маколея (схемой Коэна — Маколея), если для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ (соответственно любой точки $x \in X$) локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ (соответственно $\mathcal{O}_{X,x}$) является К.— М. к. В этом более широком смысле К.— М. к. является кольцо многочленов над полем и даже над любым К.— М. к., а также полугрупповое кольцо $K[G \cap \mathbb{Z}^n]$, где G — выпуклый многогранный конус в $\mathbb{R}^n$ (см. [6]).

К.— М. к. стабильны и при переходе к кольцам инвариантов. Если G — конечная группа, действующая на К.— М. к. A, причем ее порядок обратим в A, то кольцо инвариантов A^G также есть К.— М. к.

Для градуированного кольца A свойство быть К.— М. к. проявляется в когомологиях обратимых пучков на проективной схеме $\mathrm{Proj}(A)$ (см. [4]). Если однородное кольцо A конуса в A^{n+1}, связанного с проективным многообразием $X \subset \mathbb{P}^n$, является К.— М. к., то X наз. арифметическим многообразием Коэна — Маколея. В этом случае кольцо A изоморфно $\bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(\nu))$, и $H^i(X, \mathcal{O}_X(\nu)) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{Z}$ и для $0 < i < \dim X$, где $\mathcal{O}_X(\nu)$ есть ν-я тензорная степень поляризующего обратимого пучка $\mathcal{O}_X(1)$ на X. Этим свойством обладают проективные пространства и их произведения, полные пересечения, многообразия Грассмана и подмногообразия Шуберта [7], многообразие флагов и обобщенное многообразие флагов [8].

Модуль M над локальным кольцом A наз. модулем Коэна — Маколея, если его глубина равна размерности. На модули Коэна — Маколея распространяются многие результаты о К.— М. к.; напр., носитель такого модуля равноразмерен. Существует гипотеза, что любое полное локальное кольцо обладает модулем Коэна — Маколея M таким, что $\dim M = \dim A$.

Лит.: [1] Macaulay F. S., The algebraic theory of modular systems, Camb., 1916; [2] Cohen I. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1946, v. 59, p. 54—106; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [4] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [5] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [6] Hochster M., «Ann. Math.», 1972, v. 96, p. 318—37; [7] его же, «J. Algebra», 1973, v. 25, p. 40—57; [8] Kempf G. R., «Ann. Math.», 1976, v. 103, p. 557—91.

В. И. Данилов.

КОЭРЦИТИВНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — краевая задача, удовлетворяющая *коэрцитивности неравенству*. Иногда К. к. з. для эллиптич. уравнений наз. эллиптическими краевыми задачами [4].

Пусть $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — однородный многочлен степени $2m$ и

$$P(D)u = f, \quad D \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \tag{1}$$

— эллиптич. уравнение порядка $2m$. Для уравнения (1) в полупространстве R_n^+: $\{x_n > 0\}$ рассматривается краевая задача с граничными условиями

$$q_j(D)u \quad q_j, \ j = 1, \ldots, m, \text{ при } x_n = 0, \tag{2}$$

где $q_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — однородные многочлены степеней μ_j, $j = 1, \ldots, m$.

Задача (1), (2) коэрцитивна в R_n^+, если порядки всех операторов q_j относительно $\partial/\partial x_n$ меньше $2m$ и если эта задача не имеет ограниченных решений вида

$$u(x) = w(x_n) \exp i(x_1\xi_1 + \ldots + x_{n-1}\xi_{n-1}), \tag{3}$$
$$\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \neq 0.$$

Многочлен $P(\xi', \tau)$ относительно τ имеет в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\tau > 0$ ровно m корней $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Если все эти корни различны, то отсутствие ограниченных решений вида (3) у задачи (1), (2) эквивалентно выполнению неравенства

$$\left[\Pi_{l<j}(\tau_j - \tau_l)\right]^{-1} \det(q_j(\xi', \tau_l)) \neq 0, \ \xi' \neq 0. \tag{4}$$

Это условие иногда наз. условием дополнительности.

Краевая задача

$$P(x, D)u = f, \quad x \in G, \ q_i(x, D)u = \varphi_j, \ x \in \partial G, \tag{5}$$
$$j = 1, \ldots, m,$$

для линейного эллиптич. уравнения порядка $2m$ в области G коэрцитивна в точке x_0 границы Γ области G, если коэрцитивна задача

$$P_{2m}(x_0, D)u = f, \quad q_j^0(x_0, D)u = \varphi_j, \ j = 1, \ldots, m,$$

где P_{2m} и $q_j^{(0)}$ — однородные составляющие самой высокой степени соответствующих полиномов.

Для исследования К. к. з. успешно применяется метод выпрямления границы. Некоторым гомеоморфным отображением окрестность $U(X)$ точки X границы Γ области G отображается так, чтобы пересечение $U(X) \cap \Gamma$ переходило в нек-рую область плоскости $y_n = 0$, а $U(X) \cap G$ — в полупространство R_n^+ переменных $y_1, \ldots, y_n$. В результате такого отображения К. к. з. для произвольной области G с достаточно гладкой границей Γ редуцируется к исследованию задачи для R_n^+.

Условие (4) для задачи (5) означает, что характеристич. направление системы дифференциальных операторов

$$q_j(x, D)u, \quad j = 1, \ldots, m,$$

заданных в окрестности точек границы Γ области G, ни в одной точке Γ не является касательным к Γ. При выполнении этого условия для решения u задачи (5) имеет место коэрцитивная оценка

$$\|u\|_{2m, G} \leqslant C\left\{\|f\|_{0, G} + \sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|_{2m-\mu_j, \Gamma} + \|u\|_{0, G}\right\},$$

где норма в пространстве Соболева $W_2^{2m}(G)$ оценивается через норму u в $L_2(G)$ и нормы f в $L_2(G)$ и φ_j в $W_2^{2m-\mu_j}(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, m$, причем μ_j — порядок оператора q_j.

Понятие К. к. з. обобщается и на эллиптич. системы уравнений. Методы исследования и результаты, справедливые для К. к. з. для одного эллиптич. уравнения, обобщаются и на К. к. з. для эллиптич. систем (3). Исследование К. к. з. для эллиптич. уравнений и систем часто редуцируется, напр. *параметрикса методом*, к ис-

следованию системы сингулярных интегральных уравнений. Эта система является нётеревой системой интегральных уравнений (см. [2], [6]), а условие (4), или в случае системы аналог этого условия, гарантирует нормальность системы интегральных уравнений. К. к. з. всегда нётерова, т. е. неоднородная задача разрешима при соблюдении конечного числа условий ортогональности, наложенных на правые части уравнений системы и на заданные функции в краевых условиях, а соответствующая однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений.

Примером К. к. з. для любого эллиптич. уравнения может служить задача Дирихле. В этом случае

$$q_j(x, D) = \frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где $\partial/\partial n$ означает производную по направлению конормали для данного эллиптич. оператора. Однако задача Дирихле уже не для всякой эллиптич. системы является К. к. з. Примером таких систем может служить система двух уравнений, к-рая в комплексной записи наз. *Бицадзе уравнением.*

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [2] Лопатинский Я. Б., «Укр. матем. ж.», 1953, т. 5, № 2, с. 123—51; [3] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [4] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [5] его же, «Математика», 1960, т. 4, № 4, с. 37—73; [6] Шапиро З. Я., «Матем. сб.», 1951, т. 28, с. 55—78.

А. И. Янушаускас.

КОЭРЦИТИВНОСТИ НЕРАВЕНСТВО — неравенство, дающее оценку снизу нек-рой билинейной формы либо дающее оценку сверху нормы решения нек-рого эллиптич. уравнения через норму известной функции и нормы граничных данных.

Пусть

$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x)\, \partial^\alpha, \quad (-1)^m \operatorname{Re} \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \geqslant c\, |\xi|^{2m}$$

— равномерно эллиптический в области Ω_1 из пространства $\mathbb{R}^n$ оператор с коэффициентами $a_\alpha(x) \in C_\infty(\Omega_1)$, пусть область Ω содержится в области Ω_1 и в нек-рой окрестности границы S области Ω заданы дифференциальные операторы M_j, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, порядков j такие, что характеристики этих операторов ни в одной точке поверхности S не являются касательными к S. Тогда в нек-рой окрестности S существуют дифференциальные операторы N_j порядков j, $j = m, \ldots, 2m-1$, такие, что

$$\sum_{|\alpha| \leqslant m,\ |\beta| \leqslant m} \left(\partial^\alpha v,\ a_{\alpha\beta}\, \partial^\beta v\right) - (v,\ L(u)) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_S M_j(v)\, \overline{N_{2m-1-j}(u)}\, d\sigma \qquad (1)$$

для всех v и u из $C^\infty(\bar{\Omega})$. Здесь $(\ ,\ )$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Форма

$$D(v, u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m,\ |\beta| \leqslant m} \left(\partial^\alpha v,\ a_{\alpha\beta}\, \partial^\beta u\right)$$

наз. коэрцитивной формой на пространстве X, $\mathring{W}_2^m(\Omega) \subset X \subset W_2^m(\Omega)$, если существуют постоянные $C > 0$ и $\lambda \geqslant 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} D(u, u) \geqslant C\, \|u\|^2_{m,\,\Omega} - \lambda\, \|u\|^2_{0,\,\Omega} \qquad (2)$$

для всех $u \in X$. Здесь W_2^m — *Соболева пространство*, а $\mathring{W}_2^m$ — его подпространство элементов с компактными носителями, т. е. обращающихся в нуль в окрестности границы области Ω. Неравенство (2) является К. н. для формы $D(v, u)$. Если в (2) можно положить $\lambda = 0$, то $D(v, u)$ наз. строго коэрцитивной.

Если решение u уравнения $L(u)=f$ удовлетворяет на S условиям $M_j(u)=0$, $j=0, \ldots, m-1$, то справедливо неравенство

$$\|u\|_{2m,\,\Omega} \leqslant C_1 \|L(u)\|_{0,\,\Omega} + \lambda_1 \|u\|_{0,\,\Omega} \qquad (3)$$

с нек-рыми постоянными $C_1>0$ и $\lambda_1 \geqslant 0$. Когда решение u уравнения $L(u)=f$ удовлетворяет на S условиям $M_j(u)=\varphi_j$, $j=0, \ldots, m-1$, вместо неравенства (3) имеет место следующее неравенство

$$\|u\|_{2m,\,\Omega} \leqslant C \left\{ \|L(u)\|_{0,\,\Omega} + \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{2m-j,\,s} + \right. \\ \left. + \|u\|_{0,\,\Omega} \right\}. \qquad (4)$$

Это неравенство дает оценку нормы решения u уравнения $L(u)=f$ в пространстве Соболева $W_2^{2m}(\Omega)$ через норму u в пространстве $L_2(\Omega)$ и нормы функций f и φ_j, $j=0, \ldots, m-1$, в соответствующих пространствах. Неравенство (4) является К. н. для краевой задачи для эллиптич. уравнения.

При помощи неравенства (4) получается более общее неравенство

$$\|u\|_{2m+k,\,\Omega} \leqslant C \left\{ \|L(u)\|_{k,\,\Omega} + \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|_{2m-j+k,\,s} + \right. \\ \left. + \|u\|_{0,\,\Omega} \right\}.$$

К. н. играет важную роль в исследовании коэрцитивных краевых задач и в доказательствах гладкости решений эллиптич. уравнений и, в частности, в доказательствах аналитичности решений аналитических эллиптич. уравнений.

Лит.: [1] Agmon S., Lectures on elliptic boundary value problems, [N. Y.], 1965; [2] Morrey C. B., Nirenberg L., «Comm. Pure Appl. Math.», 1957, v. 10, № 2, p. 271—90.

А. И. Янушаускас.

КОЭФФИЦИЕНТ — числовой множитель при буквенном выражении, известный множитель при той или иной степени неизвестного или постоянный множитель при переменной величине. Так, в одночлене $-\frac{3}{4}a^2b^2$ К. есть $-\frac{3}{4}$, в уравнении $x^2+2px+q=0$ К. при x^2 есть 1, а К. при x равен $2p$; в формуле длины окружности $l=2\pi r$ К. есть 2π. В уравнении прямой $y=kx+b$ число k, выражающее тангенс угла наклона прямой к оси Ox, наз. угловым коэффициентом. *БСЭ-3.*

КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОБЛЕМА для класса S — проблема для класса функций

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

регулярных и однолистных в круге $|z|<1$, заключающаяся в определении для каждого n, $n \geqslant 2$, области значений V_n системы коэффициентов $\{c_2, c_3, \ldots, c_n\}$ функций этого класса и, в частности, в нахождении точных оценок для $|c_n|$, $n \geqslant 2$, в классе S (см. *Бибербаха гипотеза*). К. п. для нек-рого класса R функций, регулярных в $|z|<1$, заключается в определении в классе R для каждого n, $n \geqslant 1$, области значений системы первых n коэффициентов разложения функции класса R в ряд по степеням z и, в частности, в получении точных оценок этих коэффициентов в классе R. К. п. решена для *Каратеодори класса*, для класса регулярных типично вещественных в круге функций, для класса однолистных звездообразных функций, для класса функций, регулярных и ограниченных в $|z|<1$.

Известно, что V_2 — круг: $|c_2| \leqslant 2$. Получены глубокие качественные результаты по К. п. в классе S (см. [7]). Множество V_n — ограниченная замкнутая область, точка $c_2=0$, $c_3=0$, $\ldots$, $c_n=0$ — внутренняя точка V_n; V_n гомеоморфно замкнутому $(2n-2)$-мерному шару;

граница V_n состоит из конечного числа частей Π_1, Π_2, . . ., Π_N; координаты точки $(c_2, c_3, \ldots, c_n)$ на любой одной из этих частей — функции конечного числа параметров ($\leqslant 2n-3$). Каждой граничной точке V_n соответствует единственная функция класса S. Граница V_3 состоит из двух гиперповерхностей Π_1 и Π_2 размерности 3 и их пересечения: поверхностей Π_3 и Π_4 и кривой Π_5. Для Π_1 и Π_2 получены параметрич. формулы в терминах элементарных функций. Сечение V_3 плоскостью $\operatorname{Im} c_2=0$ симметрично относительно плоскостей $\operatorname{Re} c_2=0$ и $\operatorname{Im} c_3=0$. Сечение V_3 плоскостью $\operatorname{Im} c_3=0$ симметрично относительно плоскостей $\operatorname{Im} c_2=0$ и $\operatorname{Re} c_2=0$. Функция $w=f(z)$, соответствующая точке поверхности Π_1, отображает $|z|<1$ на плоскость w с единственным аналитич. разрезом, уходящим в бесконечность. Функция $w=f(z)$, соответствующая точке поверхности Π_2, отображает $|z|<1$ на плоскость w с разрезом по трем аналитич. дугам, исходящим из нек-рой конечной точки под углом $2\pi/3$ друг к другу, одна из этих дуг лежит на прямой $\arg w=\text{const}$ и уходит в бесконечность.

Были исследованы также: область значений $\{c_2, c_3\}$ в подклассе функций из S с действительными c_2 и c_3; области значений $\{|c_{k+1}|, |c_{2k+1}|\}$ и $\{c_{k+1}, c_{2k+1}\}$, если $\operatorname{Im} c_{k+1}=\operatorname{Im} c_{2k+1}=0$, на подклассе ограниченных функций из S вида

$$f(z)=z+\sum_{n=1}^{\infty} c_{nk+1}z^{nk+1};$$

область значений $\{c_2, c_3\}$ на подклассе ограниченных функций из S; область значений $\{c_2, c_3, c_4\}$ в подклассе функций из S с действительными c_2, c_3 и c_4.

Точные оценки для коэффициентов вида $|c_n|\leqslant A_n$, $n\geqslant 2$, получены в подклассе *выпуклых функций* из S с $A_n=1$, в подклассе звездообразных функций из S с $A_n=n$, в подклассе нечетных звездообразных функций из S с $A_n=1$, $n=3, 5, \ldots$, в классе однолистных функций с действительными коэффициентами с $A_n=n$, в подклассе близких к выпуклым функций из S с $A_n=n$. В классе функций

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n,$$

регулярных и типично вещественных в $|z|<1$, имеет место точная оценка $|c_n|\leqslant n$, $n\geqslant 2$, а в классе *Бибербаха — Эйленберга функций* $f(z)=a_1z+a_2z^2+\ldots$ — точная оценка $|a_n|\leqslant 1$, $n\geqslant 1$.

Для класса Σ функций

$$F(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{\zeta^n},$$

мероморфных и однолистных в $|\zeta|>1$, известны точные оценки:

$$|b_1|\leqslant 1,\quad |b_2|\leqslant\frac{2}{3},\quad |b_3|\leqslant\frac{1}{2}+e^{-6}.$$

Для подкласса звездообразных функций из Σ справедлива точная оценка

$$|b_n|\leqslant\frac{2}{n+1},\quad n\geqslant 1.$$

Имеются точные оценки коэффициентов и в других подклассах из S и Σ (см. [1]—[4]), а также в нек-рых классах p-листных функций и в классах p-листных в среднем функций (см. [5]).

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Базилевич И. Е., в кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957, т. 1, М., 1959, с. 444—72; [3] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [4] Hayman W. K., «J. London Math. Soc.», 1965, v. 40, pt 3, p. 385—406; [5] Goodman A. W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 74, № 6, p. 1035—50; [6] Phelps D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 143, p. 475—85; [7] Schaeffer A. C., Spencer D. C., Coefficient regions for schlicht functions, N. Y., 1950.

Е. Г. Голузина.

КОЯДРО морфизма категории — понятие, двойственное понятию *ядра* морфизма. В категориях векторных пространств, групп, колец и т. п. оно описывает наибольший *факторобъект* объекта B, аннулирующий образ гомоморфизма $\alpha\colon A \to B$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми морфизмами. Морфизм $\nu : B \to C$ наз. коядром морфизма $\alpha : A \to B$, если $\alpha\nu = 0$ и всякий морфизм φ, для к-рого $\alpha\varphi = 0$, однозначно представим в виде $\varphi = \nu\psi$. К. морфизма α обозначается $\operatorname{coker}\alpha$.

Если $\nu = \operatorname{coker}\alpha$ и $\nu' = \operatorname{coker}\alpha$, то $\nu' = \nu\xi$ для единственного изоморфизма ξ.

Обратно, если $\nu = \operatorname{coker}\alpha$ и ξ — изоморфизм, то $\nu' = \nu\xi$ есть К. морфизма α. Таким образом, все К. морфизма α образуют факторобъект объекта B, к-рый обозначается $\operatorname{Coker}\alpha$. Если $\nu = \operatorname{coker}\alpha$, то ν — нормальный эпиморфизм. Обратное, вообще говоря, неверно. К. нулевого морфизма $0 : A \to B$ равно 1_B. К. единичного морфизма 1_A существует тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{K}$ имеется нулевой объект.

В категории $\mathfrak{K}$ с нулевым объектом морфизм $\alpha : A \to B$ обладает К. в том и только в том случае, когда в $\mathfrak{K}$ существует коуниверсальный квадрат относительно морфизмов α и $0 : A \to 0$. Это условие выполнено, в частности, для любого морфизма локально малой справа категории с нулевым объектом и произведениями.

М. Ш. Цаленко.

КРАВЧУКА МНОГОЧЛЕНЫ — многочлены, ортогональные на конечной системе $N+1$ целочисленных точек при условии, что функция распределения $\sigma(x)$ есть ступенчатая функция со скачками

$$\sigma(x+0) - \sigma(x-0) = \binom{N}{x} p^x q^{N-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

где $\binom{N}{x}$ — биноминальный коэффициент, $p>0$, $q>0$ и $p+q=1$. К. м. имеют представление

$$P_n(x) = \left[\binom{N}{x}\right]^{-1/2} (pq)^{-n/2} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{N-x}{n-k} \times \binom{x}{k} p^{n-k} q^k.$$

Впервые рассмотрены М. Ф. Кравчуком [1].

Лит.: [1] Krawtchouk M., «C. r. Acad. sci.», 1929, t. 189, p. 620—22; [2] Сеге Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962.

И. К. Суетин.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА для обыкновенного дифференциального уравнения — задача о нахождении решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in J, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

принадлежащего заданному множеству D пространства $D(J, \mathbb{R}^n)$ абсолютно непрерывных на J функций от t со значениями в $\mathbb{R}^n$:

$$x(\cdot) \in D. \tag{2}$$

Здесь функция $f(t, x)$ определена на $J \times \mathbb{R}^n$, принимает значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям Каратеодори; J — промежуток числовой прямой $\mathbb{R}$.

1) К. з. (1), (2) наз. линейной, если

$$f(t, x) \equiv A(t)x + b(t),$$

где функции $A(t)$ и $b(t)$ суммируемы на каждом компактном промежутке из J; множество D является линейным многообразием в $D(J, \mathbb{R}^n)$. В частности, может быть

$$J = [t_0, t_1],$$

$$D = \left\{x(\cdot) \in D(J, \mathbb{R}^n): \int_{t_0}^{t_1} [d\Phi(t)]\, x(t) = 0\right\},$$

где функция $\Phi(t)$ имеет ограниченную вариацию. Линейная К. з. порождает линейный оператор

$$Lx(t) \equiv x' - A(t)\,x,\ x(\cdot) \in D,$$

собственные значения к-рого являются теми значениями параметра λ, при к-рых однородная К. з.

$$x' - A(t)\,x = \lambda x,\ x(\cdot) \in D,$$

имеет нетривиальные решения. Эти нетривиальные решения суть собственные функции оператора L. Если обратный оператор L^{-1} существует и имеет место интегральное представление

$$x(t) - L^{-1} b(t) \equiv \int_J G(t,\ s)\,b(s)\,ds,\ t \in J,$$

то функция $G(t, s)$ наз. функцией Грина.

2) Пусть $J = (-\infty, \infty)$, функция $f(t, x)$ почти периодична по t равномерно относительно x на каждом компактном подмножестве из $\mathbb{R}^n$, D — множество абсолютно непрерывных на J почти периодич. функций от t. Тогда К. з. (1), (2) наз. задачей о почти периодических решениях.

3) В теории управления рассматриваются К. з. с функциональным параметром — управлением. Напр., пусть задано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x,\ u),\ t \in J = [t_0,\ t_1],\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (3)$$

множество допустимых управлений U и два множества $M_0,\ M_1 \subset \mathbb{R}^n$. Пусть D — множество абсолютно непрерывных функций от t, удовлетворяющих включениям $x(t_0) \in M_0,\ x(t_1) \in M_1$. К. з. состоит в нахождении такой пары $(x_0(\cdot),\ u_0(\cdot))$, что $u_0(\cdot) \in U$ и решение $x_0(t)$ уравнения (3) при $u = u_0(t)$ удовлетворяет условию $x_0(\cdot) \in D$.

4) Имеется большое количество разнообразных необходимых и достаточных условий существования, единственности решения разных К. з. и методов построения приближенного решения (см. [4]—[7]). Рассмотрим, напр., задачу

$$\left.\begin{aligned} &x' = A(t)\,x + f(t,\ x), \\ &\int_{t_0}^{t_1} [d\Phi(t)]\,x(t) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

в которой

$$\|f(t,\ x)\| \leqslant a + b\,\|x\|^{\alpha}$$

для нек-рых постоянных $a > 0$, $b > 0$, $\alpha \geqslant 0$. Пусть соответствующая однородная задача

$$x' = A(t)\,x,\ \int_{t_0}^{t_1} [d\Phi(t)]\,x(t) = 0 \qquad (5)$$

регулярна, т. е. имеет только тривиальное решение. Тогда задача (4) имеет по крайней мере одно решение, если либо $\alpha < 1$, либо $\alpha \geqslant 1$ и b достаточно мало. Исследование задачи (5) на регулярность является довольно сложной проблемой. Однако, напр., линейная К. з. (скалярная)

$$x'' + q(t)\,x' + p(t)\,x = 0,\ x(t_0) = 0,\ x(t_1) = 0$$

регулярна, если при $|q(t)| \leqslant 2m$ найдется такое $k \in \mathbb{R}$, что

$$\int_{t_0}^{t_1} [p(t) - k]_+\,dt \leqslant 2\,[F(k,\ m) - m],$$

где

$$F(k,\ m) = \begin{cases} \sqrt{k - m^2}\,\operatorname{ctg}\dfrac{(t_1 - t_0)\sqrt{k - m^2}}{2}, \\ \qquad m^2 < k \leqslant m^2 + \pi^2 (t_1 - t_0)^{-2}, \\ \dfrac{2}{t_1 - t_0},\ k = m^2, \\ \sqrt{m^2 - k}\,\operatorname{ctg}\dfrac{(t_1 - t_0)\sqrt{m^2 - k}}{2},\ k < m^2. \end{cases}$$

Лит.: [1] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [2] Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., 1970; [3] Понтрягин Л. С., [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976; [4] Красовский Н. Н., Теория управления движением. Линейные системы, М., 1968; [5] Зубов В. И., Лекции по теории управления, М., 1975; [6] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [7] Кигурадзе И. Т., Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Тб., 1975.

Ю. В. Комленко, Е. Л. Тонков.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА для уравнения с частными производными — задача определения в нек-рой области D переменных $x=(x_1, \ldots, x_n)$ решения $u(x)$ уравнения

$$(Lu)(x)=f(x), \quad x\in D, \tag{1}$$

удовлетворяющего на границе S этой области (или ее части) определенным *краевым условиям*

$$(Bu)(y)=\varphi(y), \quad y\in S. \tag{2}$$

Как правило, краевые условия связывают граничные значения решения с его производными до нек-рого порядка, т. е. B является дифференциальным оператором. Однако встречаются и краевые условия других типов.

Для данного дифференциального уравнения целесообразность рассмотрения той или иной К. з. часто определяется понятием ее корректной постановки. Именно, К. з. корректно поставлена, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных этой задачи. Различные типы дифференциальных уравнений требуют различных корректно поставленных К. з., и обратно, корректные постановки К. з. иногда могут служить основой для классификации типов дифференциальных уравнений.

К. з. наз. линейной, если операторы L и B линейны, и однородной, если f и φ в (1), (2) равны нулю. Линейная К. з. наз. нётеровой, если: а) однородная задача имеет конечное число k линейно независимых решений; б) неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда f и φ удовлетворяют l линейно независимым условиям типа условий ортогональности; в) при условии однозначной разрешимости решение непрерывно зависит от f и φ.

Если $k-l$, то задача наз. фредгольмовой. Разность $k-l$ определяет индекс задачи.

Широкий класс К. з. для линейных уравнений с частными производными 2-го порядка

$$Lu=\sum_{i,\,j=0}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+$$

$$+\sum_{i=0}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x) \tag{3}$$

охватывается задачей Пуанкаре. В этой задаче носителем краевых условий является вся граница, к-рая предполагается $(n-1)$-мерным многообразием, а граничный оператор B в (2) имеет вид

$$(Bu)(y)=\sum_{i=1}^{n} p_i(y)\frac{\partial u}{\partial x_i}+p(y)u=\varphi(y), \quad y\in S. \tag{4}$$

Задача Пуанкаре хорошо исследована в ограниченной области D с достаточно гладкой границей, при условии равномерной эллиптичности оператора L.

В предположении достаточной гладкости коэффициентов операторов L и B в (3), (4) и границы области D задача Пуанкаре нётерова, если $n\neq 2$, $\sum p_i^2>0$, и фредгольмова, если $n>2$, $\sum p_i^2>0$ и вектор $\boldsymbol{p}=(p_1, \ldots, p_n)$ некасателен к S. При исследовании задачи Пуанкаре в двумерном случае широкое применение находят методы теории функций комплексного переменного (см. *Краевая задача*; методы комплексного переменного).

Для общего эллиптич. уравнения порядка $2m$

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = f(x), \quad x \in D, \qquad (5)$$

краевые условия могут задаваться с помощью линейных дифференциальных операторов

$$B_j u = \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{j\alpha}(y) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \varphi_j(y), \quad y \in S, \ 1 \leqslant j \leqslant m, \qquad (6)$$

порядка $m_j < 2m$ с коэффициентами, определенными на границе S области D. Если операторы L и B_j удовлетворяют так наз. условию дополнительности, то производные порядка $2m$ функции u, удовлетворяющей граничным условиям, можно оценить (в нек-рой норме) через норму f в (5) и подходящие нормы граничных функций φ_j в (6). К. з. такого типа наз. коэрцитивными К. з.

Другой тип К. з. представляют так наз. *смешанные задачи*, в к-рых на смежных участках границы задаются различные краевые условия.

Для эллиптич. уравнений характерно то, что краевые условия задаются на всей границе. Однако в полной мере это относится только к равномерно эллиптич. уравнениям. Если оператор L в (3) эллиптичен внутри области и на части $S_0 \subseteq S$ параболически вырождается, то в зависимости от характера вырождения участок S_0 от задания краевых условий может освобождаться. См. также *Краевая задача* для эллиптического уравнения.

Если уравнение (3) не принадлежит к эллиптич. типу, то часть границы от задания краевых условий, как правило, освобождается. Напр., для простейшего уравнения параболич. типа — уравнения теплопроводности

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

задача Дирихле в области D, ограниченной прямыми $x = \pm 1$, $t = \pm 1$, состоит в задании граничных значений функции u на отрезках $\{t = -1, -1 \leqslant x \leqslant +1\}$ и $\{x = \pm 1, -1 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Специальным образом ставятся К. з. для уравнений смешанного эллиптико-гиперболич. типа.

Важное место занимают К. з. в теории аналитич. функций. Пусть S — кусочно гладкая линия на плоскости, т. е. объединение конечного числа простых ориентируемых дуг. Задача линейного сопряжения заключается в определении аналитической вне S функции $\varphi(z)$, имеющей предельные значения $\varphi^{\pm}(t)$, $t \in S$, с обеих сторон S и удовлетворяющей краевому условию

$$\varphi^+(t) - G(t)\varphi^-(t) = g(t), \quad t \in S,$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные функции. С помощью представлений аналитич. функций интегралами типа Коши при некоторых предположениях относительно функций G, g и линии S решения этой задачи выписываются в явном виде. См. *Граничные задачи теории аналитических функций*.

Для изучения К. з. предложен ряд методов. *Шварца альтернирующий метод* и связанные с ними *выметания метод* Пуанкаре и *Перрона метод* опираются на применение принципа максимума. Решение К. з. с помощью интегральных уравнений основано на различных интегральных представлениях решений. Исследование К. з. с помощью априорных оценок относится к функциональным методам. Широко применяется теория обобщенных функций. В практических приложениях значительное распространение получили различные конечно-разностные методы.

Лит.: [1] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., *Уравнения с частными производными*, пер. с англ., М., 1966; [2] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических урав-

нений второго порядка, М., 1966; [3] К у р а н т Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [4] Л а д ы ж е н с к а я О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; [5] М и р а н д а К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [6] М у с х е л и ш в и л и Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [7] Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972.

А. П. Солдатов.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА для эллиптического уравнения — задача отыскания регулярного в области D решения u эллиптического уравнения

$$\sum_{i,\ k=0}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}+\sum_{i=0}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f, \qquad (1)$$

удовлетворяющего нек-рым дополнительным условиям на границе Γ области D.

Классические К. з. являются частными случаями следующей задачи: найти регулярное в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее на границе Γ условию

$$a\frac{du}{dl}+bu=g, \qquad (2)$$

где d/dl — производная по нек-рому направлению; a, b и g — заданные непрерывные на Γ функции, причем $|a|+|b|>0$ всюду на Γ (см. [1]).

При $a=0$, $b=1$ К. з. есть *Дирихле задача*; при $b\equiv 0$, $a=1$ — задача с косой производной (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача с косой производной), к-рая переходит в *Неймана задачу*, если направление l совпадает с направлением конормали. Если $\Gamma=\bar{\Gamma}_1\cup\bar{\Gamma}_2$, где Γ_1 и Γ_2 — непересекающиеся открытые подмножества Γ, а $\bar{\Gamma}_1\cap\bar{\Gamma}_2$ либо является $(n-2)$-мерным многообразием, либо пусто, и $a=1$, $b=0$ на Γ_1, $a=0$, $b\equiv 1$ на Γ_2, то получается *смешанная задача*.

Задача (2) изучалась для эллиптич. уравнений с двумя независимыми переменными (см. [2]). Довольно полно исследованы задача Дирихле для эллиптич. уравнений с любым конечным числом независимых переменных (см. [1], [3], [4]) и задача с косой производной в том случае, когда направление l ни в одной точке Γ не выходит в касательную к Γ плоскость. В этом случае задача с наклонной производной — фредгольмова и решение имеет такую же гладкость, как и поле направлений l и функция g (см. [1]). Изучался случай, когда l выходит в касательную к Γ плоскость в нек-рых точках Γ (см. [3]). Были исследованы локальные свойства решений задачи с косой производной (см. [5]). В точках выхода поля l в касательную к Γ плоскость решение задачи менее гладкое, чем поле l и функция g. На основании этого исследована задача в обобщенной постановке (см. [7], [8]).

Пусть краевое условие для регулярных в единичном шаре $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ гармоних. функций имеет вид

$$au_x+bu_y+cu_z=g;$$

K — множество точек единичной сферы S, в к-рых обращается в нуль функция $\omega=ax+by+cz$. Векторное поле $P(a, b, c)$ по множеству K выходит в касательную к единичной сфере S плоскость. Пусть, кроме того, K состоит из конечного числа непересекающихся кривых, K^+ — подмножество K, состоящее из таких точек, в к-рых $\operatorname{grad}\omega$ составляет острый угол с проекцией поля P на сферу S, и K^- — оставшаяся часть K. Обобщенная постановка задачи заключается в дополнительном задании значений u на K^+, но на множестве K^- допускаются интегрируемые особенности у решения u. В случае, когда K^- пусто, за счет повышения гладкости дополнительных данных задачи можно сделать сколь угодно гладким решение обобщенной задачи. Решение смешанной задачи на множестве $\Gamma_0=\bar{\Gamma}_1\cap\bar{\Gamma}_2$, вообще говоря, имеет особенности (см. [1]). Для того чтобы это решение

не имело особенностей на Γ_0, необходимо накладывать дополнительные условия на данные задачи (см. [11]).

Широкий класс К. з. составляют так наз. задачи со свободными границами. В этих задачах требуется найти не только решение уравнения (1), но и область его регулярности. Граница Γ области неизвестна, но на ней должны удовлетворяться два краевых условия. Примером таких задач является з а д а ч а о в о л н о в ы х д в и ж е н и я х и д е а л ь н о й ж и д к о с т и. В этой задаче ищется регулярная в нек-рой области D гармонич. функция u, причем часть Γ_1 границы известна и на Γ_1 нормальная производная $\partial u/\partial n$ равна нулю, а другая часть границы Γ_2 неизвестна и на ней выполняются два краевых условия:

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0,\ u_x^2+u_y^2+u_z^2=q\ (x,\ y,\ z),$$

где $q>0$ — заданная функция.

Для гармонич. функций двух независимых переменных используется аппарат конформных отображений (см. [12], [13], [14]). См. также *Дифференциальное уравнение с частными производными*; задача со свободными границами.

Исследовалась следующая задача: найти регулярную в области D гармонич. функцию u, удовлетворяющую на границе Γ области условию

$$|\operatorname{grad} u|^2=q,$$

где $q>0$ — заданная функция. Для гармонич. функций двух независимых переменных эта задача решена полностью (см. [14]).

Для уравнения $Lu=f$, где L — равномерно эллиптический в замыкании $\bar{D}$ области D оператор порядка $2m$, рассматривается задача отыскания регулярного в D решения u, удовлетворяющего на границе Γ области D условиям:

$$B_ju=\Phi_j,\quad j=1,\ \ldots,\ m, \tag{3}$$

где $B_j(x,\ D)$, $j=1,\ \ldots,\ m$,— дифференциальные операторы, удовлетворяющие следующему у с л о в и ю д о п о л н и т е л ь н о с т и.

Пусть $L'\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right)$ — главная часть оператора L, B_j' — главная часть оператора B_j, n — нормаль к Γ в точке x, $\lambda\neq 0$ — произвольный вектор, параллельный Γ. Через $\tau_k^+(\lambda)$ обозначены корни $L'(x,\ \lambda+\tau n)$ с положительными мнимыми частями. Многочлены $B_j'(x,\ \lambda+\tau n)$, $j=1,\ \ldots,\ m$, относительно переменного τ должны быть линейно независимыми по модулю многочлена $\Pi_{k=1}^m(\tau-\tau_k^+(\lambda))$. И в этом случае задача является нормально разрешимой. Нарушение условия дополнительности может повлечь существенное изменение характера задачи (см. [17]).

Задача (2) — частный случай задачи (3). Для задачи (2) при $a=1$ условие дополнительности эквивалентно тому, что направление l ни в одной точке границы области не выходит в касательную к границе плоскость.

Другим частным случаем задачи (3) является задача с краевыми условиями:

$$\frac{\partial^j u}{\partial n^j}=\Phi_j,\quad j=0,1,\ \ldots,\ m-1,$$

к-рая есть некоторый аналог задачи Дирихле для эллиптич. уравнений высших порядков.

Изучена К. з. для полигармонич. уравнения $\Delta^k u=0$, когда граница области состоит из многообразий различной размерности (см. [15]).

При исследовании К. з. для нелинейных уравнений (напр., задач Дирихле и Неймана) важную роль играют априорные оценки решений (1), различные

принципы неподвижной точки (см. [17], [18]) и обобщения *Морса теории* на бесконечномерный случай (см. [19]).

Лит.: [1] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [2] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [3] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [4] Келдыш М. В., «Успехи матем. наук», 1941, в. 8, с. 171—292; [5] Hörmander L., «Ann. Math.», 1966, v. 83, № 1, p.129—209; [6] Borrelli R. L., «J. Math. and Mech.», 1966, v. 16, № 1, p. 51—81; [7] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А., «Матем. сб.», 1969, т. 78, № 1, с. 148—76; [8] Мазья В. Г., «Матем. сб.», 1972, т. 87, № 3, с. 417—53; [9] Янушаускас А., «Докл. АН СССР», 1965, т. 164, № 4, с. 753—55; [10] Вишик М. И., Эскин Г. И., «Сиб. матем. ж.», 1968, т. 9, № 5, с. 973—97; [11] Giraud G., «Ann. Soc. Polon. de Math., année 1933», Kraków, 1934, t. 12, p. 35—54; [12] Лаврентьев М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962; [13] Некрасов А. И., Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, в кн.: Собр. соч., т. 1, М., 1961; [14] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 2 изд., М., 1963; [15] Соболев С. Л., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 3, с. 465—99; [16] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, пер. с англ., М., 1962; [17] Schauder J., «Math. Z.». 1931, Bd 33, S. 602—40; [18] Leray J., Schauder J., «Ann. sci. École norm. sup.», sér. 3, 1934, t. 51, p. 45—78; [19] Palais R. S., «Topology», 1963, v. 2, № 4, p. 299—340.

А. И. Янушаускас.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА; методы комплексного переменного — методы изучения К. з. для дифференциальных уравнений с частными производными, в к-рых используется представление решений через аналитич. функции комплексного переменного.

Пусть для уравнения 2-го порядка эллиптич. типа

$$\Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0, \quad (1)$$

где a, b, c — аналитич. функции действительных переменных x, y в нек-рой области плоскости $z=x+iy$, поставлена К. з.: найти регулярное в односвязной области $S \subset D_0$ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию

$$R(u) \equiv \sum\nolimits_{0 \leqslant j+k \leqslant m} \left[a_{jk}(t) \frac{\partial^{j+k} u}{\partial x^j \partial y^k} + T_{jk}\left(\frac{\partial^{j+k} u}{\partial x^j \partial y^k} \right) \right] = f(t), \quad (2)$$

где $a_{jk}(t)$, $f(t) \in C_\alpha(\partial S)$, $0<\alpha<1$, T_{jk} — линейные операторы, отображающие $C(\partial S)$ в $C_\alpha(\partial S)$, причем $T_{m-k,\,k}$ — вполне непрерывны.

Эта задача охватывает известные классические краевые задачи Дирихле, Неймана, Пуанкаре и др.

При помощи формулы общего представления решений (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; методы комплексного переменного):

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left\{ G(z, \bar{z}_0\ z, \bar{z})\,\Phi(z) - \int_{z_1}^{z} \Phi(t) \frac{\partial}{\partial t} G(t, \bar{z}, z, \bar{z})\, dt \right\},$$

эта задача приводится к эквивалентной К. з. для аналитич. функций:

$$\operatorname{Re} \sum\nolimits_{k=0}^{m} [a_k(t)\Phi^{(k)}(t) + T_k(\Phi^{(k)})] = f(t), \quad (3)$$

где $a_k(t)$ — заданные непрерывные в смысле Гёльдера функции, $t \in \partial S$, T_m — вполне непрерывный оператор, а T_k ($k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$) — линейные операторы.

Пусть конечная односвязная область S ограничена замкнутым контуром Ляпунова (см. *Ляпунова поверхности и кривые*) ∂S и пусть производная порядка $m \geqslant 0$ голоморфной в S функции $\Phi(z)$ принимает на ∂S значения функции класса C_α, $0<\alpha<1$. Тогда, считая, что

точка $z=0$ принадлежит S, функцию $\Phi(z)$ представляют в виде

$$\Phi(z)=\int_{\partial S}\frac{t\mu(t)\,ds}{t-z}+ic,\ \text{если}\ m=0;$$

$$\Phi(z)=\int_{\partial S}\mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+$$

$$+\int_{\partial S}\mu(t)\,ds+ic,\ \text{если}\ m\geqslant 1,$$

где $\mu(t)$ — действительная функция класса $C_\alpha(\partial S)$, $0<\alpha<1$, а c — действительная постоянная; $\mu(t)$ и c определяются по $\Phi(z)$ единственным образом.

Подстановка этих выражений в краевое условие (3) позволяет получить для искомой функции μ эквивалентное задаче (2) сингулярное интегральное уравнение вида

$$K(\mu)=A(t_0)\,\mu(t_0)+\frac{B(t)}{\pi i}\int_{\partial S}\frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+T\mu=f,$$

$$t_0\in\partial S,$$

где T — вполне непрерывный оператор.

Для нормальной разрешимости К. з. (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$a(t)=\sum_{k=0}^{m}i^k a_{m-k}(t)\neq 0,\ t\in\partial S,\ m\geqslant 0. \qquad (4)$$

Задача Дирихле ($m=0$) всегда нормально разрешима. (Ниже всюду предполагается, что условие (4) соблюдено.)

Индекс К. з. (2) вычисляется по формуле

$$\varkappa=2(m+p),\ m\geqslant 1,$$

где p — приращение функции $\frac{1}{2\pi}\arg\overline{a(t)}$ при однократном обходе контура ∂S в положительном направлении. Индекс задачи Дирихле равен нулю.

Однородная К. з. $R(u)=0$ имеет конечное число $k\geqslant 0$ линейно независимых решений, причем $k\geqslant\varkappa$, а неоднородная задача (2) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\int_{\partial S}f(t)\,\nu_j(t)\,dS=0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k',$$

где ν_j — полная система линейно независимых решений союзного однородного интегрального уравнения

$$k'(\nu)=A(t_0)\,\nu(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_{\partial S}\frac{B(t)\,\nu(t)\,dt}{t-t_0}+T(\nu)=0.$$

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы К. з. (2) имела решение для любой правой части, является наличие ровно $\varkappa$ линейно независимых решений у соответствующей однородной задачи $R(u)=0$. Следовательно, в случае $\varkappa>0$ однородная К. з. $R(u)=0$ всегда имеет не меньше, чем $\varkappa$, линейно независимых решений, а при $\varkappa<0$ неоднородная задача (2) не допускает решения для любой правой части, причем число условий разрешимости не меньше $|\varkappa|$.

Необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной К. з. могут быть сформулированы в терминах замкнутости относительно рассматриваемой области нек-рого ядра, а также полноты определенной системы функций. Эти ядра и системы функций строятся в явном виде при помощи функции Римана уравнения (1) и коэффициентов краевого условия. Напр., пусть $\{u_k\}$ — некоторая полная система решений относительно основной области D_0 уравнения (1) и пусть $S\subset D_0$. Тогда необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (2) для любой правой части является полнота системы функций $\{R(u_k)\}$ на границе.

Весьма полные результаты получены относительно следующей К. з. (обобщенной задачи Рима-

на — Гильберта): найти решение уравнения

$$\partial_{\bar z} w + A(z)\, w + B(z)\, \overline{w} = f(z), \quad w = u + iv, \tag{5}$$

$$2\partial_{\bar z} = \partial_x - i\partial_y,$$

непрерывное в $S+\partial S$ и удовлетворяющее краевому условию

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\lambda(z)},\ w(z)\right] \equiv \alpha u + \beta v = \gamma, \quad z \in \partial S, \tag{6}$$

где α, β, γ — заданные действительные функции, принадлежащие классу $C_\alpha(\partial S)$, $0<\alpha<1$, причем $\alpha^2+\beta^2=1$. Область S, вообще говоря, многосвязна. Такая задача может быть редуцирована к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению. Этим путем удается получить полный качественный анализ К. з. (6).

Пусть граница ∂S области S состоит из конечного числа простых замкнутых кривых $\partial S_0, \ldots, \partial S_m$, удовлетворяющих условиям Ляпунова. Так как при конформных отображениях вид уравнения и краевого условия сохраняются, то без ущерба для общности можно считать, что ∂S_0 — единичная окружность с центром в точке $z=0$, лежащей в рассматриваемой области S, а $\partial S_1, \ldots, \partial S_m$ — окружности, лежащие внутри ∂S_0.

Индексом задачи (6) наз. целое число n, равное приращению $\frac{1}{2\pi}\arg\left[\alpha(\zeta)+i\beta(\zeta)\right]$, когда точка ζ один раз обойдет ∂S в положительном направлении. Краевое условие можно привести к более простому виду

$$\operatorname{Re}\left[z^{-n} e^{ic(z)}\, w(z)\right] = \gamma, \quad z \in \partial S,$$

где $c(z)=c_j$ на ∂S_j, причем $c_0=0$, а $c_1, \ldots, c_m$ — некоторые действительные постоянные, к-рые однозначно выражаются через α и β. Индекс сопряженной задачи

$$\left.\begin{aligned} &\partial_{\bar z} w_* - A w_* - B\overline{w}_* = 0, && z \in S, \\ &\operatorname{Re}\left\{(\alpha+i\beta)\,\frac{d\bar z}{ds}\, w(z)\right\} = 0, && z \in \partial S, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

вычисляется по формуле: $n' = -n + m - 1$.

Задача (6) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\partial S} (\alpha + i\beta)\, w_* \gamma\, ds = 0,$$

где w_* — произвольное решение сопряженной задачи.

Пусть e и e' — числа линейно независимых решений однородных задач (6) и (7) соответственно. Тогда

$$e - e' = n - n' = 2n + 1 - m.$$

Если $n<0$, то однородная задача (6) не имеет нетривиальных решений. Если $n>m-1$, то однородная задача (6) имеет ровно $e=2n+1-m$ линейно независимых решений, а неоднородная задача (6) всегда разрешима. Если $n<0$, то неоднородная задача (6) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\partial S} (\alpha + i\beta)\, w_{*j} \gamma\, ds = 0, \quad j = 1, 2, \ldots; \quad e' = m - 2n - 1,$$

где w_{*j} — полная система решений однородной задачи (7). Если $m=0$ и $n=0$, то $e=1$ и все решения однородной задачи [6] имеют вид

$$w(z) = ice^{\omega_0(z)},$$

где c — действительная постоянная, а ω_0 — непрерывная в $S+\partial S$ функция.

Приведенные результаты полностью характеризуют задачу в односвязном ($m=0$) и многосвязном ($n<0$, $n>m-1$) случаях. Особого рассмотрения требуют случаи $0 \leqslant n \leqslant m-1$, к-рые также в достаточной мере детально разработаны.

Для уравнения (5) изучена также К. з. типа *Пуанкаре задачи*.

Лит. см. при ст. *Дифференциальное уравнение с частными производными*; методы комплексного переменного. *И. Н. Векуа.*

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА теории потенциала — основная задача *потенциала теории* как классической, так и абстрактной. Поскольку классические ньютонов и логарифмич. потенциалы удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям с частными производными эллиптич. типа, а именно *Лапласа уравнению* в областях, свободных от порождающих эти потенциалы масс, и *Пуассона уравнению* в областях, занятых массами, к числу К. з. теории потенциала относят в первую очередь *краевые задачи* для эллиптич. уравнений и систем.

1) *Дирихле задача*, или первая краевая задача, когда требуется найти потенциал $u(x)$ в нек-рой области D по заданным его непрерывным значениям $u(x)=f(x)$, $x\in\Gamma$, на границе области $\partial D-\Gamma$, причем распределение масс внутри D предполагается известным. Эта задача в теории потенциала является основной.

2) *Неймана задача*, или вторая краевая задача, когда требуется найти потенциал в D по заданным непрерывным значениям его нормальной производной

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}=\varphi(x) \text{ на } \Gamma.$$

3) *Смешанная задача*, или третья краевая задача, когда на Γ задается линейная комбинация

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}+\alpha(x)\,u(x)=\psi(x),\quad x\in\Gamma. \qquad (*)$$

4) Задача с *косой производной*, когда на Γ в условии (*) вместо производной по нормали $\partial u(x)/\partial n$ к Γ фигурирует производная $\partial u(x)/\partial l$ по произвольному, вообще говоря, направлению $l=l(x)$, $x\in\Gamma$.

Кроме перечисленных общих задач, в теории потенциала возникли также следующие специфические проблемы.

5) *Робена задача*, когда на Γ ищется такое распределение масс, потенциал к-рого $u(x)$ постоянен внутри области D. Эта задача возникает как электростатич. проблема определения такого равновесного распределения зарядов на проводнике Γ, к-рое ничем не проявляет себя внутри D.

6) *Выметания метод*, к-рый в своем простейшем изложении, ведущем начало от А. Пуанкаре (H. Poincaré), состоит в отыскании такого распределения масс на границе Γ, потенциал к-рого в дополнительной области $\overline{CD}$ совпадал бы с потенциалом данных «выметаемых» масс, расположенных внутри D. В *потенциала теории абстрактной* две последние задачи имеют особенно большое значение.

См. также *Бесселев потенциал*, *Нелинейный потенциал*, *Рисса потенциал*.

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [3] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [4] Constantinescu C., Cornea A., Potential theory on harmonic spaces, B., 1972.

Е. Д. Соломенцев.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, численные методы решения для уравнений с частными производными — приближенные методы решения, в результате к-рых решение задачи представляется таблицей чисел. Точно решения (в виде явных формул, рядов и т. п.) К. з. можно построить лишь в редких случаях. Из приближенных методов решения наибольшее распространение получили разностные методы (см. [1]); они применимы к самым общим задачам и удобны для реализации на ЭВМ. Сущность разностных методов

состоит в том, что исходная область изменения независимых переменных заменяется дискретным множеством точек — сеткой, а производные, входящие в уравнение и в граничные условия, аппроксимируются на этой сетке разностными отношениями. В результате такой процедуры исходной задаче сопоставляется система конечного числа алгебраич. уравнений (линейных или нелинейных), называемая разностной схемой. За приближенное решение исходной задачи принимается решение разностной схемы. Точность приближения зависит от способа аппроксимации и от густоты сетки, т. е. от того, насколько плотно сетка заполняет исходную область. В дальнейшем рассматриваются только линейные К. з. для уравнений с частными производными, причем исходная задача считается корректно поставленной. Обоснование разностных методов связано с исследованием корректности разностной задачи и ее сходимости при измельчении сетки. Разностная задача наз. к о р р е к т н о й, если при любых правых частях ее решение существует, единственно и устойчиво. Под устойчивостью разностной схемы понимается непрерывная зависимость ее решения от правой части, равномерная относительно шагов сетки.

Пусть, напр., требуется решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате G $\{0<x_1,\ x_2<1\}$ с границей Γ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x_1,\ x_2),\quad (x_1,\ x_2)\in G.$$

$$u(x_1,\ x_2)=\mu(x_1,\ x_2),\quad (x_1,\ x_2)\in\Gamma.$$

Область G заменяется квадратной сеткой G_h с шагом h, т. е. множеством точек

$$G_h=\left\{\left(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}\right)\Big|\ x_1^{(i)}=ih,\ x_2^{(j)}=jh;\right.$$

$$\left.i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1\right\},\quad hN=1,$$

с границей

$$\Gamma_h=\bigcup_{i,\ j=1}^{N-1}\left\{\left(0,\ x_2^{(j)}\right)\cup\left(1,\ x_2^{(j)}\right)\cup\left(x_1^{(i)},\ 0\right)\cup\left(x_1^{(i)},\ 1\right)\right\},$$

а производные, входящие в уравнение, - разностными отношениями

$$(\Lambda_1 u)_{i,\ j}=u_{\overline{x}_1 x_1,\ i,\ j}=(u_{i+1,\ j}-2u_{i,\ j}+u_{i-1,\ j})/h^2,$$

$$(\Lambda_2 u)_{i,\ j}=u_{\overline{x}_2 x_2,\ i,\ j}=(u_{i,\ j+1}-2u_{i,\ j}+u_{i,\ j-1})/h^2,$$

где $u_{i,\ j}=u(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)})$. Разностная схема имеет вид

$$(\Lambda_h y)_{i,\ j}=y_{\overline{x}_1 x_1,\ i,\ j}+y_{\overline{x}_2 x_2,\ i,\ j}=-f_{i,\ j},\qquad (1)$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1;\ y_{i,\ j}|_{\Gamma_h}=\mu_{i,\ j},$$

где $y_{i,\ j}$ — ее решение.

Решение задачи (1) существует и единственно при любых правых частях f и при любых граничных условиях μ (см. [2]). Более того, решение разностной задачи (1) сходится при $h\to 0$ к решению исходной задачи, причем схема имеет второй порядок точности в норме c, то есть

$$\max_{(x_1,\ x_2)\in G_h}|y(x_1,\ x_2)-u(x_1,\ x_2)|\leqslant Mh^2,$$

где M — постоянная, не зависящая от h.

Разностная схема (1) представляет собой систему линейных алгебраич. уравнений, для к-рой характерно большое число уравнений (именно $(N-1)^2$ уравнений, причем $N\to\infty$ при $h\to 0$), большое число нулей в матрице этой системы и плохая обусловленность (отношение наименьшего собственного числа к наибольшему есть величина порядка h^2 при $h\to 0$). Для решения подобных систем уравнений, возникающих при аппроксн-

мации дифференциальных уравнений разностными, существуют эффективные прямые и итерационные методы. Прямые методы дают точное решение разностной задачи после выполнения конечного числа арифметич. действий. К прямым методам относятся различные варианты метода прогонки, включая матричную прогонку, метод декомпозиции, быстрое преобразование Фурье, метод суммарных представлений (см. [1], [2], [3], [6]). Эффективность прямых методов оценивается порядком числа действий при $h \to 0$. Так, матричная прогонка требует для решения задачи (1) числа действий $\mathcal{O}(h^{-4})$, в то время как метод быстрого преобразования Фурье требует для решения той же задачи $\mathcal{O}(h^{-2} \ln h^{-1})$ действий. Из итерационных методов решения разностных задач используется метод Ричардсона с чебышевским набором параметров, попеременно-треугольный итерационный метод, различные методы переменных направлений (см. [2]). Эффективность итерационных методов оценивается порядком минимального числа итераций $n_0(\varepsilon)$, необходимых для того, чтобы уменьшить погрешность начального приближения в $1/\varepsilon$ раз. Напр., при решении задачи (1) методом Ричардсона величина $n_0(\varepsilon)$ имеет порядок $h^{-1} \ln \frac{1}{\varepsilon}$, а при решении методом переменных направлений с оптимальным выбором итерационных параметров $n_0(\varepsilon) - O(\ln h^{-1} \ln \frac{1}{\varepsilon})$. Итерационные методы более универсальны и более просты в реализации, чем прямые, и вследствие этого получили большое распространение при решении разностных задач.

Пусть, напр., требуется решить первую К. з. для уравнения теплопроводности:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad t > 0, \quad (x_1, x_2) \in G, \\ &u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2); \\ &u(x_1, x_2, t) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для решения этой задачи задается сетка по времени с шагом $\tau > 0$

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, \ n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

и сетка G_h по пространственным переменным. Пусть $u^n_{i,j} = u(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, t_n)$. Производная u'_t аппроксимируется отношением

$$u_{t,i,j} = \frac{u^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{\tau}$$

а лапласиан Δ — разностным оператором Δ_h. Исходному уравнению (2) ставится в соответствие разностная схема

$$\left.\begin{aligned} &y_{t,i,j} = \sigma (\Delta_h y)^{n+1}_{i,j} + (1-\sigma)(\Delta_h y)^n_{i,j}; \\ &y^0_{i,j} = u_0\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N-1; \\ &y^n_{i,j}\big|_{\Gamma_h \times \omega_\tau} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

параметр σ, входящий в эти уравнения, определяет устойчивость и точность схемы. Если $\sigma \geqslant 0{,}5$, то схема (3) устойчива при любых шагах сетки τ и h (абсолютно устойчивая разностная схема). Если же $\sigma < 0{,}5$, то схема (3) устойчива при нек-ром ограничении на величину $\gamma = \tau / h^2$ (условно устойчивая разностная схема); напр., явная схема ($\sigma = 0$) устойчива при условии $\gamma \leqslant 1/4$. При $\sigma = 0{,}5$ схема имеет второй порядок точности по τ и по h, при остальных σ - первый порядок точности по τ и второй — по h. Разностная задача (3) решается «по слоям». Слоем номера n наз. множество всех точек сетки

$G_h \times \omega_\tau$ при нек-ром фиксированном h. На нулевом слое (при $n = 0$) значения $y^0_{i,j}$ известны из начальных условий. Если значения $y^n_{i,j}$ на нек-ром слое n уже известны, то значения $y_{i,j} = y^{n+1}_{i,j}$ на следующем слое находятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &y_{i,j} - \sigma\tau\,(\Delta_h y)_{i,j} = f^n_{i,j},\ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,\\ &y_{i,j}|_{\Gamma_h} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где

$$f^n_{i,j} = y^n_{i,j} + (1-\sigma)\,\tau\,(\Delta_h y)^n_{i,j}.$$

Для нахождения решения задачи (4) можно воспользоваться любым из методов решения стационарной задачи (1). Существуют, однако, более экономичные алгоритмы решения многомерных нестационарных К. з., а именно методы переменных направлений (см. [1] — [5]), позволяющие сводить решение многомерной задачи к решению последовательности одномерных задач. Так, для решения уравнения теплопроводности можно воспользоваться следующей схемой переменных направлений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y^{n+1/2}_{i,j} - y^n_{i,j}}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/2}_{i,j} + \Lambda_2 y^n_{i,j},\\ &\frac{y^{n+1}_{i,j} - y^{n+1/2}_{i,j}}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/2}_{i,j} + \Lambda_2 y^{n+1}_{i,j}. \end{aligned}\right\}$$

Эта схема абсолютно устойчива, имеет второй порядок точности и решается путем последовательного обращения одномерных разностных операторов.

Решение разностной задачи, даже если оно получено точно, может не только количественно, но и качественно отличаться от решения исходной дифференциальной задачи. Особенно сильно это отличие сказывается при счете уравнений, имеющих особенности в коэффициентах или в самом решении (так, при расчете разрывных решений уравнений газовой динамики обычно появляются зоны сильного «размазывания» разрывов). Таким образом, непосредственная аппроксимация дифференциальной задачи разностной, когда производные заменяются с большой степенью произвола разностными отношениями, не всегда приводит к хорошей разностной схеме. Выработан ряд принципов построения разностных схем, позволяющих получить схемы хорошего качества. Так, успешно применяется метод баланса и методы аппроксимации вариационного функционала (см. [1]—[3]). Полученные этими методами разностные схемы правильно отражают интегральные законы сохранения, справедливые для исходных уравнений, и обеспечивают знакоопределенность соответствующих разностных операторов. В теории разностных однородных схем (см. [7]) рассматриваются вопросы построения и исследования сходимости разностных схем для уравнений с переменными (в том числе и разрывными) коэффициентами.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, М., 1977; [4] Яненко Н. Н., Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [5] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 1—2, М., 1971—72; [6] Положий Г. Н., Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента, Киев, 1962; [7] Тихонов А. Н., Самарский А. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1961, т. 1, в. 1, с. 5—63.

А. В. Гулин.

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ, граничные условия,— условия, к-рым должно удовлетворять искомое решение заданного дифференциального уравнения на границе (или ее части) области, где это решение ищется.

К. у. обычно задаются с помощью дифференциальных операторов, однако встречаются К. у. и других типов. *А. П. Солдатов.*

КРАЙ — подмножество замыкания $\overline{M^n}$ (открытого) действительного n-мерного многообразия M^n, каждая точка к-рого гомеоморфна нек-рой области W^n замкнутого полупространства $\mathbb{R}^n$, открытой в $\mathbb{R}^n_+$ (но не в $\mathbb{R}^n$). Точка $a \in \overline{M^n}$, соответствующая краевой точке области $W^n \subset \mathbb{R}^n_+$, т. е. точке пересечения $\overline{W^n}$ с границей полупространства $\mathbb{R}^n_+$, наз. к р а е в о й т о ч к о й M^n. Многообразие, обладающее краевыми точками, наз. м н о г о о б р а з и е м с к р а е м. Компактное многообразие без К. наз. з а м к н у т ы м м н о г о о б р а з и е м. Совокупность всех краевых точек M^n есть $(n-1)$-мерное многообразие без края. *М. И. Войцеховский.*

КРАМЕРА ПРАВИЛО: если определитель D квадратной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

не равен нулю, то эта система имеет единственное решение и это решение находится по формулам

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (*)$$

Здесь D_k — определитель, получаемый из D заменой k-го столба на столбец свободных членов. Формулы (*) наз. ф о р м у л а м и К р а м е р а; они были найдены Г. Крамером [1].

Лит.: [1] C r a m e r G., Introduction' à l'analyse des lignes courbes, Gen., 1750, p. 657; [2] К у р о ш А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

КРАМЕРА ТЕОРЕМА — интегральная предельная теорема для вероятностей больших отклонений (уклонений) сумм независимых случайных величин. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с общей невырожденной функцией распределения $F(x)$ такой, что $\mathsf{E}X_1 = 0$ и производящая функция моментов $\mathsf{E}e^{tX_1}$ конечна в нек-ром интервале $|t| < H$ (последнее условие наз. у с л о в и е м К р а м е р а). Пусть

$$\mathsf{E}X_1^2 = \sigma^2, \quad F_n(x) = \mathsf{P}\left(\sigma^{-1}n^{-1/2}\sum_{j=1}^n X_j < x\right).$$

Если $x > 1$, $x = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = \exp\left\{\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

$$\frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} = \exp\left\{-\frac{x^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right\}\left[1 + O\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Здесь $\Phi(x)$ — нормальная (0, 1) функция распределения, $\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ — так наз. р я д К р а м е р а, коэффициенты к-рого зависят только от моментов случайной величины X_1; этот ряд сходится для всех достаточно малых t. Несколько более слабый по сравнению с приведенным выше результат был получен Г. Крамером (H. Cramér) в 1938.

Лит.: [1] К р а м е р Г., «Успехи матем. наук», 1944, в. 10, с. 166—78; [2] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] П е т р о в В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972. *В. В. Петров.*

КРАМЕРА — МИЗЕСА КРИТЕРИЙ — *непараметрический критерий* для проверки гипотезы H_0, согласно к-рой независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют заданную непрерыв-

ную функцию распределения $F(x)$. К.— М. к. основан на статистике вида

$$\omega_n^2[\Psi(F(x))]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sqrt{n}(F_n(x)-F(x)\right]^2\Psi(F(x))\,dF(x),$$

где $F_n(x)$ — функция эмпирического распределения, построенная по выборке $X_1, \ldots, X_n$, $\Psi(t)$ — некоторая неотрицательная функция, определенная на отрезке $[0, 1]$ и такая, что $\Psi(t)$, $t\Psi(t)$ и $t^2\Psi(t)$ интегрируемы на $[0, 1]$. Критерии такого типа, основанные на квадратичной метрике, впервые были рассмотрены Г. Крамером [1] и Р. Мизесом [2]. Н. В. Смирнов предложил выбрать $\Psi(t)\equiv 1$ и показал, что в этом случае при справедливости гипотезы H_0 и $n\to\infty$ статистика $\omega_n^2=\omega_n^2$ [1] имеет в пределе «*омега-квадрат*» *распределение*, не зависящее от гипотетич. функции распределения $F(x)$. Статистич. критерий для проверки гипотезы H_0, основанный на статистике ω_n^2, наз. к р и т е р и е м ω^2 (к р и т е р и е м К р а м е р а — М и з е с а — С м и р н о в а), при этом для нахождения численного значения статистики ω_n^2 пользуются следующим ее представлением:

$$\omega_n^2=\frac{1}{12n}+\sum_{j=1}^{n}\left[F(X_{(j)})-\frac{2j-1}{2n}\right]^2,$$

где $X_{(1)}\leqslant\ldots\leqslant X_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $X_1, \ldots, X_n$. Согласно критерию ω^2 с уровнем значимости α, гипотеза H_0 отвергается, коль скоро $\omega_n^2\geqslant\omega_\alpha^2$, где ω_α^2 — верхняя α-квантиль распределения ω^2, т. е. $\mathsf{P}\{\omega^2<\omega_\alpha^2\}=1-\alpha$. Аналогично устроен критерий, предложенный Т. Андерсоном и Д. Дарлингом (см. [5]), основанный на статистике $\omega_n^2[1/F(x)(1-F(x))]$.

Лит.: [1] C r a m é r H., Sannolikhetskalkylen och några av dess användningar, Stockh., [1926]; [2] M i s e s R. V., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, Lpz.— W., 1931; [3] С м и р н о в Н. В., «Матем. сб.», 1937, т. 2, № 5, с. 973—93; [4] Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [5] A n d e r s o n T. W., D a r l i n g D. A., «Ann. Math. Stat.», 1952, v. 23, p. 193—212.

М. С. Никулин.

КРАТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, k-к р а т н а я п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь, элементов данного множества X — отображение k-й степени N^k множества натуральных чисел N в множество X. Э л е м е н т о м (или ч л е н о м) К. п. $f\colon N^k\to X$ наз. упорядоченный комплекс из $k+1$ элементов $(n_1, \ldots, n_k, x)$, где $x=f(n_1, \ldots, n_k)$, $x\in X$, $(n_1, \ldots, n_k)\in N^k$, т. е. $n_j\in N$, $j=1, 2, \ldots, k$, к-рый обозначается через $x_{n_1\ldots n_k}$.

Л. Д. Кудрявцев.

КРАТНАЯ ТОЧКА плоской кривой $F(x, y)=0$ — особая точка, в к-рой обращаются в нуль частные производные до порядка n включительно и не равна нулю хотя бы одна из частных производных $(n+1)$-го порядка. Так, например, если $F(x_0, y_0)=0$, $F'_x(x_0, y_0)=0$, $F'_y(x_0, y_0)=0$, но из производных $F''_{xx}(x_0, y_0)$, $F''_{xy}(x_0, y_0)$, $F''_{yy}(x_0, y_0)$ хотя бы одна не равна 0, то К. т. $M(x_0, y_0)$ наз. *двойной точкой*; если в точке $M(x_0, y_0)$ равны нулю первые и вторые частные производные и не равна нулю хотя бы одна из трех производных, то К. т.— т р о й н а я т о ч к а и т. д.

А. Б. Иванов.

КРАТНО КРУГОВАЯ ОБЛАСТЬ, о б л а с т ь Р е й н х а р т а,— область D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, с центром в точке $a=(a_1, \ldots, a_n)\in\mathbb{C}^n$ такая, что вместе с каждой точкой $z^0=(z_1^0, \ldots, z_n^0)\in D$ ей принадлежат и все точки вида

$$\{z=(z_1, \ldots, z_n):|z_\nu-a_\nu|=|z_\nu^0-a_\nu|,\ \nu=1, 2, \ldots, n\}.$$

К. к. о. D с $a=0$ инвариантна относительно преобразований $\{z^0\}\to\{z_\nu^0 e^{i\theta_\nu}\}$, $0\leqslant\theta_\nu<2\pi$, $\nu=1, \ldots, n$. К. к. о. составляют подкласс *Гартогса областей* и под-

класс класса круговых областей, определяемых условием: вместе с каждой точкой $z^0 \in D$ они содержат и все точки вида

$$\{z=(z_1, \ldots, z_n): z=a+(z^0-a)\,e^{i\theta},\quad 0\leqslant\theta<2\pi\},$$

т. е. все точки окружности с центром a и радиусом $|z^0-a|=(\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu^0-a_\nu|^2)^{1/2}$, расположенной на комплексной прямой, проходящей через a и z^0.

К. к. о. D наз. полной кратно круговой областью, если вместе с каждой точкой $z^0 \in D$ ей принадлежит поликруг

$$\{z=(z_1, \ldots, z_n): |z_\nu-a_\nu|\leqslant|z_\nu^0-a_\nu|,\quad \nu=1, \ldots, n\}.$$

Полная К. к. о. звездообразна относительно ее центра a.

Примеры полных К. к. о.: шары и поликруги в $\mathbb{C}^n$. Круговая область D наз. полной круговой областью, если вместе с каждой точкой $z^0 \in D$ она содержит и весь круг $\{z=a+(z^0-a)\zeta,\ |\zeta|\leqslant 1\}$.

К. к. о. D наз. логарифмически выпуклой кратно круговой областью, если образ $\lambda(D^*)$ множества

$$D^*=\{z=(z_1, \ldots, z_n)\in D: z_1 z_2 \ldots z_n \neq 0\}$$

при отображении

$$\lambda: z \longrightarrow \lambda(z)=(\ln|z_1|, \ldots, \ln|z_n|)$$

является выпуклым множеством в действительном пространстве $\mathbb{R}^n$. Важное свойство логарифмически выпуклых полных К. к. о. состоит в том, что каждая такая область в $\mathbb{C}^n$ есть внутренность множества точек абсолютной сходимости (т. е. область сходимости) нек-рого степенного ряда по переменным $z_1-a_1, \ldots, z_n-a_n$, и обратно: область сходимости любого степенного ряда по $z_1, \ldots, z_n$ есть логарифмически выпуклая полная К. к. о. с центром $a=0$.

Лит.: [1] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

КРАТНОГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — гармоническая функция, у к-рой операторы Лапласа по отдельным группам независимых переменных обращаются в нуль. Точнее, функция $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n\geqslant 2$, класса C^2 в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ наз. К. ф. в D, если существуют такие натуральные числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, $n\geqslant k\geqslant 2$, что всюду в D выполняются тождества:

$$\sum_{\nu=1}^{n_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0,$$

$$\sum_{\nu=n_1+1}^{n_1+n_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0,\ \ldots,\ \sum_{\nu=n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2}=0.$$

Важный собственный подкласс класса К. ф. составляют *плюригармонические функции*, для к-рых $n=2m$, $n_j=2$, $j=1, 2, \ldots, m$, т. е. $k=m$, и к-рые, кроме того, удовлетворяют нек-рым дополнительным условиям.

Лит.: [1] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

КРАТНОЕ натурального числа a — натуральное число, делящееся на a без остатка. Число n, к-рое делится на каждое из чисел $a, b, \ldots, m$, наз. общим кратным этих чисел. Из всех общих К. двух или нескольких чисел одно (не равное нулю) является наименьшим (наименьшее общее кратное), а остальные будут К. этого наименьшего. Зная наибольший общий делитель d двух чисел a и b, находят наименьшее общее К. m по формуле $m=ab/d$.

КРАТНОСТЬ ВЕСА M представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{k}$ в векторном пространстве V — размерность n_M весового подпространства

$V_M \subset V$, соответствующего весу M (см. *Вес* представления).

Пусть $\mathfrak{t}$ — *Картана подалгебра* полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, а ρ — ограничение на $\mathfrak{t}$ конечномерного представления σ алгебры $\mathfrak{g}$. В этом случае пространство V является прямой суммой весовых подпространств алгебры $\mathfrak{t}$, соответствующих различным весам. Эти веса и их кратности часто наз. весами и кратностями весов представления σ алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть представление σ неприводимо и Λ — его старший вес (см. *Картана теорема* о старшем векторе). Тогда $n_\Lambda = 1$. Для весов, отличных от старшего, известно несколько способов вычисления их кратностей. Два из них являются классическими результатами теории представлений — формула Фрейденталя и формула Костанта.

1. Формула Фрейденталя (см. [4], [1]). Пусть $(\ ,\ )$ — естественное скалярное произведение на сопряженном к $\mathfrak{t}$ пространстве $\mathfrak{t}^*$, индуцированное *Киллинга формой* на $\mathfrak{t}$, R — система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{t}$ и $>$ — отношение частичного порядка на $\mathfrak{t}^*$, определенное какой-либо фиксированной системой простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ в R. Тогда

$$((\Lambda+\delta,\ \Lambda+\delta)-(M+\delta,\ M+\delta))\, n_M = \\ = 2 \sum_{\alpha \in R,\ \alpha>0} \sum_{k=1}^{\infty} n_{M+k\alpha}\, (M+k\alpha,\ \alpha),$$

где $\delta = (1/2)\sum_{\alpha \in R,\ \alpha>0} \alpha$ и, по определению, $n_N = 0$, если N не вес представления σ. Для любого веса $M \neq \Lambda$ множитель при n_M в левой части формулы отличен от нуля. Эта формула имеет рекуррентный характер: она позволяет выразить n_M через n_N, если $N > M$. Поскольку известно, что $n_\Lambda = 1$, формула Фрейденталя дает эффективный способ нахождения кратностей n_M.

2. Формула Костанта (см. [5], [1]). Пусть

$$\Gamma = \{M \in \mathfrak{t}^* \mid 2(M,\ \alpha_i)/(\alpha_i,\ \alpha_i) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } i = 1, \ldots, r\}.$$

Множество Γ является подгруппой по сложению в $\mathfrak{t}^*$, инвариантной относительно группы Вейля W, к-рая действует в $\mathfrak{t}^*$ естественным образом. Элемент δ, а также все веса представления σ лежат в Γ. Пусть для каждого $M \in \Gamma$ число $P(M)$ равно количеству способов записи M в виде суммы положительных корней, т. е. $P(M)$ — это число решений $\{k_\alpha \mid \alpha \in R,\ \alpha>0\}$ уравнения

$$M = \sum_{\alpha \in R,\ \alpha>0} k_\alpha \alpha,$$

где $k_\alpha \in \mathbb{Z}$, $k_\alpha > 0$ при всех α. Функция $P(M)$ на Γ наз. функцией разбиения. Тогда

$$n_M = \sum_{S \in W} (\det S)\, P\,(S\,(\Lambda+\delta) - (M+\delta)).$$

Практическое использование приведенных выше формул связано с громоздкими вычислениями. Для полупростых алгебр ранга 2 имеются более удобные геометрические правила подсчета К. в. (см. [2]).

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Желобенко Д. П., Лекции по теории групп Ли, Дубна, 1965; [3] его же, Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [4] Freudenthal H., «Indag. Math.», 1954, v. 16, p. 369—76, 487—91; 1956, v. 18, p. 511—14; [5] Kostant B., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, v. 93, p. 53—73.

В. Л. Попов.

КРАТНОСТЬ ОСОБОЙ ТОЧКИ алгебраического многообразия — целое число, измеряющее степень особенности многообразия в этой точке. Кратностью $\mu(X, x)$ многообразия X в точке x наз. кратность максимального идеала $\mathfrak{m}$ в локальном кольце $\mathcal{O}_{X,x}$. Кратность X в точке x совпадает с кратностью касательного конуса $C(X, x)$ в вершине, а также со степенью специального слоя $\sigma^{-1}(x)$ раздутия σ: $X' \to X$

точки x на X, где $\sigma^{-1}(x)$ рассматривается погруженным в проективное пространство $P(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ (см. [3]). Кратность $\mu(X, x)=1$ тогда и только тогда, когда x неособая (регулярная) точка X. Если X является гиперповерхностью в окрестности x (т. е. X задается одним уравнением $f=0$ в аффинном пространстве Z), то $\mu(X, x)$ совпадает с числом n таким, что $f\in\mathfrak{m}^n-\mathfrak{m}^{n+1}$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_{Z, x}$. Кратность не меняется при пересечении X общей гиперплоскостью, проходящей через x. Если через X_d обозначить множество точек $x\in X$ таких, что $\mu(X, x)\geqslant d$, то X_d является замкнутым подмножеством (подмногообразием).

Лит.: [1] Samuel P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, 2 éd., B., 1967; [2] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [3] Ramanujam C. P., Invent. math.», 1973, v. 22, № 1, p. 63—67. *В. И. Данилов.*

КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ — определенный интеграл от функции нескольких переменных. Имеются различные понятия К. и. (интеграл Римана, интеграл Лебега, интеграл Лебега — Стилтьеса и др.).

Кратный интеграл Римана вводится на основе *Жордана меры* μ. Пусть E — измеримое по Жордану множество n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, μ_n есть n-мерная мера Жордана и $\tau=\{E_i\}_{i=1}^k$ — разбиение множества E, т. е. такая система измеримых по Жордану множеств E_i, что $\bigcup_{i=1}^k E_i=E$ и $\mu_n(E_i\cap E_j)=0$, $i\neq j$, $i, j=1, 2, \ldots, n$. Величину

$$\delta_\tau=\max_{i=1, 2, \ldots, k} d(E_i),$$

где $d(E_i)$ — диаметр множества E_i, наз. м е л к о с т ь ю р а з б и е н и я τ. Если функция $f(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, определена на множестве E, то всякую сумму вида

$$\sigma_\tau=\sigma_\tau(f;\ \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)})=\sum_{i=1}^k f(\xi^{(i)})\,\mu_n E_i,$$
$$\xi^{(i)}\in E_i\in\tau,$$

наз. и н т е г р а л ь н о й с у м м о й Р и м а н а ф у н к ц и и f. Если для функции f существует $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau$, независящий от разбиения, то этот предел наз. n-к р а т н ы м и н т е г р а л о м Р и м а н а и обозначают

$$\int_E f(x)\,dx$$

или

$$\int\int\ldots\int_E f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

Саму функцию f наз. в этом случае и н т е г р и р у е м о й п о Р и м а н у, короче — R-и н т е г р и р у е м о й.

В случае $n=1$ в качестве множества E, по к-рому производится интегрирование, обычно берется отрезок, а в качестве его разбиений τ рассматриваются разбиения, состоящие также только из отрезков (см. *Римана интеграл*). Таким образом, в этом случае как множество, по к-рому производится интегрирование, так и элементы разбиения представляют собой измеримые по Жордану множества весьма специального вида — отрезки. Поэтому не все свойства R-интегрируемых на отрезке функций справедливы для функций R-интегрируемых на произвольных измеримых по Жордану множествах. Напр., из того, что любая функция, определенная на множестве жордановой меры нуль, R-интегрируема на нем, следует, что R-интегрируемые функции могут быть неограниченными, это невозможно для R-интегрируемых функций на отрезках. Чтобы из R-интегрируемости функции на нек-ром множестве следовала ограниченность функции, на рассматриваемое множество налагают дополнительные условия, напр. чтобы у него

существовали сколь угодно мелкие разбиения, все элементы к-рых имеют положительную меру Жордана. К таким множествам относятся все измеримые по Жордану открытые множества и их замыкания, в частности измеримые по Жордану области и их замыкания. Именно для таких множеств большей частью и используется кратный интеграл Римана.

В случае $n=2$ ($n=3$) К. и. наз. *двойным* (*тройным*). Поскольку кратный интеграл Римана можно брать только по множествам, измеримым по Жордану (в случае $n=2$ они наз. также *квадрируемыми*, а при $n=3$ — *кубируемыми множествами*), то двойной (тройной) интеграл Римана рассматривают только на множествах (обычно областях или их замыканиях), границы к-рых имеют площади (объемы) в смысле Жордана, равные нулю.

Интеграл Римана от ограниченных функций n переменных ($n\geqslant 1$) обладает обычными свойствами интеграла (линейность, аддитивность относительно множеств, по к-рым производится интегрирование, сохранение при интегрировании нестрогих неравенств, интегрируемость произведения интегрируемых функций и т. п.).

Кратный интеграл Римана может быть сведен к *повторному интегралу*. Пусть $x=(x', x'')\in R^n$,

$$x'=(x_1, \ldots, x_n)\in R^m,$$

$$x''=(x_{m+1}, \ldots, x_n)\in R^{n-m}, \quad E\subset R^n,$$

E — измеримое в R^n по Жордану множество, $E(x_0')=E\cap\{x'=x_0'\}$ — сечение множества E $(n-m)$-мерной гиперплоскостью $x'=x_0'$, $E_{x''}$ — проекция E на гиперплоскость $R^m=\{x: x''=0\}$, причем $E(x')$ и $E_{x''}$ измеримы соответственно в смысле $(n-m)$-мерной и m-мерной меры Жордана. Тогда, если функция f R-интегрируема на множестве E и для всех $x'\in E_{x''}$ существуют $(n-m)$-кратные интегралы от ее сужения на множестве $E(x')$, то существует повторный интеграл

$$\int_{E_{x''}} dx \int_{E(x')} f(x', x'')\, dx'',$$

где внешний интеграл является m-кратным интегралом Римана, и

$$\int_E f(x)\, dx=\int\int_E f(x', x'')\, dx'\, dx''=$$

$$=\int_{E_{x''}} dx' \int_{E(x')} f(x', x'')\, dx''.$$

Для случая $n=3$ отсюда следуют формулы: 1) Если $E\subset R^3_{xyz}$, E_{xy} — проекция E на плоскость xOy, а функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, $(x, y)\in E_{xy}$, таковы, что множество E ограничено в направлении оси z их графиками, т. е.

$$E=\{(x, y, z): (x, y)\in E_{xy}, \quad \varphi(x, y)\leqslant z\leqslant\psi(x, y)\},$$

то

$$\int\int\int_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz=$$

$$=\int_{E_{xy}} dx\, dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

2) Пусть проекцией множества E на ось Ox является отрезок $[a, b]$, а $E(x)$ — сечение множества E плоскостью, параллельной плоскости yOz и проходящей через точку x, тогда

$$\int\int\int_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz=\int_a^b dx \int\int_{E(x)} f(x, y, z)\, dy\, dz.$$

В случае, когда G является измеримой по Жордану областью в пространстве R_l^n, а $x=\varphi(t)$ — взаимно одно-

значное отображение G на измеримую область Γ пространства R_x^n, причем φ непрерывно дифференцируемо на замыкании $\bar{G}$ области G, для интегрируемой на $\Gamma = \varphi(G)$ функции $f(x)$ справедлива формула замены переменного в интеграле

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,dx = \int_G f(x(t))\,|J(t)|\,dt, \qquad (1)$$

где $J(t)$ — якобиан отображения φ.

Геометрический смысл кратного интеграла Римана от функции n переменных связан с понятием $(n+1)$-мерной меры Жордана μ_{n+1}: если функция $f(x)$ интегрируема на множестве $E \subset R_x^n$, $f(x) \geqslant 0$ на E и

$$A = \{(x,\ y) : x \in E,\ \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \subset R_{xy}^{n+1},$$

то

$$\int_E f(x)\,dx = \mu_{n+1} A. \qquad (2)$$

Кратным интегралом Лебега наз. *Лебега интеграл* от функций многих переменных, его определение базируется на понятии *Лебега меры* в n-мерном евклидовом пространстве. Кратный интеграл Лебега может быть сведен к повторному интегралу (см. *Фубини теорема*). Для непрерывно дифференцируемых взаимно однозначных отображений областей справедлива формула замены переменного (1), а также формула (2), выражающая геометрич. смысл кратного интеграла Лебега, в к-рой под мерой μ_{n+1} следует понимать $(n+1)$-мерную меру Лебега.

Понятие К. и. переносится на функции, интегрируемые по множеству A, принадлежащему произведению $X \times Y$ пространств X и Y, в каждом из к-рых заданы σ-конечные полные неотрицательные меры, соответственно μ_x и μ_y, при этом интегрирование по множеству A производится по мере μ, являющейся произведением мер μ_x и μ_y.

Для функций многих переменных существует также понятие несобственного К. и. (см. *Несобственный интеграл*). Понятие К. и. применяется также к неопределенным интегралам функций многих переменных. Под неопределенным К. и. понимают функцию множества

$$F(E) = \int_E f(x)\,dx,$$

где E — измеримое множество. Если, напр., $f(x)$ интегрируема по Лебегу на нек-ром множестве, то ее неопределенный интеграл $F(E)$ почти всюду на этом множестве имеет функцию $f(x)$ своей симметричной производной. В этом смысле (аналогично случаю функций одной переменной) взятие неопределенного К. и. является операцией, обратной к операции дифференцирования функции множества.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

КРАТНЫЙ РЯД, s-кратный ряд,— выражение вида

$$\sum_{m,\ n,\ \ldots,\ p=1}^{\infty} u_{m,\ n,\ \ldots,\ p},$$

составленное из членов таблицы $\|u_{m,\ n,\ \ldots,\ p}\|$. Каждый член этой таблицы занумерован $s \geqslant 2$ индексами m, n, . . . , p, к-рые пробегают независимо друг от друга все натуральные числа. Теория К. р. аналогична теории *двойных рядов*. См. также *Абсолютно сходящийся ряд*.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 4 изд., т. 2, М., 1959.

Е. Г. Соболевская.

КРАТЧАЙШАЯ — линия в метрическом пространстве, соединяющая две его точки и не превосходящая по длине любую другую линию с теми же концами.

На плоскости К.— отрезки прямых, на сфере — дуги больших полуокружностей. В римановых пространствах *геодезические линии* являются К. на малых участках; длины подобных участков оцениваются в зависимости от кривизны и топологии пространства. Важную роль играют К. в геометрии в целом поверхностей и метрик, не подчиненных требованиям регулярности. Так, понятие К.— одно из основных и исходных в аксиоматич. построениях общих пространств с *внутренней метрикой*; многие внутренние и внешние геометрич. характеристики общих *выпуклых поверхностей* устанавливаются с помощью свойств принадлежащих им К. и т. п.

А. Д. Милка.

КРЕАТИВНОЕ МНОЖЕСТВО, творческое множество,— рекурсивно перечислимое множество A натуральных чисел, дополнение к-рого $\bar{A}$ до натурального ряда является *продуктивным множеством*; иными словами, множество A креативно, если оно рекурсивно перечислимо и существует такая частично рекурсивная функция $\varphi(x)$, что для всякого содержащегося в $\bar{A}$ рекурсивно перечислимого множества W_x с гёделевым номером x

$$\varphi(x) \in \bar{A} - W_x.$$

К. м. часто встречаются в различных алгоритмически неразрешимых проблемах, в силу чего образуют важнейший класс рекурсивно перечислимых множеств, не являющихся рекурсивными. Креативными оказываются множества номеров доказуемых и опровержимых формул многих формальных теорий (при естественной нумерации всех формул теории); в частности, так обстоит дело в арифметике Пеано и вообще во всех рекурсивно неотделимых теориях (т. е. в теориях, множества доказуемых и опровержимых формул к-рых эффективно неотделимы). Все К. м. рекурсивно изоморфны между собой (т. е. для каждой пары К. м. существует рекурсивное взаимно однозначное преобразование натурального ряда, отображающее одно из них на другое) и принадлежат одной тьюринговой степени, наибольшей среди степеней рекурсивно перечисленных множеств. Понятие креативности обобщается на последовательности множеств и другие объекты.

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975.

В. А. Душский.

КРЕМОНОВО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — *бирациональное преобразование* проективного пространства P_k^n, $n \geqslant 2$, над полем k. Бирациональные преобразования плоскости и трехмерного пространства систематически изучал (начиная с 1863) Л. Кремона (L. Cremona). Группа К. п. также называется его именем — группа Кремоны и обозначается $\mathrm{Cr}(P_k^n)$.

Простейшими примерами К. п., отличными от проективных преобразований, являются квадратичные бирациональные преобразования плоскости. В неоднородных координатах (x, y) их можно записать в виде дробно-линейных преобразований

$$x \longrightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad y \longrightarrow \frac{a_3x + b_3y + c_3}{a_4x + b_4y + c_4}.$$

Среди них выделяется так наз. стандартное квадратичное преобразование τ:

$$(x, y) \longrightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

или в однородных координатах

$$(x_0, x_1, x_2) \longrightarrow (x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1).$$

Оно является изоморфизмом вне координатных осей

$$\tau: P_k^2 - \{x_0x_1x_2 - 0\} \xrightarrow{\sim} P_k^2 - \{x_0x_1x_2 = 0\},$$

имеет три фундаментальные точки (точки неопределенности) (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0) и отображает в каждую из этих точек координатную ось, не содержащую эту точку.

По теореме Нётера (см. *Кремоны группа)* над алгебраически замкнутым полем k каждое К. п. плоскости P_k^2 может быть представлено в виде композиции квадратичных преобразований.

В теории К. п. плоскости важную роль играют нек-рые специальные классы преобразований, в частности инволюции Гейзера и инволюции Бертини (см. [1]). Инволюция Гейзера α: $P_k^2 \to P_k^2$ определяется с помощью линейной системы кривых степени 8 на P_k^2, проходящих с кратностью 3 через 7 точек в общем положении. Инволюция Бертини β: $P_k^2 \to P_k^2$ определяется с помощью линейной системы кривых степени 17 на P_k^2, проходящих с кратностью 6 через 8 точек в общем положении.

К. п. вида

$$x \longrightarrow x,$$

$$y \longrightarrow \frac{P(x)y + Q(x)}{R(x)y + S(x)}, \quad P, Q, R, S \in k[x],$$

наз. преобразованиями Жонкьера. Наиболее естественно они интерпретируются как бирациональные преобразования квадрики $P_k^1 \times P_k^1$, сохраняющие проекцию на один из множителей. Теорема Нётера допускает при этом следующую переформулировку: группа $\mathrm{Bir}(P^1 \times P^1)$ бирациональных автоморфизмов квадрики порождена инволюцией σ и преобразованиями Жонкьера, где $\sigma \in \mathrm{Aut}(P^1 \times P^1)$ — автоморфизм перестановки множителей.

Всякий бирегулярный автоморфизм аффинного пространства A_k^n в P_k^n продолжается до К. п. пространства P_k^n, так что $\mathrm{Aut}(A_k^n) \subset \mathrm{Cr}(P_k^n)$. В случае $n=2$ группа $\mathrm{Aut}(A_k^2)$ порождена подгруппой аффинных преобразований и подгруппой преобразований вида

$$x \longrightarrow ax + b, \quad a \neq 0, \ c \neq 0, \ a, \ b \in k,$$

$$y \longrightarrow cy + Q(x), \quad Q(x) \in k[x],$$

более того, она является амальгамированным произведением этих подгрупп [5]. Как устроены группы $\mathrm{Aut}(A_k^n)$ при $n \geqslant 3$ неизвестно. Вообще, о К. п. в размерности $n \geqslant 3$ не получено к настоящему времени (1982) сколь либо существенных результатов.

Лит.: [1] Hudson H., Cremona transformations in plane and space, Camb., 1927; [2] Godeaux L., Les transformations birationnelles du plan, P., 1927; [3] Coble A., Algebraic geometry and theta functions, N. Y., 1929; [4] Нагата М., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 75—94; [5] Шафаревич И. Р., «Rend. math.», 1966, v. 25, p. 208—12. *В. А. Исковских.*

КРЕМОНЫ ГРУППА — группа $\mathrm{Cr}(P_k^n)$ бирациональных автоморфизмов проективного пространства P_k^n над полем k, или, что то же, группа *кремоновых преобразований* пространства P_k^n.

Группа $\mathrm{Cr}(P_k^n)$ естественным образом содержит в качестве подгруппы группу $\mathrm{PGL}(n+1, k)$ проективных преобразований пространства P_k^n, причем при $n \geqslant 2$ эти группы не совпадают. Группа $\mathrm{Cr}(P_k^n)$ будет изоморфна группе $\mathrm{Aut}\, k(x_1, \ldots, x_n)$ автоморфизмов над k поля рациональных функций от n переменных над k. Основным результатом о К. г. проективной плоскости является теорема Нётера: группа $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ над алгебраически замкнутым полем порождается квадратичными преобразованиями или, что эквивалентно, стандартным квадратичным преобразованием и проективными преобразованиями (см. [1], [7]). Неизвестно (1982), является ли эта группа простой. Существует

обобщение теоремы Нётера на случай, когда основное поле k не является алгебраически замкнутым (см. [5]).

Одна из труднейших проблем бирациональной геометрии — проблема описания строения группы $\mathrm{Cr}(P_k^3)$, к-рая уже не порождается квадратичными преобразованиями. Почти во всех работах о кремоновых преобразованиях 3-мерного пространства изучаются лишь конкретные примеры таких преобразований. О строении К. г. пространства размерности выше 3 почти ничего не известно.

Важное направление исследований К. г. связано с изучением подгрупп группы $\mathrm{Cr}(P_k^n)$. С точностью до сопряженности описаны конечные подгруппы в $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ над алгебраически замкнутым полем k (см. [8], а также [6]). Классификация всех инволюций в $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ получена еще в 1877 Э. Бертини (E. Bertini, см., напр., [4], [5]). Вопрос об описании всех инволюций в $\mathrm{Cr}(P_k^n)$, $n\geqslant 3$, открыт. Все максимальные связные алгебраич. подгруппы в $\mathrm{Cr}(P_k^2)$ описаны Ф. Энрикесом (F. Enriques) в 1893 (см. [4]). Это в точности группы автоморфизмов всех минимальных моделей рациональных поверхностей, т. е. плоскости P_k^2, квадрики $P^1\times P^1$ и серии линейчатых поверхностей F_N, $N\geqslant 2$. Имеются нек-рые обобщения этого результата (см. [3], [9]) на случай группы $\mathrm{Cr}(P_k^n)$, $n\geqslant 3$.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Coble A., Algebraic geometry and theta functions, N. Y., 1929; [3] Demazure M., «Ann. sci. Éc. norm. sup.», sér. 4, 1970, t. 3, № 4, p. 507—88; [4] Godeaux L., Les transformations birationnelles du plan, P., 1927; [5] Hudson H., Cremona transformations in plane and space, Camb., 1927; [6] Манин Ю. И., «Матем. сб.», 1967, т. 72, № 2, с. 161—92; [7] Нагата М., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 75—94; [8] Wiman A., «Math. Ann.», 1897, Bd 48, S. 195—240; [9] Umemura H., «Nagoya Math. J.», 1980, v. 79, p. 47—67.

В. А. Исковских.

КРИВАЯ — обычно *линия* вообще, не исключая и частного случая — прямой.

КРИВИЗНА — собирательное название ряда количественных характеристик (численных, векторных, тензорных), описывающих отклонение свойств того или иного объекта (кривой, поверхности, риманова пространства и др.) от соответствующих объектов (прямая, плоскость, евклидово пространство и др.), к-рые считаются плоскими. Обычно понятия К. вводятся локально, то есть в каждой точке. Эти понятия К. связаны с рассмотрением отклонений 2-го порядка малости, поэтому предполагается задание изучаемого объекта C^2-гладкими функциями. В ряде случаев вводят интегральные понятия, к-рые сохраняются и при отказе от C^2-гладкости. Как правило, тождественное обращение в нуль К. во всех точках приводит к совпадению (на малых участках, но не в целом) изучаемого объекта с «плоским» объектом.

К р и в и з н а к р и в о й. Пусть γ — регулярная кривая в n-мерном евклидовом пространстве, параметризованная натуральным параметром t. Пусть далее $\alpha(P,\ P_1)$ и $s(P,\ P_1)$ — соответственно угол между касательными к кривой γ в точках P и P_1 этой кривой и длина дуги кривой между P и P_1. Тогда предел

$$k=\lim_{P_1\to P}\alpha(P,\ P_1)/s(P,\ P_1)$$

наз. к р и в и з н о й к р и в о й γ в точке P. К. кривой γ равна модулю вектора $d^2\gamma(t)/dt^2$, а направление этого вектора совпадает с направлением главной нормали кривой. Для того чтобы кривая γ совпадала с нек-рым отрезком прямой или со всей прямой, необходимо и достаточно, чтобы К. кривой k тождественно равнялась нулю.

К р и в и з н а п о в е р х н о с т и. Пусть Φ — регулярная поверхность в трехмерном евклидовом про-

странстве. Пусть P — точка Ф, T_P — касательная плоскость к Ф в точке P, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к Ф в точке P, α — плоскость, проходящая через $\boldsymbol{n}$ и нек-рый единичный вектор $\boldsymbol{l}$ в T_P. Кривая γ_l, получающаяся при пересечении плоскости α и поверхности Ф, наз. нормальным сечением поверхности Ф в точке P в направлении $\boldsymbol{l}$. Величина

$$k_l = \left(\frac{d^2\gamma_l}{dt^2}, \boldsymbol{n}\right),$$

где t — натуральный параметр на кривой γ, наз. нормальной кривизной поверхности Ф в направлении $\boldsymbol{l}$. С точностью до знака нормальная К. равна К. кривой γ_l.

В касательной плоскости T_P существуют два перпендикулярных направления $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ такие, что нормальную К. в произвольном направлении можно представить с помощью так наз. формулы Эйлера:

$$k_l = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta,$$

где θ — угол между $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$. Величины k_1 и k_2, являющиеся нормальными К. в направлениях $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$, наз. главными кривизнами, а направления $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ — главными направлениями поверхности. Главные К. являются экстремальными значениями нормальных К. Структуру нормальных К. в данной точке поверхности удобно графически изображать следующим образом. При $k_l \neq 0$ уравнение

$$\boldsymbol{r}(l) = \boldsymbol{l}\left|\frac{1}{k_l}\right|^{1/2},$$

где $\boldsymbol{r}(l)$ — радиус-вектор, задает в касательной плоскости T_P нек-рую кривую 2-го порядка, к-рая наз. индикатрисой Дюпена. Индикатриса Дюпена может быть одной из следующих трех кривых: эллипсом, гиперболой или парой параллельных прямых. Соответственно этому точки поверхности подразделяются на эллиптические, гиперболические и параболические. В эллиптич. точке 2-я квадратичная форма поверхности знакоопределенна, в гиперболической точке — знаконеопределенна, а в параболич. точке — вырождена. В случае, если все нормальные К. в точке равны нулю, точка наз. точкой уплощения. Если индикатриса Дюпена является кругом, то такую эллиптич. точку наз. шаровой (или омбилической) точкой.

Главные направления определены однозначно (с точностью до перенумерации) в том случае, если точка не является шаровой точкой или точкой уплощения. В этих случаях любое направление является главным. Имеет место теорема Родрига, в силу к-рой необходимым и достаточным условием того, что направление $\boldsymbol{l}$ — главное, является выполнение условия

$$d\boldsymbol{n} = -\lambda d\boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор поверхности, $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали.

Линия на поверхности наз. линией кривизны, если ее направление в каждой точке является главным. В окрестности каждой точки P поверхности, к-рая не является шаровой точкой или точкой уплощения, поверхность можно параметризировать так, что ее координатные линии будут линиями К.

Величина

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

наз. средней кривизной поверхности. Величина

$$K = k_1 k_2$$

наз. гауссовой (или полной) кривизной

поверхности. Гауссова К. является объектом внутренней геометрии поверхностей, т. е. может быть выражена только через 1-ю квадратичную форму:

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{Ev-Fu}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v-\left(\frac{Fv-Gu}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\}, \quad (1)$$

где E, F, G — коэффициенты 1-й квадратичной формы поверхности.

С помощью формулы (1) гауссова К. вводится для абстрактного двумерного риманова многообразия с линейным элементом ds^2. Для того чтобы поверхность была локально изометрична плоскости, необходимо и достаточно, чтобы ее гауссова К. была тождественно равна нулю.

К р и в и з н а р и м а н о в а п р о с т р а н с т в а. Пусть M^n — регулярное n-мерное *риманово пространство*, BM^n — пространство регулярных векторных полей на M^n. К. риманова пространства M^n обычно характеризуют с помощью *Римана тензора*, т. е. полилинейного отображения

$$R: BM^n\times BM^n\times BM^n\longrightarrow BM^n,$$

к-рое задано соотношением

$$R(X, Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ+\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X, Y]}Z, \quad (2)$$

где ∇ — связность Леви-Чивита на M^n, $[\ ,\ ]$ — скобка Ли. Если в нек-рой локальной системе координат x^i положить $X=\frac{\partial}{\partial x^k}$, $Y=\frac{\partial}{\partial x^l}$, то формуле (2) можно придать следующий вид:

$$Z^i_{;\ k;\ l}-Z^i_{;\ l;\ k}=Z^mR^i_{mkl},$$

где ; — знак ковариантной производной.

Таким образом, тензор Римана является количественной характеристикой некоммутативности вторых ковариантных производных в римановом пространстве. С помощью тензора Римана количественно описывается и ряд других свойств римановых пространств, отличающих их от евклидовых.

Коэффициенты тензора Римана в локальной системе координат x^i могут быть выражены через символы Кристоффеля и коэффициенты метрич. тензора следующим образом:

$$R^l_{ijk}=\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}+\Gamma^l_{ir}\Gamma^r_{jk}-\Gamma^l_{jr}\Gamma^r_{ik},$$

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2g_{il}}{\partial x^k\,\partial x^m}+\frac{\partial^2g_{km}}{\partial x^i\,\partial x^l}-\frac{\partial^2g_{im}}{\partial x^k\,\partial x^l}-\frac{\partial^2g_{kl}}{\partial x^i\,\partial x^m}\right)+$$

$$+g_{np}\left(\Gamma^p_{km}\Gamma^n_{il}-\Gamma^p_{im}\Gamma^n_{kl}\right),$$

где R_{iklm} — тензор Римана с опущенным индексом, или — в бескоординатных обозначениях — отображение $\langle R(X, Y)U, Z\rangle$ (где $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — знак скалярного произведения).

Тензор Римана имеет следующие свойства симметрии:

$$R(X, Y)Z=-R(Y, X)Z,$$
$$\langle R(X, Y)Z, U\rangle=-\langle R(X, Y)U, Z\rangle,$$
$$\langle R(X, Y)Z, U\rangle=\langle R(Z, U)X, Y\rangle,$$
$$R(X, Y)Z+R(Y, Z)X+R(Z, X)Y=0,$$

к-рые в локальных координатах можно записать в виде

$$R_{iklm}=-R_{kilm}=-R_{ikml},$$
$$R_{iklm}=R_{lmik},$$
$$R_{iklm}+R_{imkl}+R_{ilmk}=0.$$

Тензор Римана имеет $n^2(n^2-1)/12$ алгебраически независимых компонент. Справедливо так наз. тождество Бьянки для ковариантных производных тензора Римана

$$(\nabla_X R)(Y, Z, U)+(\nabla_Y R)(Z, X, U)+(\nabla_Z R)(X, Y, U)=0,$$

где $(\Delta_X R)(Y, Z, U)$ — ковариантная производная $R(Y, Z)U$ по X. В локальных координатах это тождество имеет вид

$$R^n_{ikl;\,m}+R^n_{imk;\,l}+R^n_{ilm;\,k}=0.$$

Иногда тензор Римана определяют с обратным знаком.

Необходимым и достаточным условием локальной изометричности риманова пространства евклидову является равенство нулю его тензора Римана.

Используют и иной, эквивалентный подход к описанию свойств К. риманова пространства M^n. Пусть σ — двумерное линейное пространство касательного пространства TM^n к M^n в точке P. Тогда секционной кривизной M^n в точке P в направлении σ наз. величина

$$K_\sigma=\frac{\langle R(V, W)W, V\rangle}{\langle V, V\rangle\langle W, W\rangle-\langle V, W\rangle^2},$$

где V и W — векторы, определяющие σ. Одна и та же площадка σ может определяться разными векторами V и W, однако K_σ не зависит от выбора различных векторов, определяющих одну и ту же площадку. Для двумерного риманова пространства секционная К. совпадает с гауссовой К. Тензор Римана может быть восстановлен по секционным кривизнам следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, U\rangle=\frac{1}{6}\{&R(X+U, Y+Z)-k(X+U, Y)-\\&-k(X+U, Z)-k(X, Y+Z)-k(U, Y+Z)+k(X, Z)+\\&+k(U, Y)-k(Y+U, X+Z)+k(Y+U, X)+\\&+k(Y+U, Z)+k(Y, Z+X)+\\&+k(U, Z+X)-k(Y, Z)-k(U, X)\},\end{aligned}$$

где

$$k(V, W)=K_\sigma(\langle V, V\rangle\langle W, W\rangle-\langle V, W\rangle^2).$$

Используют и менее детальные характеристики К. риманова пространства — тензор Риччи:

$$R_{ik}\quad R^l_{ilk},$$

и скалярную кривизну, или кривизну Риччи:

$$R=g^{ik}R_{ik}.$$

Тензор Риччи симметричен: $R_{ik}=R_{ki}$.

Иногда для характеристики К. употребляют и более сложные, в частности квадратичные, конструкции, построенные из тензора Римана. Одним из наиболее употребительных инвариантов такого рода является инвариант

$$C=R^i_{klm}R^{klm}_i,$$

используемый при изучении поля тяготения Шварцшильда.

Для двумерного пространства тензор Римана имеет вид

$$R(X, Y)Z=K(\langle Y, Z\rangle X-\langle X, Z\rangle Y), \qquad (3)$$

где K — Гауссова К. В этом случае кривизна Риччи равна K. Для трехмерного пространства тензор Римана имеет вид

$$\begin{aligned}R_{iklm}=&R_{il}g_{km}-R_{im}g_{kl}+R_{km}g_{il}-R_{kl}g_{im}+\\&+\frac{R}{2}(g_{im}g_{kl}-g_{il}g_{km}),\end{aligned}$$

где g_{ij} — метрический тензор, R_{ij} — тензор Риччи, R — кривизна Риччи.

В том случае, если секционные К. не зависят ни от точки, ни от двумерного направления, пространство M^n наз. пространством постоянной кривизны; тензор Римана такого пространства имеет вид (3) (константа K наз. кривизной пространства M^n). При $n>2$ оказывается, что если во всех точках К. не зависят от направления, то пространство M^n является пространством постоянной К. (теорема Шура).

Кривизна подмногообразий. Пусть Ф — регулярная поверхность в E^3, γ — кривая на Ф, α_P — касательная плоскость к Ф в точке P, через к-рую проходит кривая γ. Пусть малая окрестность точки P проектируется на плоскость α_P и пусть $\bar{\gamma}$ — проекция кривой γ на плоскость α_P. *Геодезической кривизной* $\varkappa$ кривой γ в точке P наз. число, равное по модулю К. кривой $\bar{\gamma}$ в точке P. Геодезическая К. считается положительной, если вращение касательной кривой $\bar{\gamma}$ при прохождении точки P образует с направлением нормали к поверхности правый винт. Геодезическая К. является объектом внутренней геометрии поверхности Ф. Геодезическая К. может быть вычислена по формуле

$$\varkappa = \frac{e_{ij}\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\frac{d^2x^j}{ds^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)}{\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)^{3/2}}, \qquad (4)$$

где $x^i(s)$ — натуральное уравнение кривой γ в локальных координатах x^i на Ф, g_{ij} — компоненты метрич. тензора поверхности Ф в этих координатах, Γ^i_{kl} — символы Кристоффеля, e_{ij} — вполне дискриминантный тензор. С помощью формулы (4) вводится понятие геодезической К. для кривой на абстрактном двумерном римановом пространстве. Необходимым и достаточным условием того, что кривая на римановом многообразии совпадает с геодезической или с ее отрезком, является тождественное равенство нулю геодезической К.

Пусть Ф — двумерное подмногообразие трехмерного риманова пространства M. К определению К. для Ф можно подойти двумя способами. С одной стороны, можно рассматривать Ф как риманово пространство, метрика к-рого индуцирована метрикой M, и определить его К. по формуле (1). Полученная таким образом К. наз. внутренней кривизной. С другой стороны, можно провести построение, приводящее к понятию К. для поверхности в евклидовом пространстве и для подмногообразия риманова пространства. В результате получается иное понятие К.; эта К. наз. внешней кривизной. Справедливо следующее соотношение:

$$K_i = K_e + K_\sigma,$$

где K_σ — К. пространства M в направлении касательной плоскости к Ф.

Понятия нормальной, внешней и внутренней К. допускают обобщение на размерности и коразмерности изучаемого подмногообразия.

Понятие тензора Римана обобщено на ряд пространств, имеющих менее сильные структуры, чем риманово пространство. Напр., тензоры Римана и Риччи зависят лишь от аффинной структуры риманова пространства и могут быть введены и для пространства аффинной связности (однако в этом случае тензоры Римана и Риччи обладают не всеми свойствами симметрии). Напр., $R_{ik} \neq R_{ki}$. Другими примерами такого рода являются тензор конформной К. и тензор проективной К.

Тензор конформной кривизны (тензор Вейля) имеет вид

$$c_{iklm} = R_{iklm} - R_{l[i}g_{k]m} + R_{m[i}g_{k]l} + \frac{1}{3}R_{l[i}g_{k]m},$$

где квадратные скобки означают альтернацию по за-

ключенным в них индексам. Равенство нулю тензора конформной К. является необходимым и достаточным условием того, что данное пространство локально совпадает с конформно-евклидовым пространством. Тензор проективной кривизны имеет вид

$$P^q_{lki} = R^q_{lki} + \delta^q_k \frac{R_{li} + R_{il}}{n^2-1} - \delta^q_l \frac{nR_{ki} + R_{ik}}{n^2-1} + \delta^q_i \frac{R_{lk} - R_{kl}}{n+1},$$

где δ^k_i — символ Кронекера, n — размерность пространства. Равенство нулю тензора проективной К. является необходимым и достаточным условием того, что данное пространство локально совпадает с проективно-евклидовым пространством.

Понятие К. обобщено на случай нерегулярных объектов, в частности на случай теории двумерных многообразий ограниченной кривизны. К. в пространстве здесь рассматривается не в точке, а в области, и говорят о полной, или интегральной, кривизне области. В регулярном случае полная К. равна интегралу от гауссовой К. Полная К. геодезич. треугольника может быть выражена через углы β_i при вершинах этого треугольника соотношением

$$K = \sum \beta_i - \pi, \qquad (5)$$

являющимся частным случаем *Гаусса — Бонне теоремы*. Формула (5) была положена в основу определения полной К. для многообразий ограниченной К.

Понятие К. является одним из основных понятий современной дифференциальной геометрии. Ограничения на К. дают обычно содержательную информацию об объекте. Так, в теории поверхностей E^3 знак гауссовой К. определяет тип точки (эллиптический, гиперболический, параболический). Поверхности с всюду неотрицательной гауссовой К. обладают целым набором общих свойств, к-рые позволяют объединять их в один естественный класс (см. [4]; [6]). Много специфических свойств имеют поверхности нулевой средней К. (см. *Минимальная поверхность*). В теории нерегулярных поверхностей специально изучают классы поверхностей ограниченной интегральной абсолютной гауссовой или средней К.

В римановых пространствах равномерное ограничение секционных кривизн K_σ пространства в любой его точке и любом двумерном направлении позволяет использовать теоремы сравнения. Последние позволяют сравнивать скорость расхождения геодезических и объемы областей в рассматриваемом пространстве с характеристиками соответствующих линий и областей в пространстве постоянной К. Некоторые из ограничений на K_σ даже предопределяют топологич. строение пространства в целом. Например.

Теорема о сфере. Пусть M полное односвязное риманово пространство размерности $n \geqslant 2$ и $^1/_4 < \delta \leqslant K_\sigma \leqslant 1$. Тогда M гомеоморфно сфере S^n.

Теоремы Адамара — Картана и Громола — Майера. Пусть M полное риманово пространство размерности $n \geqslant 2$. Если всюду $K_\sigma \leqslant 0$ и M односвязно или всюду $K_\sigma > 0$ и M некомпактно, то M гомеоморфно евклидову пространству E^n.

Понятия К. используются в различных естественных науках. Так, при движении тела по траектории с ее К. связана центробежная сила. Гауссова К. возникла в связи с работами К. Гаусса (K. Gauss) по картографии. Со средней К. поверхности жидкости связан капиллярный эффект. В *относительности теории* с распределением вещества и энергии (точнее, с тензором энергии-импульса) связана К. пространства-времени (см. *Пространство-время*). Тензор конформной К. находит применение в теории рождения частиц в гравитационном поле.

Лит.: [1] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [2] Погорелов А. В.,

Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969; [3] Бляшке В., Дифференциальная геометрия..., пер. с нем., т. 1, М.—Л., 1935; [4] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [5] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [6] Погорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

Д. Д. Соколов.

КРИВИЗНЫ ЛИНИЙ СЕТЬ — ортогональная сеть на гладкой гиперповерхности V_{n-1} евклидова пространства $E_n (n \geqslant 3)$, образованная *кривизны линиями*. К. л. с. на V_{n-1} является *сопряженной сетью*. Напр., на поверхности вращения $V_2 \subset E_3$ меридианы и параллели образуют К. л. с. Если на гладкой p-мерной поверхности $V_p \subset E_n$ $(2 \leqslant p < n)$ задано поле одномерных нормалей такое, что нормаль $[x, \boldsymbol{n}]$ этого поля принадлежит дифференциальной окрестности 2-го порядка точки $x \in V_p$, то относительно этого поля нормалей на V_p определяются линии кривизны и К. л. с. точно также, как и на V_{n-1}. Но К. л. с. на $V_p (p < n-1)$, вообще говоря, не является сопряженной.

Лит.: [1] Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [2] Щуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

КРИВИЗНЫ ЛИНИЯ — линия на поверхности, в каждой точке к-рой касательная имеет одно из главных направлений. К. л. определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

где E, F, G — коэффициенты первой, а L, M, N — коэффициенты второй квадратичных форм поверхности. Нормали поверхности вдоль К. л. образуют развертывающуюся поверхность. На поверхностях вращения К. л.— меридианы и параллели. К. л. развертывающейся поверхности — ее прямолинейные образующие и линии, ортогональные к ним.

А. Б. Иванов.

КРИВИЗНЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — отображение $R(X, Y)$ пространства $\mathscr{T}(M)$ векторных полей на многообразии M, линейно зависящее от X, $Y \in \mathscr{T}(M)$ и задаваемое формулой

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z;$$

здесь ∇_X — *ковариантная производная* вдоль X, $[X, Y]$ — коммутатор X и Y. Отображение

$$R \quad . R(X, Y)Z : \mathscr{T}^3(M) \longrightarrow \mathscr{T}(M)$$

есть *кривизны тензор* определяемой ∇_X *линейной связности*.

М. И. Войцеховский.

КРИВИЗНЫ ТЕНЗОР — тензор типа (1,3), получающийся в разложении *кривизны формы* в локальном кобазисе на многообразии M^n. В частности, в голономном кобазисе dx^i, $i = 1, \ldots, n$, компоненты К. т. R^k_{lij} аффинной связности выражаются через объекты связности Γ^k_{ij} и их производные

$$R^k_{lij} = \partial_i \Gamma^k_{jl} - \partial_j \Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{ip}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^k_{jp}\Gamma^p_{il}.$$

Аналогично определяется К. т. для произвольной связности на главном расслоенном пространстве со структурной группой Ли G через разложение соответствующей формы кривизны, в частности для конформной связности и проективной связности. Он принимает значения в алгебре Ли группы G и представляет собой пример так наз. тензоров с нескалярными компонентами.

М. И. Войцеховский.

Лит. см. при ст. *Кривизна*.

КРИВИЗНЫ ФОРМА — 2-форма Ω на главном расслоенном пространстве P со структурной группой Ли G, принимающая значения в алгебре Ли g группы G и определяемая *связности формой* θ, заданной на P,

по формуле

$$d\Omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta].$$

К. ф. является мерой отклонения данной связности от локально плоской связности, к-рая характеризуется условием $\Omega=0$. К. ф. удовлетворяет тождеству Бианки

$$d\Omega - [\Omega, \theta]$$

и определяет алгебру голономии (см. *Голономии группа*).

Ю. Г. Лумисте.

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл по кривой. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задана спрямляемая кривая $\gamma = \{x = x(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, s — длина дуги и на кривой γ задана функция $F = F(x(s))$. К. и.

$$\int_\gamma F(x)\, ds$$

определяется равенством

$$\int_\gamma F(x)\, ds = \int_0^S F(x(s))\, ds \qquad (1)$$

(справа — интеграл по отрезку) и наз. криволинейным интегралом первого рода, или криволинейным интегралом по длине дуги. Он является пределом соответствующих интегральных сумм, к-рые могут быть описаны в терминах, связанных с кривой. Напр., если функция $F(x(s))$ интегрируема по Риману (см. *Римана интеграл*), $\tau = \{s_i\}_{i=0}^m$ — разбиение отрезка $[0, S]$, $\delta_\tau = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} (s_i - s_{i-1})$ — его мелкость, $\xi_i \in [s_{i-1}, s_i]$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ — длина части кривой γ от точки $x(s_{i-1})$ до точки $x(s_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^m F(x(\xi_i))\, \Delta s_i,$$

то

$$\int_\gamma F(x)\, ds = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau.$$

Если спрямляемая кривая γ задана параметрическим представлением $x = x(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, и на ней задана функция $F = F(x(t))$, то интеграл

$$\int_\gamma F(x)\, dx_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

определяется равенством

$$\int_\gamma F(x)\, dx_k = \int_a^b F(x(t))\, d\varphi_k(t) \qquad (2)$$

(справа — *Стилтьеса интеграл*) и наз. криволинейным интегралом второго рода, или криволинейным интегралом по координате x_k. Он также является пределом соответствующих интегральных сумм: если τ $\{t_i\}_{i=0}^m$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta x_{ki} = \varphi_k(t_i) - \varphi_k(t_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и

$$\tilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^m F(x(\eta_i))\, \Delta x_{ki},$$

то

$$\int_\gamma F(x)\, dx_k = \lim_{\delta_\tau \to 0} \tilde{\sigma}_\tau.$$

Если F — непрерывная на спрямляемой кривой функция, то К. и. (1) и (2) всегда существуют. Если A — начало, а B — конец кривой γ, то К. и. (1) и (2) обозначаются также через

$$\int_{\widehat{AB}} F(x)\, ds \quad \text{и} \quad \int_{\widehat{AB}} F(x)\, dx_k.$$

К. и. первого рода не зависит от ориентации кривой:

$$\int_{\widehat{BA}} F(x)\,ds = \int_{\widehat{AB}} F(x)\,ds,$$

а К. и. второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой:

$$\int_{\widehat{BA}} F(x)\,dx_k = -\int_{\widehat{AB}} F(x)\,dx_k.$$

Если γ — непрерывно дифференцируемая кривая, $x(t)=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ — ее непрерывно дифференцируемое представление, $a \leqslant t \leqslant b$, и F — непрерывная на γ функция, то

$$\int_\gamma F(x)\,ds = \int_a^b F(x(t))\sqrt{\sum\nolimits_{k=1}^n [\varphi_k'(t)]^2}\,dt,$$

$$\left(\sum\nolimits_{k=1}^n [\varphi_k'(t)]^2 > 0\right),$$

$$\int_\gamma F(x)\,dx_k = \int_a^b F(x(t))\,\varphi_k'(t)\,dt,\ k=1, 2, \ldots, n,$$

и тем самым интегралы, стоящие в правой части этих равенств, не зависят от выбора параметра на кривой γ. Если $\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ — единичный касательный вектор к кривой γ, то К. и. второго рода выражается через К. и. первого рода по формуле

$$\int_\gamma F(x)\,dx_k = \int_\gamma F(x)\cos\alpha_k\,ds.$$

Если кривая γ задана векторным представлением $\boldsymbol{r}(t)=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, а $\boldsymbol{a}(x(t))=(a_1(x(t)), \ldots, a_n(x(t)))$ — векторная функция, определенная на γ, то, по определению,

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}(x)\,d\boldsymbol{r} = \int_\gamma (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\tau})\,ds = \sum\nolimits_{k=1}^n \int_\gamma a_k(x)\,dx_k.$$

Связь между К. и. и интегралами других видов устанавливается *Грина формулой* и *Стокса формулой*.

С помощью К. и. можно вычислять площади плоских областей: если конечная плоская область G ограничена спрямляемым простым контуром γ, то ее площадь равна

$$\operatorname{mes} G = \int_\gamma x_1\,dx_2 = -\int_\gamma x_2\,dx_1 = \frac{1}{2}\int_\gamma x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1,$$

где контур γ ориентирован против часовой стрелки.

Если вдоль кривой γ распределена нек-рая масса M с линейной плотностью $\rho(x)$, то

$$M = \int_\gamma \rho(x)\,ds.$$

Если $\boldsymbol{F}(x)$ — напряженность силового поля (т. е. сила, действующая на единицу массы), тогда

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}(x)\,d\boldsymbol{r}$$

равен работе силового поля вдоль кривой γ при перемещении вдоль γ единичной массы.

К. и. используются в теории векторных полей. Если непрерывное векторное поле $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x)=(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ определено на нек-рой n-мерной области G, $n>1$, то следующие три свойства эквивалентны.

1) Для любой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \subset G$ справедливо равенство

$$\int_\gamma \boldsymbol{a}(x)\,d\boldsymbol{r} = 0$$

(векторное поле, обладающее этим свойством, наз. потенциальным).

2) Для любой пары точек $A \in G$, $B \in G$ и для любых двух спрямляемых кривых $(\widehat{AB})_1$, $(\widehat{AB})_2$ с началом в точ-

ке A и концом в точке B:

$$\int_{(AB)_1} \boldsymbol{a}(x)\,d\boldsymbol{r} = \int_{(AB)_2} \boldsymbol{a}(x)\,d\boldsymbol{r}.$$

3) В области G существует такая функция $u(x)$ (называемая потенциальной функцией векторного поля $\boldsymbol{a}(x)$), что $\nabla u(x) = \boldsymbol{a}(x)$, т. е. $\partial u(x)/\partial x_k = a_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, при этом для любых $A, B \in G$ и любой кривой $\overset{\frown}{AB} \subset G$:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}(x)\,d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

Если $n=2$ или $n=3$ и область G односвязна при $n=2$ и поверхностно односвязна при $n=3$, а поле $\boldsymbol{a}(x)$ непрерывно дифференцируемо, то свойства 1) — 3) эквивалентны следующему свойству.

4) Вихрь векторного поля в области G равен нулю:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(x) = 0,\ x \in G.$$

Если условие односвязности области G не выполнено, то свойство 4) не эквивалентно, вообще говоря, свойствам 1) — 3). Напр., для поля

$$\boldsymbol{a}(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2},\ \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

определенного на плоскости с выброшенным началом координат, имеем $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(x) = 0$, $x \neq 0$, но

$$\int_{|r|=1} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = 2\pi \neq 0.$$

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [2] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

КРИПКЕ МОДЕЛИ — структуры, состоящие из нек-рого множества обычных моделей для классической логики, упорядоченных между собой нек-рым отношением, и служащие для интерпретации в них различных неклассических логик (интуиционистской, модальных и др.). Точнее, К. м. для языка L имеют вид

$$K = (S, R, D, W),$$

где S — некоторое непустое множество («миров», «ситуаций»); R — некоторое бинарное отношение на S (напр., для системы J *интуиционистской логики* R является частичным порядком, для модальной системы $S4$ — предпорядком, для системы $S5$ — отношением эквивалентности); отображение D сопоставляет каждому $\alpha \in S$ нек-рую непустую область D_α так, что если $\alpha R \beta$, то $D_\alpha \subseteq D_\beta$; оценка W сопоставляет всякой индивидной константе a элемент $W(a) \in \bigcap_{\alpha \in S} D_\alpha$, всякой индивидной переменной x — элемент $W(x) \in \bigcup_{\alpha \in S} D_\alpha$, для каждого $\alpha \in S$ всякой пропозициональной переменной p — истинностное значение $W_\alpha(p) \in \{\text{И}, \text{Л}\}$ (для системы J требуется также, чтобы если $\alpha R \beta$ и $W_\alpha(p) = \text{И}$, то $W_\beta(p) = \text{И}$), всякой n-местной ($n \geqslant 1$) предикатной константе P — некоторое подмножество $W_\alpha(P) \subseteq (D_\alpha)^n$ [для системы J, если $\alpha R \beta$, то $W_\alpha(P) \subseteq W_\beta(P)$], всякой n-местной функциональной константе f — функцию $W_\alpha(f)$ из $(D_\alpha)^n$ в D_α [для системы J, если $\alpha R \beta$, то $W_\alpha(f)$ есть ограничение $W_\beta(f)$ на D_α].

Для всяких $\alpha \in S$ и формулы A языка L такой, что для любой свободной переменной x в A $W(x) \in D_\alpha$, индуктивно определяется истинностное значение $W_\alpha(A) \in \{\text{И}, \text{Л}\}$. Для системы J значение $W_\alpha(A)$ определяется следующим образом:

а) если A — элементарная формула, то значение $W_\alpha(A)$ уже задано моделью;

б) $W_\alpha(B \& C) = \text{И} \rightleftarrows (W_\alpha(B) = \text{И}$ и $W_\alpha(C) = \text{И})$;

в) $W_\alpha(B \vee C) = \text{И} \rightleftarrows (W_\alpha(B) = \text{И}$ или $W_\alpha(C) = \text{И})$;

г) $W_\alpha(B \supset C) = $ И $\leftrightarrows$ (для всякого $\beta \in S$, если $\alpha R \beta$ и $W_\beta(B) =$ И, то $W_\beta(C) =$ И);

д) $W_\alpha(\neg B) =$ И $\leftrightarrows$ (для всякого $\beta \in S$, если $\alpha R \beta$, то $W_\beta(B) =$ Л);

е) $W_\alpha(\forall x B) =$ И $\leftrightarrows$ (для всяких $W' \underset{x}{=} W$ и $\beta \in S$, если $\alpha R \beta$ и $W'(x) \in D_\beta$, то $W'_\beta(B) =$ И);

ж) $W_\alpha(\exists x B) =$ И $\leftrightarrows$ (существует $W' \underset{x}{=} W$ такое, что $W'(x) \in D_\alpha$ и $W'_\alpha(B) =$ И) (здесь $W' \underset{x}{=} W$ означает, что оценка W' совпадает с W всюду, кроме, быть может, на x). Иногда вместо $W_\alpha(A) =$ И пишут $\alpha \models A$.

Для модальных логик определение $W_\alpha(A)$ в случаях (г), (д) и (ж) происходит иначе:

г′) $W_\alpha(B \supset C) =$ И $\leftrightarrows$ ($W(B) =$ Л или $W_\alpha(C) =$ И);

д′) $W_\alpha(\neg B) =$ И $\leftrightarrows$ $W_\alpha(B) =$ Л;

ж′) $W_\alpha(\forall x B) =$ И $\leftrightarrows$ (для всякого $W' \underset{x}{=} W$, если $W'(x) \in D_\alpha$, то $W'_\alpha(B) =$ И);

кроме того, добавляется

з) $W_\alpha(\Box B) =$ И $\leftrightarrows$ (для всякого $B \in S$, если $\alpha R \beta$, то $W_\beta(B) =$ И).

Формула A наз. истинной в К. м. $K = (S, R, D, W)$ (пишут $K \models A$), если $W_\alpha(A) =$ И для всякого $\alpha \in S$. Для каждой из систем J, $S4$, $S5$ справедлива теорема о полноте: всякая формула выводима в этой системе тогда и только тогда, когда она истинна во всех К. м. из соответствующего класса. Существенно, что области D_α являются, вообще говоря, различными, поскольку формула

$$\forall x\,(A \vee B(x)) \supset A \vee \forall x B(x), \qquad (*)$$

где x не входит свободно в A, не выводима в системе J, но истинна во всех К. м. с постоянной областью. Система, полученная из J добавлением схемы (*), полна относительно К. м. с постоянной областью (см. [4]). Пропозициональный фрагмент каждой из систем J, $S4$, $S5$ является финитно аппроксимируемым, т. е. всякая невыводимая в нем формула опровержима на нек-рой конечной К. м. из соответствующего класса.

Понятие «К. м.» родственно понятию вынуждения (см. *Вынуждения метод*). К. м. введены С. А. Крипке (S. A. Kripke).

Лит.: [1] Крипке С. А., Семантический анализ модальной логики, в кн.: Фейс Р., Модальная логика, пер. с англ., М., 1974, с. 254—323; [2] Шютте К., Полные системы модальной и интуиционистской логики, там же, с. 324—421; [3] Gödermann S., «J. Symb. Logic», 1971, v. 36, p. 249—61; [4] Коэн Пол Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969.

С. К. Соболев.

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКАЯ ГРУППА — дискретная группа движений n-мерного евклидова пространства E^n, имеющая ограниченную фундаментальную область. Две К. г. считаются эквивалентными, если они сопряжены в группе аффинных преобразований пространства E^n.

Происхождение теории К. г. связано с изучением симметрии орнаментов ($n=2$) и кристаллических структур ($n=3$). Классификация всех плоских (двумерных) и пространственных (трехмерных) К. г. была получена в конце 19 в. Е. С. Федоровым и несколько позже А. Шёнфлисом (см. [2], [3], а также [6], [7], [9]). С точностью до эквивалентности имеется 17 плоских и 219 пространственных К. г.; если же рассматривать пространственные группы с точностью до сопряженности при помощи аффинных преобразований, сохраняющих ориентацию, то их будет 230. В 1910 Л. Бибербахом были исследованы К. г. в произвольной размерности [4]. Он доказал, в частности, следующие теоремы.

1) Всякая n-мерная К. г. Г содержит n линейно независимых параллельных переносов; группа G линейных частей преобразований из Г конечна. (Для $n=3$ это было доказано в [3].)

2) Две К. г. эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны как абстрактные группы.

3) При любом n имеется лишь конечное число n-мерных К. г., рассматриваемых с точностью до эквивалентности (что является решением 18-й проблемы Гильберта).

Теорема 1) позволяет дать следующее описание строения К. г. как абстрактных групп. Пусть L — совокупность всех параллельных переносов, принадлежащих К. г. Г. Тогда L — нормальная подгруппа конечного индекса, изоморфная $\mathbb{Z}^n$ и совпадающая со своим централизатором в Г. Наличие такой нормальной подгруппы L в абстрактной группе Г является и достаточным условием того, чтобы группа Г была изоморфна К. г. [7].

Группа G линейных частей К. г. Г сохраняет решетку L; иными словами, в базисе решетки L преобразования из G записываются целочисленными матрицами.

Для того чтобы задать К. г. Г, нужно, помимо G и L, указать для каждого $g\in G$ такой вектор $a(g)$, что преобразование

$$x\longmapsto gx+a(g),\quad x\in E^n,$$

принадлежит группе Г. Вектор $a(g)$ определен с точностью до прибавления вектора из L. Отображение

$$\alpha: g\longmapsto a(g)+L$$

является одномерным коциклом на G со значениями в V/L, где V — векторное пространство, ассоциированное с E^n.

Любая тройка $\{G, L, \alpha\}$, где $G\subset \mathrm{GL}(V)$ — конечная линейная группа, L — G-инвариантная решетка и α — одномерный коцикл на G со значениями в V/L, соответствует указанным образом нек-рой К. г. При этом тройки $\{G, L, \alpha_1\}$ и $\{G, L, \alpha_2\}$, где α_1 и α_2 — когомологичные коциклы, соответствуют эквивалентным К. г. Нулевому классу когомологий соответствует расщепляемая (или симморфная) К. г., к-рая, при подходящем выборе начала отсчета, состоит из всех преобразований вида

$$x\longmapsto gx+a\ \ (x\in E^n),$$

где $g\in G$, $a\in L$.

В матричной интерпретации описание всех n-мерных К. г. сводится к описанию всех конечных групп целочисленных матриц порядка n (с точностью до сопряженности в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$) и, для каждой такой группы G, к вычислению группы когомологий $H^1(G, \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$.

Двум классам когомологий отвечают эквивалентные К. г. тогда и только тогда, когда они переводятся друг в друга нормализатором группы G в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Теорема 2) Бибербаха и результат Х. Цассенхауза [7] означают, что естественный гомоморфизм

$$H^1(G,\ \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)\to H^2(G,\ \mathbb{Z}^n)$$

является изоморфизмом. Это легко может быть выведено из точной последовательности когомологий группы G.

Две К. г. относятся к одному классу (соответственно арифметическому классу), если их группы линейных частей сопряжены в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (соответственно в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$). При $n=3$ имеется 32 класса и 73 арифметических класса К. г.

Среди конечных групп целочисленных матриц можно выделить группы симметрии решеток, т. е. группы всех ортогональных преобразований, сохраняющих какую-либо заданную решетку в векторном пространстве (и записанных в базисе этой решетки). В 1848 О. Браве (A. Bravais) определил все возможные группы симметрии 3-мерных решеток и разбил в соответствии с этим

все 3-мерные решетки на 14 типов (так наз. типы Браве). Подгруппы группы $GL_n(\mathbb{Z})$, являющиеся группами симметрии решеток, наз. подгруппами Браве.

Подгруппы Браве можно интерпретировать также как стационарные подгруппы для естественного действия группы $GL_n(\mathbb{Z})$ на множестве положительно определенных квадратичных форм от n переменных. Поэтому для их нахождения может быть использована теория приведения (см. [11]). Всякая максимальная конечная подгруппа группы $GL_n(\mathbb{Z})$ является подгруппой Браве (но не наоборот).

Приводимая таблица дает число конечных подгрупп в группе $GL_n(\mathbb{Z})$ (рассматриваемых с точностью до сопряженности).

n	Число максимальных конечных подгрупп	Число подгрупп Браве	Число конечных подгрупп
1	1	1	2
2	2	5	13
3	4	14	73
4	9	64	710
5	17	?	?

Пересечение подгрупп Браве также есть подгруппа Браве. Наименьшая подгруппа Браве $\hat{G}$, содержащая группу G линейных частей К. г. Г и рассматриваемая с точностью до сопряженности в $GL_n(\mathbb{R})$ (соответственно в $GL_n(\mathbb{Z})$), наз. геометрической (соответственно арифметической) голоэдрией группы Г. Если Г — К. г. общего положения в том смысле, что ее нельзя аффинным преобразованием перевести в К. г., решетка параллельных переносов к-рой обладает меньшей симметрией, то $\hat{G}$ совпадает с группой симметрии решетки параллельных переносов группы Г. Две К. г. относятся к одной сингонии (соответственно типу Браве), если их геометрические (соответственно арифметические) голоэдрии совпадают. При $n \leq 3$ имеется 7 сингоний и 14 типов Браве кристаллографич. групп.

Линейные представления К. г. Неприводимые конечномерные комплексные линейные представления К. г. Г описываются следующим образом. Пусть χ — какой-либо характер (гомоморфизм в мультипликативную группу комплексных чисел) группы L,

$$\Gamma_\chi \quad \{\gamma \in \Gamma : \chi(\gamma l \gamma^{-1}) = \chi(l)\ \forall l \in L\}$$

и σ — такое неприводимое представление группы Γ_χ, что $\sigma(l) = \chi(l) \cdot 1$ при $l \in L$. Тогда представление группы Г, индуцированное представлением σ подгруппы Γ_χ (см. *Индуцированное представление*), неприводимо. Всякое неприводимое представление группы Г получается описанным способом (см. [9], [10]).

Лит.: [1] Браве О., Избр. научные труды, Л., 1974, с. 41—138; [2] Федоров Е. С., Симметрия и структура кристаллов. Основные работы, М., 1949, с. 111—255; [3] Schoenflies A., Kristallsysteme und Kristallstruktur, Lpz., 1891; [4] Bieberbach L., «Math. Ann.», 1911, Bd 70, S. 297—336; 1912, Bd 72, S. 400—12; [5] Делоне Б., Падуров Н., Александров А., Математические основы структурного анализа кристаллов..., Л.— М., 1934; [6] Шубников А. В., Атлас кристаллографических групп симметрии, М.—Л., 1946; [7] Zassenhaus H., «Comm. math. helv.», 1948, v. 21, p. 117—141; [8] Мальцев А. И., Избр. труды, т. 1— Классическая алгебра, М., 1976, с. 371—75; [9] Любарский Г. Я., Теория групп и ее применение в физике, М., 1957; [10] Фаддеев Д. К., Таблицы основных унитарных представлений федоровских групп, М. — Л., 1961; [11] Делоне Б. Н., Галиулин Р. В., Штогрин М. И., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 2, М., 1973, с. 119—254.

Э. Б. Винберг.

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ — совокупность методов описания внешних форм кристаллов и их внутреннего пространственного строения. В основе К. м. лежит представление об упорядоченном трехмерно периодическом расположении в кристалле составляющих его частиц, к-рые образуют кристаллич. решетку. Выросшие в равновесных условиях кристаллы имеют форму правильных выпуклых многогранников той или иной симметрии. Группы симметрий классифицируют: по числу n измерений пространства, в к-ром они определены; по числу m измерений пространства, в к-рых объект периодичен (их соответственно обозначают G_m^n) и по нек-рым другим признакам. Для описания кристаллов используют различные группы симметрии, из к-рых важнейшими являются пространственные группы G_3^3, описывающие атомную структуру кристаллов, и точечные группы симметрии G_0^3, описывающие их внешнюю форму.

Операциями точечной группы симметрии являются: повороты вокруг оси симметрии порядка N на $360^\circ/N$, отражение в плоскости симметрии (зеркальное отражение), инверсия $\overline{1}$ (симметрия относительно точки), инверсионные повороты $\overline{N}$ (комбинация поворота на $360^\circ/N$ с одновременной инверсией). Вместо инверсионных поворотов иногда рассматривают зеркальные повороты $\tilde{N}$. Число групп G_0^3 бесконечно. Однако в кристаллах ввиду наличия кристаллич. решетки возможны только операции и соответственно оси симметрии до 6-го порядка (кроме 5-го), к-рые обозначаются символами 1, 2, 3, 4, 6, а также инверсионные оси: $\overline{1}$ (она же центр симметрии), $\overline{2}=m$ (она же плоскость симметрии, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$). Количество точечных кристаллографич. групп, описывающих внешнюю форму кристаллов, ограничено: 32 группы.

Группы, содержащие лишь повороты, описывают кристаллы, состоящие только из совместимо равных частей. Эти группы наз. группами 1-го рода. Группы, содержащие отражения, или инверсионные повороты, описывают кристаллы, в к-рых есть зеркально равные части (но могут быть и совместимо равные части). Эти группы наз. группами 2-го рода. Кристаллы, описываемые группами 1-го рода, могут кристаллизоваться в двух энантиоморфных формах, условно наз. «правой» и «левой», каждая из них не содержит элементов симметрии 2-го рода, но они зеркально равны друг другу.

Многие свойства кристаллов, принадлежащих к определенным классам, описываются предельными точечными группами, содержащими оси симметрии бесконечного порядка. Наличие такой оси означает, что объект совмещается с собой при повороте на любой, в том числе бесконечно малый угол. Таких групп семь.

Пространственная группа симметрий кристаллич. решетки описывается группами G_3^3. Характерными для решетки операциями являются три некомпланарных переноса $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, к-рые отвечают трехмерной периодичности атомной структуры кристаллов.

Вследствие возможности комбинирования в решетке трансляций и операций точечной симметрии в группах G_3^3 возникают операции и соответствующие элементы симметрии с трансляционной компонентой — винтовые оси различных порядков и плоскости скользящего отражения.

Всего известно 230 пространственных (федоровских) групп симметрии G_3^3, и любой кристалл относится к одной из этих групп. Трансляционные компоненты элементов микросимметрии микроскопически не проявляются; поэтому каждая из 230 групп G_3^3 макроскопически сходственна с одной из 32 точечных групп. Сово-

купность переносов, присущих данной пространственной группе, есть ее трансляционная подгруппа, или решетка Браве; таких решеток существует 14. См. также *Кристаллографическая группа.*

Лит.: [1] Шубников А. В., Флинт Е. Е., Бокий Г. Б., Основы кристаллографии, М.— Л., 1940; [2] Федоров Е. С., Симметрия и структура кристаллов, [М.], 1949; [3] Шаскольская М., Кристаллы, М., 1959.

По материалам ст. Симметрия кристаллов из БСЭ-3.

КРИСТОФФЕЛЯ СИМВОЛ дифференциальной квадратичной формы

$$\sum_{r,\,s=1}^{n} g_{rs}\,dx^r\,dx^s$$

— символ для сокращенного обозначения выражения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)\equiv\Gamma_{k,\,ij}.$$

Символ $\Gamma_{k,\,ij}$ наз. К. с. 1-го рода, в отличие от К. с. 2-го рода Γ^k_{ij}, определяемого соотношением

$$\Gamma^k_{ij}=\sum_{t=1}^{n} g^{kt}\Gamma_{k,\,ij},$$

где g^{kt} определяется из равенств

$$\sum_{k=1}^{n} g^{kt}g_{ks}=\begin{cases}1, & \text{если } t=s,\\ 0, & \text{если } t\neq s.\end{cases}$$

К. с. введен Э. Кристоффелем (E. Christoffel, 1869).

КРИСТОФФЕЛЯ ЧИСЛА, Кристоффеля коэффициенты, — коэффициенты λ_k квадратурной формулы

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\approx\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k),$$

точной для алгебраич. многочленов степени $\leqslant 2n-1$. Узлы x_k такой квадратурной формулы являются нулями многочлена $p_n(x)$ степени n, ортогонального на $[a,\,b]$ относительно распределения $d\alpha(x)$ всем многочленам степени $n-1$; если $x_1<x_2<\ldots<x_n$, то К. ч. определяются однозначно. К. ч. $\lambda_k>0$, $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=\alpha(b)-\alpha(a)$ и

$$\lambda_k=\int_a^b\left[\frac{p_n(x)}{p_n'(x)\,(x-x_k)}\right]^2 d\alpha(x),\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Если многочлены $p_n(x)$ ортонормированны, то К. ч. представимы в виде

$$\lambda_k^{-1}=p_0(x_k)+p_1(x_k)+\ldots+p_n(x_k),\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

$$\lambda_k=-\frac{K_{n+1}}{K_n}\,\frac{1}{p_{n+1}(x_k)\,p_n'(x_k)}=$$

$$=\frac{K_n}{K_{n-1}}\,\frac{1}{p_{n-1}(x_k)\,p_n'(x_k)},\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

где K_n — старший коэффициент многочлена $p_n(x)$. В случае $a=-1$, $b=1$ и $d\alpha(x)=dx$ $p_n(x)$ являются *Лежандра многочленами*, а К. ч.

$$\lambda_k=\frac{2}{\left(1-x_k^2\right)\left[p_n'(x_k)\right]^2}.$$

Эти выражения указаны Э. Кристоффелем [1]. Для $n=1,\,2,\,\ldots,\,7$ эти коэффициенты были вычислены К. Гауссом (C. Gauss). См. также *Гаусса квадратурная формула.*

Лит.: [1] Christoffel E. B., «J. reine und angew. Math.», 1858, Bd 55, S. 61—82; [2] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [3] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

КРИСТОФФЕЛЯ — ДАРБУ ФОРМУЛА для многочленов $\{P_n(x)\}$, ортонормированных с интегральным ве-

сом $d\sigma(x)$ на некотором интервале (a, b),— формула вида

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)\,P_k(t) = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}\,\frac{P_{n+1}(x)\,P_n(t)-P_n(x)\,P_{n+1}(t)}{x-t},$$

где μ_n — старший коэффициент многочлена $P_n(x)$. К.— Д. ф. применяется при исследовании условий сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в отдельной точке. К.— Д. ф. в случае, когда $\sigma(x)$ ступенчатая функция, была опубликована П. Л. Чебышевым в 1855 (см. [1]). Затем Э. Кристоффель [2] установил ее для *Лежандра многочленов*, а Г. Дарбу [3] распространил эту формулу на общий случай произвольного веса.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М., 1947, с. 103—106; [2] Christoffel E. B., «J. reine und angew. Math.», 1858, Bd 55, S. 61—82; [3] Darboux M. G., «J. math. pures et appl.», 1878, sér. 3, t. 4, p. 5—56, 377—416.

См. также лит. при статье *Ортогональные многочлены*.

И. К. Суетин.

КРИСТОФФЕЛЯ — ШВАРЦА ФОРМУЛА — формула

$$f(z) = c\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}(t-a_k)^{\alpha_k-1}\,dt + c_1, \qquad (*)$$

дающая интегральное представление функции $f(z)$, конформно отображающей верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на внутренность ограниченного многоугольника с вершинами A_k и углами $\pi\alpha_k$ при вершинах ($0<\alpha_k\leqslant 2$, $k=1, \ldots, n$). При этом z_0, c, c_1 — некоторые постоянные, $A_k=f(a_k)$, $k=1, \ldots, n$. Постоянную z_0 можно фиксировать произвольно в верхней полуплоскости. Тройку точек из $a_1, \ldots, a_n$, напр. a_1, a_2, a_3, можно задавать произвольно; остальные $n-3$ точки a_k, а также постоянные c, c_1 определяются однозначно, если вершины $A_1, \ldots, A_n$ многоугольника заданы (см. [3]). Формула (*) была получена независимо Э. Кристоффелем (1867, см. [1]) и Г. Шварцем (1869, см. [2]). Интеграл в правой части (*) наз. интегралом Кристоффеля — Шварца.

Основная трудность при применении формулы (*) состоит в нахождении неизвестных параметров. При $n>4$ общие методы неизвестны.

Разработаны методы приближенного отыскания параметров К.— Ш. ф. (см. [4], [5]).

К.— Ш. ф. остается справедливой и для многоугольников, у к-рых одна или несколько вершин лежат в бесконечно удаленной точке. В этом случае угол между сторонами многоугольника в бесконечности определяется как угол, взятый со знаком минус, между этими же сторонами или их продолжениями в конечной точке. Если прообраз a_i одной из вершин многоугольника находится в бесконечно удаленной точке, то соответствующий множитель $(t-a_i)^{\alpha_i-1}$ в формуле (*) выпадает.

К.— Ш. ф. справедлива также для функции, отображающей единичный круг $|z|<1$ на рассмотренный выше многоугольник. В этом случае $|a_k|=1$, $k=1, \ldots, n$, $|z_0|\leqslant 1$. Видоизменения этой формулы охватывают случаи отображения верхней полуплоскости, а также внутренности и внешности единичного круга на внешность многоугольника (см. [3]).

К.— Ш. ф. обобщена на случай, когда функция $f(z)$ конформно отображает круговое кольцо $0<q<|z|<1$ или, в более общем случае, многосвязную область, состоящую из круга с выброшенными из него n кругами, на область соответствующей связности, ограниченную многоугольниками (см. [6], [7]).

Лит.: [1] Christoffel E. B., «Ann. math. pura ed appl.», Ser. 2, 1868, t. 1, p. 89—103; 1871, t. 4, p. 1—9; [2] Schwarz H. A., Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd 1—2, B., 1890; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [4] Канторович Л. В., Крылов В. И., При-

ближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; [5] Коппенфельс В., Штальман Ф., Практика конформных отображений, пер. с нем., М., 1963; [6] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [7] Максимов Ю. Д., «Докл. АН СССР», 1960, т. 136, № 2, с. 284—87. *Ю. Д. Максимов.*

КРИТИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ — часть выборочного пространства такая, что попадание в нее наблюденного значения случайной величины, с распределением к-рой связана проверяемая гипотеза, влечет отказ от этой гипотезы. Пусть нужно проверить гипотезу H_0 о распределении случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$. При построении нерандомизированного критерия для проверки гипотезы H_0 пространство $\mathfrak{X}$ разбивают на два непересекающихся множества K и $\overline{K}$ таких, что $K \bigcup \overline{K} = \mathfrak{X}$, $K \in \mathfrak{B}$. При этом критерий проверки представляет собой правило, согласно к-рому гипотеза H_0 отклоняется, если в результате эксперимента окажется, что реализация x случайной величины X попадает в множество K, в противном случае (т. е. при $x \in \overline{K}$) гипотезу H_0 следует принять. Множество K наз. К. о. критерия, а его дополнение $\overline{K}$ — областью принятия гипотезы. В этом смысле задача выбора К. о. эквивалентна построению нерандомизированного статистич. критерия для проверки гипотезы H_0. Естественно, что К. о. выбирается до проведения эксперимента, связанного с проверкой гипотезы H_0, а сам выбор К. о. в рамках теории Неймана — Пирсона определяется вероятностями ошибок первого и второго рода, возникающими в задачах статистич. проверки гипотез.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960. *М. С. Никулин.*

КРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА — 1) К. т. порядка m — такая точка a комплексной плоскости, в к-рой аналитич. функция $f(z)$ регулярна, а ее производная $f'(z)$ имеет нуль порядка m, где m — натуральное число. Иными словами, К. т. определяется условиями:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{(z-a)^m} = 0, \quad \lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{(z-a)^{m+1}} \neq 0.$$

Бесконечно удаленная К. т. $a=\infty$ порядка m для функции $f(z)$, регулярной в бесконечности, определяется условиями:

$$\lim_{z \to \infty} [f(z) - f(\infty)]\, z^m = 0, \qquad \lim_{z \to \infty} [f(z) - f(\infty)]\, z^{m+1} \neq 0.$$

При аналитическом отображении $w=f(z)$ угол между двумя кривыми, выходящими из К. т. порядка m, увеличивается в $m+1$ раз. Если функция $f(z)$ рассматривается как комплексный потенциал нек-рого плоского течения несжимаемой жидкости, то К. т. характерна тем, что через нее проходит не одна, а $m+1$ линий тока, причем скорость течения в К. т. обращается в нуль. Для обратной функции $z=\psi(w)$ такой, что $f[\psi(w)] \equiv w$, К. т. a является алгебраич. точкой ветвления порядка $m+1$.

2) Точка a комплексного $(n-m)$-мерного неприводимого аналитического множества

$$M = \{z \in V;\ f_1(z) = f_2(z) = \ldots = f_m(z) = 0\},$$

заданного в окрестности V точки a комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ условиями $f_1(z)=f_2(z)=\ldots=f_m(z)=0$, где $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — голоморфные на V функции n комплексных переменных, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, наз. К. т., если ранг матрицы Якоби $\|\partial f_j/\partial z_k\|$, $j=1, \ldots, m$; $k=1, \ldots, n$, меньше числа m. Прочие точки M наз. правильными. К. т. на M сравнительно мало — они образуют аналитическое множество комплексной размерности не выше $n-m-1$. В частности, при $m=1$,

т. е. если $M=\{f_1(z)=0\}$ и размерность M равна $n-1$, размерность множества К. т. не выше $n-2$.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

3) К. т. гладкого (т. е. непрерывно дифференцируемого) отображения f k-мерного дифференцируемого многообразия M в l-мерное дифференцируемое многообразие N — такая точка $x_0\in M$, что ранг $\mathrm{Rk}_{x_0}f$ отображения f в этой точке (т. е. размерность образа $df(T_{x_0}M)$ касательного пространства к M под действием дифференциала $df: T_{x_0}M\to T_{f(x_0)}N$) меньше l. Совокупность всех К. т. наз. критическим множеством, образ $f(x_0)$ К. т. x_0 — критическим значением, а точка $y\in N$, не являющаяся образом никакой К. т., — регулярной точкой, или регулярным значением (хотя она может вообще не принадлежать образу $f(M)$); некритические точки из M тоже наз. регулярными.

Согласно теореме Сарда, если f имеет класс гладкости C^m, $m>\min(k-l, 0)$, то образ критического множества имеет первую категорию в N (т. е. является объединением не более чем счетной системы нигде не плотных множеств) и имеет l-мерную меру нуль (см. [1], [2]). Условие на m не может быть ослаблено [3]. Чаще всего бывает нужен случай $m=\infty$ (при этом доказательство упрощается, см. [4]). Эта теорема широко используется для приведения в *общее положение* посредством «малых шевелений»; напр., с ее помощью легко доказать, что если в $\mathbb{R}^n$ имеются два гладких подмногообразия, то сколь угодно малым сдвигом одного из них можно достичь, чтобы их пересечение тоже было подмногообразием (см. [2], [4], а также *Трансверсальность* отображений).

Согласно приведенному определению, при $k<l$ каждую точку $x_0\in M$ надо считать критической. Но при этом существенно различаются свойства тех точек x_0, для к-рых $\mathrm{Rk}_{x_0}f=k$, и тех, для к-рых $\mathrm{Rk}_{x_0}f<k$. В первом случае в нек-рой окрестности точки x_0 отображение f выглядит приблизительно как стандартное вложение $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^l$; точнее, имеются такие локальные координаты $x_1, \ldots, x_k$ вблизи x_0 (на M) и $y_1, \ldots, y_l$ вблизи $f(x_0)$ (на N), что в этих координатах f представляется в виде

$$y_i=x_i, \quad i\leqslant k; \quad y_{k+1}=\ldots=y_l=0.$$

Во втором случае образ окрестности точки x_0 может не быть многообразием, а иметь различные особенности — заострения, самопересечения и т. д. Поэтому определение К. т. часто модифицируют, понимая под К. т. те точки x_0, для которых $\mathrm{Rk}_{x_0}f<\min(k, l)$; соответственно модифицируется и смысл других приведенных выше терминов [5].

Поведение отображений в окрестности К. т. изучается в теории особенностей дифференцируемых отображений (см. [5], [6]). При этом рассматриваются не произвольные К. т. (о к-рых мало что можно сказать), а К. т., удовлетворяющие условиям «не слишком сильной вырожденности» и «типичности». Так, рассматриваются К. т. достаточно гладких отображений или семейств отображений (достаточно гладко зависящих от конечного числа параметров), являющиеся «неустранимыми» в том смысле, что при малом (в смысле C^m с подходящим m) возмущении исходного отображения или семейства у возмущенного отображения (семейства) в нек-рой окрестности исходной К. т. имеется К. т. того же типа. Для отображения $M\to\mathbb{R}$ (т. е. обычной скалярной функции; в этом случае К. т. часто наз. стационарными точками) типичными в указанном смысле являются так наз. невырожденные К. т., в к-рых гессиан — невырожденная квадратичная

форма. О типичных К. т. для семейства функций см. [6], [7].

Лит.: [1] Sard A., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1942, v. 48, p. 883–90; [2] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [3] Whitney H., «Duke Math. J.», 1935, v. 1, № 4, p. 514—17; [4] Милнор Дж., Топология с дифференциальной точки зрения, в кн.: Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология. Начальный курс, пер. с англ., М., 1972; [5] Голубицкий М., Гийемин В., Устойчивые отображения и их особенности, пер. с англ., М., 1977; [6] Брёкер Т., Ландер Л., Дифференцируемые ростки и катастрофы, пер. с англ., М., 1977; [7] Арнольд В. И., «Функцион. анализ и его прилож.», 1972, т. 6, № 4, с. 3–25.

Д. В. Аносов.

КРИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — статистика, значения к-рой суть условные вероятности отклонения проверяемой гипотезы при заданном значении результата наблюдения. Пусть X — случайная величина, принимающая значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$, распределение вероятностей к-рой принадлежит семейству $\{P_\theta\}$, $\theta\in\Theta$, и пусть проверяется гипотеза H_0: $\theta\in\Theta_0\subset\Theta$ против альтернативы H_1: $\theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$. Далее, пусть на $\mathfrak{X}$ задана измеримая функция $\varphi(\cdot)$ такая, что $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$ при всех $x\in\mathfrak{X}$. Если для проверки гипотезы воспользоваться рандомизированным критерием, согласно к-рому гипотеза H_0 отвергается с вероятностью $\varphi(x)$, когда в результате эксперимента установлено, что $X=x$, и принимается с вероятностью $1-\varphi(x)$, то функция $\varphi(\cdot)$ наз. К. ф. этого критерия. При построении нерандомизированного критерия К. ф. выбирают так, чтобы она принимала только значения 0 и 1. В этом случае К. ф. является индикатором нек-рого множества $K\in\mathfrak{B}$, называемого критической областью критерия, т. е. $\varphi(x)=1$ при $x\in K$ и $\varphi(x)=0$ при $x\notin K$.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

М. С. Никулин.

КРИТИЧЕСКИЙ ИДЕАЛ — простой идеал дедекиндова кольца A, делящий дискриминант конечного сепарабельного расширения K/k, где k — поле частных кольца A. К. и. и только такие идеалы разветвлены в расширении K/k. Простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A наз. р а з в е т в л е н н ы м в K/k, если в целом замыкании B кольца A в поле K имеет место равенство

$$\mathfrak{p}B=\mathfrak{P}_1^{l_1}\dots\mathfrak{P}_s^{l_s},$$

где $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_s$ — некоторые простые идеалы кольца B и хотя бы одно из чисел l_i больше 1. Число l_i наз. и н д е к с о м в е т в л е н и я идеала $\mathfrak{P}_i$.

Если K/k — расширение Галуа с группой Галуа $G(K/k)$, то $l_1=l_2=\dots=l_s$ и индекс l_i совпадает с порядком п о д г р у п п ы и н е р ц и и $T(\mathfrak{P}_i)$ группы $G(K/k)$:

$$T(\mathfrak{P}_i)=\{\sigma\in G(K/k)\mid \sigma a-a\in\mathfrak{P}_i \text{ для всех } a\in B\}.$$

Другой, более тонкой характеристикой ветвления является п о д г р у п п а в ы с ш е г о в е т в л е н и я $T(\mathfrak{P}_i)_n\subset T(\mathfrak{P}_i)$, $n=1, 2, \dots$, определяемая следующим образом:

$$T(\mathfrak{P}_i)_n=\{\sigma\in G(K/k)\mid \sigma(a)-a\in\mathfrak{P}_i^{n+1} \text{ для всех } a\in B\}.$$

Пусть $A=\mathbb{Z}$; согласно т е о р е м е М и н к о в с к о г о в любом конечном расширении поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ существуют К. и. Для произвольных полей алгебраич. чисел это не так: если поле k не одноклассно, т. е. имеет нетривиальную группу классов идеалов, то над k существуют н е р а з в е т в л е н н ы е р а с ш и р е н и я, т. е. расширения, не имеющие критич. идеалов. Пример такого расширения — гильбертово поле классов поля k: так, поле $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-5})$ совпадает с гильбертовым полем классов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ и не разветвлено над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] Ленг С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966.

Л. В. Кузьмин.

КРИТИЧЕСКИЙ УРОВЕНЬ — дополнение *критической функции* до единицы. Пусть для проверки нек-рой гипотезы H_0 относительно распределения вероятностей случайной величины X применяется критерий, основанный на статистике $T(X)$, функция распределения к-рой при гипотезе H_0 есть $G(t)$. Если критич. область, соответствующая данному критерию, задается неравенством вида $T(X)>t$, то К. у. выражается формулой $1-G\{T(X)\}$.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971. *М. С. Никулин.*

КРИТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ — значение дифференцируемого отображения в *критической точке.*

КРОНЕКЕРА МЕТОД — метод разложения многочлена с рациональными коэффициентами на неприводимые множители над полем рациональных чисел; предложен в 1882 Л. Кронекером [1]. Пусть d — общий знаменатель всех коэффициентов многочлена $\varphi(x)$. Тогда $f(x)=d\varphi(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами; причем из любого разложения $\varphi(x)$ на неприводимые множители с рациональными коэффициентами можно получить разложение $f(x)$ на неприводимые множители с целыми коэффициентами, множители к-рого отличаются от соответствующих множителей $\varphi(x)$ лишь постоянными множителями, и обратно.

Пусть $f(x)$ имеет степень $n>0$ и k — наибольшее натуральное число, для к-рого $k\leqslant n/2$. Если $f(x)=g(x)\times\times h(x)$ — разложение $f(x)$ на множители с целыми коэффициентами, где степень $g(x)$ не больше степени $h(x)$, то степень $g(x)$ не превосходит k. Давая x любые $k+1$ различных целых значений $x=c_i$, $i=1, 2, \ldots, k+1$, получают равенства

$$f(c_i)=g(c_i)\,h(c_i), \quad i=1, 2, \ldots, k+1,$$

где $g(c_i)$ и $h(c_i)$ — целые числа. Таким образом, $g(c_i)$ делит $f(c_i)$. Беря произвольные делители d_i чисел $f(c_i)$, получают

$$g(c_i)=d_i, \quad i=1, 2, \ldots, k+1.$$

Из этих равенств многочлен $g(x)$ находится по интерполяционной формуле Лагранжа или проще — из уравнений для коэффициентов. Найденный многочлен $g(x)$ надо испытать, проверив, делит ли он $f(x)$. Это построение многочлена и проверка проводятся для всевозможных наборов делителей чисел $f(c_i)$.

Далее этот же процесс применяется к $g(x)$ и $h(x)$ и т. д., пока не приходят к неразложимым множителям.

К. м. приводит к громоздким вычислениям. Для упрощения можно сначала понизить степень $f(x)$, выделив его рациональные корни (см. [3] с. 355).

Пример. $f(x)=x^5-x^4-2x^3-8x^2+6x-1$ (это многочлен с целыми коэффициентами и без рациональных корней). Если $f(x)=g(x)h(x)$, где степень k многочлена $g(x)$ не больше степени $h(x)$, то $2\leqslant k<5/2$, т. е. $k=2$. Пусть $c_1=0$, $c_2=1$, $c_3=2$. Тогда $f(0)=-1$; $f(1)=-5$; $f(2)=-21$. Делители этих чисел: $d_1=\pm1$, $d_2=\pm1, \pm5$, $d_3=\pm1, \pm3, \pm7, \pm21$. Всего получается $2\cdot4\cdot8=64$ комбинации. Две комбинации d_i, отличающиеся лишь знаком, дают два многочлена $\pm g(x)$. Поэтому можно проверять лишь $g(0)=+1$. Остаются 32 случая. Перебирая все эти случаи, можно найти лишь один многочлен 2-й степени, делящий $f(x)$. Это $g(x)=x^2-3x+1$. Откуда $f(x)=(x^2-3x+1)(x^3+2x^2+3x-1)$. Оба сомножителя этого разложения неприводимы (как многочлены 2-й и 3-й степеней, не имеющие рациональных корней).

Лит.: [1] Kronecker L., «J. reine und angew. Math.», 1882, Bd 92, S. 1—122; [2] Окунев Л. Я., Высшая алгебра, М., 1937; [3] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

КРОНЕКЕРА СИМВОЛ — величина δ_j^i, определяемая равенствами

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots$$

При $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$ К. с. δ_j^i имеет n^2 компонент, матрица к-рых $\|\delta_j^i\|$ является единичной. К. с. введен Л. Кронекером (L. Kronecker, 1866).

Обобщением К. с. является совокупность величин $\delta^{i_1,\ i_2\ \ldots\ i_p}_{j_1,\ j_2\ \ldots\ j_p}$, имеющих $2p$ целых (верхних и нижних) индексов, $i_\alpha,\ i_\beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, равных $+1$ (или -1), если строка индексов $(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p)$ — четная (нечетная) перестановка строки различных индексов $(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_p)$, и нулю — во всех остальных случаях. Числа $\delta^{i_1,\ \ldots\ i_p}_{j_1\ \ldots\ j_p}$ (часто обозначаемые при $p \geqslant 2$ через $\varepsilon^{i_1\ \ldots\ i_p}_{j_1\ \ldots\ j_p}$) наз. компонентами К. с. Аффинный тензор типа $(p,\ p)$, имеющий в нек-ром базисе компоненты, равные компонентам К. с., имеет те же самые компоненты в любом другом базисе.

К. с. удобен в различных задачах тензорного исчисления. Напр., определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

равен сумме

$$\sum_i \delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{1\ 2\ \ldots\ n} a^1_{i_1} a^2_{i_2} \ldots a^n_{i_n},$$

в к-рой суммирование производится по всем $n!$ перестановкам чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Операция альтернирования тензора $\{a^{\alpha_1\ \ldots\ \alpha_p},\ 1 \leqslant \alpha_j \leqslant n\}$ имеет вид

$$a^{[\alpha_1\ \ldots\ \alpha_p]} = \frac{1}{p!} \sum_i \delta^{\alpha_1\ \ldots\ \alpha_p}_{i_1\ \ldots\ i_p} a^{i_1\ \ldots\ i_p}.$$

Лит.: [1] Kronecker L., Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, Lpz., 1903.

Л. П. Купцов.

КРОНЕКЕРА ТЕОРЕМА: пусть даны $a_i = (a_{i1},\ \ldots,\ a_{in}) \in \mathbb{R}^n,\ i=1,\ \ldots,\ m$, и $b = (b_1,\ \ldots,\ b_n) \in \mathbb{R}^n$; для того чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовали целые числа $q_i,\ i=1,\ \ldots,\ m$, и $p_j,\ j=1,\ \ldots,\ n$, такие, что

$$\left| \sum_{i=1}^m q_i a_{ij} - p_j - b_j \right| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых таких $r_1,\ \ldots,\ r_n \in \mathbb{Z}$, что

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} r_j \in \mathbb{Z}, \quad i=1,\ \ldots,\ m,$$

число

$$\sum_{j=1}^n b_j r_j$$

также было целым. Эта теорема была доказана в 1884 Л. Кронекером (см. [1]).

К. т. является частным случаем следующей теоремы, описывающей замыкание подгруппы тора $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, порожденной элементами $a_i + \mathbb{Z}^n,\ i=1,\ \ldots,\ m$: это замыкание состоит в точности из таких классов $b + \mathbb{Z}^n$, что для любых чисел $r_1,\ \ldots,\ r_n \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} r_j \in \mathbb{Z}, \quad i=1,\ \ldots,\ n,$$

выполнено

$$\sum_{j=1}^n b_j r_j \in \mathbb{Z}$$ [2].

В условиях К. т. указанное замыкание совпадает со

всем T^n. Это означает, что подгруппа элементов вида

$$\sum_{i=1}^{m} q_i (a_i + \mathbb{Z})^n,$$

где $q_i \in \mathbb{Z}$, плотна в T^n, а подгруппа векторов вида

$$\sum_{i=1}^{m} q_i a_i + p,$$

где $p \in \mathbb{Z}^n$, плотна в $\mathbb{R}^n$. К. т. можно вывести из теории двойственности для коммутативных топологических групп [3].

В случае $m=1$ К. т. превращается в следующее утверждение: для того чтобы класс $\omega + \mathbb{Z}^n$, где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$, порождал T^n как топологич. группу, необходимо и достаточно, чтобы числа $1, \omega_1, \ldots, \omega_n$ были линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. В частности, тор T^n как топологич. группа монотетичен, т. е. порождается одним элементом.

Лит.: [1] Kronecker L., Werke, Bd 3, Halbbd 1, Lpz., 1899; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, пер. с франц., М., 1969; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973.

А. Л. Онищик.

КРОНЕКЕРА ФОРМУЛА — формула, выражающая алгебраич. сумму значений нек-рой функции на множестве корней системы уравнений; установлена Л. Кронекером [1], [2]. Пусть $F^t(x^1, \ldots, x^n)$, $t=0, 1, \ldots, n$, $f(x^1, \ldots, x^n)$ — действительнозначные непрерывно дифференцируемые в $\mathbb{R}^n$ такие, что система уравнений

$$F^s(x^1, \ldots, x^n) = 0, \quad s=1, \ldots, n, \tag{1}$$

имеет конечное число корней. Пусть уравнение

$$F^0(x^1, \ldots, x^n) = 0$$

определяет замкнутую поверхность P, не проходящую через корни системы (1), и $F^0 < 0$ внутри P. Если функции F^s, $s=1, \ldots, n$, рассматриваются как компоненты векторного поля в пространстве $\mathbb{R}^n$, то его особые точки (по определению) соответствуют корням системы (1). Пусть x_α — некоторый корень, а $\chi(x_\alpha)$ — индекс этой особой точки. Тогда

$$\frac{1}{K^n} \sum_\alpha f(x_\alpha)\, \chi(x_\alpha) = \int_{F^0<0} \frac{\Lambda}{R^n}\, dV - \int_{F^0=0} \frac{fD}{QR^n}\, dS \tag{2}$$

(суммирование по всем корням), где K^n — объем единичной сферы S^{n-1},

$$R = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} (F^s)^2}, \quad Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (F_i^0)^2},$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & \ldots & f_n \\ F^1 & F_1^1 & \ldots & F_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F^n & F_1^n & \ldots & F_n^n \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} F^0 & F_1^0 & \ldots & F_n^0 \\ F^1 & F_1^1 & \ldots & F_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F^n & F_1^n & \ldots & F_n^n \end{vmatrix},$$

и для функции Φ через Φ_i обозначены ее производные $\partial\Phi/\partial x^i$. Формула (2) и есть формула Кронекера.

При $f=1$ пространственный интеграл в (2) исчезает, и получается выражение для суммы индексов χ_F особых точек векторного поля $\{F^s\}$, расположенных внутри поверхности P, т. е. для степени отображения поверхности P в сферу S^{n-1}, определяемого как ограничение на множество P отображения $\overset{\circ}{F}{}^s = F^s/R$, $s=1, \ldots, n$. При нек-рых дополнительных условиях величина χ_F равна так наз. характеристике Кронекера системы функций $F^0, F^1, \ldots, F^n$ (см. [3]).

Лит.: [1] Kronecker L., «Monatsbericht», 1869, S.159—193, 688—98; [2] его же, там же, 1878, S. 95—121; [3] Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитиче-

ской механике, М., 1962, с. 273—313; [4] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М.—Л., 1947. *М. И. Войцеховский.*

КРОНЕКЕРА — КАПЕЛЛИ ТЕОРЕМА, критерий совместности системы линейных уравнений: для совместности системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= b_s \end{aligned}$$

необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $A = \|a_{ij}\|$ из коэффициентов при неизвестных был равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$, получающейся из матрицы A добавлением столбца, свободных членов b_i.

У Л. Кронекера эта теорема содержится в его лекциях, читавшихся в Берлинском университете в 1883 — 1891 (см. [1]). А. Капелли, по-видимому, впервые дал приведенную выше формулировку теоремы с использованием термина «ранг матрицы» (см. [2]).

Лит.: [1] Kronecker L., Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, Lpz., 1903; [2] Capelli A., «Revista di Matematica», 1892, v. 2, p. 54—58; [3] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975. *И. В. Проскуряков.*

КРОНЕКЕРОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ колец, алгебр — то же, что их *тензорное произведение*.

КРУГ — часть плоскости, ограниченная окружностью и содержащая ее центр. Площадь К.: $S = \pi r^2$, где r — радиус окружности.

КРУГ КРИВИЗНЫ, окружность кривизны, - окружность, имеющая с кривой в данной точке *соприкосновение* не ниже 2-го порядка. Центр К. к. наз. центром кривизны кривой в точке соприкосновения, а радиус К. к. — радиусом кривизны. К. к. располагается в соприкасающейся плоскости кривой. *БСЭ-3.*

КРУГ СХОДИМОСТИ степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \qquad (1)$$

— круг вида $\Delta = \{z: |z-a| < R\}$, $z \in \mathbb{C}$, в к-ром ряд (1) абсолютно сходится, а вне его, при $|z-a| > R$, расходится. Иными словами, К. с. Δ есть внутренность множества точек сходимости ряда (1). Радиус R К. с. наз. радиусом сходимости ряда (1). К. с. может вырождаться в точку a, когда $R=0$, и может совпадать со всей открытой плоскостью переменного z, когда $R = \infty$. Радиус сходимости R равен расстоянию от центра ряда a до множества особых точек функции $f(z)$ (об определении R по коэффициентам ряда c_k см. *Коши — Адамара теорема*). Любой круг $\Delta = \{z: |z| < R\}$, $0 \leqslant R \leqslant \infty$, на плоскости z является К. с. нек-рого степенного ряда.

В случае степенного ряда

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} c_{k_1 \ldots k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \ldots (z_n - a_n)^{k_n} \qquad (2)$$

по нескольким комплексным переменным $z_1, \ldots, z_n$, $n > 1$, поликругом сходимости ряда (2) наз. всякий поликруг

$$\Delta_n = \{z = (z_1, \ldots, z_n): |z_\nu - a_\nu| < R_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n\}$$

такой, что во всех его точках ряд (2) абсолютно сходится, а в любом поликруге вида

$$\{z = (z_1, \ldots, z_n): |z_\nu - a_\nu| < R'_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n\},$$

где $R'_\nu \geqslant R_\nu$ и по крайней мере одно из последних неравенств строгое, найдется хотя бы одна точка, в к-рой ряд (2) расходится. Радиусы R_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, $0 \leqslant R_\nu \leqslant \infty$, поликруга сходимости наз. сопряженными

радиусами сходимости ряда (2). Они связаны определенным соотношением с коэффициентами ряда (2), так что любой поликруг с центром a, радиусы к-рого удовлетворяют этому соотношению, является поликругом сходимости ряда (2) (см. *Коши — Адамара теорема*). Любой поликруг вида Δ_n, $0 \leqslant R_\nu < \infty$, $\nu = 1, \ldots, n$, в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ есть поликруг сходимости нек-рого степенного ряда по n комплексным переменным. Вся внутренность множества точек абсолютной сходимости ряда (2) при $n > 1$ имеет более сложный вид — это логарифмически выпуклая полная *кратно круговая область* пространства $\mathbb{C}^n$ с центром a.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1, М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

КРУГА ПРОБЛЕМА — проблема наилучшей асимптотич. оценки числа $A(x)$ целых точек (u, v) в круге $u^2 + v^2 \leqslant x$. Пусть θ — нижняя грань числа α в равенстве

$$A(x) = \pi x + O(x^\alpha). \qquad (*)$$

К. Гаусс (см. [1]) доказал, что $\theta \leqslant 1/2$. В. Серпиньский [2] по методу Г. Ф. Вороного [3] установил, что $\theta \leqslant 1/3$. Последней (1982) является оценка $\theta \leqslant 13/40$ (см. [4]). Существует гипотеза, что остаточный член в формуле (*) есть

$$O(x^{1/4} \log^2 x).$$

Среднее значение для К. п.:

$$\int_0^N (A(x) - \pi x)^2 \, dx = CN^{3/2} + O(N^{1+\varepsilon}),$$

где C — некоторая абсолютная постоянная, $\varepsilon > 0$ — любое.

К. п. по содержанию и методам исследования во многом аналогична проблеме делителей Дирихле (см. *Делителей проблемы*). Обобщением К. п. является п р о б л е м а ш а р а — проблема оценки $B(x)$ — числа целых точек (u, v, w) в шаре $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant x$. Исходной для оценки является формула

$$B(x) = 24G(x) + O(\sqrt{x}),$$

где

$$G(x) = \sum_{0 < u \leqslant \sqrt{x/3}} \times$$

$$\times \sum_{u < v \leqslant \sqrt{(x-u^2)/2}} \left(\left[\sqrt{x - u^2 - v^2}\right] - v\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{0 < v \leqslant \sqrt{x/2}} \left(\left[\sqrt{x - v^2}\right] - v\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{0 < u \leqslant \sqrt{x/3}} \left(\left[\sqrt{x - 2u^2}\right] - u\right) + O(\sqrt{x}),$$

к-рая получается за счет разбиения шара шестью плоскостями

$$u = v, \; u = w, \; v = w, \; v = 0, \; u = 0, \; w = 0$$

на 24 части, имеющие одинаковое число целых точек, если считать точки на плоскостях сечений с коэффициентами $1/2$. Главный член роста $B(x)$ равен объему шара

$$V(x) = \frac{2\pi}{3} x^{3/2};$$

проблема сводится к оценке $P(x) = B(x) - V(x)$ — величины суммы дробных долей функций, стоящих под знаком [ ] в выражении для $G(x)$. Наиболее глубокие оценки для $P(x)$ получены на основе метода тригонометрич. сумм И. М. Виноградовым [5], [6]:

$$P(x) = O(x^{2/3} \log^6 x).$$

Существует гипотеза, что

$$P(x) = O(x^{1/2} \log^2 x).$$

Обобщением К. п. и проблемы шара является проблема оценки $A_F(x)$ — числа целых точек в n-мерных эллипсоидах

$$F(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{r,\, v=1}^{n} a_{rv} u_r u_v \leqslant x, \quad a_{rv} = a_{vr},$$

где F — положительно определенная квадратичная форма (см. [7]).

Лит.: [1] Gauss C. F., Werke, Bd 2, Göttingen, 1863, S. 269—91; [2] Sierpiński W., «Prace Mat.— Fiz.», 1906, t. 17, p. 77—118; [3] Вороной Г. Ф., Собр. соч., т. 1, К., 1952, с. 5; [4] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [5] Виноградов И. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, № 5, с. 957—68; [6] его же, Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976; [7] Novák B., Lattice points in moredimensional ellipsoids, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 145—50.

А. Ф. Лаврик.

КРУГОВАЯ СИММЕТРИЗАЦИЯ — геометрическое преобразование открытого (замкнутого) плоского множества G относительно луча λ с началом в точке P во множество G^*, определяемое следующими условиями: 1) пересечение G^* с нек-рой окружностью с центром в P пусто или состоит из всей этой окружности, в зависимости от того, является ли пересечение G с выбранной окружностью соответственно пустым или совпадающим со всей окружностью; 2) если пересечение G и окружности с центром в точке P имеет угловую меру Лебега Φ, то пересечение этой окружности с G^* состоит из открытой (замкнутой) дуги, пересекающей λ, симметричной относительно λ и видимой из P под углом, равным Φ.

Определение К. с. естественным образом переносится на пространственный случай (симметризация относительно полуплоскости). См. также *Симметризация.*

Лит.: [1] Полиа Г., Сеге Г., Изопериметрические неравенства в математической физике, пер. с англ., М., 1962; [2] Хейман В. К., Многолистные функции, пер. с англ., М., 1960; [3] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962.

И. П. Митюк.

КРУГОВОЕ ПОЛЕ, поле деления круга,— поле $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$, получающееся присоединением к полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел первообразного корня ζ_n из единицы степени n, где n — некоторое натуральное число. Иногда (локальным) круговым полем наз. также поле вида $\mathbb{Q}_p(\zeta_n)$, где $\mathbb{Q}_p$ — поле рациональных p-адических чисел. Так как $K_n = K_{2n}$ при нечетном n, обычно предполагается, что $n \not\equiv 2 \pmod 4$. Тогда различным n соответствуют неизоморфные поля K_n.

К. п. естественно возникают в задаче о делении круга — деление окружности на n равных частей эквивалентно построению на комплексной плоскости первообразного корня ζ_n. К. п. устроены «достаточно просто», и поэтому дают удобный экспериментальный материал для создания общих понятий теории чисел. Напр., понятие целого алгебраич. числа и дивизора возникли первоначально при рассмотрении К. п.

Место К. п. среди всех полей алгебраич. чисел выясняет теорема Кронекера — Вебера, утверждающая, что конечное расширение $K/\mathbb{Q}$ абелево тогда и только тогда, когда $K \subset K_n$ для нек-рого n. Аналогичное утверждение выполняется и для локальных К. п.

Алгебраическая теория. Поле K_n является абелевым расширением поля $\mathbb{Q}$ с группой Галуа

$$G(K_n/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*,$$

где $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ — мультипликативная группа кольца вычетов по модулю n. В частности, степень $[K_n : \mathbb{Q}]$ равна $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Поле K_n чисто мнимое и имеет степень 2 над своим максимальным вполне вещественным подполем $K_n^+ = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$.

Если $n = p_1^{t_1}, \ldots, p_s^{t_s}$ — разложение n на простые множители, то K_n является свободным композитом

полей $K_{p_1}^{t_1}, \ldots, K_{p_s}^{t_s}$. В поле $K_p t$ простой дивизор p имеет индекс ветвления $e=(p-1)p^{t-1}=\varphi(p^t)$. В $K_p t$ имеет место равенство главных дивизоров $(p)=(1-\zeta_{p^t})^e$. Все остальные простые дивизоры поля $\mathbb{Q}$ не разветвлены в $K_p t$, откуда следует, что p разветвлен в поле K_n тогда и только тогда, когда $p|n$.

Числа $1, \zeta_n, \ldots, \zeta_n^{\varphi(n)-1}$ образуют фундаментальный базис поля K_n. Дискриминант поля $K_p t$ равен $\pm p^{pt-1}(pt-t-1)$. Для линейно разделенных над $\mathbb{Q}$ полей E и F со взаимно простыми дискриминантами D_{E_m} и D_F выполняется соотношение $D_{EF}=D_E^n D_F^m$, где $n=[F:\mathbb{Q}]$, $m=[E:\mathbb{Q}]$. Это позволяет вычислить D_{K_n} для произвольного n (см. [3]).

Для поля $K_p t$ числа вида

$$(1-\zeta_{pt}^a)/(1-\zeta_{pt})^b,$$

где $a,\ b\neq 0 \pmod p$, порождают подгруппу конечного индекса в группе всех единиц. Элементы этой подгруппы наз. круговыми единицами.

Закон разложения для К. п., т. е. закон, по к-рому простые дивизоры (p) поля $\mathbb{Q}$ разлагаются в произведение простых дивизоров в K_n,— частный случай общего закона разложения в абелевых расширениях, доставляемого теорией полей классов (см. [4]). А именно, если $(p,\ n)=1$ и f — наименьшее натуральное число, для к-рого $p^f\equiv 1 \pmod n$, то в K_n

$$(p)=\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_g,$$

где простые дивизоры $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_g$ попарно различны, $N(\mathfrak{p}_i)=p^f$ и $fg=\varphi(n)$. Таким образом, тип разложения (p) зависит только от вычета $p \pmod n$. В случае, когда $p|n$, точный вид разложения (p) можно получить, учитывая, что $K_n=K_m K_p t$, где $(m,\ p)=1$ и (p) вполне разветвлен в $K_p t$.

Если K — максимальное абелево расширение $\mathbb{Q}$, то $K=\bigcup_n K_n$ и

$$G(K/\mathbb{Q}) \simeq \varprojlim G(K_n/\mathbb{Q}) \simeq \lim (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \simeq \hat{\mathbb{Z}}^*,$$

где $\hat{\mathbb{Z}}$ — пополнение кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ по всем идеалам конечного индекса. В частности, для любого простого l существует единственное расширение $\mathbb{Q}_{\infty,l}/\mathbb{Q}$ с группой Галуа, изоморфной группе целых l-адических чисел $\mathbb{Z}_l$.

Согласно теории полей классов существует отображение взаимности

$$\psi: J_{\mathbb{Q}} \longrightarrow G(K/\mathbb{Q}),$$

где $J_{\mathbb{Q}}$ — группа иделей поля $\mathbb{Q}$. В случае К. п. отображение ψ допускает простое и явное описание (см. [4]).

Аналитическая теория. Многие результаты о строении группы классов дивизоров поля K_n удается получить с помощью аналитич. методов. Если h_n — число классов поля K_n, то

$$h_n=2^{-t_1-t}R^{-t}w\sqrt{|D|}F(1)\Pi_{\chi\neq\chi_0}L(1,\ \chi),$$

где w, D и R — число корней из единицы, дискриминант и регулятор поля K_n, $t=\varphi(n)/2$ и $F(1)$ — некоторая явно вычислимая константа, $L(1,\ \chi)$ — L-функция Дирихле, соответствующая характеру χ, где χ пробегает все нетривиальные мультипликативные характеры $\bmod n$. В свою очередь, для $L(1,\ \chi)$ существуют явные выражения в терминах гауссовых сумм (см. [7] гл. 5). Этим решается вопрос о вычислении h_n при заданном n.

Существует естественное разложение h_n на два множителя $h_n=h_n^- h_n^+$ — первый и второй множители числа

классов, причем h_n^+ интерпретируется как число классов поля K_n^+. В случае, когда $n=p^t$, $h_n^+=(E:E_0)$, где E — группа единиц поля $K_p^\circ{}^t$ и E_0 — группа круговых единиц (любая круговая единица становится действительной *после* умножения на подходящий корень из единицы).

Для задач, связанных с проблемой Ферма, важную роль играет вопрос о делимости числа классов поля K_l на l для простых l. Известно, что $h_l\equiv 0 \pmod l$ для бесконечного числа простых l (такие l наз. и р р е г у л я р н ы м и). Относительно регулярных простых чисел l, т. е. чисел, для к-рых $h_l\not\equiv 0 \pmod l$, до сих пор не известно (1982), конечно или бесконечно их число. Существует гипотеза, что $h_l^- \not\equiv 0 \pmod l$ для всех l. Эта гипотеза проверена для большого числа примеров. Легче поддается исследованию множитель h_l^-. Существует относительно простой критерий делимости h_l^- (и h_l) на l в терминах чисел Бернулли [7]. Известно, что $h_l^- \to \infty$ при $l\to\infty$ и что $h_l=1$ тогда и только тогда, когда $l\leqslant 19$ (см. [6]).

Для исследования группы классов К. п. успешно применяются так наз. p-адические L-функции (см. [5], [8]).

Лит.: [1] K u m m e r E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 327—67; [2] В е й л ь Г., Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1947; [3] Л е н г С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [4] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [5] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Дзета-функция, М., 1969; [6] U c h i d a K., «Tôhoku Math. J.», 1971, v. 23, p. 573—80; [7] Б о р е в и ч З. И., Ш а ф а р е в и ч И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [8] I w a s a w a K., Lectures on p-adic L-functions, N. Y. — Tokyo, 1972; [9] L a n g S., Cyclotomic fields, Priceton — Hdlb.— B., 1978. *Л. В. Кузьмин.*

КРУГОВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, п р е о б р а з о в а н и е М ё б и у с а,— преобразование, переводящее окружности в окружности. Рассматриваемое как точечное преобразование, К. п. является преобразованием расширенной (дополненной бесконечно удаленной точкой) евклидовой плоскости, при к-ром окружность или прямая переходят в окружность или прямую. В этом случае говорят о т о ч е ч н о й а н а л л а г м а т и ч е с к о й г е о м е т р и и.

Как неточечное преобразование К. п.— частный случай преобразований прикосновения (или касательных К. п., или К. п. Ли); основным элементом является не точка, а окружность. В этом случае говорят о круговой аналлагматической геометрии.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4, М., 1963. *А. Б. Иванов.*

КРУГОВОЕ РАСШИРЕНИЕ п о л я k — расширение K, получаемое присоединением к k *первообразного корня* из единицы нек-рой степени n. Иногда термин «К. р.» относят и к любому промежуточному подполю расширения K над k. К. р. наз. также бесконечное алгебраич. расширение, являющееся объединением конечных К. р. Важный пример К. р.— *круговые поля*, отвечающие случаю, когда $k=\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел.

Пусть поле k имеет характеристику 0 и $k(\zeta_n)$ — его К. р., полученное присоединением первообразного корня ζ_n. Тогда поле $k(\zeta_n)$ является композитом k и кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta_n)$. Поэтому многие свойства круговых полей переносятся и на К. р. Напр., $k(\zeta_n)$ будет нормальным абелевым расширением поля k (причем это справедливо и для полей положительной характеристики), группа Галуа расширения $k(\zeta_n)/k$ является подгруппой группы Галуа расширения $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$, в частности, ее порядок делит $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

Если k — поле алгебраич. чисел, то в расширении $k(\zeta_n)/k$ могут ветвиться только простые девизоры, делящие n, хотя при $k\neq\mathbb{Q}$ дивизор поля k, делящий n,

может остаться неразветвленным в $k(\zeta_n)$. К. р. поля алгебраич. чисел с группой Галуа Г, изоморфной аддитивной группе целых l-адических чисел Z_l, наз. круговыми Г-расширениями (см. [2], [3], [4]). Такое Г-расширение в случае, когда $\zeta_l \in k$, имеет вид $k_\infty = \bigcup_n k_n$, где $k_n = k(\zeta_{l^n})$.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Шафаревич И. Р., Дзета-функция, М., 1969; [3] Кузьмин Л. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 2, с. 267—327; [4] Iwasawa K., «Ann. Math.», 1973, v. 98, № 2, p. 246—326.
Л. В. Кузьмин.

КРУГОВОЙ МЕТОД — один из наиболее общих методов аддитивной теории чисел. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — произвольные множества натуральных чисел, N — натуральное число и $J_k(N)$ — число решений уравнения

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N,$$

где $n_1 \in X_1$, $n_2 \in X_2, \ldots, n_k \in X_k$. Изучением величин $J_k(N)$ занимается аддитивная теория чисел; напр., если доказать, что $J_k(N)$ больше нуля при всех N, то это будет означать, что любое натуральное число является суммой k слагаемых чисел множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Пусть, далее, s — комплексное число, $|s|<1$, и

$$g_1(s) = \sum_{n_1 \in X_1} s^{n_1}, \quad g_2(s) = \sum_{n_2 \in X_2} s^{n_2}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ g_k(s) = \sum_{n_k \in X_k} s^{n_k}.$$

Тогда функция $g(s)$

$$g(s) = g_1(s)\, g_2(s) \ldots g_k(s) = \sum_{N=1}^{\infty} J_k(N)\, s^N$$

является производящей функцией величин $J_k(N)$. По формуле Коши

$$J_k(N) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R<1} g(s)\, s^{-(N+1)}\, ds.$$

Последний интеграл изучается при $R \to 1-0$. Окружность интегрирования $|s|=R$ разбивается на «большие» и «малые» дуги, центрами к-рых являются рациональные числа. Для целого ряда аддитивных задач удается достаточно полно исследовать интегралы по «большим» дугам, к-рые дают «главную» часть величины $J_k(N)$, и оценить интегралы по «малым» дугам, к-рые дают «остаточный» член асимптотич. формулы для $J_k(N)$.

Введение И. М. Виноградовым в К. м. тригонометрич. сумм не только сильно упростило его применения, но и дало возможность единым способом решать широкий круг самых разных аддитивных задач. Основой К. м. в форме тригонометрич. сумм является следующая формула:

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha m}\, d\alpha = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0, \ m \text{ — целое.} \end{cases}$$

Из этой формулы следует, что

$$J_k(N) = \int_0^1 s_1(\alpha)\, s_2(\alpha) \ldots s_k(\alpha)\, e^{-2\pi i \alpha N}\, d\alpha,$$

где

$$s_m(\alpha) = \sum_{n \in X_m,\ n \leqslant N} e^{2\pi i \alpha n}, \quad m = 1, 2, \ldots, k.$$

Конечные суммы $s_m(\alpha)$ наз. тригонометрическими. Для исследования $J_k(N)$ отрезок интегрирования $[0, 1]$ разбивается на «большие» и «малые» дуги — отрезки с центрами в рациональных точках с «малыми» и «большими» знаменателями. Для многих аддитивных задач удается с хорошей точностью вычислить интегралы по «большим» дугам (тригонометрич. суммы для α из «больших» дуг близки к рациональным тригонометрич. суммам с малым знаменателем, хорошо вычисляются и являются «большими»); на «малых» же дугах, к-рые содержат основную долю точек отрезка $[0, 1]$, тригоно-

метрич. суммы «малы»; их удается нетривиально оценить (см. *Тригонометрических сумм метод*, *Виноградова метод*), что позволяет получить асимптотич. формулу для $J_k(N)$.

С помощью К. м. в форме тригонометрич. сумм и метода И. М. Виноградова оценок тригонометрич. сумм получены наиболее сильные результаты в аддитивной теории чисел (см. *Варинга проблема*, *Гольдбаха проблема*, *Гольдбаха–Варинга проблема*, *Гильберта – Камке проблема*).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964; [3] Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, М., 1975. *А. А. Карацуба.*

КРУГОВЫЕ ТОЧКИ, циклические точки, на плоскости, дополненной мнимыми и бесконечно удаленными точками, – две мнимые бесконечно удаленные точки, однородные координаты (1, i, 0) и (1, $-i$, 0) к-рых удовлетворяют уравнению любой окружности. Прямые, проходящие через К. т., наз. изотропными прямыми. *БСЭ-2.*

КРУЛЛЯ КОЛЬЦО — коммутативное целостное кольцо A, для к-рого существует семейство $(v_i)_{i\in I}$ дискретных нормирований поля частных K кольца A, удовлетворяющее следующим условиям: а) для любого $x\in K\setminus\{0\}$ и для всех i, исключая, быть может, конечное число, $v_i(x)=0$; б) для $x\in K\setminus\{0\}$ условие $x\in A$ эквивалентно тому, что $v_i(x)\geqslant 0$ для всех $i\in I$. Нормирования v_i наз. при этом существенными.

К. к. были рассмотрены В. Круллем [1] под названием колец конечного дискретного главного порядка. Они являются наиболее естественным классом колец, в к-рых существует теория дивизоров (см. также *Дивизориальный идеал*, *Классов дивизоров группа*). Упорядоченная группа дивизоров К. к. A канонически изоморфна упорядоченной группе $\mathbb{Z}^{(I)}$. Существенные нормирования К. к. могут быть отождествлены с множеством простых идеалов высоты 1. К. к. вполне целозамкнуто. Любое целозамкнутое нётерово кольцо, в частности *дедекиндово кольцо*, является К. к. Кольцо $k[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ многочленов от бесконечного числа переменных — пример К. к., не являющегося нётеровым. Вообще, любое факториальное кольцо — К. к. Для того чтобы К. к. было факториально, необходимо и достаточно, чтобы любой его простой идеал высоты 1 был главным.

Класс К. к. замкнут относительно операций локализации, перехода к кольцу многочленов или формальных степенных рядов, а также целого замыкания в конечном расширении поля частных К.

Лит.: [1] Krull W., «J. reine und angew. Math.», 1931, Bd 167, S. 160–96; [2] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [3] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *В. И. Данилов.*

КРУЛЛЯ — РЕМАКА — ШМИДТА ТЕОРЕМА — группа утверждений, касающихся связи между прямыми разложениями группы или кольца. Теоретико-структурная форма этого результата известна как теорема Оре (см. *Дедекиндова решетка*). Для группы G с произвольной системой операторов имеет место теорема Шмидта (Р. Ремак получил этот результат для конечных групп [2], а В. Крулль — для колец [1]): если такая группа обладает *главным рядом*, то любые два ее разложения в прямое произведение с неразложимыми сомножителями центрально изоморфны, т. е. между множествами сомножителей каждого из этих разложений может быть установлено взаимно однозначное соответствие и, если A и A' — соответствующие друг другу сомножители, то существует такой изоморфизм φ: $A\to A'$, что $a^{-1}\varphi(a)$ для всякого $a\in A$ лежит в центре группы G ([3], см. также [4]). А. Г. Курош установил,

что можно ограничиться требованием существования главного ряда лишь у факторгрупп группы G, вложимых в ее центр. Теорема Шмидта, как теорема для групп с операторами, в частности, справедлива для модуля над любым кольцом. Однако модуль M неразложим, если его кольцо эндоморфизмов локально (см. *Локальное кольцо*), а при нек-рых ограничениях (напр., если M — модуль конечной длины) справедливо и обратное. В связи с этим К.— Р.— Ш. т. для модулей может быть сформулирована так: два разложения

$$M = \sum M_i = \sum M'_j,$$

где кольца эндоморфизмов модулей M_i и M'_j локальны, изоморфны. При этом каждое слагаемое одного из разложений может быть заменено нек-рым слагаемым другого. В нек-рых случаях такую замену можно осуществить и для бесконечного множества слагаемых. К исследованию вопросов, связанных с К.— Р.— Ш. т., разработан теоретико-категорный подход, использующий рассмотрение категории подмодулей прямых сумм данных модулей.

Лит.: [1] Krull W., «Math. Ann.», 1924, Bd 91, S. 1—46; [2] Remak R., «J. reine und angew. Math.», 1911, Bd 139, S. 293—308; [3] Шмидт О. Ю., «Math. Z.», 1928, Bd 29, S. 34—41; [4] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [5] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [6] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 57—190.

Л. А. Скорняков.

КРУПНЫХ ЧАСТИЦ МЕТОД — метод для расчета сжимаемых течений сплошной среды [1]. К. ч. м. основывается на расщеплении исходной системы дифференциальных уравнений по физическим процессам (см. [3]). Им решается эволюционная система уравнений. Допускается стационарное решение в результате установления. К. ч. м. является развитием метода «частиц в ячейках» Харлоу.

К. ч. м. широко используется для исследования аэрогазодинамич. течений, дифракционных задач, трансзвуковых потоков, явлений взаимодействия излучения с веществом и др.

Разностная схема К. ч. м. может быть описана на примере движения идеального сжимаемого газа (уравнения неразрывности, импульса и энергии):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \\ &\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} u_i) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \\ &\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(P \boldsymbol{v}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь $x_i = \{x, y, z\}$, t — время, ρ — плотность, $\boldsymbol{v} = \{u_i\} = \{u, v, w\}$ — скорость, E — полная удельная энергия, P — давление. Для замыкания системы (1) используется уравнение состояния

$$P = P(\rho, J),$$

где

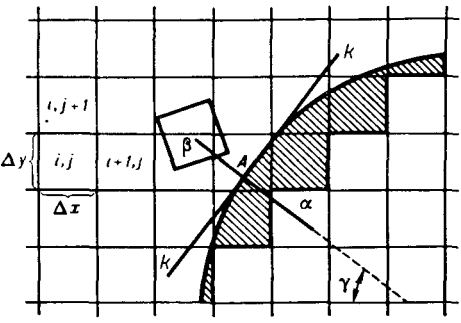
$$J = E - \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2$$

— внутренняя удельная энергия.

Процесс решения эволюционной системы (1) разбивается на шаги по времени, каждый из к-рых состоит из трех этапов: эйлерова, лагранжева и заключительного. Вначале рассматривается изменение внутреннего состояния подсистемы — «крупной частицы» (эйлеров этап), а затем — перемещение этой подсистемы без изменения внутреннего состояния (лагранжев и заключительный этапы).

Эйлеров этап. Область интегрирования покрывается неподвижной (эйлеровой) разностной сеткой про-

извольной формы [для краткости изложения рассматривается прямоугольная сетка в двумерной (плоской) области (см. рис.)]. На этом этапе расчета изменяются лишь величины, относящиеся к ячейке в целом, а жидкость предполагается моментально заторможенной.



Поэтому конвективные члены вида $\operatorname{div}(\psi\rho\boldsymbol{v})$, $\psi = (1, u, v, E)$, соответствующие эффектам перемещения, из уравнений (1) опускаются. В оставшихся уравнениях (1) ρ выносится из-под знака дифференциала, и уравнения (1) разрешаются относительно временных производных от u, v, E:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}=0,\ \rho\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial y}=0,\ \rho\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}(P\boldsymbol{v})=0. \quad (2)$$

Простейшая конечноразностная аппроксимация (центральные разности) приводит к следующим выражениям:

$$\tilde{u}^{\,n}_{i,\,j}=u^n_{i,\,j}-\frac{P^n_{i+1/2,\,j}-P^n_{i-1/2,\,j}}{\Delta x}\,\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,\,j}},$$

$$\tilde{v}^{\,n}_{i,\,j}=v^n_{i,\,j}-\frac{P^n_{i,\,j+1/2}-P^n_{i,\,j-1/2}}{\Delta y}\,\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,\,j}},$$

$$\tilde{E}^n_{i,\,j}=E^n_{i,\,j}-$$

$$-\left[\frac{P^n_{i+1/2,\,j}\tilde{u}^{\,n}_{i+1/2,\,j}-P^n_{i-1/2,\,j}\tilde{u}^{\,n}_{i-1/2,\,j}}{\Delta x}+\right.$$

$$\left.+\frac{P^n_{i,\,j+1/2}\tilde{v}^{\,n}_{i,\,j+1/2}-P^n_{i,\,j+1/2}\tilde{v}^{\,n}_{i,\,j-1/2}}{\Delta y}\right]\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,\,j}}.$$

Здесь величины с дробными индексами относятся к границам ячеек, напр.

$$u^n_{i+1/2,\,j}=\frac{u^n_{i,\,j}+u^n_{i+1,\,j}}{2},\quad P^n_{i-1/2,\,j}=\frac{P^n_{i-1,\,j}+P^n_{i,\,j}}{2},\ \ldots;$$

$\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{E}$ — промежуточные значения параметров потока, полученные в предположении «замороженности» поля ρ на слое $t^n+\Delta t$. Хотя схема эйлерова этапа в данном виде неустойчива, при определенных формах записи последующих этапов вся схема в целом — устойчива. Устойчивости эйлерова этапа можно достигнуть, напр., путем введения в него элементов *интегральных соотношений метода*. При этом аппроксимация подинтегральных функций производится в направлении, параллельном оси тела (см. рис.), т. е. как в схеме 1 метода интегральных соотношений: исходная система уравнений берется в интегральном виде, в ней аппроксимируются интегралы

$$f=\int_V \rho u\,d\tau,\quad \vartheta=\int_V \rho v\,d\tau,\quad \psi=\int_V \rho E\,d\tau.$$

Л а г р а н ж е в э т а п. На данном этапе находятся при $t^n+\Delta t$ потоки массы через границы ячеек. При этом

полагают, что масса крупной частицы переносится только за счет нормальной к границе составляющей скорости. Так, напр.,

$$\Delta M^n_{i+1/2,\,j} = \langle \rho^n_{i+1/2,\,j} \rangle \langle u^n_{i+1/2,\,j} \rangle \Delta y\, \Delta t$$

и т. д. Знак $\langle\ \rangle$ определяет параметры ρ и u на границе ячейки. Выбор этих величин имеет важное значение, так как сильно влияет на устойчивость и точность счета. Возможны различные разностные представления для ΔM^n: разного порядка точности, с учетом и без учета направления потока, центральные разности, *ZIP*-аппроксимации и т. д. Потоки импульса (энергии) равны произведению ΔM^n на соответствующие значения скорости (полной удельной энергии). Проводились также аппроксимации не только потоков массы, но и потоков импульса и энергии.

З а к л ю ч и т е л ь н ы й э т а п. На этом этапе находятся окончательные поля эйлеровых параметров потока в момент $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Уравнения этого этапа представляют собой законы сохранения массы M, импульса $\boldsymbol{p}$ и полной энергии E, записанные для данной ячейки (крупной частицы) в разностной форме $M^{n+1} = M^n + \Sigma \Delta M^n$, $\boldsymbol{p}^{n+1} = \boldsymbol{p}^n + \Sigma \Delta \boldsymbol{p}^n$, $E^{n+1} = E^n + \Sigma \Delta E^n$. Окончательные значения параметров потока ρ, $X = \{u, v, E\}$ на следующем временном слое вычисляются по формулам (поток течет слева направо и снизу вверх):

$$\rho^{n+1}_{i,\,j} = \rho^n_{i,\,j} + \frac{\Delta M^n_{i-1/2,\,j} + \Delta M^n_{i,\,j-1/2} - \Delta M^n_{i,\,j+1/2} - \Delta M^n_{i+1/2,\,j}}{\Delta x\, \Delta y},$$

$$X^{n+1}_{i,\,j} = \frac{\rho^n_{i,\,j}}{\rho^{n+1}_{i,\,j}} \tilde{X}^n_{i,\,j} + \frac{\tilde{X}^n_{i-1,\,j} \Delta M^n_{i-1/2,\,j} + \tilde{X}^n_{i,\,j-1} \Delta M^n_{i,\,j-1/2}}{\rho^{n+1}_{i,\,j}\, \Delta x\, \Delta y} + \frac{-\tilde{X}^n_{i,\,j} \Delta M^n_{i+1/2,\,j} - \tilde{X}^n_{i,\,j} \Delta M^n_{i,\,j+1/2}}{\rho^{n+1}_{i,\,j}\, \Delta x\, \Delta y}.$$

Консервативность и полную дивергентность разностной схемы (схема дивергентно-консервативная) обеспечивает уравнение для полной энергии E. На заключительном этапе (в случае использования дискретной модели среды) целесообразно производить дополнительный пересчет плотности, что сглаживает флуктуации и повышает точность вычислений. Комбинируя различные представления этапов, получают серию разностных схем К. ч. м., что позволяет осуществить широкий класс численных экспериментов.

К. ч. м. допускает трактовку с различных точек зрения: метод расщепления, смешанный эйлерово-лагранжевый метод, расчет в локально лагранжевых координатах (эйлеров этап) с пересчетом на прежнюю сетку (лагранжев и заключительный этапы), разностная запись законов сохранения для элемента жидкости — «крупной частицы», эйлерова разностная схема.

Граничные условия ставятся с помощью рядов фиктивных ячеек (чтобы каждую расчетную точку сделать внутренней и сохранить единый алгоритм для всех ячеек). Для схемы 1-го порядка аппроксимации достаточно одного слоя, для 2-го порядка — два слоя и т. д. Пусть, напр., рассматривается задача о расчете обтекания осесимметричных и плоских тел с образующей произвольной формы (см. рис.). Приведенные ранее расчетные формулы справедливы для внутренних ячеек поля, со всех сторон окруженных жидкостью, и для ячеек, прилегающих к твердому телу, контур к-рого совпадает с границами ячеек.

При расчете обтекания тел конечноразностными методами можно использовать два подхода: расчет в коор-

динатах s, n; введение в рассмотрение дробных ячеек (см. [2]). В первом случае затруднительно рассчитывать тела с изломами и с вогнутостями. Второй подход свободен от этих недостатков.

Граничные условия на теле в случае дробных ячеек ставятся, как и в случае целых ячеек, с помощью введения фиктивных ячеек. Внутри тела формируется слой фиктивных ячеек, прилегающих к дробным ячейкам. Для определения параметров газа в этих фиктивных ячейках из центра фиктивной ячейки α на контур тела опускают нормаль и в точке их пересечения A проводят касательную $k-k$ (см. рис.). Затем в поле течения строят нек-рую ячейку β, симметричную данной фиктивной ячейке α относительно касательной $k-k$. Газодинамич. параметры g в ячейке β определяют путем «взвешивания» $g_\beta = \Sigma_i S_{\beta_i} g_i$ ($\Sigma_i S_{\beta_i} = 1$), где суммирование производится по тем ячейкам i, часть площади S_{β_i} к-рых попала в ячейку β. Постановка условий непротекания требует для каждой фиктивной ячейки задания еще одного параметра γ: угла наклона радиус-вектора, пересекающего контур тела в точке A. При использовании условий прилипания (обе компоненты скорости при переходе через поверхность тела меняют знак) не требуется задания дополнительного параметра γ. Параметры газа в фиктивной ячейке α тогда будут

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ E \end{Bmatrix}_\alpha = \sum S_{\beta_i} \begin{Bmatrix} \rho \\ E \end{Bmatrix}_i, \qquad \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_\alpha = -\sum S_{\beta_i} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_i.$$

Граничные условия для тела, контур к-рого совпадает с границами ячеек, являются частным случаем изложенных здесь граничных условий.

Для каждой дробной ячейки (см. рис.) необходимо знать 5 геометрич. характеристик: $A_{i-1/2,\ j}$, $A_{i,\ j-1/2}$, $A_{i+1/2,\ j}$, $A_{i,\ j+1/2}$ и $f_{i,\ j}$, где $f_{i,\ j}$ — доля объема дробной ячейки по отношению к объему полной ячейки $\Delta x \Delta y$, $A_{i-1/2,\ j}$ — часть площади стороны $(i-1/2,\ j)$, открытой для течения жидкости, и т. п.

Размещение твердой границы внутри ячейки вносит две особенности: оно смещает центр масс из геометрич. центра ячейки ближе к границе и уменьшает реальные размеры ячейки. При рассмотрении как целых, так и дробных ячеек все параметры потока относятся к центру массы. Именно между центрами масс производится интерполяция газодинамич. функций. В случае целых ячеек центр масс либо совпадает с геометрич. центром ячеек (плоская декартова система координат), либо близок к нему (цилиндрич. система координат). В реальных расчетах разница даже для прилегающего к оси ряда ячеек не превышает $0{,}2 \cdot \Delta r$. В результаты расчетов это обстоятельство не вносит существенных искажений. При надлежащем введении дробных ячеек смещение центра массы относительно геометрич. центра также не превышает этой величины. Более серьезным является вопрос, связанный с уменьшением эффективных размеров ячейки. Чтобы при уменьшении размеров ячейки не нарушалось условие устойчивости $c\frac{\Delta t}{\Delta \lambda} < 1$, где $\lambda = x$ или y, ячейки с $f < f_{\min \text{ уст.}}$ присоединяются к соседним целым ячейкам внутри потока и полученные комплексы рассчитываются по формулам дробных ячеек. В этом случае геометрич. размеры укрупненной ячейки не меньше размеров целой ячейки: $A_{i-1/2,\ j} \geqslant 1$, $A_{i,\ j-1/2} \geqslant 1$, . . . , $f_{ij} > 1$, поэтому вопрос об устойчивости дробных ячеек снят.

В плоском случае геометрич. характеристики дробных ячеек можно получить непосредственным измерением. В осесимметричном случае необходимо произвести дополнительный пересчет с учетом расстояния данной дробной ячейки до оси симметрии. Разностные формулы для дробных ячеек получаются путем незначи-

тельного изменения разностных выражений для целых ячеек.

Исследование разностных схем К. ч. м. (аппроксимации, вязкостных эффектов, устойчивости) проводилось с помощью дифференциальных приближений (см. [4]). Проведено обобщение К. ч. м. на пространственно-трехмерный случай.

Лит.: [1] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 1, с. 182—207; [2] Давыдов Ю. М., там же, № 4, с. 1056—63; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, Новосиб., 1973; [4] Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Исследование схем метода «крупных частиц» с помощью дифференциальных приближений, в кн.: Проблемы прикладной математики и механики, М., 1971, с. 145—55.

Ю. М. Давыдов.

КРУЧЕНИЕ — 1) К. кривой — величина, характеризующая отклонение пространственной кривой γ от соприкасающейся плоскости. Пусть P — произвольная точка кривой γ и Q — точка кривой γ, близкая P, $\Delta\theta$ — угол между соприкасающимися плоскостями кривой γ в точках P и Q, а $|\Delta s|$ — длина отрезка PQ кривой γ. Абсолютным кручением $|k_2|$ кривой γ в точке P наз. величина

$$|k_2| = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

К. кривой определяется равенством $k_2 = \pm|k_2|$ и считается положительным (отрицательным), если вращение соприкасающейся плоскости при движении вдоль кривой в сторону возрастания s от вектора бинормали к вектору главной нормали происходит против часовой стрелки (по часовой стрелке) при наблюдении из точки P.

Регулярная (трижды непрерывно дифференцируемая) кривая в каждой точке, где ее кривизна отлична от нуля, имеет К. Если $r = r(s)$ — естественная параметризация кривой, то

$$k_2 = -\frac{(r', r'', r''')}{[r', r'']^2}.$$

К. иногда наз. второй кривизной.

Кривизна и К., заданные как функции длины дуги, определяют кривую с точностью до положения в пространстве.

Кривая, у к-рой К. в каждой точке равно нулю, — плоская. *Е. В. Шикин.*

2) К. геодезическое — обобщение К. кривой, инвариант полосы в пространстве E^3, определяемый формулой

$$a = (x_1, x_3, x_3'),$$

где x_1 — касательный вектор к базовой кривой Γ полосы, x_3 — нормальный вектор полосы. Обычное К. $\varkappa$ кривой Γ ненулевой кривизны выражается через a и нормальную и геодезич. кривизны b и c по формуле

$$\varkappa = a + \frac{b'c - bc'}{b^2 + c^2}.$$

Равенство нулю геодезич. К. характеризует полосы кривизны, в частности для полос, принадлежащих поверхности в E^3, — *кривизны линии*.

Аналогичные понятия вводятся для полос в римановом пространстве (см. [1], [2]).

3) К. подмногообразия — обобщение К. кривой, кривизна связности, индуцированной в нормальном расслоении $\nu(M^k)$ многообразия M^k, погруженного в риманово пространство V^n. Пусть ω_β^α — формы связности в $\nu(M^k)$, ω_s^α — формы эйлеровых кривизн M^k в V^n, $s = 1, \ldots, k$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, n-k$. Тогда формы

$$\Omega_{\alpha R}^{\beta} = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

определяют римановo кручение, а формы

$$\Omega^{\beta}_{\alpha G} = \omega^{s}_{\alpha} \wedge \omega^{\beta}_{s}$$

— гауссово кручение M^k в V^n. Риманово К. и гауссово К. связаны соотношением

$$\Omega^{\beta}_{\alpha R} = \Omega^{\beta}_{\alpha G} + R^{\beta}_{\alpha kh}\sigma^k \wedge \sigma^h,$$

где $R^{\beta}_{\alpha kh}$ — компоненты тензора кривизны V^n в направлении бивектора, касательного к M^k, а σ^s — ортогональный кобазис касательного пространства к M^k. Тензоры S^{β}_{ij}, получающиеся в разложении форм К. $\Omega^{\beta}_{\alpha R}(\Omega^{\beta}_{\alpha G})$ по формам $\sigma^i \wedge \sigma^j$, назз. тензорами гауссова и риманова кручения (см. [1], [4]).

Пример. Пусть M^2 — поверхность в евклидовом пространстве E^4. Тогда гауссово и риманово К. равны и сводятся к единственному числу

$$\varkappa = \frac{1}{EG - F^2}\begin{vmatrix} E & F & G \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix},$$

где E, F, G — коэффициенты первой, а L_i, M_i, N_i — второй квадратичных форм M^2 в E^4. Равенство $\varkappa = 0$ в нек-рой окрестности геометрически интерпретируется как вырождение эллипса кривизны в отрезок, тогда существует два семейства ортогональных линий кривизны, касательные к к-рым соответствуют концам этого отрезка. Условие $\varkappa = 0$ локально необходимо и достаточно для того, чтобы M^2 располагалась в римановом пространстве V^3, погруженном в E^4, и нормаль к M^2 в касательном пространстве к V^3 была направлена по главному вектору *Риччи тензора* V^3. В частности, нулевое К. необходимо для уплощения M^2 в E^3.

4) К. аффинной связности Г — величина, выражающая отклонение от перестановочности *ковариантных производных* какой-либо функции на многообразии M^n с этой связностью Г. Она определяется преобразованием

$$(X, Y) \longrightarrow S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

где X, Y — векторные поля на M^n, $\nabla_X Y$ — ковариантная производная Y вдоль X, $[X, Y]$ — коммутатор X и Y. В локальных координатах x^i, $i = 1, \ldots, n$, таких, что $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, преобразование S имеет вид

$$S\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = S^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k};$$

тензор $S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$, где Γ^k_{ji} — компоненты связности Г в выбранном базисе, наз. тензором кручения.

Эквивалентным образом К. определяется ковариантным дифференциалом векторнозначной 1-формы ω^k смещения данной связности

$$\Omega^k = d\omega^k + \theta^k_j \wedge \omega^k,$$

к-рый наз. формой кручения; здесь θ^k_j — связности формы для Г. В локальном кобазисе dx^i (дуальном базису $\frac{\partial}{\partial x^i}$) форма

$$\Omega^k = S^k_{ij}\, dx^i \wedge dx^j,$$

где S^k_{ij} имеет те же значения, что и выше.

Геометрич. смысл К. аффинной связности Г заключается в том, что развертка каждого бесконечномалого контура L, выходящего из точки $x \in M^n$ и возвращающегося в нее на касательное пространство к M^n в x, уже не будет замкнутой кривой. Векторная разность

между концами развертки с точностью до малых 2-го порядка имеет компоненты Ω^k, $k=1, \ldots, n$. Другими словами, этот вектор пропорционален ограниченной контуром L двумерной площадке с бивектором df^{ij}: $\Omega^k = S^k_{ij} df^{ij}$. Эти представления лежат в основе интерпретации упругой среды с непрерывным распределением источников внутренних напряжений в виде дислокаций, вектор Ω^k тогда оказывается аналогом так наз. в е к т о р а Б ю р г е р с а (см. [4]—[7]).

П р и м е р. В двумерном римановом пространстве M^2 с *метрической связностью* тензор К. сводится к вектору: $S^k_{ij} = S^k e_{ij}$, здесь e_{ij} — метрич. бивектор. Пусть в M^2 дан малый треугольник, образованный отрезками геодезических длины a, b, c, с углами A, B, C. Тогда главная часть проекции вектора S^k в точке A на сторону AB равна отношению величины $c - a\cos B - b\cos A$ к площади треугольника σ, а на перпендикуляр к AB — величине $a\sin B - b\sin A$, деленной на σ. Таким образом, в M^2 нулевого К. имеют место теоремы косинусов и синусов обыкновенной тригонометрии с точностью до величин, малых в сравнении с σ.

5) К. п р о с т р а н с т в а A — элемент $\tau(X, A)$ *Уайтхеда группы* $\mathrm{Wh}\, A$, определяемый парой (X, A), где A — конечное *клеточное пространство*, и вложение $A \subset X$ является гомотопич. эквивалентностью. Эквивалентно, К.— элемент группы Уайтхеда $\mathrm{Wh}\, \pi_1$ фундаментальной группы π_1. К. инвариантно при клеточных расширениях и стягиваниях и при клеточных измельчениях. Доказана топологич. инвариантность К. Если A односвязно, то его К. равно нулю.

Если $(W;\ M_0,\ M_1)$ — произвольный h-кобордизм, то $\tau(W, M_0) = \tau(K, M_0)$, где K — клеточное пространство, ассоциированное с данным разложением на ручки многообразия W (от многообразия M_0), это — к р у ч е н и е h-к о б о р д и з м а.

Пусть M_f — цилиндр клеточного отображения f: $X \to Y$, являющегося гомотопич. эквивалентностью. Тогда $\tau(M_f, Y) = 0$, но $\tau(M_f, X) \in \mathrm{Wh}\, \pi_1 X$ не всегда равно нулю. Оно определяет по формуле

$$\tau(f) = f_*\tau(M_f, X) \in \mathrm{Wh}\, \pi_1 Y$$

элемент $\tau(f)$, наз. к р у ч е н и е м о т о б р а ж е н и я f (иногда К. наз. сам $\tau(M_f, X)$). Если $\tau(f) = 0$, то наз. п р о с т о й г о м о т о п и ч е с к о й э к в и в а л е н т н о с т ь ю (см. [8]).

6) К. к о н е ч н о п о р о ж д е н н о й а б е л е в о й г р у п п ы G — группа T, состоящая из всех элементов конечного порядка ν группы G. Числа $\nu > 1$ могут быть однозначно с точностью до перестановки выбраны в виде степеней простых чисел, и тогда они наз. к о э ф ф и ц и е н т а м и к р у ч е н и я г р у п п ы G (см. [9]).

Лит.: [1] К а р т а н Э., Риманова геометрия в ортогональном репере, пер. с франц., М., 1960; [2] Б л я ш к е В., Введение в дифференциальную геометрию, пер. с нем., М., 1957; [3] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1969, М., 1971, с. 123—68; [4] З у л а н к е Р., В и н т г е н П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975; [5] Н о р д е н А. П., Пространства аффинной связности, 2 изд., М., 1976; [6] К а р т а н Э., Пространства аффинной, проективной и конформной связности, [пер. с франц.], Казань, 1962; [7] С х о у т е н Я.-А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; [8] Р у р к К., С а н д е р с о н Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [9] К у р о ш А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

М. И. Войцеховский.

КРУЧЕНИЯ ТЕНЗОР — кососимметрический по нижним индексам тензор типа (1, 2), получающийся в разложении *кручения формы* в локальном кобазисе на многообразии M^n. В частности, в голономном кобазисе dx^i, $i = 1, \ldots, n$, компоненты К. т. S^k_{ij} выражаются через объекты связности Γ^k_{ij}:

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}.$$

М. И. Войцеховский.

КРУЧЕНИЯ ФОРМА — ковариантный дифференциал векторнозначной 1-формы смещения *аффинной связности* — 2-форма

$$\Omega = D\omega = d\omega + \theta \wedge \omega,$$

где θ — форма связности. К. ф. удовлетворяет так наз. первому тождеству Бианки

$$d\Omega + \theta \wedge \Omega + \omega \wedge \Xi,$$

где Ξ — *кривизны форма* данной связности. Аналогично определяется К. ф. для редуктивных связностей.

М. И. Войцеховский.

КРЫЛА ТЕОРИЯ — раздел аэродинамики, изучающий взаимодействие тел с потоками жидкости и газа. Основная задача К. т.— определение аэродинамич. сил, действующих на тело, и нахождение поля скоростей $\mathbf{u}$ и давления p как функций времени t и декартовых координат $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $n = 2$ для плоских и $n = 3$ для пространственных течений.

Для безвихревых баротропных течений в отсутствие вязких и массовых сил плотность газа ρ — известная функция давления $\rho = \rho(p)$, компоненты скорости u_i — частные производные потенциала φ, $u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. В области, занятой газом, φ удовлетворяет квазилинейному уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial t} = \sum_{i,\,j=1}^{n}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\,\partial x_j}, \qquad (1)$$

где $c = \left(\frac{d\rho}{dp}\right)^{-1/2}$ — скорость звука, δ_{ij} — символы Кронекера. Давление p определяется из интеграла Коши — Лагранжа

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}|\nabla \varphi|^2.$$

Граница области течения состоит из кусочно гладкой поверхности крыла S и конечного числа поверхностей контактного разрыва Σ_j, $j = 1, \ldots, m$, к-рые пересекаются с S по ребрам заострения кромок крыла либо касаются S. В плоских течениях S, Σ_j — кусочно гладкие кривые, кромки крыла — угловые точки S. На S потенциал удовлетворяет условию непротекания, а на Σ_j — условиям контактного разрыва:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla F \cdot \nabla \varphi = 0 \text{ на } S, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + \nabla F_j \nabla \varphi^{\pm} = 0, \quad p^+ = p^- \text{ на } \Sigma_j, \qquad (3)$$

где $F(\boldsymbol{x}, t) = 0$, $F_j(\boldsymbol{x}, t) = 0$ — уравнения поверхностей S, Σ_j, $\varphi^{\pm}$ — предельные значения φ при подходе к различным сторонам поверхности Σ_j. На линиях пересечения $S \cap \Sigma_j$ ставится условие Жуковского — Кутта — Чаплыгина о конечности давлений в кромках крыла

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} |p(\boldsymbol{x})| < \infty \quad \text{при} \quad \boldsymbol{x}_0 \in S \cap \Sigma_j. \qquad (4)$$

В стационарном случае (4) совпадает с условием конечности скоростей в точках $S \cap \Sigma_j$. Форма поверхностей Σ_j неизвестна и определяется вместе с решением задачи.

Поверхности Σ_j моделируют вихревой след, возникающий за обтекаемым телом в реальных течениях (см. *Аэродинамики математические задачи*). Этот факт согласуется с тем, что в рамках гипотезы о безвихревом характере движения непрерывного решения задачи об обтекании крыла с конечной величиной давления в острых кромках в общем случае не существует. В исключительных случаях, напр. для плоских стацио-

нарных течений с постоянной циркуляцией скорости вокруг крылового профиля, поверхности разрыва могут отсутствовать.

Уравнения (1)—(4) вместе с начальными данными образуют краевую задачу для нахождения φ, Σ_f. Ее тип определяется характером течения и числом Маха $M=|\nabla\varphi|c^{-1}$. Для неустановившихся движений сжимаемой жидкости и стационарных $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\right)$ сверхзвуковых ($M>1$) течений уравнение (1) имеет гиперболич. тип, для движений несжимаемой жидкости ($\rho=\text{const}$, $c=\infty$) и стационарных дозвуковых ($M<1$) течений уравнение (1) эллиптическое. В последнем случае в предположении, что S — кусочно гладкая кривая, имеющая одну угловую точку $\boldsymbol{x}_0$ с углом $\alpha\pi$, $\alpha\in[0, 1]$, справедливо утверждение: для любого вектора $\boldsymbol{k}$, $|\boldsymbol{k}|=1$, существует $\lambda>0$ такое, что при $q\in[0, \lambda)$ задача (1)—(2) имеет единственное решение, удовлетворяющее в $\boldsymbol{x}_0$ условию Жуковского — Кутта — Чаплыгина и условию на бесконечности:

$$\overline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}}\,|\nabla\varphi|<\infty,\quad \lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\nabla\varphi(\boldsymbol{x})=q\boldsymbol{k},$$

причем $M(q)\to 0$ при $q\to 0$ и $M(q)\to 1$ при $q\to\lambda$, где $M(q)=\sup_{\boldsymbol{x}} M(\boldsymbol{x})$ — число Маха течения.

Для стационарных плоских дозвуковых течений справедлива основная теорема Жуковского (см. [1]—[3]): при обтекании профиля полная сила, действующая на него со стороны жидкости, перпендикулярна $\boldsymbol{k}$, а ее величина R равна

$$R=q\rho_\infty\oint_S\frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds,\quad \rho_\infty=\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\rho(\boldsymbol{x}).$$

Для таких течений доказана математич. корректность более общих задач: о совместном обтекании нескольких профилей; об обтекании крыла со срывом струй и с образованием застойной зоны (струйные течения); обратные задачи, определяющие формы крыла и его части по заданной эпюре давлений [4].

В связи с трудностями решения задач К. т. в точной постановке большое значение имеют приближенные модели: теория тонкого крыла, К. т. малого удлинения и т. д. Наиболее распространенной из них является линейная теория слабого изогнутого тонкого крыла (см. [1], [5]—[11]). В ее основе лежат следующие предположения: потенциал течения имеет вид $\varphi=qx_1+\Phi$, толщина крыла и $\nabla\Phi$ малы по отношению к хорде крыла и скорости невозмущенного потока $q>0$. В теории тонкого крыла поверхность S моделируется ее проекцией S_0 на плоскость $x_n=0$, а поверхность контактного разрыва Σ — полуполосой $\Sigma_0=\Omega\setminus S_0$, где Ω — объединение всех лучей, параллельных оси Ox_1, выходящих из точек S_0 в положительном направлении этой оси. Функция $\Phi(x, t)$ удовлетворяет линеаризованным уравнениям и граничным условиям:

$$\frac{1}{c_\infty^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+2\frac{M_\infty}{c_\infty}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\,\partial t}=(1-M_\infty^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}\ \text{вне }\Omega;$$

$$\lim_{x_n\to\pm 0}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}=v^{\pm}\ \text{на } S_0;\quad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right]=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+q\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right]=0\ \text{на }\Sigma_0;$$

$$\overline{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial t}+q\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right|<\infty\ \text{при } \boldsymbol{x}_0\in S_0\cap\Sigma_0,$$

где c_∞, M_∞ — постоянные скорость звука и число Маха, соответствующие равномерному потоку со скоростью q, через $[f]$ обозначен скачок величины f при переходе через Σ_0, $v^{\pm}$ — заданные функции, определенные формой и условиями движения крыла.

К этим уравнениям добавляются соотношения, определяющие поведение решений на бесконечности: в за-

дачах о стационарных дозвуковых ($M_\infty<1$) течениях — затухание возмущений при $|x| \to \infty$, в задачах о малых дозвуковых колебаниях крыла — условие излучения Зоммерфельда *(излучения условия)*, в задачах о сверхзвуковых ($M_\infty>1$) течениях добавляется равенство $\Phi = 0$ на головной волне возмущений (огибающей характеристических конусов с центрами на S_0).

Основной метод решения задач теории тонкого крыла — представление S_0, Σ_0 в виде вихревых поверхностей и сведение краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям для плотности вихря. При этом в точках границы S_0, не принадлежащих Σ_0, производные Φ, как правило, обращаются в бесконечность. Линейная теория пригодна для описания реальных течений лишь вне нек-рой окрестности передней кромки крыла.

В линейной теории тонкого крыла получены решения в виде бесконечных рядов, содержащих специальные функции, плоской задачи о малых гармонич. колебаниях крылового профиля, пространственной стационарной задачи в случае, когда S является эллипсом (см. [1], [5]—[9]). Для расчета крыльев произвольной формы в плане разработаны численные методы (см. [10], [11]).

Лит.: [1] Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 2 изд., М., 1966; [2] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, 6 изд., ч. 1, М., 1963; [3] Берс Л., Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, пер. с англ., М., 1961; [4] Монахов В. Н., Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, Новосиб., 1977; [5] Некрасов А. И., Теория крыла в нестационарном потоке, М.—Л., 1947; [6] Горелов Д. Н., Теория крыла в нестационарном потоке, Новосиб., 1975; [7] Майлс Дж., Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений, пер. с англ., М., 1963; [8] Голубев В. В., Труды по аэродинамике, М.— Л., 1957; [9] Кочин Н. Е., «Прикл. матем. и механ.», 1945, т. 9, в. 1, с. 13—66; [10] Красильщикова Е. А., Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, М.— Л., 1952; [11] Белоцерковский О. М., Ништ М. И., Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью, М., 1978.

В. Н. Монахов, П. И. Плотников.

КРЫЛОВА — БОГОЛЮБОВА МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ — метод, применяемый в теории нелинейных колебаний для исследования колебательных процессов, основанный на принципе усреднения (осреднения), заменяющем точное дифференциальное уравнение движения усредненным.

Различные схемы усреднения (Гаусса, Фату, Делоне — Хилла и др.) широко применялись в небесной механике еще задолго до работ Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Разработка общего алгоритма, получившего название метода усреднения Крылова — Боголюбова, и теорема о близости решений точной и усредненной систем принадлежат Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову (см. [1], [2]). Создание строгой теории метода усреднения, исчерпывающее выяснение сущности общего принципа усреднения принадлежат Н. Н. Боголюбову (см. [3], [4]), к-рый показал, что метод усреднения связан с существованием нек-рой замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей рассматриваемых уравнений с наперед заданной степенью точности относительно малого параметра ε; он же обосновал асимптотич. характер приближений, получаемых методом усреднения, и установил соответствие между решениями точных и усредненных уравнений на бесконечном временном интервале. Эти результаты получили дальнейшее развитие в работах Ю. А. Митропольского и др. (см. [5]—[8]) и применяются для изучения нелинейных колебаний.

Система уравнений, для к-рых разработан К.— Б. м. у., имеет стандартный вид:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

где t — время, ε — малый положительный параметр. Основные предположения, при к-рых рассматривается

система (1), сводятся к достаточной гладкости функции X по t, x и нек-рой «возвращаемости» ее по t, обеспечивающей существование среднего значения

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t, x)\,dt = X_0(x),$$

напр. периодичности или почти периодичности X по t.

Согласно К.— Б. м. у. m-е приближение к решению $x=x(t)$ системы (1) определяется выражением

$$x=\xi+\varepsilon F_1(t, \xi)+\ldots+\varepsilon^m F_m(t, \xi), \qquad (2)$$

в к-ром $\xi=\xi(t)$ — решение «усредненного» уравнения

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon X_0(\xi)+\varepsilon^2 P_2(\xi)+\ldots+\varepsilon^m P_m(\xi),$$

F_1, F_j, P_j, $j=2, \ldots, m$,— функции, подбираемые из условия, чтобы выражение (2) удовлетворяло уравнению (1) с точностью до величин порядка ε^{m+1} и чтобы F_j обладали по t той же возвращаемостью, что и правая часть системы (1). Функции F_j находятся элементарно, функции P_j определяются в результате усреднения правой части системы (1) после подстановки в нее выражения (2). Так, в частности, для системы (1) с периодической по t правой частью, когда

$$X(t, x)=X(t+2\pi, x)=\sum_{-\infty<k<\infty} X_k(x)\,e^{ikt}, \qquad (3)$$

функция F_1 определяется по (3) согласно формуле

$$F_1(t, \xi)=\sum_{k\neq 0}\frac{X_k(\xi)}{ik}\,e^{ikt},$$

функции F_m и P_m при $m\geqslant 2$ определяются по соотношению

$$X(t, \xi+\varepsilon F_1(t, \xi)+\ldots+\varepsilon^{m-1}F_{m-1}(t, \xi))=$$
$$=X(t, \xi)+\varepsilon\frac{\partial X(t, \xi)}{\partial x}F_1(t, \xi)+\ldots+$$
$$+\varepsilon^{m-1}\frac{\partial X(t, \xi)}{\partial x}F_{m-1}(t, \xi)$$

аналогичными формулами.

Обоснование метода усреднения сводится к следующему: 1) установление оценки

$$\|x(t)-\xi(t)\|\leqslant\eta(\varepsilon), \quad t\in\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right],$$

где $\eta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, L — постоянная, не зависящая от ε, $x(0)=\xi(0)$; 2) доказательство существования решения $x=x_0(t)$ системы (1), находящегося в достаточно малой окрестности положения равновесия $\xi=\xi_0$: $X_0(\xi_0)=0$ усредненной системы:

$$\sup_{t\in(-\infty, \infty)}\|x(t)-\xi_0\|\leqslant\eta(\varepsilon),$$

и установление свойств устойчивости, периодичности или почти периодичности этого решения; 3) доказательство существования интегрального многообразия τ:

$$x=f(t, \varphi, \varepsilon), \quad f(t, \varphi+2\pi, \varepsilon)=f(t, \varphi, \varepsilon),$$

системы (1), находящегося вблизи периодической траектории $\xi=\xi_0(\varphi)$, $\dot\varphi=\varepsilon\nu$, $\nu=\mathrm{const}$, усредненной системы:

$$\sup_{t,\ \varphi\in(-\infty, \infty)}\|f(t, \varphi, \varepsilon)-\xi_0(\varphi)\|\leqslant\eta(\varepsilon),$$

и исследование поведения решений системы (1), начинающихся в окрестности многообразия τ.

Лит.: [1] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, К., 1934; [2] их же, Введение в нелинейную механику, К., 1937; [3] Боголюбов Н. Н., О некоторых статистических методах в математической физике, К., 1945; [4] его же, «Сб. трудов Ин-та строительной механики АН УССР», 1950, № 14, с. 9—34; [5] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд., М., 1963; [6] Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, К., 1971; [7] его же, *Нестационарные процессы в нелинейных*

колебательных системах, К., 1955; [8] Волосов В. М., в кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968, с. 115—35.

А. М. Самойленко.

КУБ — 1) К.— один из пяти типов правильных многогранников; имеет 6 квадратных граней, 12 ребер, 8 вершин, в каждой вершине сходятся 3 ребра (они взаимно перпендикулярны). К. иногда наз. гексаэдром.

2) К. числа a — третья степень a^3 этого числа.

КУБАТУРНАЯ ФОРМУЛА — формула для приближенного вычисления кратных интегралов вида

$$I(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega p(x) f(x)\, dx.$$

Интегрирование выполняется по Ω-множеству в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. К. ф. наз. приближенное равенство

$$I(f) \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^{(j)}). \qquad (1)$$

Подинтегральная функция записана в виде произведения двух функций: первая $p(x)$ считается фиксированной для данной К. ф. и наз. весовой функцией, вторая $f(x)$ принадлежит достаточно широкому классу функций, напр., непрерывных и таких, что интеграл $I(f)$ существует. Сумма в правой части (1) наз. кубатурной суммой, точки $x^{(j)}$ наз. узлами К. ф., а числа C_j — ее коэффициентами. Обычно $x^{(j)} \in \Omega$, хотя это требование не является обязательным. Нахождение приближенного значения $I(f)$ с помощью формулы (1) сводится к вычислению кубатурной суммы. При $n=1$ формула (1) и сумма в правой ее части наз. квадратурными (см. *Квадратурная формула*).

Пусть $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, здесь α_i — неотрицательные целые числа;

$$|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n; \quad x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

— одночлен степени $|\alpha|$ от n переменных;

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} M(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} (n+m)!/n!m!$$

— число одночленов степени не выше m от n переменных; $\varphi_j(x)$, $j=1, 2, \ldots$,— одночлены, занумерованные так, что одночлены меньшей степени имеют меньший номер, а одночлены одной и той же степени нумеруются в любом порядке, напр. лексикографическом. При указанной нумерации $\varphi_1(x)=1$, а среди $\varphi_j(x)$, $j=1, 2, \ldots, \mu$, содержатся все одночлены степени не выше m. Пусть $\varphi(x)$ — многочлен степени m. Множество точек в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих уравнению $\varphi(x)=0$, наз. алгебраич. гиперповерхностью порядка m.

Один из способов получения К. ф. основан на алгебраич. интерполировании. Точки $x^{(j)} \in \Omega$, $j=1, 2, \ldots, \mu$, выберем так, чтобы они не лежали на алгебраич. гиперповерхности порядка m или, что равносильно, чтобы матрица Вандермонда

$$V \stackrel{\text{def}}{=} [\varphi_1(x^{(j)}), \varphi_2(x^{(j)}), \ldots, \varphi_\mu(x^{(j)})]_{j=1}^{\mu}$$

была неособенной. Интерполяционный многочлен функции $f(x)$ по ее значениям в $x^{(j)}$ в форме Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{j=1}^{\mu} \mathcal{L}_j(x) f(x^{(j)}),$$

где $\mathcal{L}_j(x)$ — многочлен влияния j-го узла: $\mathcal{L}_j(x^{(i)})=\delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Умножение приближенного равенства $f(x) \cong \mathcal{P}(x)$ на $p(x)$ и интегрирование по Ω приводит к К. ф. (1), в к-рой $N=\mu$ и

$$C_j = I(\mathcal{L}_j), \quad j=1, 2, \ldots, \mu. \qquad (2)$$

Существование интегралов (2) равносильно существованию моментов весовой функции $p_i \underset{\text{def}}{=} I(\varphi_i)$, $i=1, 2, \ldots, \mu$. Здесь и далее предполагается, что требуемые моменты $p(x)$ существуют. К. ф. (1), узлы к-рой не лежат на алгебраич. гиперповерхности порядка m, их число $N=\mu$ и коэффициенты определяются равенствами (2), наз. интерполяционной К. ф. Формула (1) обладает m-с в о й с т в о м, если она обращается в точное равенство, когда $f(x)$ — любой многочлен степени не выше m; интерполяционная К. ф. обладает m-свойством. Для того чтобы К. ф. (1), обладающая m-свойством и с числом узлов $N \leqslant \mu$, была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$\left[\varphi_1(x^{(j)}), \ldots, \varphi_\mu(x^{(j)})\right]_{j=1}^{N}$$

был равен N. При $n=1$ это условие выполнено, так что квадратурная формула, обладающая m-свойством и с числом узлов $N \leqslant m+1$, является интерполяционной. Фактич. построение интерполяционной К. ф. сводится к выбору узлов и вычислению коэффициентов. Коэффициенты C_j можно находить из линейной алгебраич. системы

$$\sum_{j=1}^{\mu} C_j \varphi_i(x^{(j)}) = p_i, \quad i=1, 2, \ldots, \mu,$$

которую получают, записывая, что К. ф. (1) (при $N=\mu$) точна для одночленов степени не выше m. Матрица системы совпадает с V'.

Пусть требуется построить К. ф. (1), к-рая обладает m-свойством, а число ее узлов меньше μ. За счет выбора коэффициентов это сделать невозможно, поэтому неизвестными в (1) считаются не только коэффициенты, но и узлы. Таким образом, имеется $N(n+1)$ неизвестных. Так как К. ф. должна обладать m-свойством, то это дает μ уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} C_j \varphi_i(x^{(j)}) = p_i, \quad i=1, 2, \ldots, \mu. \qquad (3)$$

Естественно потребовать, чтобы число неизвестных совпадало с числом уравнений: $N(n+1)=\mu$. Это равенство ориентировочно определяет число узлов искомой К. ф. Если $N=\mu/(n+1)$ — не целое, то полагаем $N=[\mu/(n+1)]+1$, где $[\mu/(n+1)]$ означает целую часть $\mu/(n+1)$. Требуемая К. ф. с указанным числом узлов не всегда существует. Если К. ф. существует, то она имеет в $(n+1)$ раз меньше узлов, чем интерполяционная К. ф. Однако в этом случае узлы и коэффициенты определяются из нелинейной системы уравнений (3). Метод неопределенных параметров построения К. ф. состоит в том, что К. ф. ищется в таком виде, к-рый приводит к упрощению системы (3). Это возможно в тех случаях, когда Ω и $p(x)$ обладают симметрией. Расположение узлов согласуется с симметрией Ω и $p(x)$, при этом симметричным узлам сопоставляются одинаковые коэффициенты. Упрощение системы (3) связано с риском: система (3) может иметь решение, а упрощенная — не имеет.

П р и м е р. Пусть $\Omega = K_2 \underset{\text{def}}{=} \{-1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1\}$, $p(x_1, x_2)=1$. Требуется построить К. ф. с 7-свойством; $n=2$, $\mu=M(2, 7)=36$ и число узлов равно 12. Узлы расположим следующим образом. Первую группу узлов образуют точки пересечения окружности с центром в начале координат и радиусом a с координатными осями. Вторая группа узлов состоит из точек пересечения окружности с тем же центром и радиусом b с прямыми $x_1=\pm x_2$. Третья группа узлов образуется как и вторая, при этом радиус окружности обозначается c. Коэффициенты, отвечающие узлам одной и той же группы, считаются одинаковыми и равными A, B, C для уз-

лов первой, второй и третьей групп соответственно. Такой выбор узлов и коэффициентов обеспечивает точность К. ф. для одночленов $x_1^i x_2^j$, у к-рых хоть одно из чисел i и j нечетно. Чтобы К. ф. имела 7-свойство, достаточно потребовать, чтобы она была точна для 1, x_1^2, x_1^4, $x_1^2x_2^2$, x_1^6, $x_1^4x_2^2$. Это приводит к нелинейной системе шести уравнений относительно шести неизвестных a, b, c, A, B, C. Решая ее, получаем К. ф., узлы к-рой принадлежат K_2 и коэффициенты положительны.

Пусть G — конечная подгруппа группы ортогональных преобразований $O(n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, оставляющих неподвижным начало координат. Множество Ω и функция $p(x)$ наз. инвариантными относительно G, если $g(\Omega)=\Omega$ и $p(g(x))=p(x)$ при $x\in\Omega$ для любого $g\in G$. Совокупность точек вида ga, где a — фиксированная точка $\mathbb{R}^n$ и g пробегает все элементы группы G, наз. орбитой, содержащей a. К. ф. (1) наз. инвариантной относительно G, если Ω и $p(x)$ инвариантны относительно G и совокупность ее узлов представляет собой объединение орбит, при этом узлам одной и той же орбиты сопоставляются одинаковые коэффициенты. Инвариантными относительно G множествами являются все пространство $\mathbb{R}^n$, шар и сфера с центром в начале координат, а если G — группа преобразований правильного многогранника U в себя, то инвариантен и U. Таким образом, инвариантные К. ф. можно рассматривать, когда в качестве Ω берутся $\mathbb{R}^n$, шар, сфера, куб и любой правильный многогранник, а в качестве $p(x)$ — любая инвариантная относительно G функция, напр., $p(r)$, где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$. Теорема 1. Чтобы инвариантная относительно G К. ф. обладала m-свойством, необходимо и достаточно, чтобы она была точна для тех многочленов степени не выше m, к-рые инвариантны относительно G (см. [5]). Метод неопределенных параметров можно определить как метод построения инвариантных К. ф., обладающих m-свойством. В приведенном выше примере в качестве G можно взять группу симметрии квадрата. Теорема 1 имеет существенное значение при построении инвариантных К. ф.

Для простых областей интегрирования, таких, как куб, симплекс, шар, сфера, и для веса $p(x)=1$ можно построить К. ф. кратным применением квадратурных формул. Напр., когда $\Omega=K_n \overset{\text{def}}{=} \{-1\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1, 2, \ldots, n\}$ — куб, то с помощью квадратурной формулы Гаусса с k узлами t_i и коэффициентами A_i может быть получена К. ф.

$$\int_{K_n} f(x)\,dx \cong \sum_{i_1,\ \ldots,\ i_n=1}^{k} A_{i_1}\ldots A_{i_n} f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}),$$

имеющая k^n узлов и точная для всех одночленов x^α таких, что $0\leqslant\alpha_i\leqslant 2k-1$, $i=1, 2, \ldots, n$, в частности для всех многочленов степени не выше $2k-1$. Число узлов таких К. ф. быстро возрастает. Этим фактом определяются границы их применимости.

Всюду в дальнейшем считается, что весовая функция сохраняет знак, для определенности

$$p(x)\geqslant 0 \text{ в } \Omega \text{ и } p_1>0. \qquad (4)$$

Положительность коэффициентов К. ф. с таким весом является ценным ее свойством. Теорема 2. Если область интегрирования Ω замкнута и $p(x)$ удовлетворяет (4), то существует интерполяционная К. ф. (1), обладающая m-свойством, $N\leqslant\mu$, с положительными коэффициентами и узлами, принадлежащими Ω. Вопрос о фактическом построении такой К. ф. остается открытым.

Теорема 3. Если К. ф. с весом, удовлетворяющим (4), имеет действительные узлы и коэффициенты и обладает m-свойством, то среди ее коэффициентов не менее $\lambda = M(n, l) \overset{\text{def}}{=}$ положительных, $l=[m/2]$ — целая часть

числа $m/2$. При условиях теоремы 3 число λ является нижней границей для числа узлов:

$$N \geqslant \lambda.$$

Это неравенство остается справедливым и без предположения о действительности $x^{(j)}$ и C_j.

Среди К. ф. с m-свойством большой интерес представляют те, к-рые имеют наименьшее число узлов. В случае $m = 1, 2$ такие формулы легко найти при любом n и для произвольных Ω и $p(x) \geqslant 0$, при этом наименьшее число узлов совпадает с нижней границей λ: равно 1 в первом случае и $n+1$ — во втором. При $m \geqslant 3$ наименьшее число узлов зависит от области и веса. Напр., при $m=3$ для области с центральной симметрией и $p(x) = 1$ наименьшее число узлов равно $2n$, а для симплекса и $p(x) = 1$ оно равно $n+2$. При $n \geqslant 3$ эти числа различны.

В силу (4)

$$(\varphi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} I(\varphi\overline{\psi}) \qquad (5)$$

является скалярным произведением в пространстве многочленов. Пусть $\mathcal{P}_k$ — векторное пространство многочленов степени k, к-рые ортогональны в смысле скалярного произведения (5) ко всем многочленам степени не выше $k-1$. Размерность $\mathcal{P}_k$ равна $M(n-1, k)$ — числу одночленов степени k. Многочлены из $\mathcal{P}_k$ наз. ортогональными многочленами Ω и $p(x)$. Теорема 4. Чтобы существовала К. ф. (1), обладающая $(2k-1)$-свойством и с числом узлов $N = M(n, k-1)$, равным нижней границе, необходимо и достаточно, чтобы ее узлы были общими корнями всех ортогональных многочленов Ω и $p(x)$ степени k. Теорема 5. Если n ортогональных многочленов степени k имеют k^n конечных и попарно различных общих корней, то эти корни можно взять в качестве узлов К. ф. (1), к-рая обладает $(2k-1)$-свойством.

Погрешность К. ф. (1), в к-рой $p(x) \equiv 1$ и Ω ограничено, определяется равенством

$$l(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{N} C_j f(x^{(j)}).$$

Пусть B — банахово пространство функций такое, что $l(f)$ является линейным функционалом в B. Норма функционала $\|l\| = \sup_{\|f\|=1} |l(f)|$ характеризует качество рассматриваемой К. ф. для всех функций пространства B. Другой подход к построению К. ф. основан на минимизации $\|l\|$ как функции узлов и коэффициентов искомой кубатурной формулы (при фиксированном числе узлов). Даже при $n=1$ реализация этого подхода связана с трудностями. Для любого $n \geqslant 2$ важные результаты получил С. Л. Соболев [4]. Вопрос о минимизации $\|l\|$ по коэффициентам при заданных узлах решается до конца; задача выбора узлов рассматривается в предположении, что узлы образуют параллелепипедальную решетку и минимизация осуществляется лишь за счет параметров этой решетки. В качестве B, в частности, берется пространство $L_2^m(\mathbb{R}^n)$, где $m > n/2$, при этом искомая К. ф. считается точной для многочленов степени не выше $m-1$.

Лит.: [1] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; [2] Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966; [3] Stroud A. H., Approximate calculation of multiple integrals, [N. Y.], 1971; [4] Соболев С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974; [5] его же, «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 5, с. 769–96; [6] Мысовских И. П., Интерполяционные кубатурные формулы, М., 1981.

И. П. Мысовских.

КУБИКА — плоская кривая 3-го порядка, т. е. множество точек плоскости (проективной, аффинной, евклидовой), однородные координаты x_0, x_1, x_2 к-рых (относительно проективной, аффинной или декартовой

системы координат) удовлетворяют однородному уравнению третьей степени

$$F(x) \equiv \sum_{i,\ j,\ k=0}^{2} a_{ijk} x_i x_j x_k = 0, \quad a_{ijk} = a_{jik} = a_{ikj}.$$

Количество касательных, к-рые можно провести к К. из находящейся вне ее точки, наз. к л а с с о м К. Коника

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x_i} x'_i = 0$$

наз. к о н и ч е с к о й (или п е р в о й) п о л я р о й точки $M'(x'_0, x'_1, x'_2)$ — полюса; прямая

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{\partial F}{\partial x'_i} x_i = 0$$

наз. п р я м о л и н е й н о й (или в т о р о й) п о л я р о й точки относительно К. Если полюс M' лежит на К., то его прямолинейная поляра касается в точке M' К. и конической поляры точки M'. Г е с с и а н о й К. наз. множество точек, конич. поляры к-рых распадаются на две прямые; она определяется уравнением

$$H_3 \quad \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\, \partial x_j}\right) = 0.$$

К. пересекается со своей гессианой в девяти общих точках перегиба. Прямые, на к-рые распадаются конич. поляры точек гессианы, а также прямые, соединяющие пары соответствующих точек гессианы, огибают кривую 6-го порядка 3-го класса — к э л и а н у К. Все К. плоскости, проходящие через девять точек перегиба К., образуют с и з и г е т и ч е с к и й п у ч о к, содержащий гессианы всех кривых пучка и четыре кривые, каждая из к-рых распадается на три прямые и образует с и з и г е т и ч е с к и й т р е у г о л ь н и к. Конич. поляра точки перегиба M' распадается на две прямые: касательную к К. в точке M' и г а р м о н и ч е с к у ю п о л я р у точки M' — множество точек, гармонически сопряженных с M' относительно двух точек пересечения К. с секущей, проведенной через M'. Гармонич. поляры трех лежащих на одной прямой точек перегиба пересекаются в одной точке. Существуют различные проективные, аффинные и метрич. классификации К.: по типам канонич. уравнений; по характеру несобственных точек К.; по характеру асимптот и др.

Из К. на евклидовой плоскости наиболее известны: декартов лист $(x^3+y^3-3axy=0)$, локон Аньези $(y(a^2+x^2)=a^3)$, кубич. парабола $(y=ax^3)$, полукубич. парабола $(y^2=ax^3)$, строфоида $(y^2(a-x)=x^2(a+x))$, циссоида Диоклеса $(y^2(2a-x)=x^3)$, трисектриса $(x(x^2+y^2)=a(3x^2-y^2))$, конхоида Слюза $(a(x-a)(x^2+y^2)-k^2x^2)$. В алгебраич. геометрии кубикой наз. как *кубическую гиперповерхность*, так и пространственную кубическую кривую.

Лит.: [1] С м о г о р ж е в с к и й А. С., С т о л о в а Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961.

В. С. Малаховский.

КУБИЧЕСКАЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ — проективное алгебраич. многообразие, задаваемое однородным уравнением $F_3(x_0, \ldots, x_n)=0$ 3-й степени с коэффициентами из нек-рого основного поля k.

К у б и ч е с к и е к р и в ы е. Неприводимая кубич. кривая является либо гладкой (в этом случае ее канонич. класс равен 0, а род 1), либо имеет одну особую двойную точку (в этом случае она рациональна). Кубич. кривые — кривые наименьшей степени, для к-рых существуют *модули*. Каждая гладкая кубич. кривая X над алгебраически замкнутым полем k, характеристика к-рого отлична от 2 и 3, бирациональными преобразованиями может быть приведена к вейерштрассовой форме, в неоднородных координатах плоскости (x, y) имеющей вид

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

где $g_2, g_3 \in k$, $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Две кубич. кривые с коэффи-

циентами (g_2, g_3) и (g_2', g_3') в вейерштрассовой форме изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2} = \frac{g_2'^2}{g_2'^3-27g_3'^2}.$$

Функция

$$j = \frac{1728g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$$

принимает любые значения из k и зависит только от кривой X, она наз. а б с о л ю т н ы м и н в а р и а н т о м кубич. кривой X.

На множестве точек $X(k)$ кубич. кривой определен бинарный закон композиции $(x_1, x_2) \to x_1 \circ x_2$, где $x_1 \cdot x_2$ — третья точка пересечения кривой X с прямой, проходящей через точки x_1 и x_2. Если фиксировать нек-рую точку $x_0 \in X(k)$, то композиция

$$(x_1, x_2) \longrightarrow x_0 \circ (x_1 \circ x_2)$$

превращает множество $X(k)$ в абелеву группу с нулем x_0. Кубич. кривая, снабженная этой структурой, является одномерным абелевым многообразием (эллиптич. кривой).

В случае, когда $k = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $X(\mathbb{C})$ есть риманова поверхность рода 1, т. е. одномерный комплексный тор — факторгруппа $\mathbb{C}/\Gamma(X)$, где $\Gamma(X)$ — двумерная решетка периодов. Поле k рациональных функций кривой X в этом случае изоморфно полю эллиптич. функций на $\mathbb{C}$ с решеткой периодов $\Gamma(X)$. Коэффициенты g_2 и g_3 интерпретируются как модулярные формы весов 4 и 6 соответственно, совпадающие с точностью до постоянного множителя с формами, определяемыми рядами Эйзенштейна наименьших весов. Функция j в этом случае есть не что иное, как модулярный инвариант.

Для кубич. кривых над алгебраически незамкнутым полем k также развита содержательная арифметич. теория (см. [2]). Существенную часть ее достижений составляют теорема Морделла — Вейля, теория комплексного умножения и когомологическая теория главных однородных пространств. Основные нерешенные (1982) проблемы этой теории: проблема ограниченности ранга над полем алгебраич. чисел, гипотеза конечности для группы главных однородных локально тривиальных пространств, гипотеза Берча и Суиннертон-Дайера о дзета-функции, гипотеза Вейля об униформизации и др.

К у б и ч е с к и е п о в е р х н о с т и. Над алгебраически замкнутым полем k каждая неприводимая кубич. поверхность (если она не вырождается в конус) является рациональной поверхностью. Класс гиперплоского сечения h поверхности F совпадает с каноническим классом ($-K_F$). Любая гладкая кубич. поверхность получается из проективной плоскости P^2 раздутием (т. е. моноидальным преобразованием) 6 точек, никакие 3 из к-рых не лежат на одной прямой, а все 6 не лежат на одной конике. Соответствующее бирациональное отображение φ: $P^2 \to F$ задается линейной системой кубич. кривых, проходящих через эти 6 точек. На F лежат 27 прямых, каждая из к-рых является исключительной (см. *Исключительное подмногообразие*). Ими исчерпываются все исключительные кривые на F. Конфигурация 27 прямых богата симметриями: группа автоморфизмов соответствующего графа изоморфна группе Вейля E_6. Кубич. поверхности принадлежат к серии п о в е р х н о с т е й д е л ь П е ц ц о — проективных поверхностей с обильным обратным канонич. классом.

Над алгебраически незамкнутым полем k имеются гладкие кубич. поверхности F, для к-рых не существует бирационального изоморфизма с P^2 над k (т. е. F не

рационален над k). Среди них есть поверхности, обладающие k-точками, в этом случае они унирациональны над k. Такие кубич. поверхности являются контрпримером для *Люрота проблемы* о поверхностях над незамкнутыми полями. Над нек-рыми k существуют минимальные кубич. поверхности. Критерий минимальности Сегре [6]: $\mathrm{Pic}(F)\simeq\mathbb{Z}$. Вычислена группа бирациональных автоморфизмов минимальной кубич. поверхности (найдены ее образующие и определяющие соотношения) и развита арифметич. теория кубич. поверхностей [4]. Для описания множества точек $F(k)$ привлечены неассоциативные структуры: квазигруппы и лупы Муфанг.

Кубические гиперповерхности размерности 3. Все гладкие К. г. размерности $\geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем унирациональны. В 80-е гг. 19 в. был поставлен вопрос: будет ли гладкая трехмерная К. г. рациональна? На него получен отрицательный ответ [3]. Тем самым дано и отрицательное решение проблемы Люрота для трехмерных многообразий. С каждой гладкой К. г. V размерности 3 связано главное поляризованное пятимерное абелево многообразие — промежуточный якобиан $J_3(V)$. В случае $k=\mathbb{C}$ он определяется как комплексный тор

$$H^{1,2}(V,\mathbb{C}),H^3(V,\mathbb{Z}),$$

где $H^{1,2}(V,\mathbb{C})$ — соответствующая компонента Ходжа в разложении пространства когомологий $H^3(V,\mathbb{C})$. Для доказательства нерациональности V было показано, что $J_3(V)$ не является якобианом никакой кривой рода 5. Нерациональность К. г. над полем конечной характеристики установлена в [5].

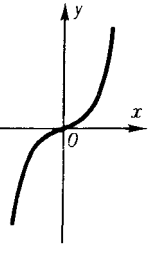
К. г. V однозначно определяется своей *Фано поверхностью* $\Phi(V)$. Для $\Phi(V)$ справедлива *Торелли теорема* (и тем самым теорема Торелли справедлива и для V). Нерешенной проблемой о К. г. размерности 3 является проблема описания ее группы бирациональных автоморфизмов.

Неизвестно (1982), будет ли каждая гладкая К. г. размерности $\geqslant 4$ рациональна. Рациональность установлена в этом случае для нек-рых К. г. специального вида; напр.:

$$\sum_{i=0}^{2m+1} a_i x_i^3=0,\quad m\geqslant 2.$$

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. [с нем.], М., 1968; [2] Касселс Дж., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; т. 12, № 2, с. 3—48; [3] Клеменс К. Г., Гриффитс Ф. А., там же, 1972, т. 16, № 6, с. 3—32; 1973, т. 17, № 1, с. 3—41; [4] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [5] Murre J. P., «Comp. math.», 1973, v. 27, p. 63—82; [6] Segre B., The non-singular cubic surfaces, Oxf., 1942; [7] Тюрин А. Н., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 3—50; [8] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, с. 498—529; [9] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

В. А. Исковских.



КУБИЧЕСКАЯ ПАРАБОЛА — плоская кривая (см. рис.), выражаемая в прямоугольной системе координат уравнением $y=ax^3$.

КУБИЧЕСКАЯ ФОРМА — однородный многочлен третьей степени от нескольких переменных с коэффициентами из нек-рого фиксированного поля или кольца. Пусть k — нек-рое поле и $F_3(x_0,\ \ldots\ ,x_n)$ — К. ф. с коэффициентами из k (говорят, что это — К. ф. над k). Уравнение

$$F_3(x_0,\ \ldots\ ,x_n)=0$$

определяет *кубическую гиперповерхность* в проективном пространстве P^n, что сводит алгебро-геометрическую теорию К. ф. над алгебраически замкнутым полем k к теории кубических гиперповерхностей (см. [1]).

Арифметич. теория К. ф. над числовыми полями (и их кольцами целых) развита пока (1982) недостаточно полно по сравнению с богатой и содержательной арифметич. теорией квадратичных форм. Для К. ф. от двух переменных арифметич. теория — это теория кубич. расширений числовых полей (см. [2]). Для К. ф. от трех переменных арифметич. теория — это часть арифметич. теории эллиптич. кривых (см. [3]). В частности, для К. ф. от трех переменных известны примеры нарушения принципа Хассе. Для К. ф. от четырех переменных (см. [1, 4, 6]) также известны примеры нарушения принципа Хассе. Для К. ф. от большего числа переменных нет никакой общей теории.

В чисто алгебраич. теории К. ф. кроме результатов о структуре множеств точек на кубич. гиперповерхностях имеется еще ряд результатов классич. теории инвариантов. А именно, известно строение алгебры (абсолютных) инвариантов К. ф. от двух и трех переменных; в этих случаях она не имеет сизигий и является алгеброй многочленов соответственно от одного (степени 4) и двух (степени 4 и 6) алгебраич. независимых однородных образующих. Если число переменных больше трех, указанная алгебра имеет сизигии [5] и устроена весьма сложно. Орбиты, их стабилизаторы и канонич. представители, а также семейства орбит относительно естественного действия группы SL_n на пространстве всех К. ф. от трех и четырех переменных изучались А. Пуанкаре [6].

Лит.: [1] Манин Ю. И., Кубические формы. Алгебра, геометрия, арифметика, М., 1972; [2] Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К., Теория иррациональностей третьей степени, М.— Л., 1940 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 11); [3] Касселс Дж., «Математика», 1968, т. 12, № 1, с. 113—60; № 2, с. 3—48; [4] Segre B., «Math. Notae», [Univ. Rosario], 1951, v. 11, p. 1—68; [5] Кац В. Г., Попов В. Л., Винберг Е. Б., «С. r. Acad. sci.», 1976, t. 283, p. 875—78; [6] Пуанкаре А., Избр. труды, пер. с франц., т. 2, М., 1972, с. 819—900.

В. А. Исковских, В. Л. Попов.

КУБИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ по модулю m — целое число a, для к-рого *сравнение* $x^3 \equiv a \pmod m$ разрешимо. Если указанное сравнение не разрешимо, то число a наз. кубическим невычетом по модулю m. В случае простого модуля p вопрос о разрешимости сравнения $x^3 \equiv a \pmod p$ может быть выяснен с помощью критерия Эйлера: для разрешимости сравнения $x^3 \equiv a \pmod p$, $(a,p)=1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1 \pmod p,$$

где $q=(3, p-1)$, и при выполнении последнего условия исходное сравнение имеет q различных по модулю p решений. Из критерия следует, в частности, что среди чисел $1, 2, \ldots, p-1$ имеется ровно $(q-1)\frac{p-1}{q}$ кубических невычетов и $\frac{p-1}{q}$ К. в. по простому модулю p.

С. А. Степанов.

КУБИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — алгебраическое уравнение третьей степени, т. е. уравнение вида

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

где $a\neq 0$. Заменяя в этом уравнении x новым неизвестным y, связанным с x равенством $x=y-b/3a$, К. у. можно привести к более простому (каноническому) виду:

$$y^3+py+q=0,$$

где

$$p=-\frac{b^2}{3a^2}-\frac{c}{a},$$

$$q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a},$$

решение же этого уравнения можно получить с помощью *Кардано формулы*; таким образом, К. у. решается в радикалах.

Решение К. у. было найдено в 16 в. В начале 16 в. С. Ферро (S. Ferro) решил уравнение вида $x^3+px=q$, где $p>0$, $q>0$, но не опубликовал решения. Затем Н. Тарталья (N. Tartaglia) заново открыл результат С. Ферро, а также дал решение уравнения вида $x^3=-px+q$ ($p>0$, $q>0$) и без доказательства сообщил, что к уравнению этого вида сводится уравнение вида $x^3+q=px$, где $p>0$, $q>0$. Свои результаты Н. Тарталья сообщил Дж. Кардано (G. Cardano), к-рый опубликовал решение уравнения третьей степени общего вида в 1545.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975.

И. В. Проскуряков.

КУБОВИДНЫЙ КОНТИНУУМ, n-кубовидный континуум,— компакт (метризуемый бикомпакт), обладающий для любого $\varepsilon>0$ ε-отображением на обычный куб I^n. Если компакт X является пределом счетного спектра из компактов, вложимых в I^n, то X является подмножеством К. к. В классе К. к. существует универсальный элемент, т. е. такой К. к. U, что каждый К. к. гомеоморфен нек-рому подпространству пространства U.

Лит.: [1] Пасынков Б. А., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 91—100.

Л. Г. Замбахидзе.

КУЗЕНА ПРОБЛЕМЫ — проблемы, названные по имени П. Кузена [1], к-рый впервые решил их для простейших областей в пространстве n комплексных переменных $\mathbb{C}^n$.

Первая (аддитивная) проблема Кузена (I К. п.). Дано покрытие $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$ комплексного многообразия M открытыми подмножествами U_α и в каждом U_α задана мероморфная функция f_α, причем функции $f_{\alpha\beta}=f_\alpha-f_\beta$ голоморфны в $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$ для всех индексов α, β (условие согласования). Требуется построить функцию f, мероморфную на всем многообразии M и такую, что функции $f-f_\alpha$ голоморфны в U_α для всех α. Другими словами, надо построить глобальную мероморфную функцию с локально заданными полярными особенностями.

Функции $f_{\alpha\beta}$, определенные в попарных пересечениях $U_{\alpha\beta}$ элементов покрытия $\mathcal{U}$, определяют голоморфный коцикл 1-го порядка для $\mathcal{U}$, т. е. удовлетворяют условию

$$f_{\alpha\beta}+f_{\beta\alpha}=0 \text{ в } U_{\alpha\beta},$$

$$f_{\alpha\beta}+f_{\beta\gamma}+f_{\gamma\alpha}=0 \text{ в } U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma \qquad (1)$$

для всех α, β, γ. Более общая проблема (так наз. I К. п. в когомологической формулировке) заключается в следующем. На попарных пересечениях $U_{\alpha\beta}$ покрытия $\mathcal{U}$ заданы голоморфные функции $f_{\alpha\beta}$, удовлетворяющие условию коцикличности (1). Требуется найти функции h_α, голоморфные в U_α и такие, что

$$f_{\alpha\beta}=h_\beta-h_\alpha \qquad (2)$$

для всех α, β. Если $f_{\alpha\beta}$ соответствуют данным I К. п. и указанные h_α существуют, то функция

$$f=\{f_\alpha+h_\alpha \text{ в } U_\alpha\}$$

определена и мероморфна на всем многообразии M и является решением данной I К. п. Обратно, если f — решение I К. п. с данными $\{f_\alpha\}$, то голоморфные функции $h_\alpha=f-f_\alpha$ удовлетворяют (2). Таким образом, конкретная I К. п. разрешима тогда и только тогда, когда соответствующий ей коцикл является голоморфной когранicей (т. е. выполняется условие (2)).

I К. п. можно формулировать в локализованном варианте. Каждому набору данных $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ с условием согласования соответствует однозначно определенное глобальное сечение пучка $\mathcal{M}/\mathcal{O}$, где $\mathcal{M}$ и $\mathcal{O}$ — пучки ростков мероморфных и голоморфных функций соответственно, причем любое глобальное сечение $\mathcal{M}/\mathcal{O}$ соответствует какой-нибудь I К. п. (значение сечения $\varkappa$,

соответствующего данным $\{f_\alpha\}$, в точке $z \in U_\alpha$ есть элемент $\mathscr{M}_z/\mathscr{O}_z$ с представителем f_α). Отображение глобальных сечений $\Gamma(\mathscr{M}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(\mathscr{M}/\mathscr{O})$ переводит каждую мероморфную на M функцию f в сечение $\varkappa_f$ пучка $\mathscr{M}/\mathscr{O}$, где $\varkappa_f(z)$ — класс в $\mathscr{M}_z/\mathscr{O}_z$ ростка f в точке z, $z \in M$. Локализованная I К. п. заключается в том, чтобы для данного глобального сечения $\varkappa$ пучка $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ найти мероморфную на M функцию f (т. е. сечение $\mathscr{M}$) такую, что $\varphi(f)=\varkappa$.

Теоремы о разрешимости I К. п. можно рассматривать как многомерное обобщение *Миттаг-Леффлера теоремы* о построении мероморфной функции с данными полярными особенностями. I К. п. в когомологич. формулировке с фиксированным покрытием $\mathscr{U}$ разрешима (для произвольных согласованных $\{f_\alpha\}$) тогда и только тогда, когда $H^1(\mathscr{U}, \mathscr{O})=0$ (когомологии Чеха для покрытия $\mathscr{U}$ с голоморфными коэффициентами тривиальны).

Конкретная I К. п. на M разрешима тогда и только тогда, когда соответствующее ей сечение $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ принадлежит образу отображения φ. Произвольная I К. п. на M разрешима тогда и только тогда, когда φ — отображение на (сюръективно). На любом комплексном многообразии M имеет место точная последовательность

$$\Gamma(\mathscr{M}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(\mathscr{M}/\mathscr{O}) \longrightarrow H^1(M, \mathscr{O}).$$

Если когомологии Чеха для M с коэффициентами в $\mathscr{O}$ тривиальны (т. е. $H^1(\mathscr{M}, \mathscr{O})=0$), то φ — отображение на и $H^1(\mathscr{U}, \mathscr{O})=0$ для любого покрытия $\mathscr{U}$ многообразия M. Таким образом, если $H^1(M, \mathscr{O})=0$, то на M разрешима любая I К. п. (в классической, когомологической и локализованной формулировках). В частности, I К. п. разрешима во всех областях голоморфности и на *Штейна многообразиях*. Если область $D \subset \mathbb{C}^2$, то I К. п. в D разрешима тогда и только тогда, когда D — область голоморфности. Пример неразрешимой I К. п.: $M=\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $U_\alpha=\{z_\alpha \neq 0\}$, $\alpha=1, 2$, $f_1=(z_1 z_2)^{-1}$, $f_2=0$.

Вторая (мультипликативная) проблема Кузена (II К. п.). Дано открытое покрытие $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ комплексного многообразия M и в каждом U_α задана мероморфная функция f_α, $f_\alpha \not\equiv 0$ на каждой компоненте U_α, причем функции $f_{\alpha\beta}=f_\alpha f_\beta^{-1}$ голоморфны и нигде не равны нулю в $U_{\alpha\beta}$ для всех α, β (условие согласования). Требуется построить мероморфную на M функцию f такую, что функции $f f_\alpha^{-1}$ голоморфны и нигде не равны нулю в U_α для всех α.

Когомологическая формулировка II К. п. Дано покрытие $\mathscr{U}$ и в попарных пересечениях $U_{\alpha\beta}$ заданы голоморфные нигде не равные нулю функции $f_{\alpha\beta}$, образующие мультипликативный коцикл первого порядка, т. е.

$$f_{\alpha\beta} f_{\beta\alpha} = 1 \text{ в } U_{\alpha\beta},$$
$$f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} f_{\gamma\alpha} = 1 \text{ в } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Требуется найти функции h_α, голоморфные и нигде не равные нулю в U_α такие, что $f_{\alpha\beta}=h_\beta h_\alpha^{-1}$ в $U_{\alpha\beta}$ для всех α, β. Если коцикл $\{f_{\alpha\beta}\}$ соответствует данным II К. п. и указанные h_α существуют, то функция $f=\{f_\alpha h_\alpha$ в $U_\alpha\}$ определена и мероморфна всюду на M и является решением данной II К. п. Обратно, если данная II К. п. разрешима, то соответствующий ей коцикл является голоморфной когранicей.

Локализованная II К. п. Каждому набору данных $\{U_\alpha, f_\alpha\}$ II К. п. соответствует однозначно определенное глобальное сечение пучка $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ (аналогично I К. п.), где $\mathscr{M}^*=\mathscr{M} \setminus \{0\}$ (0 — нулевое сечение) — мультипликативный пучок ростков мероморфных функций и $\mathscr{O}^*$ — подпучок $\mathscr{O}$, у к-рого каждый слой $\mathscr{O}_z^*$ состоит из ростков голоморфных функций,

отличных от нуля в точке z. Отображение глобальных сечений

$$\Gamma(\mathcal{M}^*) \xrightarrow{\psi} \Gamma(\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)$$

сопоставляет мероморфной функции f сечение $\varkappa_f^*$ пучка $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, где $\varkappa_f^*(z)$ — класс в $\mathcal{M}_z^*/\mathcal{O}_z^*$ ростка f в точке z, $z \in M$. Локализованная II К. п. заключается в следующем: дано глобальное сечение $\varkappa^*$ пучка $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, требуется найти мероморфную функцию f на M, $f \not\equiv 0$ на компонентах M (т. е. глобальное сечение $\mathcal{M}^*$), такую, что $\psi(f)=\varkappa^*$.

Сечениям $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ однозначно соответствуют *дивизоры*, поэтому пучок $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* = \mathcal{D}$ наз. пучком ростков дивизоров. Дивизор на комплексном многообразии M — это формальная локально конечная сумма $\Sigma k_j \Delta_j$, где k_j — целые числа и Δ_j — аналитические подмножества M чистой коразмерности 1. Каждой мероморфной функции f соответствует дивизор, слагаемые к-рого — неприводимые компоненты нулевого и полярного множеств f с соответствующими кратностями k_j, причем кратности нулей берутся со знаком плюс, а кратности полюсов — со знаком минус. Отображение ψ сопоставляет каждой функции f ее дивизор (f); такие дивизоры наз. собственными. II К. п. в терминах дивизоров заключается в следующем: на многообразии M задан дивизор Δ, требуется построить мероморфную на M функцию f такую, что $\Delta = (f)$.

Теоремы о разрешимости II К. п. можно рассматривать как многомерные обобщения теоремы Вейерштрасса о построении мероморфной функции с данными нулями и полюсами. Аналогично I К. п., для разрешимости всякой II К. п. в когомологич. формулировке необходимо и достаточно условие $H^1(M, \mathcal{O}^*)=0$. К сожалению, пучок $\mathcal{O}^*$ не когерентен, и это условие менее эффективно. При попытке свести данную II К. п. к I К. п. путем логарифмирования возникает препятствие в виде целочисленного коцикла 2-го порядка и получается точная последовательность

$$H^1(M, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\alpha} H^2(M, \mathbb{Z}),$$

где $\mathbb{Z}$ — постоянный пучок целых чисел. Таким образом, если $H^1(M, \mathcal{O})=H^2(M, \mathbb{Z})=0$, то на M разрешима любая II К. п., любой дивизор является собственным. Если M — многообразие Штейна, то α — изоморфизм, поэтому топологич. условие $H^2(M, \mathbb{Z})=0$ на многообразии Штейна M является необходимым и достаточным для разрешимости II К. п. в когомологич. формулировке. Сквозное отображение $c=\alpha\circ\beta$,

$$\Gamma(\mathcal{D}) \xrightarrow{\beta} H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\alpha} H^2(M, \mathbb{Z})$$

сопоставляет каждому дивизору Δ элемент $c(\Delta)$ группы $H^2(M, \mathbb{Z})$, к-рый наз. классом Чжэня дивизора Δ. Конкретная II К. п., соответствующая дивизору Δ, разрешима при условии $H^1(M, \mathcal{O})=0$ тогда и только тогда, когда класс Чжэня дивизора Δ тривиален, т. е. $c(\Delta)=0$. На многообразии Штейна отображение c сюръективно, более того, любой элемент из $H^2(M, \mathbb{Z})$ имеет вид $c(\Delta)$ для нек-рого дивизора Δ с положительными кратностями k_j. Таким образом, препятствия для решения II К. п. на многообразии Штейна M полностью описываются группой $H^2(M, \mathbb{Z})$.

Примеры. 1) $M=\mathbb{C}^2 \setminus \{z_1=z_2,\ |z_1|=1\}$; I К. п. неразрешима, II К. п. неразрешима, напр. для дивизора $\Delta = M \cap \{z_1=z_2,\ |z_1|<1\}$ с кратностью 1.

2) $M=\{|z_1^2+z_2^2+z_3^2-1|<1\} \subset \mathbb{C}^3$, Δ — одна из компонент пересечения M плоскостью $z_2=iz_1$ с кратностью 1; II К. п. неразрешима (M — область голоморфности, I К. п. разрешима).

3) I К. п. и II К. п. разрешимы в областях $D = D_1 \times \ldots \times D_n \subset \mathbb{C}^n$, где D_j — плоские области и все D_j, кроме, быть может, одной, односвязны.

Лит.: [1] Cousin P., «Acta math.», 1895, v. 19, p. 1—62; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [3] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Е. М. Чирка.

КУММЕРА ГИПОТЕЗА — предположение о поведении кубической *Гаусса суммы*

$$\tau(\chi) = \sum_{n=0}^{p-1} \chi(n,\ p)\, e^{\pi i n/p},$$

где $\chi(n,\ p) = \exp(2\pi i \operatorname{ind} n/3)$ — кубический характер по модулю $p \equiv 1 \pmod 3$, а p — простое число. Известно, что

$$\tau(\chi) = \sqrt{p} e^{i \arg \tau(\chi)}.$$

При этом $\arg \tau(\chi)$ лежит либо в первом, либо в третьем, либо в пятом секстанте. В соответствии с этим Э. Куммер (E. Kummer) разбил все простые числа $p \equiv 1 \pmod 3$ на три класса P_1, P_3 и P_5. Согласно К. г. в каждом из классов P_1, P_5 и P_3 находится бесконечное множество простых чисел, причем эти классы имеют соответственно асимптотич. плотности $1/2$, $1/3$ и $1/6$. Существуют различные обобщения К. г. на характеры более высокого порядка, чем 3. К. г. доказана в модифицированном виде (см. [3]).

Лит.: [1] Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [2] Дэвенпорт Г., Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971; [3] Heath-Brown D. R., Patterson S. I. «J. reine und angew. Math.», 1979, Bd 130, S. 111—30.

Б. М. Бредихин.

КУММЕРА ПОВЕРХНОСТЬ — алгебраич. поверхность четвертого порядка и класса, сама себе взаимная, имеющая 16 двойных точек, из к-рых 16 групп (по 6 точек каждая) расположены в одной двойной касательной плоскости к поверхности (т. е. плоскости, касающейся поверхности по конич. сечению). Уравнение 16-й степени, определяющее двойной элемент, приводится к одному уравнению 6-й степени и нескольким квадратным. Найдена Э. Куммером (E. Kummer, 1864). К. п. принадлежит классу *KЗ-поверхностей* и выделяется среди них условием существования на ней 16 неприводимых рациональных кривых.

Лит.: [1] Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., М.—Л., 1937; [2] Hudson R., Kummer's quartic surface, Camb., 1905; [3] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949.

М. И. Войцеховский.

КУММЕРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — одно из преобразований числовых рядов, улучшающее сходимость; предложено Э. Куммером (E. Kummer). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$$

— сходящиеся ряды и пусть существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \gamma \neq 0.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \gamma B + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \gamma \frac{b_k}{a_k}\right) a_k.$$

Если сумма B известна, то К. п. может оказаться полезным при вычислениях, так как ряд в правой части сходится быстрее ряда в левой.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 2, М., 1970.

В. В. Сенатов.

КУММЕРА ПРИЗНАК — общий признак сходимости рядов с положительными членами, предложенный Э. Куммером (E. Kummer). Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (*)$$

и $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — произвольная последовательность положительных чисел такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ расходится. Если для $n > N$ выполняется неравенство

$$K_n \equiv c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \delta,$$

где δ — постоянное положительное число, то ряд (*) сходится. Если $K_n \leqslant 0$ для $n > N$, то ряд (*) расходится.

В предельной форме К. п. формулируется следующим образом: пусть

$$\lim_{n \to \infty} K_n = K,$$

тогда при $K > 0$ ряд (*) сходится, при $K < 0$ расходится.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 2, М., 1970.

Е. Г. Соболевская.

КУММЕРА РАСШИРЕНИЕ — расширение поля k характеристики $p \geqslant 0$ вида

$$K = k\left(\sqrt[n]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[n]{\alpha_t}\right), \qquad (1)$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in k$, n — некоторое натуральное число, причем предполагается, что поле k содержит первообразный корень ζ_n из 1 степени n (в частности, n взаимно просто с p при $p \neq 0$). К. р. названы по имени Э. Куммера (E. Kummer), впервые подробно рассмотревшего расширения вида $\mathbb{Q}(\zeta_n \sqrt[n]{\alpha})$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел и $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Основной результат теории К. р. состоит в том, что для поля k, содержащего первообразный корень ζ_n, конечное расширение K/k является куммеровым (для данного n) тогда и только тогда, когда K/k — нормальное абелево расширение и группа Галуа $G(K/k)$ имеет период n. Любое К. р. поля k полностью характеризуется своей группой Куммера $A(K/k) = B/k^*$, где k^* — мультипликативная группа поля k, а

$$B = \{x \in K^* \mid x^n \in k^*\}.$$

Существует невырожденное спаривание Куммера, т. е. отображение

$$G(K/k) \times A(K/k) \longrightarrow \mu(n),$$

где $\mu(n)$ — подгруппа группы k^*, порожденная ζ_n. Для $\sigma \in G(K/k)$ и $a \in A(K/k)$ это спаривание задается формулой $(\sigma, a) = \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^{\sigma-1} \in \mu(n)$, где $\alpha \in k$, а $\sqrt[n]{\alpha} \in B$ — некоторый представитель элемента a. Это спаривание определяет канонический изоморфизм

$$G(K/k) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}\,(A(K/k), \mu(n)). \qquad (2)$$

Другими словами, всякий автоморфизм $\sigma \in G(K/k)$ определяется своим действием на корни $\sqrt[n]{\alpha_i}$ в (1), и это действие может быть произвольным, если только корни $\sqrt[n]{\alpha_i}$ независимы. В частности, если $G(K/k)$ — циклич. группа, то $K = k\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)$, где $\alpha \in k^*$.

Пусть k — нормальное расширение поля k_0 и $K \subset k$. Поле K тогда и только тогда нормально над k_0, когда $A(K/k)$ переходит в себя под действием $G(k/k_0)$. В этом случае изоморфизм (2) является $G(k/k_0)$-операторным, т. е. если $\tau \in G(k/k_0)$, $\sigma \in G(K/k)$ и

$$\varphi(\sigma) = \chi : A(K/k) \longrightarrow \mu(n),$$

то $\varphi(\sigma^\tau) = \tau\chi$, где $(\tau\chi)(a) = \tau(\chi(\tau^{-1}a))$. (Группа $G(k/k_0)$ действует на $G(K/k)$ с помощью сопряжения в $G(K/k_0)$.) Это обстоятельство позволяет сводить многие вопросы об абелевых расширениях периода n поля k к теории К. р. даже в том случае, когда $\zeta_n \notin k$. А имен-

но, если K/k — такое расширение, то расширение $K(\zeta_n)/k(\zeta_n)$ является куммеровым, причем его группа Куммера характеризуется условием: для $\tau \in G(k(\zeta_n)/k)$ и $a \in A(K(\zeta_n)/k(\zeta_n))$ будет $\tau(a) = a^i$, где i — натуральное число, определенное по модулю n условием $\tau(\zeta_n) = \zeta_n^i$.

Основные результаты о К. р. могут быть получены как следствие *Гильберта теоремы* о цикличе. расширениях, утверждающей тривиальность одномерной группы *Галуа когомологий* $H^1(G(K/k), K^*)$.

Теория К. р. переносится на случай бесконечных абелевых расширений периода n. При этом спаривание Куммера устанавливает двойственность Понтрягина между проконечной группой $G(K/k)$ (наделенной топологией Крулля) и дискретной группой $A(K/k)$ (см. [1] гл. 8, § 8; [2] гл. 3, § 2).

Теория К. р., называемая также теорией Куммера, имеет аналог для случая расширений вида (1), но с $n=p$ (так наз. теория Артина — Шрейера). Роль группы $\mu(n)$ в этом случае играет аддитивная группа простого подполя F_p поля k. Основное утверждение этой теории: любое абелево расширение K периода p поля k имеет вид $k(\beta_1, \ldots, \beta_t)$, где $\beta_1, \ldots, \beta_t$ — корни уравнений вида $x^p - x = a$ (см. [1] гл. 8, § 8). Существует также принадлежащее Э. Витту (E. Witt) обобщение этой теории для случая $n = p^s$, где $s > 1$, использующее *Витта векторы*.

Имеется, наконец, попытка построения неабелевой «теории Куммера» [3], где роль мультипликативной группы поля играет группа матриц $GL(n, K)$.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] Takahashi S., «J. Math. Soc. Japan», 1968, v. 20, № 1—2, p. 365—70.

Л. В. Кузьмин.

КУММЕРА ТЕОРЕМА: пусть k — поле частных дедекиндова кольца A, K — расширение поля k степени n, B — целое замыкание A в K и $\mathfrak{p}$ — некоторый простой идеал кольца A; пусть $K = k[\theta]$, где $\theta \in B$, и элементы $1, \theta, \theta^2, \ldots, \theta^{n-1}$ образуют базис A-модуля B; наконец, пусть $f(x)$ — минимальный многочлен элемента θ, $f^*(x)$ — образ $f(x)$ в кольце $A/\mathfrak{p}[x]$ и $f^*(x) = f_1^*(x)^{l_1} \ldots f_r^*(x)^{l_r}$ — разложение многочлена $f^*(x)$ на неприводимые множители в кольце $A/\mathfrak{p}[x]$; тогда в кольце B идеал $\mathfrak{p}B$ распадается в произведение простых идеалов

$$\mathfrak{p}B = \mathfrak{p}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r},$$

при этом степень многочлена $f_i^*(x)$ совпадает со степенью $[B/\mathfrak{p}_i : A/\mathfrak{p}]$ расширения полей вычетов.

К. т. позволяет определить разложение простого идеала при расширении основного поля через разложение на неприводимые множители в поле вычетов минимального многочлена подходящего примитивного элемента данного расширения.

Эта теорема в нек-рых частных случаях была доказана Э. Куммером [1] и применена для получения закона разложения в круговых полях и нек-рых цикличе. расширениях круговых полей.

Лит.: [1] Kummer E., «J. reine und angew. Math.», 1847, Bd 35, S. 319—26; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969.

Л. В. Кузьмин.

КУМУЛЯНТ — то же, что *семиинвариант*.

КУРАНТ — термин, употребляемый при рассмотрении разностных схем интегрирования одномерных гиперболических систем. Если τ — шаг по t, h — шаг по x, λ — максимальный из наклонов характеристик, то курант разностной схемы равен $\lambda\tau/h$.

Лит.: [1] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, М., 1973.

Н. С. Бахвалов.

КУРАНТА ТЕОРЕМА о конформном отображении областей с переменными границами: пусть $\{D_n\}$ — последовательность

вложенных односвязных областей плоскости комплексного переменного z, $\overline{D}_{n+1} \subset D_n$, сходящаяся к своему ядру D_{z_0} относительно нек-рой точки z_0, причем область D_{z_0} ограничена жордановой кривой; тогда последовательность функций $\{w=f_n(z)\}$, конформно отображающих области D_n на круг $\Delta=\{w\colon |w|<1\}$, $f_n(z_0)=0$, $f_n'(z_0)>0$, равномерно сходится в замкнутой области $\overline{D}_{z_0}$ к функции $w=f(z)$, конформно отображающей D_{z_0} на Δ, причем $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$.

К. т., полученная Р. Курантом [1], дополняет *Каратеодори теорему*.

Лит.: [1] Courant R., «Gott. Nachr.», 1914, S. 101—109; 1922, S. 69—70; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968. *Е. Д. Соломенцев.*

КУРАНТА — ФРИДРИХСА — ЛЕВИ УСЛОВИЕ — необходимое условие устойчивости разностных схем в классе бесконечно дифференцируемых коэффициентов. Пусть $\Omega(P)$ — область зависимости значения решения по какому-либо из коэффициентов (в частности, им может быть начальное условие), $\Omega_h(P)$ — область зависимости значения $u_h(P)$ решения соответствующего разностного уравнения. Для сходимости $u_h(P)\to u(P)$ необходимо, чтобы при мельчении шага h область зависимости разностного уравнения покрывала область зависимости дифференциального уравнения

$$\Omega(P)\subset \varliminf_{h\to 0}\Omega_h(P).$$

Лит.: [1] Курант Р., Фридрихс К., Леви Г., «Успехи матем. наук», 1940, в. 8, с. 125—60; [2] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, М., 1973. *Н. С. Бахвалов.*

КУРАТОВСКОГО ГРАФИК — плоский одномерный континуум, во всех точках (кроме счетного числа) имеющий размерность 0. Построен К. Куратовским [1] в связи с задачей о размерности подмножества $N(X)$ данного n-мерного пространства X, состоящего из всех точек $z\in X$, в к-рых

$$\operatorname{ind}_z X-\operatorname{ind} X=n$$

($N(X)$ наз. размерным ядром пространства X). Для метрич. пространства со счетной базой X всегда

$$\operatorname{ind} N(X)\geqslant \operatorname{ind} X-1,$$

и К. г. показывает, что этот результат — окончательный.

К. г. строится так. Пусть Π — *канторово множество* на отрезке $[0, 1]$ оси абсцисс декартовой системы координат на плоскости. Для каждого

$$x\in\Pi,\quad x=\frac{2}{3^{k_1}}+\frac{2}{3^{k_2}}+\ldots,\ k_1<k_2<\ldots,$$

полагается

$$f(x)=\frac{(-1)^{k_1}}{2}+\frac{(-1)^{k_2}}{2}+\ldots$$

и $f(0)=0$. График этой функции, т. е. множество K точек $(x, f(x))$, $x\in\Pi$, плоскости и есть К. г. Если z — правый конец смежного к Π интервала, то $\operatorname{ind}_z K=1$, а во всех остальных точках — $\operatorname{ind}_z K=0$.

Лит.: [1] Kuratowski K., «Mathematica», 1932, t. 6; [2] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973. *А. А. Мальцев.*

КУРАТОВСКОГО ПОЛИЭДР — некоторая одномерная фигура в трехмерном пространстве. К. п. первого типа состоит из ребер тетраэдра и еще одного отрезка, соединяющего середины непересекающихся ребер. К. п. второго типа есть полный граф, натянутый на вершины тетраэдра и нек-рую точку, взятую внутри него. Необходимое и достаточное условие, при выполнении к-рого граф G является плоским, состоит в том, что граф G не должен содержать К. п. первого или вто-

рого типа (теорема Куратовского — Понтрягина).

Лит.: [1] Kuratowski K., «Fund. math.», 1930, t. 15, p. 271—83; [2] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973. *Б. А. Ефимов.*

КУРАТОВСКОГО — КНАСТЕРА ВЕЕР — вполне несвязное плоское множество, становящееся связным после прибавления к нему одной точки. Построено К. Куратовским и Б. Кнастером [1] следующим образом. Пусть C — канторово совершенное множество, P — подмножество множества C, состоящее из точек $p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ таких, что, начиная с нек-рого n, числа a_n либо все равны нулю, либо все равны двум, Q — множество остальных точек. Пусть, далее, a — точка на плоскости с координатами $(^1/_2,\ ^1/_2)$, $L(c)$ — отрезок, соединяющий переменную точку c множества C с точкой a. Пусть, наконец, $L^*(p)$ — множество всех точек отрезка $L(p)$, имеющих рациональные ординаты для $p \in P$, и $L^*(q)$ — множество всех точек отрезка $L(q)$, имеющих иррациональные ординаты для $q \in Q$. Тогда

$$X = \left(\bigcup_{p \in P} L^*(p)\right) \cup \left(\bigcup_{q \in Q} L^*(q)\right)$$

связно, хотя $X \setminus a$ вполне несвязно, т. е. X есть К.— К. в.

Лит.: [1] Knaster B., Kuratowski K., «Fund. math.», 1921, t. 2, p. 206—55. *Л. Г. Замбахидзе.*

КУСОЧНО ЛИНЕЙНАЯ ТОПОЛОГИЯ — раздел топологии, изучающий полиэдры. Под полиэдром понимается прежде всего подмножество топологического векторного пространства, представимое конечным или локально конечным объединением выпуклых многогранников ограниченной размерности, а также топологич. полиэдры с фиксированной кусочно линейной структурой (см. ниже). Локальная конечность означает, что каждая точка имеет в объемлющем пространстве окрестность, пересекающуюся только с конечным числом элементов объединения. Понятие полиэдра является промежуточным между понятиями топологич. пространства и симплициального комплекса (последнее вводится для того, чтобы сделать более конструктивным изучение сначала пространств, гомеоморфных полиэдрам, а затем и более общих пространств). Пространство, гомеоморфное полиэдру, наз. топологическим полиэдром (t-полиэдром). К классу t-полиэдров относятся важнейшие объекты конечномерной топологии, прежде всего сглаживаемые многообразия.

Имея в виду финитизацию изучения полиэдров, рассматриваются следующие четыре категории τ, $\mathcal{P}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$. В τ объектами служат t-полиэдры, а морфизмами — непрерывные отображения. В $\mathcal{P}$ объекты — полиэдры, а морфизмы — кусочно линейные отображения (pl-отображения), т. е. отображения, линейно переводящие выпуклые многогранники нек-рого покрытия прообраза в многогранники нек-рого покрытия образа. Объектами в $\mathcal{K}$ являются симплициальные комплексы, т. е. полиэдры с фиксированным правильным его покрытием симплексами — таким покрытием, что два симплекса могут пересекаться только по общей грани; морфизмы в $\mathcal{K}$ — симплициальные отображения, т. е. pl-отображения, линейно переводящие каждый симплекс прообраза на нек-рый симплекс образа. Наконец, $\mathcal{A}$ состоит из абстрактных комплексов (a-комплексов) и их симплициальных отображений. a-комплекс в $\mathcal{A}$ есть не более чем счетное множество $\overline{A}$ с выделенной системой его конечных подмножеств ограниченной мощности, к-рые наз. его симплексами, удовлетворяющей условиям: 1) с каждым симплексом σ выделяются и все содержащиеся в нем подмножества — грани σ; 2) каждый симплекс

служит гранью не более чем конечного числа других симплексов. Отображение множеств, на к-рых определено строение a-комплекса, наз. симплициальным, если оно переводит симплексы прообраза в симплексы образа. Размерностью симплекса в a-комплексе наз. уменьшенное на единицу число его элементов. Каждый элемент множества $\overline{A}$ является гранью комплекса A и наз. его вершиной. Удобно считать, что каждый a-комплекс содержит пустой симплекс, обозначаемый 1.

Имеются функторы забывания

$$\tau \xleftarrow{t} \mathcal{P} \xleftarrow{p} \mathcal{K} \xrightarrow{a} \mathcal{A}.$$

Именно, полиэдр определяет топологич. пространство, а p-отображение непрерывно; это задает t, $t(p)$ наз. пространством полиэдра P. Каждый комплекс определяет полиэдр, а симплициальное отображение комплексов есть pl-отображение; это задает p, $p(K)$ наз. телом комплекса и обозначается $|K|$. Наконец, множество вершин комплекса K имеет выделенные подмножества — множества вершин симплексов K, что определяет a-комплекс, причем симплициальное отображение комплексов определяет симплициальное отображение соответствующих a-комплексов; это задает a, $a(K)$ наз. схемой комплекса K. Построенные функторы не имеют естественных обращений. Они, однако, становятся эквивалентностями, если перейти к факторкатегориям. Естественные изоморфизмы наз. соответственно гомеоморфизмом в τ, pl-гомеоморфизмом в $\mathcal{P}$, симплициальным изоморфизмом в $\mathcal{K}$ и в $\mathcal{A}$. Каждому a-комплексу следующим образом можно поставить в соответствие его реализации. В топологич. векторном пространстве R выбирается множество точек b_i во взаимно однозначном соответствии с вершинами a-комплекса A, к-рые находятся в *общем положении* в R (для этого достаточно, напр., чтобы размерность R была больше удвоенной размерности A), причем в ограниченной части пространства может лежать только конечное число точек. Если на каждое множество точек b_i, отвечающих одному симплексу в A, натянуть симплекс в R, то объединение этих симплексов дает комплекс, схемой к-рого служит A; он и наз. реализацией a-комплекса. Все реализации одного и того же a-комплекса изоморфны, так что функтор a устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных комплексов в K и в $\mathcal{A}$. Любой полиэдр P является телом нек-рого комплекса K, и в этом случае K наз. прямолинейной триангуляцией P, или просто триангуляцией, схема K наз. абстрактной триангуляцией P. Для pl-отображения $f: P \to Q$ существуют триангуляции K для P и L для Q, так что f симплициально отображает K в L. Различные триангуляции полиэдра не обязательно изоморфны, вследствие чего вводится более грубое отношение эквивалентности в $\mathcal{K}$. Подразделением комплекса K_1 наз. комплекс K_2 такой, что $|K_2| = |K_1|$, и каждый симплекс K_2 лежит в нек-ром симплексе K_1. Комплекс K комбинаторно эквивалентен K', если K и K' имеют изоморфные подразделения. Комплексы K и K' комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда $|K|$ pl-гомеоморфно $|K'|$. Иначе говоря, функтор p устанавливает естественное соответствие между классами комбинаторно эквивалентных комплексов и pl-гомеоморфных полиэдров. Функтор t эпиморфен (по определению). Полиэдр P наз. прямолинейной реализацией t-полиэдра $t(P)$. Предположение о том, что любые две реализации t-полиэдра pl-гомеоморфны между собой, известное как основная гипотеза комбинаторной топологии

(Hauptvermutung), оказалось неверным [3]. В связи с этим говорят о pl-строениях на t-полиэдрах: pl-строение задается гомеоморфизмом $\tau : T \to P$ t-полиэдра на полиэдр, причем два гомеоморфизма $\tau_1 : T \to P$ и $\tau_2 : T \to P_2$ определяют одну и ту же структуру, если $\tau_1\tau_2^{-1}$ является pl-гомеоморфизмом; τ_1 и τ_2 определяют эквивалентные (но не обязательно совпадающие) структуры, если P_1 и P_2 pl-гомеоморфны. t-полиэдр с фиксированной pl-структурой также наз. полиэдром. Наконец, отношение комбинаторной эквивалентности в K приводит с помощью функтора a к новому отношению эквивалентности в $\mathcal{A}$. Для выражения этого отношения внутренними средствами в $\mathcal{A}$ удобна операция звездного подразделения, определяемая следующим образом. Джойном (соединением) двух симплексов $\sigma_1^{n_1}$ и $\sigma_2^{n_2}$, вершины к-рых находятся в общем положении в векторном пространстве R, наз. их выпуклая оболочка; это — симплекс размерности n_1+n_2-1, обозначаемый $\sigma_1*\sigma_2$. Джойн σ с пустым симплексом 1 совпадает с σ. Джойном двух комплексов K_1 и K_2, расположенных в топологич. векторном пространстве R так, что каждый симплекс K_1 находится в общем положении с каждым симплексом K_2, наз. комплекс, составленный из попарных джойнов симплекса из K_1 и симплекса из K_2 (считается, что 1 лежит и в K_1 и в K_2). Звездой симплекса σ в комплексе K наз. подкомплекс $St_K\sigma$, состоящий из всех замкнутых симплексов, имеющих σ своей гранью. Звезда может быть представлена как джойн σ и нек-рого комплекса $lk_K\sigma$, наз. линком (или поясом) σ в K и составленного из тех симплексов звезды, к-рые не пересекают σ. Пусть x — произвольная точка внутри σ. Заменой в K симплексов звезды симплексами вида $x*\sigma_1*\sigma_2$, где σ_1— симплекс из $lk_K\sigma$, а σ_2 — одна из граней σ, при сохранении остальных симплексов получается подразделение K, к-рое и наз. звездным подразделением K с центром в σ и обозначается σK. Два комплекса комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют изоморфные подразделения, получаемые последовательностями звездных подразделений (теорема Александера, [4]).

Понятие звездного подразделения переносится в категорию $\mathcal{A}$. Для этого комплексы записываются в виде многочленов специального вида: переменными служат вершины комплекса, а одночлены — его симплексы, включая 1. При сложении многочленов повторяющиеся симплексы заменяются одним одночленом. Умножение многочленов (определенное, только если они не имеют общих переменных) интерпретируется как джойн соответствующих комплексов. Пусть фиксирован симплекс σ в комплексе A, и A записан в виде $A=\sigma*lk_K\sigma+A_1$, где σ вынесено за скобки из объединения тех одночленов, к-рые содержат σ, т. е. входят в звезду $St_A\sigma$. То, что остается в скобке, есть линк σ; A_1 — объединение остальных симплексов. После замены σ на $x*\partial\sigma$, где $\partial\sigma$ — объединение граней σ, кроме самого σ, но включающее 1, получится новый комплекс $\sigma A = x*\partial\sigma*lk_A\sigma+A_1$. Переход $A \to \sigma A$, а также и сам σA, наз. (абстрактным) звездным подразделением A. Операции звездного подразделения в K и в $\mathcal{A}$ согласованы с действием функтора a, и можно представить $\mathcal{A}$ как формальную систему со счетным алфавитом, с многочленами указанного вида в качестве конструктивных объектов и звездным подразделением в качестве элементарных переходов от одного объекта к другому. Вместе с тем в $\mathcal{A}$ становятся оправданными вопросы об алгоритмической разрешимости. В частности, неразрешим вопрос о комбинаторной эквивалентности a-комплексов (и, следовательно, о pl-гомеоморфизме полиэдров) (теорема Маркова, [5]).

Финитизм комплексов первоначально имел целью введение инвариантов: инвариант определяется по триангуляции, а его инвариантность проверяется только при элементарных преобразованиях (моделью здесь служило введение эйлеровой характеристики). Однако этот метод не получил широкого распространения в связи с тем, что, во-первых, из-за нарушения Hauptvermutung он не дает доказательства топологич. инвариантности, а во-вторых, вычисление инвариантов по триангуляции является часто безнадежной задачей. Более или менее систематически этот путь применяется в топологии трехмерных многообразий и в теории узлов. В гомотопической топологии это привело к технике *клеточных разбиений*. Развитие идеи a-комплексов привело к теории *полусимплициальных комплексов*, позволяющих в гомотопич. топологии избегать несущественных топологич. трудностей.

Основным объектом К. л. т. являются pl-многообразия, играющие важную роль соединяющего звена между дифференцируемыми и топологич. многообразиями. Понятие многообразия естественно вводится в каждую из четырех категорий τ, $\mathcal{P}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$. В τ это просто топологич. многообразия, к-рые могут быть триангулированы, в $\mathcal{P}$ это pl-многообразия — полиэдры, каждая точка к-рых имеет окрестность, pl-гомеоморфную кубу соответствующей размерности, в $\mathcal{K}$ и в $\mathcal{A}$ рассматриваются соответственно комбинаторные и формальные многообразия — комплексы (a-комплексы), звезды вершин к-рых комбинаторно эквивалентны стандартной триангуляции симплекса, состоящей из самого симплекса и всех его граней. В классе pl-многообразий также не верна Hauptvermutung. Построен пример некомбинаторной триангуляции топологич. многообразия (см. [7], [8]), в к-ром вложения нек-рых симплексов не локально плоски. Если предположить локальную плоскостность всех симплексов и, сверх того, выполнимость *Пуанкаре гипотезы* в размерностях 3 и 4, то можно доказать, что триангуляция многообразия является комбинаторным многообразием. Наконец, не выяснен (1982) вопрос о триангулируемости произвольного (метризуемого) многообразия, хотя построены примеры многообразий без комбинаторной триангуляции.

Лит.: [1] Рурк К., Сандерсон Б., Введение в кусочно линейную топологию, пер. с англ., М., 1974; [2] Манкрс Дж., Элементарная дифференциальная топология, в кн.: Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979, с. 270—359; [3] Milnor J., «Ann. of Math.», 1961, v. 74, p. 575—90; [4] Alexander J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1926, v. 28, p. 301—29; [5] Марков А. А., «Докл. АН СССР», 1958, т. 121, № 2, с. 218—20; [6] Kirby R., Siebenmann L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 75, p. 742—49; [7] Edwards R., «Notices Amer. Math. Soc.», 1975, v. 22, № 2, A—334. *А. В. Чернавский.*

КУТТА — МЕРСОНА МЕТОД — пятиэтапный метод Рунге — Кутта 4-го порядка точности. Применительно к задаче Коши

$$y'(x)=f(x,\ y(x)),\ x_0\leqslant x\leqslant X,\ y(x_0)=y_0, \qquad (1)$$

метод имеет вид:

$$k_1=hf(x_0,\ y_0),\quad y_0=y(x_0),$$

$$k_2=hf\left(x_0+\frac{1}{3}h,\ y_0+\frac{1}{3}k_1\right),$$

$$k_3=hf\left(x_0+\frac{1}{3}h,\ y_0+\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{6}k_2\right),$$

$$k_4=hf\left(x_0+\frac{1}{2}h,\ y_0+\frac{1}{8}k_1+\frac{3}{8}k_2\right),$$

$$k_5=hf\left(x_0+h,\ y_0+\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{2}k_3+2k_4\right),$$

$$y^1(x_0+h)=y_0+\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{2}k_3+2k_4,$$

$$y^2(x_0+h)=y_0+\frac{1}{6}k_1+\frac{2}{3}k_4+\frac{1}{6}k_5.$$

Величина $R = 0{,}2|y^1 - y^2|$ служит для оценки погрешности метода и для автоматического выбора шага интегрирования. Если ε — предписанная точность вычислений, то шаг интегрирования выбирается следующим образом. Берется нек-рый начальный шаг и производятся вычисления по формулам (2). Вычисляется величина R. При $R > \varepsilon$ шаг интегрирования уменьшается в два раза. При $R \leqslant \varepsilon/64$ шаг увеличивается вдвое. Если же $\varepsilon/64 < R \leqslant \varepsilon$, то шаг считается выбранным правильно. После этого в качестве начальной точки x_0 берется точка $x_0 + h$ и весь процесс повторяется снова. В качестве приближенного решения выступает величина y^2. Величина y^1 носит вспомогательный характер.

В связи с тем, что

$$y^2(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{6} k_1 + \frac{2}{3} k_4 + \frac{1}{6} hf(x_0 + h, y^1(x_0 + h)),$$

то есть формула для вычисления y^1 является как бы «вложенной» в формулу для вычисления y^2, описанный выше метод оценки погрешности и выбора шага интегрирования наз. м е т о д о м в л о ж е н н ы х ф о р м.

Имеются стандартные программы К.— М. м. на языке алгол [1], [2].

Лит.: [1] C h r i s t i a n s e n J., «Numer. Mach.», 1970, Bd 14, S. 317—24; [2] L u k e h a r t P. M., «Communs Assoc. Comput. Math.», 1963, v. 6, № 12, p. 737—38; [3] F o x L., Numerical solution of ordinary and partial differential equations, Oxf., 1962; [4] L a n c e G. N., Numerical methods for high speed computers, L., 1960.

В. В. Поспелов.

КЭЛЕРА МЕТРИКА, к э л е р о в а м е т р и к а,— *эрмитова метрика* на комплексном многообразии, фундаментальная форма ω к-рой замкнута, т. е. удовлетворяет условию $d\omega = 0$. П р и м е р ы К. м.: эрмитова метрика $\sum_{k=1}^{n} |dz_k|^2$ в пространстве $\mathbb{C}^n$, *Фубини — Штуди метрика* в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$, метрика Бергмана (см. *Бергмана ядро функция*) в ограниченной области пространства $\mathbb{C}^n$. К. м. на комплексном многообразии индуцирует К. м. на любом его подмногообразии. Всякая эрмитова метрика на одномерном многообразии кэлерова.

Понятие К. м. было впервые рассмотрено Э. Кэлером [1]. В то же время в алгебраич. геометрии систематически использовалась метрика на проективных алгебраич. многообразиях, индуцированная метрикой Фубини — Штуди (см. [5]). Эта метрика является м е т р и к о й Х о д ж а, т. е. ее фундаментальная форма имеет целочисленные периоды.

Эрмитова метрика h на комплексном многообразии является кэлеровой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет любому из следующих условий: параллельный перенос вдоль любой кривой (относительно связности Леви-Чивита) является комплексным линейным отображением, т. е. перестановочен с оператором комплексной структуры; соответствующий метрике h комплексный оператор Лапласа $\square$ на дифференциальных формах удовлетворяет условию $\square = \square$, т. е. *Лапласа оператор* Δ совпадает с $2\square$; в окрестности каждой точки существуют локальные координаты, в к-рых матрица метрики h совпадает с единичной матрицей с точностью до бесконечно малых 2-го порядка (см. [3], [6]).

Лит.: [1] K ä h l e r E., «Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg», 1933, Bd 9, S. 173—86; [2] В е й л ь А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [3] Л и х н е р о в и ч А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [4] У э л л с Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [5] H o d g e W. V. D., The theory and applications of harmonic integrals, 2 ed., Camb., 1952; [6] Г р и ф ф и т с Ф. [и др.], «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 119—52.

А. Л. Онищик.

КЭЛЕРОВА ФОРМА — фундаментальная форма *Кэлера метрики* на комплексном многообразии. К. ф. является гармонической вещественной дифференциальной формой типа (1, 1). Дифференциальная форма ω на комплексном многообразии M служит К. ф. для

нек-рой кэлеровой метрики тогда и только тогда, когда ω в окрестности U каждой точки $x \in M$ записывается в виде

$$\omega = i\partial\bar{\partial}\, p = i\sum \frac{\partial^2 p}{\partial z_\alpha\, \partial \bar{z}_\beta}\, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta,$$

где p — строго плюрисубгармонич. функция в U, $z_1, \ldots, z_n$ — локальные комплексные координаты.

К. ф. наз. ф о р м о й Х о д ж а, если она соответствует метрике Ходжа, т. е. имеет целочисленные периоды или, что то же, определяет целочисленный класс когомологий.

Лит.: [1] У э л л с Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976.

А. Л. Онищик.

КЭЛЕРОВО МНОГООБРАЗИЕ — комплексное многообразие, на к-ром можно ввести *Кэлера метрику*. Иногда такие многообразия наз. м н о г о о б р а з и я м и к э л е р о в а т и п а, а термин «К. м.» оставляется для многообразий, снабженных кэлеровой метрикой [1]. Всякое подмногообразие К. м. является К. м. В частности, все проективные комплексные алгебраич. многообразия без особых точек являются К. м., причем кэлерова метрика на них индуцируется *Фубини — Штуди метрикой* на комплексном проективном пространстве. Аналогично, всякое подмногообразие в аффинном пространстве $\mathbb{C}^n$ (в частности, всякое *Штейна многообразие*) является кэлеровым. Другие примеры К. м. получаются, если рассматривать факторпространство M/Γ К. м. M по дискретной группе аналитич. автоморфизмов Γ, сохраняющих кэлерову метрику. В частности, любой *комплексный тор* есть К. м. Всякое одномерное комплексное многообразие кэлерово.

Теория гармонич. форм на компактном К. м. дает следующие свойства групп когомологий де Рама и Дольбо на таком многообразии M (см. [1], [2], а также [5], где эти свойства были впервые доказаны для проективных алгебраич. многообразий):

$$H^r(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus \sum_{p+q=r} H^{p,q}(M),$$

$$H^{p,q}(M) \cong H^{q,p}(M),$$

$$\dim H^{2r+1}(M, \mathbb{C}) \text{ четна},$$

$$H^{2r}(M, \mathbb{C}) \neq 0 \text{ при } r = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} M.$$

Голоморфные формы на компактном К. м. замкнуты. В частности,

$$H^1(M, \mathbb{C}) \cong A^1 \oplus \overline{A}^1,$$

где A^1 — пространство всех голоморфных 1-форм на M. В случае $\dim_{\mathbb{C}} M = 1$ число

$$\dim A^1 = \tfrac{1}{2} \dim H^1(M, \mathbb{C})$$

есть род компактной римановой поверхности M. На указанных выше свойствах основано построение примеров некэлеровых компактных многообразий, простейшим из к-рых является поверхность Хопфа, диффеоморфная $S^1 \times S^3$.

К. м. M наз. м н о г о о б р а з и е м Х о д ж а, если кэлерова метрика на M является метрикой Ходжа. Всякое проективное алгебраич. многообразие без особых точек является многообразием Ходжа относительно метрики, индуцированной метрикой Фубини — Штуди. Обратно, всякое компактное комплексное многообразие M, снабженное кэлеровой метрикой Ходжа η, допускает биголоморфное вложение в комплексное проективное пространство, причем метрика на M, индуцированная метрикой Фубини — Штуди, имеет вид $k\eta$, где k — натуральное число [1], [3] (т е о р е м а К о д а и р ы о п р о е к т и в н о м в л о ж е н и и). Таким образом, компактное комплексное многообразие

M изоморфно проективному алгебраич. многообразию тогда и только тогда, когда M — многообразие Ходжа. Другая форма этого критерия состоит в том, что компактное комплексное многообразие M является проективным алгебраич. многообразием тогда и только тогда, когда на M существует *отрицательное расслоение* на комплексные прямые. Теорема Кодаиры допускает обобщение на комплексные пространства (см. [4], [6]). Компактные К. м., не являющиеся многообразиями Ходжа, можно найти среди двумерных комплексных торов. Напр., этим свойством обладает тор $\mathbb{C}^2/\Gamma$, где Γ — решетка, натянутая на векторы $(1,0)$, $(0,1)$, $(\sqrt{-2}, \sqrt{-3})$, $(\sqrt{-5}, \sqrt{-7})$ (см. [1], [3]). Другое необходимое и достаточное условие проективности n-мерного компактного кэлерова многообразия M состоит в наличии на M n алгебраически независимых мероморфных функций.

Всякое некомпактное полное К. м., имеющее положительную секционную кривизну, является многообразием Штейна. Тем же свойством обладает любое односвязное полное К. м. неположительной секционной кривизны [7].

Лит.: [1] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [2] Вейль А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [3] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [5] Hodge W. V. D., The theory and applications of harmonic integrals, 2 ed., Camb., 1952; [6] Грауэрт Г., в кн.: Комплексные пространства. Сб. пер., М., 1965, с. 45—104; [7] Greene R. E., Wu H., в сб.: Value-Distribution Theory. Part A, N. Y., 1974, p. 145—67.

А. Л. Онищик.

КЭЛИ АЛГЕБРА — алгебра *Кэли чисел.*

КЭЛИ ПОВЕРХНОСТЬ — алгебраическая линейчатая поверхность, являющаяся поверхностью переноса с ∞^1 сетями переноса. Ее уравнение в декартовых координатах

$$x^3 - 6xy + 6z = 0.$$

Название в честь А. Кэли [1], рассматривавшего эту поверхность как геометрич. иллюстрацию своих исследований по теории пучков бинарных квадратичных форм.

Лит.: [1] Cayley A., «Philos. Trans. Roy. Soc. London», 1858, v. 148, p. 415—27; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

М. И. Войцеховский.

КЭЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ линейного (диссипативного) оператора A с областью определения $\mathrm{Dom}A$, плотной в гильбертовом пространстве H,— оператор $C_A = (A - iI)(A + iI)^{-1}$, определенный на подпространстве $\mathrm{Dom}C_A = (A + iI)\mathrm{Dom}A$. Матричный вариант такого преобразования рассматривал А. Кэли (A. Cayley). К. п. устанавливает соответствие между свойствами операторов A, чей спектр $\sigma(A)$ «близок» к действительной прямой, и операторов с околоунитарным спектром (близким к окружности $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$). Так, имеют место утверждения: 1) если A — линейный *диссипативный оператор*, то C_A — сжатие (т. е. $\|C_A x\| \leqslant \|x\|$, $x \in \mathrm{Dom}A$) и $\mathrm{Ker}(I - C_A) = \{0\}$; 2) если T — сжатие, $\mathrm{Ker}(I - T) = \{0\}$ и $(I - T)\mathrm{Dom}T$ плотно в H, то $T = C_A$ при нек-ром линейном диссипативном операторе A: именно $A = i(I + T)(I - T)^{-1}$; 3) симметричность A равносильна изометричности (унитарности) C_A; 4) $\sigma(A) = \omega(\sigma(C_A))$, где $\omega(\zeta) = i(1 + \zeta)(1 - \zeta)^{-1}$, в частности ограниченность A эквивалентна тому, что $1 \notin \sigma(C_A)$; 5) если γ — идеал операторов в H, то из $A - B \in \gamma$ следует $C_A - C_B \in \gamma$; если же A, B — ограниченные операторы, то верно и обратное: из $C_A - C_B \in \gamma$ следует $A - B \in \gamma$. К. п. устанавливает соответствие и между нек-рыми другими характеристиками операторов A и C_A: классификациями частей спектра, кратностями спектров, структурами инвариантных подпро-

странств, функциональными исчислениями, спектральными разложениями и т. д. Так, если A — *самосопряженный оператор* с разложением единицы $\{E_t\}$, $t\in\mathbb{R}$, то $\{F_s\}$, $F_s = E_t$ при $s = -2\operatorname{arctg} t$, — разложение единицы для C_A и

$$A=\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\,dF_s.$$

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; [2] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с англ., М., 1970.
Н. К. Никольский.

КЭЛИ ТАБЛИЦА — квадратная таблица умножения произвольного конечного *группоида*. Заглавная строка таблицы заполняется в нек-ром порядке символами, обозначающими различные элементы группоида, теми же символами и в том же порядке заполняется заглавный столбец. Если группоид обладает единицей, то единичный символ, как правило, помещается на первом месте. Если на i-м месте в заглавном столбце стоит символ a_i и на j-м месте в заглавной строке — символ a_j, то на пересечении i-й строки и j-го столбца записывается символ, обозначающий произведение a_ia_j. К. т. введена А. Кэли (A. Cayley) в 1854 для *групп*.

Для того чтобы К. т. определяла нек-рую *квазигруппу*, необходимо и достаточно, чтобы в каждой строке (столбце) таблицы, не считая заглавных, каждый символ встречался ровно один раз. К. т. группы, кроме того, должна удовлетворять следующему условию: на местах, соответствующих произведениям $(a_ia_j)a_k$ и $a_i(a_ja_k)$, стоят одинаковые элементы. Симметричные относительно главной диагонали К. т. соответствуют коммутативным бинарным операциям; в частности, таковы К. т. *абелевых групп*.

Лит.: [1] Гроссман И., Магнус В., Группы и их графы, пер. с англ., М., 1971; [2] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972.
Н. Н. Вильямс.

КЭЛИ ФОРМА — форма от $(n+1)(N-1)$ переменных, где $n=\dim X$, а X — замкнутое алгебраическое подмногообразие N-мерного проективного пространства $\mathbb{P}^N$, однозначно с точностью до умножения на константу определяемая по X и сама однозначно определяющая X. Точное определение К. ф. состоит в следующем. Пусть $\tilde{\mathbb{P}}^N$ есть N-мерное проективное пространство всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}^N$, Γ — подмножество в многообразии

$$\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N\times\ldots\times\tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}\times X,$$

состоящее из всех таких наборов $(\pi_1,\ldots,\pi_{n+1},x)$, что точка $x\in X$ лежит в пересечении гиперплоскостей $\pi_1,\ldots,\pi_{n+1}$ и

$$\varphi:\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N\times\ldots\times\tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}\times X\to\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N\times\ldots\times\tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}$$

— естественная проекция. Тогда $\varphi(\Gamma)$ есть неприводимое подмногообразие коразмерности 1 в

$$\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N\times\ldots\times\tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}$$

и потому $\varphi(\Gamma)$ является многообразием нулей нек-рой формы F_X на

$$\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N\times\ldots\times\tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}.$$

Всегда можно считать, что F_X не имеет кратных множителей, и это условие определяет F_X по X однозначно с точностью до умножения на константу. Наобо-

рот, F_X однозначно определяет множество всевозможных наборов $n+1$ гиперплоскостей в $\mathbb{P}^N$, пересекающихся по точкам из X, и потому F_X однозначно определяет X. Форма F_X и наз. ф о р м о й К э л и многообразия X.

Часто К. ф. наз. также ф о р м о й Ч ж о у, или а с с о ц и р о в а н н о й ф о р м о й м н о г о о б р а з и я X. Идея определения X комплексом линейных подпространств размерности $N-n-1$ в $\mathbb{P}^N$, пересекающих X, восходит к А. Кэли [5], к-рый применил ее для случая $n-1$, $N=3$. Коэффициенты К. ф. наз. к о о р д и н а т а м и Ч ж о у м н о г о о б р а з и я X.

К. ф. F_X однородна по каждой из $n+1$ систем координат пространства

$$\underbrace{\tilde{\mathbb{P}}^N \times \ldots \times \tilde{\mathbb{P}}^N}_{n+1}$$

(i-я система координат — это система координат i-го сомножителя указанного пространства). Степени однородности F_X по каждой из систем координат совпадают. Эта общая степень d обозначается через $\deg X$, наз. с т е п е н ь ю п о д м н о г о о б р а з и я X, и имеет следующий геометрич. смысл: d есть максимум числа точек пересечения X со всевозможными $(N-n)$-мерными линейными пространствами L в $\mathbb{P}^N$, для к-рых $X \cap L$ — конечное множество (т. е. d — это число точек пересечения X с «общим» $(N-n)$-мерным линейным подпространством).

Множество всех форм (рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевую константу) от $n+1$ групп переменных по $N+1$ переменных, имеющих степень d по каждой группе, образует проективное пространство $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$ нек-рой размерности $\nu_{N,n,d}$. К. ф. F_X можно отождествить с точкой $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$. Множество $C_{N,n,d}$ всех точек в $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$, являющихся К. ф. n-мерных замкнутых подмногообразий степени d в $\mathbb{P}^N$, есть квазипроективное многообразие; оно параметризует семейство всех таких подмногообразий, причем указанное семейство является алгебраическим относительно этой параметризации. В общем случае $C_{N,n,d}$ не замкнуто в $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$.

Конструкция К. ф. естественно распространяется на замкнутые n-мерные циклы в $\mathbb{P}^N$, т. е. формальные линейные комбинации $m_1X_1 + \ldots + m_sX_s$ замкнутых n-мерных подмногообразий $X_1, \ldots, X_s$ в $\mathbb{P}^N$ с целыми коэффициентами $m_i > 0$. А именно, полагают

$$\deg X = \sum_{i=1}^{s} m_i \deg X_i$$

и $F_X = F_{X_1}^{m_1} \ldots F_{X_s}^{m_s}$. Множество $\overline{C_{N,n,d}}$ всех К. ф. n-мерных циклов степени d в $\mathbb{P}^N$ замкнуто в $\mathbb{P}^{\nu_{N,n,d}}$.

Изучение К. ф. и свойств многообразий $C_{N,n,d}$ и $\overline{C_{N,n,d}}$ является важным моментом в проблеме классификации подмногообразий и циклов в $\mathbb{P}^N$. Первый шаг в этой классификации состоит в изучении разбиения $\overline{C_{N,n,d}}$ на неприводимые компоненты. Напр., для $N=3$, $n=1$, $d=2$ (кривые степени 2 в трехмерном пространстве) многообразие $\overline{C_{3,1,2}}$ состоит из двух неприводимых компонент размерности 8. Первая компонента соответствует плоским кривым второго порядка, а вторая — парам прямых. Бирациональная классификация многообразий $C_{N,n,d}$ является важной проблемой (во всех известных примерах такие многообразия рациональны).

Лит.: [1] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Х о д ж В., П и д о Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1954; [3] S a m u e l P., Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, 2 éd., B., 1967; [4] C h o w W.-L., v a n d e r W a e r d e n

B. L., «Math. Ann.», 1937, Bd 113, S. 692—704; [5] Cayley A., Collected mathematical papers, v. 4, Cambr., 1891, p. 446—55.
В. Л. Попов.

КЭЛИ ЧИСЛО — *гиперкомплексное число*, а именно, элемент 8-мерной алгебры над полем действительных чисел (алгебры Кэли), впервые рассмотренной А. Кэли (A. Cayley). Алгебра Кэли может быть получена применением процесса Кэли—Диксона из алгебры *кватернионов* (см. *Кэли—Диксона алгебра*). Она является единственной 8-мерной действительной альтернативной алгеброй без делителей нуля (см. *Фробениуса теорема*). Алгебра Кэли является алгеброй с однозначным делением и с единицей, альтернативной, но неассоциативной и **не**коммутативной.

Лит.: [1] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.
Н. Н. Вильямс.

КЭЛИ — ДАРБУ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными третьего порядка, к-рому должна удовлетворять функция $u(x_1, x_2, x_3)$ для того, чтобы семейство поверхностей $u(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ могло быть дополнено до трижды ортогональной системы поверхностей. К. – Д. у. может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{22} & c_{33} & 2c_{12} & 2c_{23} & 2c_{31} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & 2u_{12} & 2u_{23} & 2u_{31} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 & 0 & u_3 \\ 0 & u_2 & 0 & u_1 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 & u_2 & u_1 \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{3} (u_k u_{\alpha\beta k} - 2u_{\alpha k} u_{\beta k}),$$

а

$$u_k = u_{x_k}, \ \ldots, \ u_{\alpha\beta\gamma} = u_{x_\alpha x_\beta x_\gamma}.$$

К.— Д. у. получено в раскрытом виде А. Кэли [1]. В приведенном виде выведено Г. Дарбу [2].

Лит.: [1] Cayley A., «C. r. Acad. sci.», 1872, t. 75, p. 324—30; 381—85; [2] Darboux G., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes, P., 1898; [3] Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2, М.— Л., 1948.
Е. В. Шикин.

КЭЛИ — ДИКСОНА АЛГЕБРА — альтернативная 8-мерная алгебра, получающаяся из алгебры обобщенных *кватернионов* применением процесса Кэли—Диксона. Этот процесс заключается в построении по заданной алгебре A новой алгебры A_1 (удвоенной размерности) и является обобщением процесса удвоения (см. *Гиперкомплексное число*). А именно, пусть A — алгебра с единицей 1 над полем F, δ — некоторый ненулевой элемент из F и задано F-линейное отображение $x \to x^*$, являющееся инволюцией, причем

$$x + x^* = \operatorname{tr}(x) \in F, \ \ xx^* = n(x) \in F.$$

На прямой сумме линейных пространств $A \oplus A = A_1$ формулой

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1 - \delta b_2 a_2^*, \ a_1^* b_2 + b_1 a_2)$$

определяется умножение, превращающее A_1 в алгебру. Алгебра A вкладывается в A_1 в качестве подалгебры: $x \to (x, 0)$ и инволюция $*$ продолжается до инволюции в A_1:

$$(a_1, a_2)^* = (a_1^*, \ -a_2).$$

При этом

$$\operatorname{tr}(a_1, a_2) = \operatorname{tr}(a_1), \ \ n(a_1 a_2) = n(a_1) + \delta n(a_2).$$

Процесс перехода от алгебры A к алгебре A_1 можно продолжить, получая возрастающую цепочку алгебр $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$; параметр δ на каждом шаге может меняться. Если процесс Кэли — Диксона начинается с алгебры A с базисом $\{1, u\}$, таблицей умножения

$$u^2 = u + \alpha, \ \ \alpha \in F, \ 4\alpha + 1 \neq 0,$$

и инволюцией: $1^* = 1$, $u^* = -u$, то после первого шага получится алгебра A_1 обобщенных кватернионов (ассоциативная алгебра размерности 4), а на втором шаге — алгебра A_2 размерности 8, к-рая и наз. Кэли—Диксона алгеброй.

Любая К.— Д. а. является альтернативной, но не ассоциативной центральной простой алгеброй над F; обратно, простое альтернативное кольцо либо ассоциативно, либо является К.— Д. а. над своим центром. Определенная на К.—Д. а. квадратичная форма $n(x)$ от восьми переменных, соответствующих базису алгебры, обладает мультипликативным свойством:

$$n(xy) = n(x) \cdot n(y).$$

Тем самым устанавливается связь между К.— Д. а. и проблемой существования композиции для квадратичных форм. К.— Д. а. является алгеброй с делением тогда и только тогда, когда квадратичная форма $n(x)$ (норма элемента x) не представляет нуля в F. Если характеристика поля F отлична от 2, то К.— Д. а. обладает базисом $\{1, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ с таблицей умножения вида

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_1	$-\alpha$	u_3	$-\alpha u_2$	$-u_5$	αu_4	$-u_7$	αu_6
u_2	$-u_3$	$-\beta$	βu_1	$-u_6$	u_7	βu_4	$-\beta u_5$
u_3	αu_2	$-\beta u_1$	$-\alpha\beta$	$-u_7$	$-\alpha u_6$	βu_5	$\alpha\beta u_4$
u_4	u_5	u_6	u_7	$-\gamma$	$-\gamma u_1$	$-\gamma u_2$	$-\gamma u_3$
u_5	$-\alpha u_4$	$-u_7$	αu_6	γu_1	$-\alpha\gamma$	$-\gamma u_3$	$\alpha\gamma u_2$
u_6	u_7	$-\beta u_4$	$-\beta u_5$	γu_2	γu_3	$-\beta\gamma$	$-\beta\gamma u_1$
u_7	$-\alpha u_6$	βu_5	$-\alpha\beta u_4$	γu_3	$-\alpha\gamma u_2$	$\beta\gamma u_1$	$-\alpha\beta\gamma$

где $\alpha, \beta, \gamma \in F$, $\alpha\beta\gamma \neq 0$, а инволюция определяется условиями

$$1^* = 1, \quad u_i^* = -u_i \text{ при } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

Эта алгебра обозначается $A(\alpha, \beta, \gamma)$. Алгебры $A(\alpha, \beta, \gamma)$ и $A(\alpha', \beta', \gamma')$ изоморфны тогда и только тогда, когда эквивалентны отвечающие им квадратичные формы $n(x)$. Если $n(x)$ представляет нуль, то соответствующая К.— Д. а. изоморфна $A(-1, 1, 1)$. Алгебра $A(-1, 1, 1)$ наз. расщепляемой алгеброй Кэли, или векторно-матричной алгеброй. Ее элементы могут быть представлены матрицами вида

$$\begin{Vmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{Vmatrix},$$

где $\alpha, \beta \in F$, $a, b \in V$, V — трехмерное пространство над F с обычными операциями скалярного произведения $\langle a, b \rangle$ и векторного произведения $a \times b$. Умножение этих матриц задается формулой

$$\begin{Vmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \gamma & c \\ d & \delta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha\gamma - \langle a, d \rangle & \alpha c + \delta a + b \times d \\ \gamma b + \beta d + a \times c & \beta\delta - \langle b, c \rangle \end{Vmatrix}.$$

Если $F = \mathbb{R}$ — поле действительных чисел, то $A(1, 1, 1)$ — алгебра *Кэли чисел* (она является алгеброй с делением). Любая К.— Д. а. над $\mathbb{R}$ изоморфна либо $A(1, 1, 1)$, либо $A(-1, 1, 1)$.

Построение К.— Д. а. над произвольным полем принадлежит Л. Диксону (L. Dickson), к-рый изучил также их основные свойства (см. [1], [2]).

Пусть A — альтернативное кольцо, ассоциативно-коммутативный центр C к-рого отличен от нуля и не содержит делителей нуля, а F — поле частных кольца C. Тогда имеется естественное вложение $A \to A \otimes_C F$. Если $A \otimes_C F$ есть К.— Д. а. над F, то A наз. кольцом Кэли — Диксона.

Лит.: [1] Диксон Л. Э., Линейные алгебры, пер. с англ., Харьков, 1935; [2] Schafer R. D., An introduction to nonassociative algebras, N. Y., 1966; [3] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978.

Е. Н. Кузьмин.

КЭЛИ — КЛЕЙНА ПАРАМЕТРЫ — некоторые специальные координаты в группе вращений трехмерного пространства $SO(3)$, построение к-рых в конечном счете основано на связи между $SO(3)$ и группой $SU(2)$ унитарных матриц 2-го порядка с единичным определителем. Существует отображение $\varphi : SU(2) \to SO(3)$, являющееся *эпиморфизмом* по своим алгебраич. свойствам и двулистным *накрытием* — по топологическим. (Рассматриваемое в нек-рой окрестности единичной матрицы, это отображение обладает свойствами изоморфизма, поэтому говорят, что $SO(3)$ и $SU(2)$ локально изоморфны.) Каждая матрица $V \in SU(2)$ имеет вид $\left\| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{matrix} \right\|$, где α, β — комплексные числа, связанные соотношением $|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$. Их и принимают за К. - К. п. для $A=\varphi(V)$. (Иногда под К.— К. п. понимают все четыре коэффициента матрицы V.) Построение конкретного отображения φ с указанными свойствами можно осуществить по-разному, поэтому у различных авторов имеются нек-рые различия в определении К.— К. п. (см. [2], [3]).

Поскольку φ является не настоящим изоморфизмом, а только двулистным накрытием, то невозможно определить К.— К. п. как (непрерывные) координаты на всей группе $SO(3)$; это можно сделать лишь локально. Однако К.— К. п. можно использовать для изучения процесса вращения, при к-ром A непрерывно зависит от действительного параметра t (причем здесь нет необходимости как-либо ограничивать область возможных значений A). Действительно, если для нек-рого $t=t_0$ выбрано какое-то фиксированное значение прообраза $V(t_0) \in \varphi^{-1}(A(t_0))$, то по непрерывности для всех t однозначно определяются соответствующие $V(t)$. (Двузначность полного прообраза φ^{-1} проявляется лишь в том, что равенство $A(t)=A(s)$ имеет место не только при $V(t)=V(s)$, но и при $V(t) = -V(s)$.) Поэтому К.— К. п. можно применять при исследовании движений твердого тела с неподвижной точкой (его конфигурационное пространство совпадает с $SO(3)$). Такой подход принят в [1], однако он не получил широкого распространения.

Группа $SU(2)$ изоморфна группе *кватернионов* с единичной нормой, поэтому, переходя от V к соответствующему кватерниону $\rho+\lambda i+\mu j+\nu k$, можно вместо К.— К. п. пользоваться параметрами Эйлера — Родрига — четырьмя действительными числами ρ, λ, μ, ν, удовлетворяющими соотношению $\rho^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1$. Они связаны простыми формулами с К. - К. п. (см. [1], [3]) и обладают тем же свойством «двузначности» (историю вопроса см. в [1]). По существу, в относящихся сюда исследованиях впервые рассматривались двузначные представления группы вращений (см. *Спинор*).

Лит.: [1] Klein F., Sommerfeld A., Über die Theorie des Kreisels, Hf. 1—2, Lpz., 1897—98 (перепечатка N. Y.— Stuttg., 1965); [2] Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Синг Дж. Л., Классическая динамика, пер. с англ., М., 1963.

Д. В. Аносов.

КЭМПБЕЛЛА — ХАУСДОРФА ФОРМУЛА — формула для вычисления выражения

$$w = \ln(e^u e^v)$$

в алгебре формальных степенных рядов от некоммутирующих ассоциативных u и v. Более точно, пусть A — свободная ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{Q}$ со свободными образующими u и v, а L — ее подалгебра Ли, порожденная этими же элементами относительно операции коммутирования $[x, y]=xy-yx$; и пусть $\hat{A}$ и $\hat{L}$ — пополнения алгебр A и L степенными рядами элементов из A и L. Тогда отображение

$$\exp\colon x \longrightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

является непрерывной биекцией алгебры $\hat{A}$ на мультипликативную группу $1+\hat{A}_1$, где $\hat{A}_1$ — совокупность рядов без свободного члена. Обратным к этому отображению является отображение

$$\ln\colon y \longrightarrow \ln(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (y-1)^n.$$

Ограничение отображения exp на $\hat{L}$ является биекцией алгебры $\hat{A}$ на группу $1+\hat{L}$. Это позволяет ввести групповую операцию $x \circ y = \ln(e^x e^y)$ на множестве элементов алгебры Ли $\hat{L}$, причем в получаемой таким образом группе подгруппа, порожденная элементами u и v, оказывается свободной. К.— Х. ф. дает выражение для $u \circ v$ в виде степенного ряда от u и v:

$$\sum_m \sum_{p_i q_i} \frac{(-1)^{m-1}}{m \sum (p_i+q_i)} \times$$

$$\times \frac{[\ldots[\ldots[\ldots[[\overbrace{u, u], \ldots, u}^{p_1}], \overbrace{v, \ldots, v}^{q_1}], \ldots, \overbrace{v], \ldots, v}^{q_m}]}{p_1!\, q_1! \cdot \ldots \cdot p_m!\, q_m!} \qquad (*)$$

или (в терминах присоединенного представления $(\mathrm{ad}\, x)(y)=[x, y]$):

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{r+s=n,\ r,\ s \geqslant 0} (w'_{r,\,s} + w''_{r,\,s}),$$

где

$$w'_{r,\,s} = \sum_{m \geqslant 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \times$$

$$\times \sum{}^{*} \left(\left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\mathrm{ad}u)^{r_1}}{r_i!} \frac{(\mathrm{ad}v)^{s_1}}{s_i!} \right) \frac{(\mathrm{ad}u)^{r_m}}{r_m!} \right)(v),$$

$$w''_{r,\,s} = \sum_{m \geqslant 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \times$$

$$\times \sum{}^{**} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\mathrm{ad}u)^{r_i}}{r_i!} \frac{(\mathrm{ad}v)^{s_i}}{s_i!} \right)(u).$$

Здесь Σ^* означает суммирование по $r_1+\ldots+r_m=rs_1+\ldots+s_{m-1}=s-1, r_1+s_1 \geqslant 1, \ldots, r_{m-1}+s_{m-1} \geqslant 1$, а Σ^{**} — суммирование по $r_1+\ldots+r_{m-1}=r-1$, $s_1+\ldots+s_{m-1}=s$, $r_1+s_1 \geqslant 1, \ldots, r_{m-1}+s_{m-1} \geqslant 1$.

Первым задачу о разыскании выражения w рассмотрел Дж. Кэмпбелл [1]. Ф. Хаусдорф [2] доказал, что w выражается через коммутаторы от элементов u и v, т. е. принадлежит алгебре Ли $\hat{L}$.

Если $\mathfrak{g}$ — нормированная алгебра Ли над полным недискретно нормированным полем K, то ряд (*), где $u, v \in \mathfrak{q}$, сходится в окрестности нуля. Это позволяет определить в окрестности нуля пространства $\mathfrak{g}$ структуру локальной банаховой группы Ли над K (в ультраметрическом случае — структуру банаховой группы Ли), алгеброй Ли к-рой является $\mathfrak{g}$. Этот факт дает одно из доказательств существования локальной группы Ли с заданной алгеброй Ли (3-я т е о р е м а

Л и). Обратно, во всякой локальной группе Ли умножение в канонических координатах задается К.—Х. ф.

Лит.: [1] Campbell J. E., «Proc. London Math. Soc.», 1897, v. 28, p. 381–90; 1898, v. 29, p. 14–32; [2] Hausdorff F., «Leipziger Ber.», 1906, Bd 58, S. 19—48; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [4] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1969; [5] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [6] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.

Ю. А. Бахтурин.

КЮННЕТА ФОРМУЛА — формула, выражающая гомологии (или когомологии) тензорного произведения комплексов или прямого произведения пространств через гомологии (когомологии) сомножителей.

Пусть Λ — ассоциативное кольцо с единицей, A и C — цепные комплексы соответственно правых и левых Λ-модулей. Пусть $A \otimes C$ — комплекс, ассоциированный с *тензорным произведением* комплексов A и C над Λ. Если

$$\mathrm{Tor}_1(B(A),\ B(C)) = \mathrm{Tor}_1(H_*(A),\ B(C)) = \mathrm{Tor}_1(B(A),\ Z(C)) = \mathrm{Tor}_1(H_*(A),\ Z(C)) = 0,$$

то имеет место точная последовательность градуированных модулей

$$0 \longrightarrow H_*(A) \otimes H_*(C) \xrightarrow{\alpha} H_*(A \otimes C) \xrightarrow{\beta} \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(H_*(A),\ H_*(C)) \longrightarrow 0, \qquad (1)$$

где α — гомоморфизм степени 0, а β — степени -1 (см. [2]). Для коцепных комплексов имеется аналогичная точная последовательность с гомоморфизмом β степени $+1$. Если $H_*(\mathrm{Tor}_1(A, C)) = 0$ (напр., A или C — плоский Λ-модуль) и Λ наследственно, то последовательность (1) существует и расщепляется [2], [3], так что

$$H_n(A \otimes C) = \sum\nolimits_{p+q=n} H_p(A) \otimes H_q(C) + \sum\nolimits_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1(H_p(A),\ H_q(C)).$$

Эта формула наз. ф о р м у л о й К ю н н е т а; иногда формулой, или с о о т н о ш е н и е м, К ю н н е т а называют и точную последовательность (1). Имеет место обобщение формулы (1), в к-ром тензорное произведение заменяется произвольным двойным функтором $T(A, C)$ на категории Λ-модулей со значениями в той же категории, ковариантным по каждому аргументу. Рассматривается также случай функтора T, ковариантного по A и контравариантного по C. В частности, функтор $T(A, C) = \mathrm{Hom}(A, C)$ приводит к формуле, выражающей когомологии $H^*(\mathrm{Hom}(A, C))$, где A — правый цепной, а C — левый коцепной комплексы над Λ, через $H_*(A)$ и $H^*(C)$, а именно, если Λ наследственно и $H^*(\mathrm{Ext}^1(A, C)) = 0$ (напр., A свободен), то имеет место расщепляемая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_*(A),\ H^*(C)) \xrightarrow{\beta'} H^*(\mathrm{Hom}(A, C)) \xrightarrow{\alpha'} \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{Hom}(H_*(A),\ H^*(C)) \longrightarrow 0,$$

где α' — гомоморфизм степени 0, а β' — степени $+1$ (см. [2], [3]).

Пусть X, Y — топологич. пространства, а L, M — модули над кольцом главных идеалов R, причем $\mathrm{Tor}_1(L, M) = 0$. Тогда сингулярные гомологии пространств X, Y, $X \times Y$ связаны следующей расщепляемой точной последовательностью

$$0 \longrightarrow H_*(X, L) \otimes H_*(Y, M) \xrightarrow{\alpha} H_*(X \times Y, L \otimes M) \xrightarrow{\beta} \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}_1(H_*(X, L), H_*(Y, M)) \longrightarrow 0,$$

где α — гомоморфизм степени 0, а β — степени -1. Если предположить дополнительно, что либо все $H_k(X, R)$ и $H_k(Y, R)$, либо все $H_k(Y, R)$ и M конечно по-

рождены, то аналогичная точная последовательность имеется для сингулярных когомологий:

$$0 \longrightarrow H^*(X, L) \otimes H^*(Y, M) \xrightarrow{\alpha} H^*(X \times Y, L \otimes M) \xrightarrow{\beta}$$
$$\xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}_1(H^*(X, L), H^*(Y, M)) \longrightarrow 0,$$

причем α — гомоморфизм степени 0, а β — степени $+1$. Например, если R — поле, то

$$H_*(X \times Y, R) \cong H_*(X, R) \otimes H_*(Y, R),$$

а если при этом все $H_k(X, R)$ или все $H_k(Y, R)$ конечномерны, то

$$H^*(X \times Y, R) \cong H^*(X, R) \otimes H^*(Y, R).$$

Имеются также аналогичные формулы для относительных гомологий и когомологий [3], [4].

В случае $L = M - R$ модуль $H^*(X, R) \otimes H^*(Y, R)$ обладает структурой косого тензорного произведения алгебр, при этом α — гомоморфизм алгебр. Таким образом, если $\mathrm{Tor}_1(H^*(X, R), H^*(Y, R)) = 0$ и все $H_k(X, R)$ или все $H_k(Y, R)$ конечно порождены, то имеет место изоморфизм алгебр [3]:

$$H^*(X \times Y, R) \cong H^*(X, R) \otimes H^*(Y, R).$$

В случае, когда X и Y — конечные полиэдры, К. ф. позволяет найти числа Бетти и коэффициенты кручения полиэдра $X \times Y$ через аналогичные инварианты полиэдров X и Y. Именно эти результаты были получены самим Г. Кюннетом [1]. В частности, если $b_k(X)$ есть k-е число Бетти полиэдра X и

$$p(X) = \sum\nolimits_{k \geqslant 0} b_k(X)\, t^k$$

— многочлен Пуанкаре полиэдра X, то $p(X \times Y) = p(X) p(Y)$.

В теории когомологий со значениями в пучке имеется следующий вариант К. ф. [6]. Пусть X и Y — топологич. пространства со счетными базами, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки Фреше на X и Y (см. *Когерентный аналитический пучок*). И пусть $\mathcal{F}$ (или $\mathcal{G}$) — ядерный пучок (т. е. $\mathcal{F}(U)$ — ядерное пространство для всех открытых $U \subset X$). Тогда на $X \times Y$ определен пучок Фреше $\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}$ такой, что

$$(\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G})(U \times V) = \mathcal{F}(U) \tilde{\otimes} \mathcal{G}(V),$$

где $\tilde{\otimes}$ — знак пополненного тензорного произведения, а $U \subset X$, $V \subset Y$ открыты. Если пространства $H^*(X, \mathcal{F})$ и $H^*(Y, \mathcal{G})$ отделимы, то справедлива К. ф.

$$H^*(X \times Y, \mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G}) \cong H^*(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^*(Y, \mathcal{G}).$$

В частности, когерентные аналитич. пучки $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ на комплексных аналитич. пространствах X, Y со счетными базами являются ядерными и

$$\mathcal{F} \tilde{\otimes} \mathcal{G} \cong \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathcal{G}^*,$$

где $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{G}^*$ — аналитические обратные образы пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ при проекциях $X \times Y \to X$ и $X \times Y \to Y$. Таким образом, если $H^*(X, \mathcal{F})$ и $H^*(Y, \mathcal{G})$ отделимы, то

$$H^*\left(X \times Y, \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_{X \times Y}} \mathcal{G}^*\right) \cong H^*(X, \mathcal{F}) \tilde{\otimes} H^*(Y, \mathcal{G}).$$

В алгебраической геометрии К. ф. обычно встречаются в таком варианте. Пусть X и Y — алгебраические многообразия над полем k, а $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — когерентные алгебраич. пучки на X и Y соответственно. Тогда [9]:

$$H^*(X \times Y, \mathcal{F} \otimes_k \mathcal{G}) \cong H^*(X, \mathcal{F}) \otimes_k H^*(Y, \mathcal{G}).$$

Здесь $\mathcal{F} \otimes_k \mathcal{G}$ — пучок на $X \times Y$, модули сечений которого над $U \times V$ (U — открытое аффинное подмножество в X, V — в Y) суть

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_k \Gamma(V, \mathcal{G}).$$

Более общо, пусть $p : X \to S$ и $q : Y \to S$ — морфизмы в категории схем, $h : X \underset{S}{\times} Y \to S$ — их расслоенное произведение, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — квазикогерентные пучки модулей на X и Y. Обобщая конструкцию пучка $\mathcal{F} \otimes_k \mathcal{G}$, можно ввести пучки модулей $\mathrm{Tor}_m^S(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ на $X \times Y$, модули сечения которых для аффинных S, X и Y изоморфны $\mathrm{Tor}_m^A(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(Y, \mathcal{G}))$, где $A = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. Тогда существуют [7] две спектральные последовательности (E^r) и $('E^r)$ с начальными членами

$$E^2_{n,\,m} = R^{-n}h_*(\mathrm{Tor}_m^S(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$$

и

$$'E^{'2}_{n,\,m} = \bigoplus_{m_1+m_2=m} \mathrm{Tor}_n^S(R^{-m_1}p_*\mathcal{F},\ R^{-m_2}q_*\mathcal{G}),$$

имеющие один и тот же предел. Эта громоздкая формулировка К. ф. приобретает более привычный вид в терминах производных функторов [11]:

$$Rp_*(\mathcal{F}) \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_S}{\otimes}} Rq_*(\mathcal{G}) = Rh_*\left(\mathcal{F} \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_S}{\otimes}} \mathcal{G}\right).$$

Если пучок $\mathcal{F}$ или $\mathcal{G}$ является плоским над S, то спектральная последовательность (E^r) вырождается. Аналогично, $('E^r)$ вырождается, если все $R^kp_*(F)$ (или все $R^kq_*(\mathcal{G})$) плоские над S. Если обе спектральные последовательности (E^r) и $('E^r)$ вырождаются, то К. ф. приобретает вид

$$R^*h_*\left(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{G}\right) \cong R^*p_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_S} R^*q_k(\mathcal{G}).$$

К. ф. имеется и для этальных пучков A-модулей на схемах X и Y, где A — конечное кольцо. Ее можно записать в виде

$$Rp_!(\mathcal{F}) \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} Rq_!(\mathcal{G}) = Rh_!\left(\mathcal{F} \overset{L}{\underset{A}{\otimes}} \mathcal{G}\right),$$

где ! означает, что когомологии берутся с компактными носителями. В частности (см. [8]), для полных алгебраич. многообразий X и Y К. ф. для l-адических когомологий имеет вид

$$H^*(X \times Y,\ \mathbb{Q}_l) = H^*(X,\ \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} H^*(Y,\ \mathbb{Q}_l).$$

Для произвольных многообразий такая формула доказана лишь в предположении о возможности разрешения особенностей, напр., для многообразий над полем нулевой характеристики.

Вариант К. ф. имеется и в K-теории. Пусть X — такое пространство, что группа $K^*(X)$ конечно порождена, и пусть Y — клеточное пространство. Тогда имеет место точная последовательность $\mathbb{Z}_2$-градуированных модулей

$$0 \longrightarrow K^*(X) \otimes K^*(Y) \xrightarrow{\alpha} K^*(X \times Y) \xrightarrow{\beta} \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}_1(K^*(X),\ K^*(Y)) \longrightarrow 0,$$

где α — гомоморфизм степени 0, а β — степени 1 (см. [5]). Частным случаем этого утверждения является *Ботта теорема периодичности* для комплексных расслоений. Известна также К. ф. в теории бордизмов [10].

Лит.: [1] Künneth H., «Math. Ann.», 1923, Bd 90, S. 65—85; 1924, Bd 91, S. 125—34; [2] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [3] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [4] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [5] Атья М., Лекции по К-теории, пер. с англ., М., 1967; [6] Kaup L., «Math. Z.», 1967, Bd 97, № 2, S. 158—68; [7] Grothendieck A., Dieudonné J., Eléments de géométrie algébrique, ch. 3, pt. 2, P., 1963. (Publ. Math. IHES, № 17); [8] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 3, B.— [a. o.], 1973; [9] Sampson J., Washnitzer G., «Ill. J. Math.», 1959, v. 3, № 3, p. 389—402; [10] Коннер Э., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [11] Hartshorne R., Residues and duality, B.— Hdlb. – N. Y., 1966.

В. И. Данилов, А. Л. Онищик.

ЛАВРЕНТЬЕВА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. в дескриптивной теории множеств: топологич. отображение между двумя множествами в $\mathbb{R}^n$ можно продолжить до гомеоморфизма нек-рых содержащих их множеств типа G_δ. Следствием этой Л. т. является топологич. инвариантность хаусдорфова типа множества (см. [1]).

2) Л. т. в теории приближений, критерий возможности равномерной аппроксимации: для того чтобы любую непрерывную на компакте $K \subset \mathbb{C}$ функцию можно было равномерно на K аппроксимировать многочленами, необходимо и достаточно, чтобы K был не разбивающим комплексную плоскость компактом без внутренних точек (см. [2]).

3) Л. т. в теории квазиконформных отображений: если D_z и D_w — две односвязные плоские области, ограниченные кусочно гладкими кривыми, а z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 — положительно занумерованные тройки точек на их границах, то какова бы ни была сильно эллиптическая система уравнений

$$\Phi_1(x, y, u, v, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y) = 0,$$
$$\Phi_2(x, y, u, v, u'_x, u'_y, v'_x, v'_y) = 0$$

с равномерно непрерывными частными производными функций, задающих уравнения характеристик, всегда существует единственное гомеоморфное отображение D_z на D_w, осуществляемое решением $u(x, y)$, $v(x, y)$ системы, с соответствием указанных троек граничных точек.

4) Л. т. в области механики (теория крыла, уединенная волна, формы динамич. потери устойчивости, струйные течения, теория кумулятивного заряда, направленный взрыв) см. в [4].

Теоремы 1) — 4) получены М. А. Лаврентьевым.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., «Fundam. math.», 1924, t. 6, p. 149—60; [2] его же, «Тр. физико-матем. ин-та АН СССР, Отдел матем.», 1934, т. 5, с. 159—245; [3] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1948, т. 12, № 6, с. 513—54; [4] Михаил Алексеевич Лаврентьев, М., 1971 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР. Сер. математики, в 12).

В. А. Зорич.

ЛАГЕРРА МНОГОЧЛЕНЫ, многочлены Чебышева — Лагерра,— многочлены, ортогональные на интервале $(0, \infty)$ с весовой функцией $\varphi(x) = x^\alpha e^{-x}$, где $\alpha > -1$. Стандартизованные Л. м. определяются формулой

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n} e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

представление с помощью гамма-функции:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}.$$

В применениях наиболее важны формулы:

$$(n+1) L_{n+1}^\alpha(x) = (\alpha+2n+1-x) L_n^\alpha(x) - (\alpha+n) L_{n-1}^\alpha(x),$$
$$x L_{n-1}^{\alpha+1}(x) - (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x) - n L_n^\alpha(x),$$
$$\left(L_n^\alpha(x)\right)' = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

Многочлен $L_n^\alpha(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (уравнению Лагерра)

$$xy'' + (\alpha - x + 1) y' + ny = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Производящая функция Л. м. имеет вид

$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)\,t^n.$$

Ортонормированные Л. м. выражаются через стандартизованные многочлены:

$$\hat{L}_n^{\alpha}(x)=(-1)^n L_n^{\alpha}(x)\,\sqrt{\Gamma(n+1)/\Gamma(\alpha+n+1)}.$$

Множество всех Л. м. плотно в пространстве функций, квадрат к-рых интегрируем с весом $\varphi(x)$ на интервале $(0,\ \infty)$.

Наиболее часто употребляются Л. м. при условии $\alpha=0$, исследованные Э. Лагерром [1], обозначаются в этом случае $L_n(x)$ (в отличие от них Л. м. $L_n^{\alpha}(x)$ иногда называют о б о б щ е н н ы м и). Несколько первых Л. м. $L_n(x)$ имеют вид

$$L_0(x)=1,$$
$$L_1(x)=1-x,$$
$$L_2(x)=1-2x+x^2/2,$$
$$L_3(x)=1-3x+3x^2/2-x^3/6,$$
$$L_4(x)=1-4x+3x^2-2x^3/3+x^4/24.$$

Л. м. $L_n^{\alpha}(x)$ иногда обозначается $L_n(x;\ \alpha)$.

Лит.: [1] L a g u e r r e E., «Bull. Soc. math. France», 1878, t. 6, p. 72–78; [2] С т е к л о в В. А., «Изв. Имп. АН», 1916, [т. 10], с. 633—42; [3] С е г ё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [4] С у е т и н П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979. *П. К. Суетин.*

ЛАГЕРРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$f(n)=T\{F(x)\}=\int_0^{\infty} e^{-x}L_n(x)\,F(x)\,dx,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $L_n(x)$ — *Лагерра многочлен* степени n. Формула обращения имеет вид

$$T^{-1}\{f(n)\}=F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,L_n(x),\quad 0<x<\infty,$$

если ряд сходится. Если функция $F(x)$ непрерывна, $F'(x)$ кусочно непрерывна на $[0,\ \infty)$ и $F(x)=O(e^{ax})$, $x\to\infty$, $a<1$, то

$$T\left\{\frac{dF(x)}{dx}\right\}=\sum_{k=0}^{n} f(k)-F(0),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$T\left\{x\frac{dF(x)}{dx}\right\}=-(n+1)\,f(n+1)+nf(n),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

Если функции $F(x)$, $F'(x)$ непрерывны, $F''(x)$ кусочно непрерывна на $[0,\ \infty)$ и $|F(x)|+|F'(x)|=O(e^{ax})$, $x\to\infty$, $a<1$, то

$$T\left\{e^{x}\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dF(x)}{dx}\right]\right\}=-nf(n),\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Если $F(x)$ кусочно непрерывна на $[0,\ \infty)$ и $F(x)=O(e^{ax})$, $x\to\infty$, $a<1$, то для

$$G(x)=\int_0^x F(t)\,dt,$$

$$g(n)=T\left\{\int_0^x F(t)\,dt\right\}=f(n)-f(n-1),\quad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

и при $n=0$

$$g(0)=f(0).$$

Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ кусочно непрерывны на $[0, \infty)$ и

$$|F(x)|+|G(x)|=O(e^{ax}),\ x\longrightarrow\infty,\ a<1/2,$$
$$T\{F\}=f(n),\ T\{G\}=g(n).$$

Тогда

$$T^{-1}\{f(n)\,g(n)\}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}F(t)\int_0^\pi e^{\sqrt{xt}\cos\theta}\cos\left(\sqrt{xt}\sin\theta\right)\times$$
$$\times G\left(x+t-2\sqrt{xt}\cos\theta\right)d\theta\,dt.$$

Обобщенное Л. п. имеет вид

$$f_\alpha(n)=T_\alpha\{F(x)\}=$$
$$=\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^\alpha(x)F(x)\,dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $L_n^\alpha(x)$ — обобщенный многочлен Лагерра (см. [4]).

Лит.: [1] Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974; [2] Mc Cully J., «SIAM Rev.», 1960, v. 2, № 3, p. 185—91; [3] Debnath L., «Bull. Calcutta Math. Soc.», 1960, v. 52, № 2, p. 69—77; [4] Итоги науки. Математический анализ. 1965, М., 1967, с. 7—82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ЛАГЕРРА УРАВНЕНИЕ — см. *Лагерра многочлены.*

ЛАГЕРРА ФОРМУЛА — 1) Формула для вычисления угла между прямыми в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах. Пусть X и Y — бесконечно удаленные точки прямых a и b, а G и K — точки пересечения этих прямых с абсолютом пространства. Тогда угол φ между этими прямыми выражается с помощью двойного отношения $W(G, K, X, Y)$:

$$\varphi=\left|\frac{i}{2}\ln W(G, K, X, Y)\right|.$$

Для двумерного псевдоевклидова пространства G и K — направляющие векторы изотропных прямых, проходящих через точку пересечения прямых a и b.

Формула выведена Э. Лагерром [1].

2) Формула, согласно к-рой для всех кривых на данной поверхности, имеющих касание в нек-рой точке, совпадают величины

$$\left(3\frac{d\theta}{ds}+2k_2\right)\sin\theta k_1-\left(\frac{d}{ds}k_1\right)\cos\theta,$$

где k_1 и k_2 — кривизна и кручение кривой, угол между главной нормалью кривой и нормалью к поверхности, s — натуральный параметр на кривой. Формула получена Э. Лагерром (1870, см. [2]).

Лит.: [1] Laguerre E., «Nouv. ann. math.», 1853, t. 12, p. 57—63; [2] его же, Œuvres, t. 2, P., 1905; [3] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Д. Д. Соколов.

ЛАГЕРРА ФУНКЦИИ — функции, являющиеся решениями уравнения

$$xy''+(\alpha-x+1)y'+ny=0,\qquad(*)$$

где α, n — произвольные параметры. Л. ф. могут быть выражены через *вырожденную гипергеометрическую функцию* или через *Уиттекера функцию*. В случае $n=0, 1, 2, \ldots$ решения уравнения (*) наз. *Лагерра многочленами*. Иногда Л. ф. наз. функцию

$$e_n^{(\alpha)}(x)=x^{\alpha/2}e^{-x/2}L_n^{(\alpha)}(x),$$

где $L_n^{(\alpha)}(x)$ — многочлены Лагерра.

Лит.: [1] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 2 изд., М., 1968.

А. Б. Иванов.

ЛАГРАНЖА ЗАДАЧА — одна из основных задач классич. вариационного исчисления. Состоит в минимизации функционала

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2}f(x,\ y,\ y')\,dx,\quad f:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенств:

$$\varphi(x,\ y,\ y') = 0,\quad \varphi\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ m < n, \quad (1)$$

и граничных условий:

$$\psi(x_1,\ y(x_1),\ x_2,\ y(x_2)) = 0,\quad \psi\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$
$$p \leqslant 2n+2.$$

Обычно Л. з. рассматривается при условии, что имеет место регулярность системы (1), состоящая в том, что матрица $\|\partial\varphi/\partial y'\|$ имеет максимальный ранг:

$$\operatorname{rang}\|\partial\varphi/\partial y'\| = m.$$

При этом условии систему (1) можно разрешить относительно части переменных и, используя иные обозначения (t, x вместо x, y), привести Л. з. к виду

$$\left.\begin{array}{l}\int_{t_0}^{t_1} F(t,\ x,\ u)\,dt,\ F\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R},\\ \dot{x} = \Phi(t,\ x,\ u),\ \Phi\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^n.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Функцию F и отображение Φ предполагают обычно непрерывно дифференцируемыми. Задачи оптимального управления задаются обычно в форме (2) (р а з р е ш е н н а я, или п о н т р я г и н с к а я, ф о р м а), и при этом накладываются еще ограничения на управление $u \in U$. Необходимые условия сильного экстремума для задачи (2) (для простоты — с закрепленным левым x_0 и свободным правым концом x_1) имеют следующий вид. Пусть

$$L(t,\ x,\ \dot{x},\ u,\ p(t)) = (p(t)) - \dot{x} + \Phi(t,\ x,\ u)) - F(t,\ x,\ u)$$

— *Лагранжа функция*. Для того чтобы вектор-функция $(x^*(t),\ u^*(t))$ доставляла сильный минимум в Л. з. (2), необходимо, чтобы были выполнены соотношения:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{(x^*,\ u^*)} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{dx}\Big|_{(x^*,\ u^*)}\,dt = 0, \quad (3)$$

$$p(t_1) = 0, \quad (4)$$

$$\mathcal{E} \equiv L(t,\ x^*(t),\ \dot{x},\ u,\ p(t)) -$$
$$- L(t,\ x^*(t),\ \dot{x}^*(t),\ u^*(t),\ p(t)) -$$
$$- ((\dot{x} - \dot{x}^*(t)) \mid L_{\dot{x}}(t,\ x^*(t),\ \dot{x}^*(t),\ u^*(t),\ p(t))) =$$
$$= (p(t) \mid \Phi(t,\ x^*(t),\ u) - F(t,\ x^*(t),\ u)) -$$
$$- (p(t) \mid \Phi(t,\ x^*(t),\ u^*(t)) + F(t,\ x^*(t),\ u^*(t))) \leqslant 0 \quad (5)$$

при всевозможных допустимых значениях $\dot{x}$, u.

Если провести дифференцирование в (3) по t и воспользоваться обозначением

$$\mathcal{H}(t,\ x,\ u,\ p) = (p \mid \Phi) - F,$$

то необходимое условие сильного минимума сформулируется в форме принципа максимума, в к-ром соединены *Эйлера уравнение* (3), *трансверсальности условие* (4) и *Вейерштрасса условие* (5). Для того чтобы вектор-функция $(x^*,\ u^*)$ доставляла сильный минимум в задаче (2) с закрепленным левым и свободным правым концами, необходимо, чтобы нашлось решение системы

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(t,\ x^*,\ u^*,\ p)}{\partial x},\quad p(t_1) = 0,$$

при к-ром

$$\mathcal{H}(t,\ x^*(t),\ u^*(t),\ p(t)) = \max_{u\in U} \mathcal{H}(t,\ x^*(t),\ u,\ p(t)).$$

Ж. Лагранж (J. Lagrange) рассматривал подобные задачи в связи с исследованиями по механике (2-я пол. 18 в.).

Лит. см. при статье *Вариационное исчисление*.

И. Б. Вапнярский, В. М. Тихомиров.

ЛАГРАНЖА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — форма записи многочлена степени n (и н т е р п о л я ц и о н н о г о м н о г о ч л е н а Л а г р а н ж а),

интерполирующего заданную функцию $f(x)$ в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (1)$$

В случае, когда значения x_i являются равноотстоящими, т. е. $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$, с помощью обозначений $(x - x_0)/h = t$ формула (1) может быть приведена к виду

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = (-1)^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \frac{f(x_i)}{t-i}. \quad (2)$$

В выражении (2), наз. Л. и. ф. для равноотстоящих узлов, коэффициенты, стоящие перед $f(x_i)$:

$$(-1)^{n-i} C_n^i \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(t-i)\,n!},$$

наз. коэффициентами Лагранжа.

Если функция f имеет производную порядка $n+1$ на отрезке $[a, b]$, все узлы интерполяции лежат на этом отрезке и для любой точки $x \in [a, b]$: $\alpha_x = \min\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x\}$, $\beta_x = \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x\}$, то существует такая точка $\xi \in [\alpha_x, \beta_x]$, что

$$f(x) - L_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\,\omega_n(x)/(n+1)!,$$

где

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Если абсолютная величина производной $f^{(n+1)}$ ограничена на отрезке $[a, b]$ постоянной M и если в качестве узлов интерполяции выбраны точки, в к-рые перейдут корни многочлена Чебышева степени $n+1$ при линейном отображении отрезка $[-1, 1]$ на отрезок $[a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant M(b-a)^{n+1}/(n+1)!\,2^{2n+1}.$$

Если узлы интерполяции — комплексные числа $z_0, z_1, \ldots, z_n$ и лежат в нек-рой области G, ограниченной кусочно гладким контуром γ, а функция f является однозначной аналитич. функцией в замыкании области G, то Л. и. ф. имеет вид

$$L_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\omega(\zeta) - \omega(z)}{\omega(\zeta)(\zeta - z)} f(\zeta)\,d\zeta,$$

причем

$$f(z) - L_n(z) = \frac{\omega(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\omega(\zeta)(z-\zeta)}\,d\zeta.$$

Л. и. ф. для интерполирования с помощью тригонометрич. полиномов наз. формула

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j \neq k} \frac{\sin(x - x_j)/2}{\sin(x_k - x_j)/2},$$

дающая тригонометрич. полином порядка n, принимающий в заданных узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ данные значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Формула предложена Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1795).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев, М. К. Самарин.

ЛАГРАНЖА МЕТОД — метод приведения квадратичной формы к сумме квадратов, указанный в 1759 Ж. Лагранжем (J. Lagrange). Пусть дана квадратичная форма

$$f(x) = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (1)$$

от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из

поля k характеристики $\neq 2$. Требуется привести эту форму к канонич. виду

$$f(x)=\sum_{i=1}^{r} b_i y_i^2,\ b_i \in k,\ b_i \neq 0,\ i=1,\ \ldots,\ r, \quad (2)$$

при помощи невырожденного линейного преобразования переменных. Л. м. состоит в следующем. Можно считать, что не все коэффициенты формы (1) равны нулю. Поэтому возможны два случая.

1) При некотором g, $1 \leqslant g \leqslant n$, диагональный коэффициент $a_{gg} \neq 0$. Тогда

$$f(x)=\frac{1}{a_{gg}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{gk}x_k\right)^2+f_1(x), \quad (3)$$

где форма $f_1(x)$ не содержит переменную x_g.

2) Если же все $a_{gg}=a_{hh}=0$, но $a_{gh}\neq 0$, то

$$f(x)=\frac{1}{2a_{gh}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{gk}+a_{hk})\,x_k\right]^2-$$

$$-\frac{1}{2a_{gk}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{gk}-a_{hk})\,x_k\right]^2+f_2(x), \quad (4)$$

где форма $f_2(x)$ не содержит двух переменных x_g и x_h. Формы, стоящие под знаками квадратов в (4), линейно независимы. Применением преобразований вида (3) и (4) форма (1) после конечного числа шагов приводится к сумме квадратов линейно независимых линейных форм. С помощью частных производных формулы (3) и (4) можно записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{4a_{gg}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_g}\right)^2+f_1(x),$$

$$f(x)=\frac{1}{8a_{gh}}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_g}+\frac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial x_g}-\frac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2\right].$$

Лит.: [1] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [3] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968. *И. В. Проскуряков.*

ЛАГРАНЖА МНОЖИТЕЛИ — переменные, с помощью к-рых строится *Лагранжа функция* при исследовании задач на условный экстремум. Использование Л. м. и функции Лагранжа позволяет единообразным способом получать необходимые условия оптимальности в задачах на условный экстремум. Метод получения необходимых условий в задаче определения экстремума функции

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n) \quad (1)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)=b_i,\ i=1,\ \ldots,\ m,\ m<n, \quad (2)$$

заключающийся в использовании Л. м. λ_i, $i=1,\ldots,m$, построении функции Лагранжа

$$F(x,\ \lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,[b_i-g_i(x)]$$

и приравнивании к нулю ее частных производных по x_j и λ_i, наз. методом Лагранжа. В этом методе оптимальное значение $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ находится вместе с соответствующим ему вектором Л. м. $\lambda^*=(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$ из решения системы $m+n$ уравнений. Л. м. λ_i^*, $i=1,\ldots,m$, допускают следующую интерпретацию [1]: пусть x^* доставляет относительный экстремум функции (1) при условиях (2); $z^*=f(x^*)$. Значения x^*, λ^* и z^* зависят от значений b_i — правых частей ограничений (2). Формулируются достаточно общие предположения, при к-рых все x_j^* и λ_i^* являются непрерывно дифференцируемыми функциями вектора $b=(b_1,\ldots,b_m)$ в нек-рой ε-окрестности его значения, задаваемого в (2). При этих предположениях непрерывно дифференцируемой по b_i будет и функция z^*. Частные

производные от экстремума z^* по b_i равны соответствующим Л. м. λ_i^*, вычисленным при данном $b=(b_1, \ldots, b_m)$:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \lambda_i^*, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

В прикладных задачах z часто интерпретируется как доход или стоимость, а правые части b_i — как затраты некоторых ресурсов. Тогда размерностью λ_i^* будет отношение единицы стоимости к единице i-го вида ресурсов. Числа λ_i^* показывают, как изменится максимальный доход (или максимальная стоимость), если количество i-го вида ресурсов увеличится на единицу. Приведенная интерпретация Л. м. распространяется также на случай ограничений в виде неравенств и на случай, когда переменные x_j подчинены требованиям неотрицательности.

В вариационном исчислении с помощью Л. м. удобно получать необходимые условия оптимальности в задаче на условный экстремум как необходимые условия безусловного экстремума нек-рого составного функционала. Л. м. в вариационном исчислении являются уже не константами, а нек-рыми функциями. В теории оптимального управления и в *Понтрягина принципе максимума* Л. м. получили название сопряженных переменных.

Лит.: [1] Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ., М., 1967; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ЛАГРАНЖА ПРИНЦИП, принцип стационарного действия,—вариационный интегральный принцип динамики голономных систем, стесненных идеальными стационарными связями и находящихся под действием потенциальных сил, не зависящих явно от времени.

Согласно Л. п., в действительном движении голономной системы, для к-рой существует интеграл энергии $T+V=h$, между нек-рым начальным A_0 и конечным A_1 положениями, действие по Лагранжу

$$\int_{t_0}^{t} 2T\,dt - \int_{A_0}^{A_1} \sum\nolimits_{\nu} m_\nu v_\nu dr_\nu$$

имеет стационарное значение по сравнению с кинематически возможными движениями между теми же положениями и с той же энергией h, что и в действительном движении. Здесь T и V — кинетическая и потенциальная энергии системы, $m_\nu v_\nu$ — количество движения ν-й точки системы, t_0 и t — моменты времени прохождения системы через положения A_0 и A_1.

Если начальное и конечное положения системы достаточно близки одно к другому, то действие по Лагранжу имеет минимум для действительного движения, в связи с чем Л. п. наз. также принципом наименьшего действия в форме Лагранжа.

Л. п. приводит задачу определения действительного движения системы к вариационной *Лагранжа задаче*; он выражает условие, необходимое и достаточное для действительного движения [4].

Л. п. в неявной форме впервые был высказан П. Мопертюи [1]; Л. Эйлер [2] дал его обоснование для случая движения одной материальной точки в центральном поле. Ж. Лагранж [3] распространил этот принцип на многие более общие задачи.

Лит.: [1] Maupertuis P. L. M., «Histoire de l'Acad. Royale des Sci.», ann. 1744, P., 1748, p. 417; [2] Euler L., Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausannae-Genevae, 1744; [3] Lagrange J., Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies, Turin, 1762; [4] Суслов Г. К., Теоретическая механика, 3 изд., М.— Л., 1946.

В. В. Румянцев.

ЛАГРАНЖА РЯД — степенной ряд, дающий решение задачи локального обращения голоморфной функции комплексного переменного. Первоначальное решение задачи обращения, данное Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1770), было затем усовершенствовано А. Бюрманом (H. Burmann, 1779). См. *Бюрмана — Лагранжа ряд.*

Е. Д. Соломенцев.

ЛАГРАНЖА СКОБКИ относительно переменных u и v — суммы вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v}-\frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial p_i}{\partial u}\right)=[u,\ v]_{p,\ q}, \qquad (*)$$

где $q=(q_1,\ldots,q_n)$ и $p=(p_1,\ldots,p_n)$ — нек-рые функции от u и v.

Если $q=(q_1,\ldots,q_n)$ и $p=(p_1,\ldots,p_n)$ — канонич. переменные и $Q=Q(q,\ p)$, $P=P(q,\ p)$ — канонические преобразования, то Л. с. являются инвариантами этого преобразования

$$[u,\ v]_{q,\ p}=[u,\ v]_{Q,\ P}.$$

По этой причине индексы q, p в правой части (*) часто опускают. Л. с. наз. фундаментальными, когда переменные u и v совпадают с какой-либо парой из $2n$ переменных q, p. Из них можно составить три матрицы

$$[p,\ p]=\{[p_i,\ p_j]\}_{i,\ j=1}^{n},\quad [q,\ q],\ [q,\ p],$$

первые две из к-рых нулевые, а последняя единичная. Между Л. с. и *Пуассона скобками* имеется определенная связь. Именно, если функции $u_i=u_i(q,\ p)$, $1\leqslant i\leqslant n$, осуществляют диффеоморфизм $R^{2n}\to R^{2n}$, то матрицы, составленные из элементов $[u_i,\ u_j]$ и $(u_j,\ u_i)$, взаимно обратны.

Лит.: [1] Lagrange J. L., Œuvres, t. 6, P., 1873; [2] Уиттекер Э. Т., Аналитическая динамика, пер. с англ., М.— Л., 1937; [3] Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961; [4] Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

А. П. Солдатов.

ЛАГРАНЖА СПЕКТР — множество постоянных Лагранжа в проблеме рациональных приближений действительных чисел. Л. с. содержится в спектре Маркова (см. *Маркова проблема спектра*).

ЛАГРАНЖА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. в дифференциальном исчислении — см. *Конечных приращений формула.*

2) Л. т. в теории групп: порядок $|G|$ любой конечной группы G делится на порядок $|H|$ любой ее подгруппы H. Фактически теорема была доказана Ж. Лагранжем (J. Lagrange, 1771) при изучении свойств подстановок в связи с исследованиями разрешимости алгебранч. уравнений в радикалах.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

Н. Н. Вильямс.

3) Л. т. о сравнениях: число решений сравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),\quad a_0\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),$$

по простому модулю p не превосходит его степени n. Доказана Ж. Лагранжем (см. [1]). Обобщается на многочлены с коэффициентами из произвольной области целостности.

Лит.: [1] Lagrange J. L., Œuvres, t. 2, P., 1868, p. 667; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972.

С. А. Степанов.

4) Л. т. о сумме четырех квадратов: всякое натуральное число можно представить в виде суммы четырех квадратов целых чисел. Установлена Ж. Лагранжем [1]. Об обобщении Л. т. см. *Варинга проблема.*

Лит.: [1] Lagrange J. L., «Nouv. mém. Acad. roy. sci. de Berlin, ann. 1770», B., 1772, p. 123—33; [2] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972.

С. М. Воронин.

5) Л. т. о цепных дробях: всякая цепная дробь, представляющая *квадратическую иррациональность*, является периодической. Установлена Ж. Лагранжем [1].

Лит.: [1] Lagrange J. L., «Mém. Acad. roy. sci. de Berlin, ann. 1767», t. 23, B., 1769, p. 165—310; [2] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 3 изд., М., 1961, с. 62. *С. М. Воронин.*

ЛАГРАНЖА УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка, не разрешенное относительно производной, но линейное относительно независимой переменной и неизвестной функции:

$$F(y')x + G(y')y = H(y'). \qquad (1)$$

Это уравнение названо по имени Ж. Лагранжа (J. Lagrange, 1759, см. [1]); уравнение (1) исследовал также Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert), и потому оно иногда наз. уравнением Д'Аламбера. Частным случаем Л. у. является *Клеро уравнение.*

Л. у. всегда разрешимо в квадратурах методом введения параметра (методом дифференцирования). Пусть, напр., уравнение (1) приводится к виду

$$y = f(y')x + g(y'), \quad f(y') \not\equiv y'. \qquad (2)$$

Вводя параметр $p = y'$ и взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (2), с учетом соотношения $dy = pdx$ приходят к линейному уравнению 1-го порядка

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} = f'(p)x + g'(p).$$

Если $x = \Phi(p, C)$ — решение этого уравнения (где C — произвольная постоянная), то решение уравнения (2) записывается в параметрич. виде

$$x = \Phi(p, C), \quad y = f(p)\Phi(p, C) + g(p).$$

Если p_0 — изолированный корень уравнения $p = f(p)$, то $y = f(p_0)x + g(p_0)$ — также решение уравнения (2); это решение может оказаться особым.

Лит.: [1] Lagrange J. L., Œuvres, t. 1, P., 1867, p. 23—36; [2] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959. *Н. Х. Розов.*

ЛАГРАНЖА УРАВНЕНИЯ механики — обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка, описывающие движения механич. систем под действием приложенных к ним сил. Л. у. установлены Ж. Лагранжем [1] в двух формах: Л. у. 1-го рода, или уравнения в декартовых координатах с неопределенными множителями Лагранжа, и 2-го рода, или уравнения в обобщенных лагранжевых координатах.

Л. у. 1-го рода описывают движения как голономных систем, стесненных только геометрич. связями вида $f_s(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0$, $s = 1, \ldots, k$, $f_s(x, t) \in C^2$, (1) так и неголономных систем, на к-рые наложены, помимо связей (1), кинематич. связи вида

$$\varphi_r(x_1, \ldots, x_{3N}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3N}, t) = 0, \quad r = 1, \ldots, m, \ \varphi_r(x, \dot{x}, t) \in C^1, \qquad (2)$$

где x_ν, $\dot{x}_\nu = \frac{dx_\nu}{dt}$ — декартовы координаты и скорости точек, N — число точек системы, t — время, $m_{3p-2} = m_{3p-1} = m_{3p}$ — масса p-й точки, имеющей координаты x_{3p-2}, x_{3p-1}, x_{3p}.

Связи (1) и (2) предполагаются независимыми, т. е. ранги матриц $\left\| \frac{\partial f_s}{\partial x_\nu} \right\|$ и $\left\| \frac{\partial \varphi_r}{\partial \dot{x}_\nu} \right\|$ равны соответственно k и m.

Л. у. 1-го рода имеют вид

$$m_\nu \ddot{x}_\nu = X_\nu + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_\nu} + \sum_{r=1}^{m} \mu_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial \dot{x}_\nu}, \qquad (3)$$

$$\nu = 1, \ldots, 3N,$$

где λ_s, μ_r — неопределенные множители Лагранжа, пропорциональные реакциям связей, X_ν — проекции на оси координат заданных активных сил, причем сила

F_p, действующая на p-ю точку, имеет проекции X_{3p-2}, X_{3p-1}, X_{3p}; $\ddot{x}_\nu = \frac{d\dot{x}_\nu}{dt}$.

К дифференциальным уравнениям (3) надлежит присоединить $k+m$ уравнений (1) и (2), в результате чего получается система $3N+k+m$ уравнений с таким же числом неизвестных x_ν, λ_s, μ_r. Л. у. 1-го рода на практике обычно применяются для систем с небольшим числом неизвестных.

Л. у. 2-го рода описывают движения лишь голономных систем, стесненных связями вида (1). Введением в рассмотрение $n=3N-k$ независимых обобщенных лагранжевых координат q_i, с помощью к-рых любое возможное положение системы может быть получено при нек-рых значениях q_i из равенств

$$x_\nu = x_\nu(q_1, \ldots, q_n, t),\ x_\nu(q_i, t) \in C^2, \qquad (4)$$

обращающих уравнения (1) в тождества, устанавливается для каждого t взаимно однозначное соответствие между возможными положениями системы и точками нек-рой области n-мерного конфигурационного пространства $(q_1, \ldots, q_n)$. В случае стационарных связей (1) всегда возможно выбрать переменные q_i так, что время t не будет входить в уравнения (4). Далее записываются с помощью уравнений (4) выражения для суммы элементарных работ всех активных сил F_p на возможных перемещениях системы

$$\sum_{p=1}^{N} F_p \cdot \delta r_p = \sum_{\nu=1}^{3N} X_\nu \delta x_\nu = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$$

и кинетич. энергии системы

$$T(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \dot{x}_\nu^2 = T_2 + T_1 + T_0.$$

Здесь

$$Q_i = \sum_{i=1}^{3N} X_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i}$$

— обобщенная сила, соответствующая координате q_i, $T_s(q_i, \dot{q}_i, t)$ — однородные степени s формы обобщенных скоростей $\dot{q}_i$, причем

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad T_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i,$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial t} \right)^2,$$

$$a_{ij} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_j},$$

$$a_i = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial t}.$$

В случае стационарных связей $T = T_2$.

Л. у. 2-го рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,\ i = 1, \ldots, n. \qquad (5)$$

Уравнения (5) представляют собой систему n обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с неизвестными q_i. Они инвариантны по форме относительно выбора лагранжевых координат. Эта система уравнений движения имеет наименьший возможный порядок $2n$. В этом, а также в отсутствии в уравнениях (5) реакций связей, состоит большое преимущество уравнений (5) по сравнению с Л. у. 1-го рода (3). После интегрирования системы (5) реакции связей могут быть определены из уравнений, выражающих второй закон Ньютона для точек системы.

В случае потенциальных обобщенных сил, когда существует силовая функция $U(q_1, \ldots, q_n, t)$ такая, что $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$, $i = 1, \ldots, n$, уравнения (5) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T + U$ носит название функции Лагранжа, или кинетич. потенциала.

Если $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, или $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$, то уравнения (6) допускают обобщенный интеграл энергии

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = T_2 - T_0 - U = \text{const}$$

или циклический интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \beta_\alpha = \text{const},$$

соответствующий циклической координате q_α.

Лит.: [1] Lagrange J., Mécanique analytique, P., 1788 (рус. пер.— Лагранж Ж., Аналитическая механика, 2 изд., т. 1, М.— Л., 1950).

В. В. Румянцев.

ЛАГРАНЖА ФУНКЦИЯ — функция, используемая при решении задач на условный экстремум функций многих переменных и функционалов. С помощью Л. ф. записываются необходимые условия оптимальности в задачах на условный экстремум. При этом не требуется выражать одни переменные через другие или учитывать, что не все переменные являются независимыми. Получаемые с помощью Л. ф. необходимые условия представляют замкнутую систему соотношений, среди решений к-рой содержится искомое оптимальное решение задачи на условный экстремум. Л. ф. используется как при рассмотрении теоретич. вопросов линейного и нелинейного программирования, так и при построении нек-рых вычислительных методов.

Пусть, напр., поставлена задача на условный экстремум функции многих переменных: найти максимум или минимум функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

при условиях

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = b_i, \quad i = 1, \ldots, m; \; m < n. \tag{2}$$

Функция $F(x, \lambda)$, определенная выражением

$$F(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 [b_1 - g_1(x)] + \ldots + \\ + \ldots + \lambda_m [b_m - g_m(x)], \tag{3}$$

наз. функцией Лагранжа, а числа λ_i — *Лагранжа множителями*. Имеет место следующее утверждение, называемое правилом множителей: если x^* $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ — решение задачи на условный экстремум (1), (2), то существует хотя бы одна ненулевая система множителей Лагранжа $\lambda^* = (\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ такая, что точка (x^*, λ^*) является точкой стационарности Л. ф. по переменным x_j и λ_i, $i \neq 0$, рассматриваемым как независимые переменные. Необходимые условия стационарности Л. ф. приводят к системе $m + n$ уравнений

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = \lambda_0^* \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} = 0, \tag{4}$$
$$j = 1, \ldots, n,$$

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

Соотношения (5) полученной системы представляют условия связи (2). Точка x^* доставляет обычный (безусловный) экстремум Л. ф. $F(x, \lambda^*)$ по x.

Для большинства практич. задач значение λ_0^* в (3), (4) можно принять равным единице. Однако имеются

примеры (см. [1]), в к-рых правило множителей при $\lambda_0^* = 1$ не выполняется, а выполняется при $\lambda_0^* = 0$. Для определения условий, позволяющих отличить случаи $\lambda_0^* = 1$ и $\lambda_0^* = 0$, рассматриваются (см. [2]) матрицы G и G_f:

$$G = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|, \quad G_f = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|.$$

Пусть $r(G)$ — ранг матрицы G, рассматриваемой в оптимальной точке x^*. Тогда если $r(G_f) = r(G)$, то $\lambda_0^* = 1$; если же $r(G_f) > r(G)$, то для выполнения правила множителей необходимо положить $\lambda_0^* = 0$. Кроме того, если $r(G_f) \quad r(G) = m$ (наиболее распространенный случай в практич. задачах), то λ_i^* определены однозначно, а если $r(G_f) > r(G)$ или $r(G_f) = r(G) < m$, то λ_i^* определяются не единственным образом. В зависимости от рассмотренных случаев λ_0^* полагается равным 0 или 1. Тогда система (4), (5) превращается в систему $m + n$ уравнений с $m + n$ неизвестными $x_1^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$. Множителям Лагранжа λ_i^* можно дать интерпретацию, имеющую определенный физич. смысл (см. *Лагранжа множители*).

В случае, когда оптимизируемая функция $f(x)$ является квадратичной, а условия связи (2) линейны, система необходимых условий (4), (5) оказывается линейной, и ее решение не вызывает затруднений. В общем случае система необходимых условий (4), (5) в задаче на условный экстремум, получаемая с помощью Л. ф., оказывается нелинейной, и ее решение возможно лишь с применением итерационных методов, напр. *Ньютона метода*. Основной трудностью при этом, помимо вычислительных трудностей решения системы нелинейных уравнений, оказывается проблема получения всех решений, удовлетворяющих необходимым условиям. Не существует вычислительного процесса, обеспечивающего получение всех решений системы (4), (5), и это является одним из обстоятельств, ограничивающих применение метода множителей Лагранжа.

Л. ф. применяется в задачах нелинейного программирования, отличающихся от классич. задач на условный экстремум наличием, помимо условий типа равенства, ограничений типа неравенства: найти минимум или максимум

$$f(x) \tag{6}$$

при условиях

$$\left.\begin{matrix} g_i(x) \leqslant b_i, & i = 1, \dots, m_1, \\ g_i(x) \geqslant b_i, & i = m_1 + 1, \dots, m_2, \ m_1 \leqslant m_2, \\ g_i(x) = b_i, & i = m_2 + 1, \dots, m, \ m_2 \leqslant m, \end{matrix}\right\} \tag{7}$$

$$x \geqslant 0. \tag{8}$$

Для вывода необходимых условий оптимальности в задаче (6) – (8) вводится **Л. ф.**

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x)]. \tag{9}$$

Для определенности рассматривается случай максимума $f(x)$. Пусть $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \geqslant 0$ доставляет максимум $f(x)$ при ограничениях (7), (8) и пусть в точке x^* выполнено требование регулярности ограничений (см. [2]); пусть J — множество индексов j из $j = 1, \dots, n$, для к-рых $x_j^* > 0$, J_0 — множество индексов j, для к-рых $x_j^* = 0$, и I — множество индексов i из $i = 1, \dots, m_2$,

для к-рых ограничения (7) в точке x^* выполняются как строгие неравенства. Тогда существует такой вектор $\lambda^*=(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$:

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_i^*\geqslant 0 \quad \text{при} \quad i=1,\ \ldots,\ m_1,\\ \lambda_i^*\leqslant 0 \quad \text{при} \quad i=m_1+1,\ \ldots,\ m_2,\\ \lambda_i^* \text{ любого знака при } i=m_2+1,\ \ldots,\ m,\\ \lambda_i^*=0 \quad \text{при} \quad i\in I,\end{array}\right\} \tag{10}$$

что

$$\frac{\partial F(x^*,\ \lambda^*)}{\partial x_j}=$$

$$=\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}\begin{cases}=0 & \text{при } j\in J,\\ \leqslant 0 & \text{при } j\in J_0,\end{cases} \tag{11}$$

$$\frac{\partial F(x^*,\ \lambda^*)}{\partial \lambda_i}=$$

$$=b_i-g_i(x^*)\begin{cases}\geqslant 0 & \text{при } i=1,\ \ldots,\ m_1,\\ \leqslant 0 & \text{при } i=m_1+1,\ \ldots,\ m_2,\\ =0 & \text{при } i=m_2+1,\ \ldots,\ m.\end{cases} \tag{12}$$

Сформулированные необходимые условия обобщают условия (4), (5). Эти условия можно интерпретировать, используя понятие седловой точки функции $F(x,\ \lambda)$. В седловой точке $(x^*,\ \lambda^*)$ функция $F(x,\ \lambda)$ удовлетворяет неравенствам

$$F(x,\ \lambda^*)\leqslant F(x^*,\ \lambda^*)\leqslant F(x^*,\ \lambda).$$

Точка $(x^*,\ \lambda^*)$, в к-рой выполняются условия (10) — (12), удовлетворяет необходимым условиям существования седловой точки Л. ф. $F(x,\ \lambda)$ на множестве $x\geqslant 0$ и λ, удовлетворяющем ограничениям (10). В том случае, когда $f(x)$ — вогнутая при $x\geqslant 0$ функция, а $g_i(x)$ — выпуклая, если $\lambda_i^*>0$, и вогнутая, если $\lambda_i^*<0$, $i=1,\ldots,m$, сформулированные необходимые условия оказываются и достаточными, т. е. найденная из необходимых условий точка $(x^*,\ \lambda^*)$ является седловой точкой Л. ф. $F(x,\ \lambda)$ при $x\geqslant 0$ и λ, удовлетворяющем ограничениям (10), и $f(x^*)$ является абсолютным максимумом $f(x)$ при ограничениях (7), (8).

Наряду с Л. ф., записываемой в виде (9), используется и другая форма записи Л. ф., отличающаяся знаком множителей Лагранжа. При этом изменяется и форма записи необходимых условий. Пусть поставлена задача нелинейного программирования: найти максимум

$$f(x) \tag{13}$$

при ограничениях

$$g_i(x)\geqslant 0,\quad i=1,\ \ldots,\ m, \tag{14}$$

$$x\geqslant 0. \tag{15}$$

Ограничения (7) при $i=1,\ldots,m_2$ сводятся к (14) простым переобозначением. Условия типа равенства $g_i(x)=b_i$, $i>m_2$, заменяются неравенствами $g_i(x)-b_i\geqslant 0$ и $b_i-g_i(x)\geqslant 0$ и также приводятся к виду (14).

Пусть Л. ф. записана в виде

$$F(x,\ \lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) \tag{16}$$

и пусть I — множество индексов i из $i=1,\ldots,m$, для к-рых ограничения (14) выполняются как строгие неравенства. Тогда если $x^*\geqslant 0$ — оптимальное решение задачи (13) — (15), то при выполнении требования регулярности ограничений существует такой вектор $\lambda^*=(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*)$:

$$\lambda_i^*\geqslant 0,\quad i=1,\ \ldots,\ m;\ \lambda_i^*=0,\ i\in I, \tag{17}$$

что

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \begin{cases} = 0 \text{ при } j \in J, \\ \leqslant 0 \text{ при } j \in J_0, \end{cases} \qquad (18)$$

$$\frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g_i(x^*) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m \qquad (19)$$

(см. [2], [3]). Условия (17) — (19) с учетом положительных и нулевых значений x_j^* и λ_i^* иногда записывают следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x_j} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0.$$

Если ограничения (7) или (14) линейны, то упоминаемое выше условие регулярности ограничений всегда выполнено. Поэтому для линейных ограничений единственным предположением при выводе необходимых условий является дифференцируемость функции $f(x)$.

Если в задаче (13) — (15) функции $f(x)$ и $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, вогнутые, то точка (x^*, λ^*), удовлетворяющая необходимым условиям (17) — (19), является седловой точкой Л. ф. (16) и x^* доставляет абсолютный максимум. То что Л. ф. имеет в этом случае седловую точку, может быть доказано и без предположений о дифференцируемости функций $f(x)$ и $g_i(x)$.

Аналог Л. ф. применяется и в вариационном исчислении при рассмотрении задач на условный экстремум функционалов. Здесь также необходимые условия оптимальности в задаче на условный экстремум оказывается удобным записывать как необходимые условия для некрого составного функционала (аналога Л. ф.), построенного с помощью множителей Лагранжа. Пусть, напр., поставлена *Больца задача*: найти минимум функционала

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x})\, dt + g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенств

$$\varphi(t, x, \dot{x}) = 0, \quad \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad m < n,$$

и граничных условий

$$\psi(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) = 0, \qquad \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$

$$p \leqslant 2n + 2.$$

Необходимые условия в этой условноэкстремальной задаче получаются как необходимые условия безусловного экстремума функционала (см. [4])

$$I(x, \lambda, e) = \int_{t_1}^{t_2} (\lambda_0 f(t, x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\, \varphi_i(t, x, \dot{x}))\, dt +$$

$$+ \lambda_0 g(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) + \sum_{\mu=1}^{p} e_\mu \psi_\mu(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)),$$

составленного с помощью множителей Лагранжа

$$\lambda_0, \quad \lambda_i(t), \quad i = 1, \ldots, m, \quad e_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, p.$$

Эти необходимые условия, представляющие собой замкнутую систему соотношений для определения оптимального решения $x^*(t)$ и соответствующих множителей Лагранжа $\lambda_i^*(t)$ и e_μ^*, в конкретных постановках записываются в виде *Эйлера уравнения*, *Вейерштрасса условия* и *трансверсальности условия*.

Лит.: [1] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 23 изд., т. 1, М., 1974; [2] Хедли Дж., Нелинейное и динамическое программирование, пер. с англ., М., 1967; [3] Kuhn H.

W., Tucker A. W., в кн.: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berk.— Los Ang., 1951, p. 481—92; [4] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950. *И. Б. Вапнярский.*

ЛАГРАНЖЕВО МНОГООБРАЗИЕ — n-мерное дифференцируемое подмногообразие L^n $2n$-мерного *симплектического многообразия* M^{2n} такое, что внешняя форма ω, задающая симплектич. структуру на M^{2n}, обращается в нуль тождественно на L^n (т. е. для любой точки $x \in L^n$ и любых векторов X, Y, касающихся L^n в этой точке, $\omega(X, Y)=0$). В наиболее важном случае, когда $M^{2n}=\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, а $\omega=\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$, условие лагранжевости подмногообразия L^n, заданного параметрич. уравнениями

$$p_i=p_i(u_1, \ldots, u_n), \quad q_i=q_i(u_1, \ldots, u_n),$$

имеет вид

$$[u_i, u_j]=0, \quad i, j=1, \ldots, n,$$

где $[u_i, u_j]$ — *Лагранжа скобки*.

Лит.: [1] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; [2] его же, Метод ВКБ в многомерном случае, в кн.: Хединг Дж., Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), пер. с англ., М., 1965; [3] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [4] Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976; [5] Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М., 1978. *Д. В. Аносов.*

ЛАГРАНЖИАН, функция Лагранжа, интегрант,— подынтегральная функция $L(q, \dot{q}, t)$ в задаче на экстремум для функционала

$$J(q)=\int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt; \qquad (*)$$

экстремальная задача решается при возможном наложении связей и граничных условий; здесь $q=(q_1, \ldots, q_n)$, $\dot{q}=dq/dt$, L — произвольное дифференцируемое отображение $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Термин «Л.» возник в классич. механике, где в простейшем случае Л. наз. разность кинетической и потенциальной энергии системы, причем движения системы совпадают с экстремалями соответствующего интегрального функционала (принцип стационарного действия). В общем случае в классич. механике Л. наз. произвольное дифференцируемое отображение $L: TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где TM — касательное расслоение нек-рого дифференцируемого многообразия M (конфигурационного многообразия системы).

Необходимое условие слабого экстремума функционала (*) при отсутствии связей дается уравнением Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0.$$

Наличие связей типа равенств учитывается при помощи множителей Лагранжа. При наличии «неклассических» связей типа неравенств в теории оптимального управления необходимое условие сильного экстремума функционала (*) дает *Понтрягина принцип максимума*.

При помощи понятия Л. удобно рассматривать различные симметрии системы, поскольку всякой однопараметрич. группе диффеоморфизмов конфигурационного многообразия, сохраняющих Л., соответствует первый интеграл уравнений движения (теорема Нётер).

Во многих задачах полезным оказывается переписать уравнения Эйлера — Лагранжа в виде *Гамильтона уравнений*, что позволяет, в частности, использовать метод канонич. преобразований и *Гамильтона — Якоби теорию*. Переход к гамильтоновой форме записи полезен также при квантовании исходной классич. системы. Если Л. не вырожден, то переход к гамильтоновой формулировке производится с помощью *Лежандра*

преобразования, в случае вырождения применяется более сложная процедура редукции (см. [1], [6]).

В механике сплошных сред и *квантовой теории поля*, к-рые можно рассматривать как механич. системы с бесконечным числом степеней свободы, рассматриваются экстремальные задачи для функционалов вида

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t)\, dt,$$

где

$$L(t) = \int_G \mathscr{L}(q,\ \dot{q},\ q',\ t,\ x)\, dx,$$

$$x = (x_1,\ \ldots,\ x_k),\ G \subset \mathbb{R}^k,\ q = q(t,\ x) = (q_1,\ \ldots,\ q_n),$$

$$\dot{q} = (\partial q_1/\partial t,\ \ldots,\ \partial q_n/\partial t),\quad q' = (\partial q_i/\partial x_j).$$

В этом случае функционал $L(t)$ наз. л а г р а н ж и а н о м, а функция $\mathscr{L}(q, \dot{q}, q', t, x)$ — п л о т н о с т ь ю л а г р а н ж и а н а. Основные понятия для таких систем (гамильтониан и др.) вводятся по аналогии с классич. механикой.

Лит.: [1] А р н о л ь д В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [2] Б о г о л ю б о в Н. Н., Ш и р к о в Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 3 изд., М., 1976; [3] И о ф ф е А. Д., Т и х о м и р о в В. М., Теория экстремальных задач, М., 1974; [4] П о н т р я г и н Л. С. [и др.], Математическая теория оптимальных процессов, 2 изд., М., 1969; [5] С т е р н б е р г С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [6] Ф а д д е е в Л. Д., «Теоретич. и матем. физика», 1969, т. 1, № 1, с. 1—18.

Н. В. Волович.

ЛАКУНА — 1) Л. в т е о р и и ф у н к ц и й — см. *Адамара теорема* о лакунах, *Лакунарный степенной ряд*.

2) Л. в г е о м е т р и и — см. *Движений группа*, *Лакунарное пространство*.

3) Л. в т е о р и и д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й с ч а с т н ы м и п р о и з в о д н ы м и — одна из областей D, на к-рые разбивается внутренность характеристич. конуса линейной гиперболич. системы

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{k} L_{ij} u_j,\quad 1 \leqslant i \leqslant k, \tag{1}$$

с вершиной в точке $(x_0,\ t_0)$ плоскостью $t = t_1$, обладающая следующим свойством: малые достаточно гладкие изменения начальных данных внутри D не влияют на значение решения u в точке $(x_0,\ t_0)$. В (1) предполагается, что L_{ij} — линейный дифференциальный оператор порядка n_j и порядок дифференцирований в нем по t не превосходит $n_j - 1$. Под «изменением внутри» понимается изменение в нек-рой области, входящей в D вместе со своей границей.

Для волнового уравнения

$$u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0 \tag{2}$$

решение u задачи Коши

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1 \tag{3}$$

в точке $(x_0,\ t_0)$, $t_0 > 0$, вполне определяется значениями функций φ_0, φ_1 на сфере $|y - x_0| = t_0$ при нечетном $n > 1$ и на шаре $|y - x_0| \leqslant t_0$ при четном n и $n = 1$, поэтому область $|y - x_0| < t_0$ на плоскости $t = 0$ является Л. для уравнения (2) при нечетном $n > 1$. Для четного n и $n = 1$ уравнение (2) Л. не имеет. Это согласуется с *Гюйгенса принципом* для решений волнового уравнения.

Возмущение начальных данных (3) в малой окрестности точки x_0 приводит к сферич. волне с центром в этой точке, к-рая при нечетном $n > 1$ имеет передний и

задний фронты. При остальных значениях n задний фронт этой волны «размыт», это явление наз. д и ф ф у з и е й в о л н. Диффузия волн типична для всех линейных гиперболич. уравнений 2-го порядка, если число n пространственных переменных четно (см. [1]). Аналогичный вопрос для $n=3$ изучался в [2], где был описан класс гиперболич. уравнений 2-го порядка, для к-рых диффузия волн отсутствует. Уравнения этого класса тесно связаны с волновым уравнением. Для общих гиперболич. систем (1) найдена связь «в малом» между существованием Л. для системы (1) и аналогичным вопросом для соответствующей системы с постоянными коэффициентами (см. [3]). Для последних систем получены необходимые и достаточные условия алгебраич. характера, обеспечивающие наличие Л.

Лит.: [1] А д а м а р Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, пер. с франц., М., 1978; [2] M a t h i s s o n M., «Acta math.», 1939, t. 71, № 3—4, p. 249—82; [3] Ц е т р о в с к и й И. Г., «Матем. сб.», 1945, т. 17, с. 289—370; [4] К у р а н т Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964. *А. П. Солдатов.*

ЛАКУНАРНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность чисел $\{n_k\}$ таких, что $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$; обозначается Λ и применяется, в частности, в теории лакунарных рядов и в теории лакунарных тригонометрич. рядов. Существуют обобщения класса Λ. Напр., класс B_2 : $\{n_k\} \in B_2$, если существует такое A, что число решений уравнений $[n_{k_1} \pm n_{k_2}] = m$ ($n_{k_1} > n_{k_2}$, $[a]$ — целая часть числа a) не превосходит A при любом целом m; класс R : $\{n_k\} \in R$, если существует такое A, что число решений уравнения $[n_{k_1} \pm n_{k_2} \pm \ldots \pm n_{k_p}] = m$ ($n_{k_1} > n_{k_2} > \ldots > n_{k_p}$) не превосходит A^p при любом $p=2, 3, \ldots$ и любом целом m; классы Λ_σ, $B_{2\sigma}$, R_σ, состоящие из последовательностей, разбивающихся на конечное число последовательностей, соответственно из классов Λ, B_2, R.

Лит.: Б а р и Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961. *В. Ф. Емельянов.*

ЛАКУНАРНАЯ СИСТЕМА п о р я д к а $p>2$, S_p-с и с т е м а,— ортонормированная система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства L^p такая, что если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \qquad (*)$$

сходится в пространстве L^2, то его сумма принадлежит классу L^p. Если система функций $\{\varphi_n\}$ есть S_p-система при любом $p>2$, то она наз. S_∞-с и с т е м о й. С. Банах (S. Banach) доказал (см. [2]), что из всякой ограниченной в пространстве L^p ортонормированной в L^2 системы функций можно выбрать S_p-систему. Для того чтобы ортонормированная система функций $\{\varphi_n\}$ была S_p-системой, необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная μ_p, зависящая только от p и такая, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L^p} \leqslant \mu_p \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L^2}$$

для всех N, $\{a\}$. Если система функций $\{\varphi_n\}$ есть S_p-система при некотором $p>2$, то найдется постоянная m такая, что

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L^2} \leqslant m \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n \right\|_{L}$$

для всех N, $\{a_n\}$. Система функций, обладающая этим свойством, наз. с и с т е м о й Б а н а х а. Эти определения распространяются и на не ортогональные системы функций (см., напр., [3]). Иногда под Л. с. понимают систему функций, ряды к-рой обладают одним или несколькими свойствами *лакунарных тригонометрических рядов*, в зависимости от к-рых ей придают различные названия. Напр., с теоремой единственности для лакунарных тригонометрич. рядов связано понятие Л. с. ε-единственности. Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

наз. системой ε-единственности, если существует число $\varepsilon>0$ такое, что из сходимости ряда (*) к нулю всюду, за исключением быть может множества меры, меньшей ε, следует равенство всех его коэффициентов нулю.

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [2] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963; [3] Гапошкин В. Ф., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 6, с. 3 82.

В. Ф. Емельянов.

ЛАКУНАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство аффинной связности или риманово пространство нек-рой определенной степени подвижности. Л. п. определяется порядком полной *движений группы*, т. е. наибольшим числом ее параметров для данного пространства. Так, обычное n-мерное аффинное пространство

Табл. 1.—Порядки полных групп автоморфизмов в пространствах аффинной связности A_n размерности n

A_2	A_3	A_n	Типы пространств и лакун
6	12	n^2+n	Пространства первой лакунарности
			Первая лакуна
4 . . . 1	9 . . . 1	n^2 n^2-1	Пространства второй лакунарности
			Вторая лакуна
		n^2-n+1 . . . n^2-n-2	Пространства третьей лакунарности
			Третья лакуна
		n^2-2n+5 . . .	Пространства четвертой лакунарности
		. . . 3 2 1	. . .

допускает группу движений максимального порядка n^2+n. Порядки полных групп движений других пространств аффинной связности принадлежат отрезку натурального ряда $[1, n^2+n]$, но не каждое число из этого отрезка может быть порядком полной группы движений. Интервалы наибольшей длины, составленные из чисел, не являющихся порядком полных групп движений, наз. лакунами, а дополнения к ним до указанного отрезка натурального ряда — отрезками конденсации. Пространство наз. пространством k-й лакунарности, если порядок его полной группы движений принадлежит отрезку конденсации, имеющему номер k. Счет ведется с отрезка конденсации, содержащего максимальный порядок. Об известном распределении подвижности «твердых» тел в пространствах аффинной связности см. таблицу 1. Речь идет о порядках полных групп движений — синонимах степени подвижности, степени свободы твердых тел. Вопрос об определении возможных степеней подвижности твердых

и подобно изменяемых тел в римановых пространствах частично решен лишь для пространств знакоопределенной метрики. В общем случае известны те степени подвижности и реализующие их римановы пространства, к-рые приведены в таблице 2.

Табл. 2.—Порядки полных групп автоморфизмов в римановых пространствах V_n размерности n

V_2	V_3	V_4	V_5	V_n	Типы пространств и лакун
3	6	10	15	$\frac{n(n+1)}{2}$	Пространства первой лакунарности (постоянной кривизны)
					Первая лакуна
I	4 . . . 1	8 . . . 1	11 . . . 1	$\frac{n(n-1)}{2}+1$ $\frac{n(n-1)}{2}$	Пространства второй лакунарности
					Вторая лакуна
				$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+5$ . . .	Пространства третьей лакунарности
				. . . 3 2 1	. . .

Лит.: [1] Егоров И. П., в сб.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 375—428; [2] его же, в сб.: Итоги науки и техники. Проблемы геометрии, т. 10, М., 1978, с. 147—91; [3] его же, Геометрия, М., 1979.

И. П. Егоров.

ЛАКУНАРНЫЙ РЯД — ряд по *лакунарной системе* функций. Примерами служат лакунарные тригонометрич. ряды, лакунарные степенные ряды, ряды Радемахера, ряды независимых функций с нулевыми математич. ожиданиями, ряды Дирихле с показателями, независимыми над полем рациональных чисел, и т. д.

В. Ф. Емельянов.

ЛАКУНАРНЫЙ СТЕПЕННОЙ РЯД — ряд

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k} \qquad (*)$$

с пропусками (лакунами), в к-ром показатели $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ пробегают не все числа из натурального ряда. В зависимости от свойств последовательности $\{\lambda_k\}$ получено много свойств ряда (*). Так, если

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k > \theta\lambda_k, \quad k=0, 1, 2, \ldots, \theta > 0,$$

и ряд (*) сходится в круге $|z|<R$, $0<R<\infty$, то все точки окружности $|z|=R$ — особые для $f(z)$ (теорема Адамара о лакунах). Усилением этой теоремы является *Фабри теорема* о лакунах. Если нижняя плотность

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{k}{\lambda_k}=0,$$

то $f(z)$ — однозначная аналитич. функция с односвязной областью существования (теорема Пойа). См. также *Сверхсходимость.*

Лит.: [1] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967.

А. Ф. Леонтьев.

ЛАКУНАРНЫЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД — ряд вида

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x+b_k \sin n_k x, \qquad (1)$$

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} \quad \lambda > 1.$$

Рядом типа (1) К. Вейерштрасс (K. Weierstrass) в 1872 представил непрерывную нигде не дифференцируемую функцию. Ж. Адамар (J. Hadamard) в 1892 применил ряды (1), назвав их лакунарными, к изучению аналитич. продолжения функции. Систематич. изучение Л. т. р. началось с работы П. Фату (P. Fatou, 1906), в к-рой доказано, что из сходимости всюду Л. т. р. при $\lambda>3$ следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|+|b_k| < +\infty. \qquad (2)$$

Л. т. р. обладают свойствами, существенно отличающими их от общих тригонометрич. рядов. Напр., А. Н. Колмогоров, построив первый пример (1923) суммируемой функции с расходящимся почти всюду рядом Фурье, в 1924 доказал сходимость почти всюду лакунарного ряда Фурье; А. Зигмунд (A. Zygmund, 1948) доказал, что если суммы двух Л. т. р. совпадают на множестве положительной меры, то эти ряды тождественны. Для многих приложений Л. т. р. важна обнаруженная Зигмундом в 30-е гг. 20 в. зависимость свойств ряда (1) от его коэффициентов. Так, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2+b_k^2 < +\infty, \qquad (3)$$

то ряд (1) есть ряд Фурье функции $f(x)$, принадлежащей всем пространствам $L^p(0,\ 2\pi)$, $1\leqslant p<+\infty$, и, следовательно, сходится почти всюду. При этом существуют постоянные $A_p>0$, $B_p>0$, зависящие только от p и λ такие, что

$$A_p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2+b_k^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant B_p\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2+b_k^2\right)^{1/2}.$$

Если условие (3) не выполнено, то ряд (1) расходится почти всюду и, более того, почти всюду не суммируется никаким методом Тёплица (следовательно, не является рядом Фурье). Если ряд (1) сходится в каждой точке нек-рого интервала (T^* — ограничен в каждой точке нек-рого интервала), то выполнено условие (2). Если коэффициенты ряда (1) есть $o(1,\ n_k)$, то его сумма есть непрерывная гладкая функция, дифференцируемая в тех и только в тех точках, в к-рых сходится формально продифференцированный ряд (1).

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., [2 изд.], т. 1—2, М., 1965; [3] Ульянов П. Л., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 1, с. 3—69; [4] Гапошкин В. Ф., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 6, с. 3—83; [5] Кахан Ж.-П., Случайные функциональные ряды, пер. с англ., М., 1973; [6] Kahane J.-P., *Séries de Fourier absolument convergentes*, B.— Hdlb.— N. Y., 1970; [7] Rudin W., Fourier analysis on groups, N. Y.— L., 1962. *В. Ф. Емельянов.*

ЛАМБЕРТА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых рядов. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

суммируем методом Ламберта к числу S, если

$$\lim_{y\to+0} F(y)=S,$$

где

$$F(y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{nye^{-ny}}{1-e^{-ny}} \quad \text{при } y>0,$$

и ряд справа сходится. Метод предложен И. Ламбертом (1). Из суммируемости ряда *Чезаро методом суммирования* (C, k) для нек-рого $k>-1$ к сумме S следует его суммируемость Л. м. с. к той же сумме, и если ряд суммируем Л. м. с. к сумме S, то он суммируем и *Абеля методом суммирования* к той же сумме. Л. м. с. регулярен (см. *Регулярные методы суммирования*).

Лит.: [1] Lambert J. H., Anlage zur Architektonik, Bd 2, Riga, 1771; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951.

И. И. Волков.

ЛАМБЕРТА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x)=\int_0^\infty \frac{ta(t)}{e^{xt}-1}\,dt.$$

Л. п. является непрерывным аналогом *Ламберта ряда* (при соответствии $ta(t)\leftrightarrow a_n$, $e^x\leftrightarrow 1/x$). Имеет место следующая формула обращения. Пусть

$$a(t)\in L(0,\ \infty)$$

и

$$\lim_{t\to+0} a(t)\,t^{1-\delta}=0,\quad \delta>0;$$

тогда если $\tau>0$ и функция $a(t)$ непрерывна при $t=\tau$, то

$$\tau a(\tau)=\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{\tau}\right)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\,n^kF^{(k)}\left(\frac{nk}{\tau}\right),$$

где $\mu(n)$ — *Мёбиуса функция*.

Лит.: [1] Widder D. V., «Math. Mag.», 1950, v. 23, p. 171—82; [2] Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 7—82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

ЛАМБЕРТА РЯД — функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{x^n}{1-x^n}. \qquad (1)$$

Рассмотрен И. Ламбертом (см. [1]) в связи с вопросами сходимости степенных рядов. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

то Л. р. сходится при всех значениях x, кроме $x=\pm1$; в противном случае он сходится для тех значений x, для к-рых сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n.$$

Л. р. применяется в нек-рых задачах теории чисел. Так, при $|x|<1$ сумма $\varphi(x)$ ряда (1) представляется в виде степенного ряда:

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nx^n, \qquad (2)$$

где

$$\alpha_n=\sum_{k/n} a_k,$$

а суммирование распространяется на делители k числа n. В частности, если $a_n=1$, то $\alpha_n=\tau(n)$ — число делителей n, если $a_n=n$, то $\alpha_n=\sigma(n)$ — сумма делителей n. Поведение $\varphi(x)$ (с надлежащими a_n) при $x\to1-0$ используется, напр. (см. [3]), в задаче Харди и Рамануджана для получения асимптотич. формулы для количества «неограниченных разбиений» натурального числа.

Лит.: [1] Lambert J. H., Opera mathematica, v. 1—2, Zürich, 1946—48; [2] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 4 изд., т. 2, М., 1959; [3] Постников А. Г., Введение в аналитическую теорию чисел, М., 1971.

М. И. Войцеховский.

ЛАМБЕРТА ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, трипрямоугольник,— четырехугольник, в к-ром при трех вершинах прямые углы. Рассматривался И. Ламбертом (J. Lambert, 1766) при попытках доказать постулат Евклида о параллельных. Из трех возможных предположений о величине четвертого угла: либо угол прямой,

либо угол тупой, либо угол острый; первая гипотеза является утверждением, эквивалентным постулату Евклида о параллельных; вторая приводит к противоречию с др. аксиомами и постулатами Евклида. Относительно третьей гипотезы И. Ламберт сделал предположение, что она выполняется на нек-рой мнимой сфере.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [2] Погорелов А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968.

А. Б. Иванов.

ЛАМЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ортогональной криволинейной системы координат u, v, w в пространстве — величины

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2},$$

$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2},$$

$$L_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2};$$

аналогично определяются Л. к. на плоскости. Через Л. к. в координатах u, v, w выражаются элемент длины:

$$dl = \sqrt{L_u^2\,du^2 + L_v^2\,dv^2 + L_w^2\,dw^2};$$

элемент площади поверхности:

$$d\sigma = \sqrt{(L_u L_v\,du\,dv)^2 + (L_u L_w\,du\,dw)^2 + (L_v L_w\,dv\,dw)^2};$$

элемент объема:

$$dV = L_u L_v L_w\,du\,dv\,dw.$$

Л. к. входят в выражения векторных дифференциальных операций в координатах u, v, w:

$$\operatorname{grad}_u \psi = \frac{1}{L_u}\frac{\partial \psi}{\partial u},\quad \operatorname{grad}_v \psi = \frac{1}{L_v}\frac{\partial \psi}{\partial v},\quad \operatorname{grad}_w \psi = \frac{1}{L_w}\frac{\partial \psi}{\partial w};$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_u L_v L_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v L_u L_w) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w L_u L_v)\right];$$

$$\operatorname{rot}_u \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(a_w L_w) - \frac{\partial}{\partial w}(a_v L_v)\right],$$

$$\operatorname{rot}_v \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_u L_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(a_u L_u) - \frac{\partial}{\partial u}(a_w L_w)\right],$$

$$\operatorname{rot}_w \boldsymbol{a} = \frac{1}{L_u L_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_v L_v) - \frac{\partial}{\partial v}(a_u L_u)\right];$$

$$\Delta\psi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_v L_w}{L_u}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_u L_w}{L_v}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_u L_v}{L_w}\frac{\partial \psi}{\partial w}\right)\right].$$

Л. к. для различных ортогональных криволинейных координат см. в соответствующих статьях.

Л. к. введены Г. Ламе [1].

Лит.: [1] Lamé G., Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, P., 1859; [2] Лаптев Г. Ф., Элементы векторного исчисления, М., 1975; [3] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1958.

В. И. Битюцков.

ЛАМЕ КРИВАЯ — плоская алгебраич. кривая, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1,$$

где $m = p/q$, p и q — взаимно простые числа, $a>0$ и $b>0$. Порядок Л. к. равен pq при $m>0$ и $2pq$ при $m<0$. При $m=1$ Л. к.— прямая, при $m=2$ — эллипс, при $m=2/3$ и $a=b$ — *астроида*. Л. к. названы по имени Г. Ламе (G. Lamé), рассмотревшего их в 1818.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЛАМЕ ПОСТОЯННЫЕ — величины, связывающие компоненты упругого напряжения в какой-либо точке твердого изотропного деформируемого тела с компонентами деформации в этой же точке:

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \quad \tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy},$$

где σ и τ — нормальная и касательная составляющие напряжения, ε — компоненты деформации, а коэффициенты λ и μ — постоянные Ламе. Л. п. зависят от материала и его температуры. Л. п. связаны с модулями упругости и коэффициентом Пуассона ν:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

где E — модуль продольной упругости, G — модуль сдвига.

Л. п. наз. по имени Г. Ламе (G. Lamé). *БСЭ-3.*

ЛАМЕ УРАВНЕНИЕ — линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка в комплексной области

$$\frac{d^2w}{dz^2} = [A + B\wp(z)]\, w, \qquad (1)$$

где $\wp(z)$ — *Вейерштрасса эллиптическая функция*, A и B — константы. Это уравнение было впервые изучено Г. Ламе [1]; оно возникает при разделении переменных в уравнении Лапласа в эллиптич. координатах. Уравнение (1) наз. ф о р м о й В е й е р ш т р а с с а для Л. у. Существует такая замена независимой переменной в уравнении (1), в результате к-рой получается ф о р м а Я к о б и для Л. у.:

$$\frac{d^2w}{du^2} = [C + D\,\mathrm{sn}^2 u]\, w.$$

Имеются также многочисленные алгебраич. формы Л. у., переход к к-рым осуществляется различными преобразованиями независимой переменной уравнения (1), напр.:

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi - e_1} + \frac{1}{\xi - e_2} + \frac{1}{\xi - e_3}\right)\frac{dw}{d\xi} = \frac{A + B\xi}{4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}\, w. \qquad (2)$$

Для практич. приложений форма Якоби является наиболее подходящей.

Особенно важен случай, когда в уравнении (1) (или (2)) $B = n(n+1)$, где n — натуральное число. В этом случае решения уравнения (1) мероморфны во всей плоскости и их свойства довольно хорошо изучены. Среди решений уравнения (2) при $B = n(n+1)$ первостепенное значение имеют *Ламе функции*.

Лит.: [1] L a m é G., «J. math. pures et appl.», 1837, t. 2, p. 147—88; [2] С т р е т т М. Д. О., Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, пер. с нем., Хар.— К., 1935; [3] У и т т е к е р Э.-Т., В а т с о н Д.-Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [4] Б е й т м е н Г., Э р д е й и А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, пер. с англ., М., 1967; [5] Г о б с о н Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, пер. с англ., М., 1952.

Н. Х. Розов.

ЛАМЕ ФУНКЦИЯ, э л л и п с о и д а л ь н а я г а р м о н и ч е с к а я ф у н к ц и я,— функция специального вида, удовлетворяющая *Ламе уравнению*. Если уравнение Ламе в алгебраич. форме

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi - e_1} + \frac{1}{\xi - e_2} + \frac{1}{\xi - e_3}\right)\frac{dw}{d\xi} = \frac{A + n(n+1)\xi}{4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)}\, w, \qquad (*)$$

где n — натуральное число, а e_1, e_2, e_3 и A — констан-

ты, имеет решение одного из следующих видов:

$$P(\xi),$$

$$\sqrt{\xi-e_i}\,P(\xi),\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

$$\sqrt{\xi-e_i}\,\sqrt{\xi-e_j}\,P(\xi),\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ i\neq j,$$

$$\sqrt{\xi-e_1}\,\sqrt{\xi-e_2}\,\sqrt{\xi-e_3}\,P(\xi),$$

где $P(\xi)$ — многочлен с единичным старшим коэффициентом, то это решение наз. соответственно функцией Ламе степени n первого рода 1-го, 2-го, 3-го или 4-го вида.

При фиксированном четном n всегда найдутся такие значения параметра A (собственные значения), что существует $(n+2)/2$ Л. ф. 1-го вида и $3n/2$ Л. ф. 3-го вида с многочленами $P(\xi)$ степени $n/2$ и $(n-2)/2$ соответственно. При фиксированном нечетном n всегда найдутся такие значения A, что существует $3(n+1)$ 2 Л. ф. 2-го вида и $(n-1)/2$ Л. ф. 4-го вида с многочленами $P(\xi)$ степени $(n-1)/2$ и $(n-3)/2$ соответственно. Всего при заданном натуральном n существует $2n+1$ линейно независимых Л. ф.

Решения уравнения (*), линейно независимые с Л. ф. первого рода и получающиеся с помощью *Лиувилля — Остроградского формулы*, наз. функциями Ламе второго рода.

Лит. см. при ст. *Ламе уравнение.* *Н. Х. Розов.*

ЛАНДАУ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — кинетическое уравнение для слабо взаимодействующего газа, в частности уравнение переноса заряженных частиц в плазме с учетом кулоновских столкновений. Получено Л. Д. Ландау (см. [1], [2]). Для систем с кулоновским взаимодействием при выводе Л. к. у. коэффициенты уравнения содержат расходящийся интеграл («кулоновский логарифм»: $\ln\Lambda_{ab}$ — логарифм отношения максимального и минимального прицельного параметра при столкновении двух заряженных частиц a и b). Чтобы получить приближенный нерасходящийся результат, интеграл «обрезают»: за верхний предел интегрирования берется длина электростатич. экранирования Дебая, за нижний — расстояние ближнего взаимодействия (или квантовомеханич. длина волны). Наложенное извне «обрезание» интеграла, не вытекающее из самого вывода Л. к. у., оставляет открытым вопрос о построении адекватного кинетич. уравнения для систем с кулоновским взаимодействием. Были предложены (см., напр., [3]) различные виды таких уравнений (также не свободные от расходимостей). В этих уравнениях учитывается динамич. экранирование, зависящее от скоростей частиц.

Для разреженного газа пробных частиц, взаимодействующих с равновесным фоном, Л. к. у. переходит в линейное уравнение Фоккера — Планка. Для неоднородной плазмы интеграл столкновений Ландау следует добавить в правую часть *Власова кинетического уравнения*. Полученное уравнение наз. уравнением Власова — Ландау (см. [3]).

Для смеси частиц нескольких типов систему Л. к. у. можно записать в виде

$$\frac{df_a}{dt}=I_a+S_a, \tag{1}$$

где $f_a\equiv f_a\ (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)$ — функция распределения для частиц типа a в 6-мерном фазовом пространстве координат $\boldsymbol{r}$ и скоростей $\boldsymbol{v}$ (t — время). Функция $S_a(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)\equiv S$ описывает источники частиц, I_a — интеграл столкновений, к-рый можно привести к виду

$$I_a=\Gamma_a\left[-\frac{\partial}{\partial v_i}\left(f_a\,\frac{\partial h_a}{\partial v_i}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial v_i\,\partial v_j}\left(f_a\,\frac{\partial^2 g_a}{\partial v_i\,\partial v_j}\right)\right], \tag{2}$$

где суммирование подразумевается по одинаковым индексам $i,\ j$ от 1 до 3, $\Gamma_a=4\pi Z_a^4e^4/m_a^2$; m_a, Z_ae —

масса и заряд частиц типа a, e — заряд электрона,

$$\left.\begin{aligned} g_a &= \sum_b \left(\frac{Z_b}{Z_a}\right)^2 \ln \Lambda_{ab} \int f_b(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}', t) \mid \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \mid d\boldsymbol{v}', \\ h_a &= \sum_b \left(\frac{m_a + m_b}{m_b}\right) \left(\frac{Z_b}{Z_a}\right)^2 \ln \Lambda_{ab} \int f_b(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}', t) \times \\ &\quad \times \mid \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \mid^{-1} d\boldsymbol{v}' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

— потенциалы, введенные в [2], $\ln\Lambda_{ab}$ — кулоновские логарифмы, зависящие от средних энергий частиц. Интеграл столкновений (2) содержит эллиптич. дифференциальный оператор по скорости, коэффициенты к-рого выражаются через интегральные операторы типа потенциала от $f_a(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$. Для неоднородной плазмы

$$\frac{df_a}{dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} + \boldsymbol{v}\,\frac{df_a}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{Z_a e}{m_a}\boldsymbol{F}\frac{\partial f_a}{\partial \boldsymbol{v}},$$

где $Z_a e\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на частицы типа a.

Л. к. у. позволяют получить гидродинамич. уравнения сохранения для плотностей массы, импульса и внутренней энергии, а также *Больцмана H-теорему*.

Существование обобщенного решения Л. к. у. доказано в малом (см. [4]).

Численное решение Л. к. у. на ЭВМ проводилось для расчета утечки частиц из открытых магнитных ловушек (см. [5]), определения коэффициента умножения энергии в тороидальных термоядерных реакторах (см. [6]), оценки дополнительных методов нагрева плазмы в токамаках. В условиях хорошего удержания плазмы в магнитных ловушках необходимо использовать полностью консервативные разностные схемы (см. [7]), точно сохраняющие для решения Л. к. у. полное число частиц и их энергию.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., «Phys. Z. Sowjetunion», 1936, Bd 10, Hft 2, S. 154—64; его же, «Ж. эксперимент. и теоретич. физики», 1937, т. 7, № 2, с. 203—209; [2] Трубников Б. А., в кн.: Вопросы теории плазмы, в. 1, М., 1963, с. 98—182; [3] Балеску Р., Равновесная и неравновесная статистическая механика, пер. с англ., т. 1—2, М., 1978; [4] Арсеньев А. А., Песков Н. В., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1977, т. 17, № 4, с. 1063—68; [5] Киллин Дж., Маркс К. Д., в кн.: Вычислительные методы в физике плазмы, пер. с англ., М., 1974; с. 417—82; [6] Киллин Дж., Мирин А., Ренсинк М., в кн.: Управляемый термоядерный синтез, пер. с англ., М., 1980, с. 419—67; [7] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977.

В. А. Чуянов.

ЛАНДАУ ТЕОРЕМЫ — теоремы для регулярных в круге функций, устанавливающие нек-рые связи между геометрич. свойствами производимого этими функциями конформного отображения и начальными коэффициентами представляющих их степенных рядов.

В 1904 Э. Ландау показал [1], что если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<R$ и не принимает в нем значений 0 и 1, то R ограничено сверху положительной постоянной, зависящей только от $a_0 = f(0)$ и $a_1 = f'(0)$. В 1905 К. Каратеодори (C. Carathéodory) установил, что роль экстремальной функции в этой теореме играет *модулярная функция*. Эти результаты Э. Ландау и К. Каратеодори известны в виде следующей теоремы.

Теорема Ландау — Каратеодори. Если функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots, \quad a_1 \neq 0,$$

регулярна и не принимает значений 0 и 1 в круге $|z|<R$, то

$$R \leqslant R(a_0, a_1) = \frac{2\,\mathrm{Im}\,\tau(a_0)}{|a_1|\,|\tau'(a_0)|};$$

здесь $\tau = \tau(\lambda)$ — какая-либо ветвь функции, обратной к классич. модулярной функции $k^2(\tau) = \lambda(\tau)$ группы M_2 дробно-линейных преобразований

$$\tau \longrightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad ad - bc = 1,$$

где a, d — нечетные, а b, c — четные числа. Функция

$\lambda(\tau)$ отображает *фундаментальную область* T_2 группы M_2:

$$\operatorname{Int} T_2 = \left\{\tau : \left|\tau \pm \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2},\ |\operatorname{Re}\tau| < 1,\ \operatorname{Im}\tau > 0\right\}$$

(T_2 получается присоединением к $\operatorname{Int} T_2$ той части границы этой области, для к-рой $\operatorname{Re}\tau \geqslant 0$), на всю расширенную λ-плоскость таким образом, что $\lambda(\infty)=0$, $\lambda(0)=1$, $\lambda(1)=\infty$. При этом для каждого значения λ уравнение $k^2(\tau)=\lambda$ имеет одно и только одно решение τ, принадлежащее T_2. Под функцией $\tau(\lambda)$ в теореме Ландау — Каратеодори можно понимать ту ветвь указанной обратной функции, к-рая отображает расширенную λ-плоскость на T_2.

Пример функции $f(z)=\lambda\left(i\,\frac{1+z}{1-z}\right)$, регулярной в круге $|z|<1$ и не обращающейся в нуль и 1 при $|z|<1$, показывает, что теорема Ландау — Каратеодори неулучшаема. Из теоремы Ландау — Каратеодори вытекает *Пикара теорема* о значениях, не принимаемых целыми функциями.

Э. Ландау нашел точное значение постоянной $\Omega(M)$, фигурирующей в следующей формулировке теоремы Коши об обратных функциях. Пусть функция $w=f(z)$ регулярна в круге $|z|<1$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ и $|f(z)|<M$ в круге $|z|<1$, $M\geqslant 1$; тогда существует такая постоянная $\Omega(M)$, что обратная функция $z=\varphi(w)$, обращающаяся в нуль при $w=0$, регулярна в круге $|w|<\Omega(M)$ и $|\varphi(w)|<1$ в этом круге. Э. Ландау установил, что

$$\Omega(M) = M\,(M-\sqrt{M^2-1})^2.$$

Экстремальной функцией этой оценки является

$$f_M(z) = Mz\,\frac{1-Mz}{M-z}.$$

Та же функция $f_M(z)$ является экстремальной в следующей Л. т. Если функция $f(z)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то $f(z)$ однолистна в круге $|z|<\rho(M)$, где $\rho(M)=M-\sqrt{M^2-1}$.

Э. Ландау принадлежит ряд теорем покрытия в теории конформного отображения, устанавливающих существование и оценки соответствующих постоянных. Ниже приведена одна из них. Пусть H — класс функций $f(z)$, регулярных в круге $|z|<1$ и нормированных условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Из теоремы Блоха (см. *Блоха константа*) вытекает следующая Л. т.: существует абсолютная постоянная

$$\inf\{L_f : f\in H\} = L \geqslant B,$$

где L_f — радиус наибольшего круга w-плоскости, целиком накрываемого образом круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$; B — константа Блоха. Постоянная L наз. постоянной Ландау. Для L известны оценки (см. [5], [8]): $1/2\leqslant L\leqslant 0{,}55\ldots$ Из сформулированной Л. т. вновь следует теорема Пикара.

Лит.: [1] Landau E., «Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.», 1904, S. 1118—33; [2] его же, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2 Aufl., B., 1929; [3] его же, «Rend. Circolo mat. Palermo», 1922, t. 46, p. 347—48; [4] его же, «Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl», 1926, S. 467—74; [5] его же, «Math. Z.», 1929, Bd 30, S. 608—34; [6] его же, «Тр. Тбилисск. матем. ин-та. АН СССР», 1940, т. 8, с. 23—68; [7] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962; [8] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [9] Валирон Ж., Аналитические функции, пер. с франц., М., 1957; [10] Берман т А., «Матем. сб.», 1944, т. 15, № 2, с. 285—318.

Г. В. Кузьмина.

ЛАПЛАСА ВЕКТОР — интеграл движения точки постоянной массы m в поле потенциала Ньютона —

Кулона $V(r)=\varkappa/r$:

$$\Lambda_1=(x_1\dot{x}_4-x_4\dot{x}_1)=\frac{1}{m}(\dot{x}_2L_3-\dot{x}_3L_2)+\varkappa\frac{x_1}{r},$$

$$\Lambda_2=(x_2\dot{x}_4-x_4\dot{x}_2)=\frac{1}{m}(\dot{x}_3L_1-\dot{x}_1L_3)+\varkappa\frac{x_2}{r},$$

$$\Lambda_3=(x_3\dot{x}_4-x_4\dot{x}_3)=\frac{1}{m}(\dot{x}_1L_2-\dot{x}_2L_1)+\varkappa\frac{x_3}{r},$$

где

$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2};\quad x=(x_1,\ x_2,\ x_3)\in E^3;$$

$$x_4=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2;\quad m\ddot{x}_4=\varkappa\frac{x_4}{r};$$

$L=(L_1,\ L_2,\ L_3)$ — момент импульса — определяет плоскость орбиты (при $L\neq 0$), а совместно с интегралом энергии

$$\mathcal{E}=\frac{m}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2)+\frac{\varkappa}{r},$$

— ее конфигурацию. Л. в. определяет ориентацию кеплеровой орбиты и пропорционален радиус-вектору ее второго фокуса.

Аналог интеграла Л. в. существует также для потенциала изотропного гармонич. осциллятора, к-рый вместе с ньютоновым занимает исключительное положение среди потенциалов центрального поля.

В центрально-возмущенном ньютоновом поле Л. в. не является интегралом, а прецессирует. Напр., в задаче Кеплера с релятивистским 4-импульсом угол поворота Л. в.

$$|\Delta\varphi|=2\pi\left(\left(1-\frac{\varkappa^2}{c^2L^2}\right)^{-1/2}-1\right)\approx\frac{\pi\varkappa^2}{L^2c^2}$$

за период r. В квантовой теории существование интеграла Л. в. объясняет «случайное вырождение» уровней энергии водородоподобного атома по азимутальному квантовому числу l в дополнение к вырождению по магнитному квантовому числу m, обязательному для произвольного центрального потенциала $V(r)$. Уравнение Шрёдингера кулонова осциллятора соответствует двум тождественным частицам, одна из к-рых движется в поле кулонова центра, расположенного в первом фокусе кеплерова эллипса, а другая — в поле второго фокуса. Гамильтониан каждой частицы инвариантен относительно группы ортогональных преобразований ее координат $O(3)$, а вся система в целом относительно группы $O(3)\times O(3)-O(4)$ ортогональных преобразований 4-мерного евклидова пространства.

Л. в. введен в рассмотрение Я. Германом (см. [1]) и П. Лапласом (см. [2]), по-видимому, независимо. Иногда Л. в. называют вектором Рунге — Ленца.

Лит.: [1] Hermann J., «Giornale de Letterati d'Italia», Venecia, 1710, v. 2, p. 447—67; [2] Laplace P., Traité de mécanique celeste, t. 1, P., 1798; [3] Volk O., «Celestial Mechanics», 1976, v. 14, p. 365—82; [4] Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, М., 1975; [5] Попов В. С., Физика высоких энергий и теории элементарных частиц, К., 1967, с. 702—27.

В. В. Охрименко.

ЛАПЛАСА ИНТЕГРАЛ — 1) Интеграл вида

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt=F(p),$$

осуществляющий интегральное *Лапласа преобразование* функции $f(t)$ действительного переменного t, $0<t<\infty$, в функцию $F(p)$ комплексного переменного p. Был рассмотрен П. Лапласом (P. Laplace) в кон. 18— нач. 19 вв.; применялся Л. Эйлером (L. Euler, 1737).

2) Интегралы, зависящие от параметров $\alpha,\ \beta>0$:

$$\int_0^\infty\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta},$$

$$\int_0^\infty\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-\alpha\beta}.$$

В. И. Битюцков.

ЛАПЛАСА МЕТОД асимптотических оценок — метод вычисления асимптотики при $\lambda>0$, $\lambda\to+\infty$ интегралов Лапласа

$$F(\lambda)=\int_\Omega f(x)\,e^{\lambda S(x)}\,dx, \tag{1}$$

где $\Omega=[a,\ b]$ — конечный отрезок, S — действительная, f — комплексная функции, достаточно гладкие при $x\in\Omega$. Асимптотика $F(\lambda)$ равна сумме вкладов от точек, в к-рых достигается $\max\limits_{x\in\Omega} S(x)$, если число их конечно.

1) Если максимум достигается при $x\neq a$ и $S'(a)\neq0$, то вклад $V_a(\lambda)$ от точки a в асимптотику интеграла (1) равен

$$V_a(\lambda)=-\frac{f(a)+O(\lambda^{-1})}{\lambda S'(a)}\,e^{\lambda S(a)}.$$

2) Если максимум достигается во внутренней точке x^0 отрезка Ω и $S''(x^0)\neq0$, то вклад от нее равен

$$V_{x^0}(\lambda)=\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x^0)}}\,[f(x^0)+O(\lambda^{-1})]\,e^{\lambda S(x^0)}.$$

Эта формула получена П. Лапласом [1]. Полностью исследован случай, когда функции $f(x)$, $S'(x)$ имеют нули конечной кратности в точках максимума функции S, и получены асимптотич. разложения (см. [2]—[8]). Л. м. распространяется и на случай контура Ω, расположенного на комплексной плоскости (см. *Перевала метод*).

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n_x$, наибольшее значение функции $S(x)$ в замыкании $\bar\Omega$ достигается только во внутренней точке x^0, и x^0 — невырожденная стационарная точка функции S. Тогда

$$F(\lambda)=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2}|\det S''_{xx}(x^0)|^{-1/2}[f(x^0)+O(\lambda^{-1})]\,e^{\lambda S(x^0)}.$$

В этом случае также получены асимптотич. разложения для $F(\lambda)$. Все приведенные выше формулы справедливы при комплексных λ, $|\lambda|\to\infty$, $|\arg\lambda|\leqslant\pi/2-\varepsilon$. Имеются также модификации Л. м. на случай более сложной зависимости от параметра (см. [4], [8]):

$$F(\lambda)=\int_{\Omega(\lambda)} f(x,\ \lambda)\,e^{S(x,\lambda)}dx.$$

Лит.: [1] Laplace P. S., Essai philosophique sur les probabilités, Œuvres complètes, t. 7, P., 1886 (в рус. пер.— Опыт философии теории вероятностей, М., 1908); [2] Эрдейи А., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962; [3] Брёйн Н. Г., Асимптотические методы в анализе, пер. с англ., М., 1961; [4] Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, 2 изд., М., 1962; [5] Копсон Э.-Т., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1966; [6] Olver F. W. J., Asymptotics and special functions, N. Y.— [a. o.], 1974; [7] Риекстыньш Э. Я., Асимптотические разложения интегралов, т. 1, Рига, 1974; [8] Федорюк М. В., Метод перевала, М., 1977. *М. В. Федорюк.*

ЛАПЛАСА ОПЕРАТОР, лапласиан,— дифференциальный оператор Δ в $\mathbb{R}^n$, определяемый формулой

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1}$$

(здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$— координаты в $\mathbb{R}^n$), а также некоторые его обобщения. Л. о. (1) является простейшим эллиптич. дифференциальным оператором 2-го порядка. Л. о. играет важную роль в математич. анализе, математич. физике и геометрии (см., напр., *Лапласа уравнение*, *Лапласа — Бельтрами уравнение*, *Гармоническая функция*, *Гармоническая форма*).

Пусть M есть n-мерное риманово пространство с метрикой

$$ds^2=g_{ij}\,dx^i\,dx^j,\quad g_{ij}=g_{ji}, \tag{2}$$

пусть $\|g^{ij}\|$ — матрица, обратная к матрице $\|g_{ij}\|$, $g=\det\|g_{ij}\|$. Тогда Л. о. (или оператор Лап-

ласа — Бельтрами) римановой метрики (2) на M имеет вид

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right), \tag{3}$$

где $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты на M. Оператор (1) отличается знаком от Л. о. стандартной евклидовой метрики $ds^2 = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2$ на $\mathbb{R}^n$.

Обобщением оператора (3) является Л. о. на дифференциальных формах. Именно, в пространстве всех внешних дифференциальных форм на M Л. о. имеет вид

$$\Delta = (d + d^*)^2 = dd^* + d^*d, \tag{4}$$

где d — оператор внешнего дифференцирования формы, d^* — формально сопряженный к d оператор, определяемый с помощью следующего произведения на гладких финитных формах:

$$(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge *\beta, \tag{5}$$

где $*$ — оператор Ходжа, порожденный метрикой (2) и переводящий p-формы в $(n-p)$-формы. В формуле (5) формы α и β считаются действительными, на комплексных формах нужно использовать эрмитово продолжение скалярного произведения (5). Сужение оператора (4) на O-формы (т. е. функции) задается формулой (3). На p-формах при произвольном целом $p \geqslant 0$ Л. о. в локальных координатах записывается в виде

$$\Delta \left(a_{i_1 \ldots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right) =$$

$$= \Big\{ -\nabla^i \nabla_i a_{i_1 \ldots i_p} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu R^n_{i_\nu} a_{ni_1 \ldots \hat{i}_\nu \ldots i_p} +$$

$$+ 2 \sum_{\mu < \nu} (-1)^{\mu+\nu} R^{\,h\cdot k\cdot}_{\cdot i_\nu \cdot i_\mu} a_{kni_1 \ldots \hat{i}_\mu \ldots \hat{i}_\nu \ldots i_p} \Big\} \times$$

$$\times dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Здесь ∇^i, ∇_i — ковариантные производные по x^i, $R^{i\cdot k\cdot}_{\cdot j\cdot l}$ — тензор кривизны, $R^n_k = R^{n\cdot i\cdot}_{\cdot i\cdot k}$ — тензор Риччи.

Пусть дан произвольный эллиптич. комплекс

$$\ldots \Gamma(E_{p-1}) \xrightarrow{d} \Gamma(E_p) \xrightarrow{d} \Gamma(E_{p+1}) \longrightarrow \ldots, \tag{6}$$

где E_p — действительные или комплексные расслоения на многообразии M, $\Gamma(E_p)$ — пространства их гладких сечений. Введя в каждом расслоении E_p эрмитову метрику, а также задав произвольным образом элемент объема на M, можно определить эрмитово скалярное произведение в пространствах гладких финитных сечений расслоений E_p. Тогда определены операторы d^*, формально сопряженные к операторам d. По формуле (3) строится Л. о. на каждом пространстве $\Gamma(E_p)$. Если в качестве комплекса (6) взять комплекс де Рама, то при естественном выборе метрики в p-формах и элемента объема, порожденных метрикой (2), получается в качестве Л. о. комплекса де Рама описанный выше Л. о. на формах.

На комплексном многообразии M наряду с комплексом де Рама имеются эллиптич. комплексы

$$\ldots \Lambda^{p-1, q} \xrightarrow{\partial} \Lambda^{p, q} \xrightarrow{\partial} \Lambda^{p+1, q} \longrightarrow \ldots, \tag{7}$$

$$\ldots \Lambda^{p, q-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{p, q} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{p, q+1} \longrightarrow \ldots, \tag{8}$$

где $\Lambda^{p, q}$ — пространство гладких форм типа (p, q) на M. Вводя эрмитову структуру в касательном расслоении на M, можно построить Л. о. (4) комплекса де Рама и Л. о. комплексов (7), (8):

$$\Box = \partial\partial^* + \partial^*\partial,$$

$$\overline{\Box} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}.$$

Каждый из этих операторов переводит в себя пространство $\Lambda^{p,q}$. Если M — кэлерово многообразие, а эрмитова структура на M индуцирована кэлеровой метрикой, то

$$\Delta = 2\square = 2\overline{\square}.$$

Важным фактом, определяющим роль Л. о. эллиптич. комплекса, является существование в случае компактного многообразия M ортогонального разложения Ходжа:

$$\Gamma(E_p) = d(\Gamma(E_{p-1})) \oplus \mathcal{H}^p(E) \oplus d^*(\Gamma(E_{p+1})). \quad (9)$$

В этом разложении $\mathcal{H}^p(E) = \mathrm{Ker}\Delta|_{\Gamma(E_p)}$, где Δ — Л. о. комплекса (6), так что $\mathcal{H}^p(E)$ — пространство «гармонических» сечений расслоения E_p (в случае комплекса де Рама — это пространство всех гармонических форм степени p). Прямая сумма первых двух слагаемых в правой части формулы (9) равна $\mathrm{Ker}\, d|_{\Gamma(E_p)}$, а прямая сумма двух последних слагаемых совпадает с $\mathrm{Ker}d^*|_{\Gamma(E_p)}$. В частности, разложение (9) задает изоморфизм пространства когомологий комплекса (6) в члене $\Gamma(E_p)$ и пространства гармоничн. сечений $\mathcal{H}^p(E)$.

Лит.: [1] Рам Ж. де, Дифференцируемые многообразия, пер. с франц., М., 1956; [2] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [3] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976.

М. А. Шубин.

ЛАПЛАСА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность конгруэнций в трехмерном проективном (аффинном, евклидовом) пространстве, в к-рой каждые две соседние конгруэнции образованы касательными к двум семействам линий сопряженной сети одной поверхности (фокальной поверхности конгруэнции). Каждая из двух соседних конгруэнций Л. п. наз. преобразованием Лапласа другой. Аналитич. преобразования уравнения Лапласа связаны с геометрич. переходом от одной фокальной поверхности конгруэнции к другой ее фокальной поверхности (см. [1]). С каждой Л. п. конгруэнций связана Л. п. фокальных поверхностей (см. [2]). Л. п. p-мерных многообразий Картана особого проективного типа в проективном n-пространстве P_n (см. [3]) обобщена на случай произвольных p-сопряженных систем в P_n (см. [4]).

Лит.: [1] Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2 éd., pt. 2, P., 1915; [2] Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.— Л., 1950; [3] Chern S.-S., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1944, v. 30, p. 95—97; [4] Смирнов Р. В., «Докл. АН СССР», 1950, т. 71, № 3, с. 437—39.

В. Т. Базылев.

ЛАПЛАСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, трансформация Лапласа,— в широком смысле — интеграл Лапласа вида

$$F(p) = \int_L f(z)\, e^{-pz}\, dz, \quad (1)$$

где интегрирование производится по нек-рому контуру L в плоскости комплексного переменного z, ставящий в соответствие функции $f(z)$, определенной на L, аналитич. функцию $F(p)$ комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$. Многие интегралы вида (1) были рассмотрены П. Лапласом (см. [1]).

В узком смысле под Л. п. подразумевают одностороннее преобразование Лапласа

$$F(p) = L[f](p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \quad (2)$$

называемое так в отличие от двустороннего преобразования Лапласа

$$F(p) = L[f](p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt. \quad (3)$$

Л. п. - частный вид *интегральных преобразований*; преобразования вида (2) или (3) тесно связаны с *Фурье*

преобразованием. Двустороннее Л. п. (3) можно рассматривать как преобразование Фурье функции $f(t)e^{-\sigma t}$, одностороннее Л. п. (2) — как преобразование Фурье функции $\varphi(t)$, равной $f(t)e^{-\sigma t}$ при $0<t<\infty$ и равной нулю при $-\infty<t<0$.

Подинтегральная комплексная локально суммируемая функция $f(t)$ наз. функцией-оригиналом, или просто оригиналом; в приложениях часто удобно трактовать переменное t как время. Функция $F(p)=L[f](p)$ наз. также преобразованием Лапласа оригинала $f(t)$ или изображением по Лапласу. Интеграл (2) понимается, вообще говоря, как условно сходящийся на бесконечности. Априори возможны три случая: 1) существует действительное число σ_c такое, что интеграл (2) сходится при $\mathrm{Re}\,p=\sigma>\sigma_c$, а при $\mathrm{Re}\,p=\sigma<\sigma_c$ — расходится; это число σ_c наз. абсциссой (условной) сходимости; 2) интеграл (2) сходится при всех p, в этом случае полагают $\sigma_c=-\infty$; 3) интеграл (2) расходится при всех p, в этом случае полагают $\sigma_c=+\infty$. Если $\sigma_c<+\infty$, то интеграл (2) представляет однозначную аналитич. функцию $F(p)$ в полуплоскости сходимости $\mathrm{Re}\,p>\sigma_c$. Обычно ограничиваются рассмотрением абсолютно сходящихся интегралов (2). Точная нижняя грань тех σ, для к-рых существует интеграл

$$\int_0^\infty |f(t)|\,e^{-\sigma t}\,dt,$$

наз. абсциссой абсолютной сходимости σ_a, $\sigma_c\leqslant\sigma_a$. Если a есть нижняя грань тех σ, для к-рых $|f(t)|=O(e^{\sigma t})$, $t\to+\infty$, то $\sigma_a=a$; число a иногда наз. показателем роста оригинала $f(t)$.

При нек-рых дополнительных условиях оригинал $f(t)$ однозначно восстанавливается по своему Л. п. $F(p)$. Напр., если $f(t)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки t_0 или если $f(t)$ кусочногладкая, то имеет место формула обращения Л. п.:

$$\mathring{f}(t_0)=\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}F(p)\,e^{pt}\,dp,\ \sigma>\sigma_a. \qquad (4)$$

Формулы (2) и (4) позволяют получить ряд соотношений между операциями, производимыми над оригиналами и изображениями, а также таблицу изображений для часто встречающихся оригиналов. Все это составляет элементарную часть *операционного исчисления*.

В математич. физике важные применения находит многомерное Л. п.

$$F(p)=\int_{c^*}f(t)\,e^{-(p,\,t)}\,dt, \qquad (5)$$

где $t=(t_1,\ldots,t_n)$ — точка n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $p=(p_1,\ldots,p_n)=\sigma+i\tau=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)+i(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ — точка комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant1$,

$$(p,\,t)=(\sigma,\,t)+i\,(\tau,\,t)=p_1t_1+\ldots+p_nt_n$$

— скалярное произведение, $dt=dt_1\ldots dt_n$ — элемент объема в $\mathbb{R}^n$. Комплексная функция $f(t)$ в (5) определена и локально суммируема в области интегрирования $\mathbb{C}^*=\{t\in\mathbb{R}^n;\ t_j>0,\ j=1,\ldots,n\}$ — положительном координатном угле пространства $\mathbb{R}^n$. Если функция $f(t)$ ограничена в $\mathbb{C}^*$, то интеграл (5) существует во всех точках $p\in\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\,(p,\,t)>0$, $t\in\mathbb{C}^*$, к-рое определяет снова положительный координатный угол $S=\{\sigma\in\mathbb{R}^n;\ \sigma_j>0,\ j=1,\ldots,n\}$. Интеграл (5) определяет голоморфную функцию комплексных переменных $p=(p_1,\ldots,p_n)$ в трубчатой об-

ласти $T^S = S + i\mathbb{R}^n = \{p = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}^n;\ \sigma \in S,\ \tau \in \mathbb{R}^n\}$ пространства $\mathbb{C}^n$ с основанием S. В более общем случае в качестве области интегрирования $\mathbb{C}^*$ в (5) и основания S трубчатой области можно взять любую пару сопряженных замкнутых выпуклых острых конусов в пространстве $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат. При $n=1$ формула (5) переходит в (2), причем $\mathbb{C}^* = \{t \in \mathbb{R};\ t>0\}$ — положительная полуось и $T^S = \{p = \sigma + i\tau \in \mathbb{C};\ \sigma>0\}$ — правая полуплоскость. Л. п. (5) определено и голоморфно и для функций $f(t)$ гораздо более широких классов, напр. для всех быстро убывающих функций, составляющих класс γ $\gamma(\mathbb{R}^n)$, т. е. для бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций $f(t)$, убывающих при $|t| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени величины $|t|^{-1}$. Элементарные свойства Л. п. с соответствующими изменениями остаются справедливыми и для многомерного случая.

Развитием Л. п. является Л. п. мер и вообще обобщенных функций. Наиболее полно теория Л. п. обобщенных функций развита для важного в математич. физике класса $\gamma' - \gamma'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста, определяемых как линейные непрерывные функционалы на пространстве быстро убывающих основных функций $\gamma = \gamma(\mathbb{R}^n)$. Такое Л. п. $L[g]$ обобщенной функции медленного роста $g \in \gamma'$ снова является обобщенной функцией медленного роста, $L[g] \in \gamma'$.

Численное преобразование Лапласа — численное выполнение преобразования (2), переводящего оригинал $f(t)$, $0<t<\infty$, в изображение $F(p)$, $p = \sigma + i\tau$, а также численное обращение Л. п., т. е. численное нахождение $f(t)$ из интегрального уравнения (2) либо по формуле обращения (4).

Необходимость применения численного Л. п. возникает вследствие того, что таблицы оригиналов и изображений охватывают далеко не все встречающиеся в практике случаи, а также вследствие того, что оригинал или изображение зачастую выражаются слишком сложными, неудобными для применений формулами.

В случае действительных значений параметра p формулу (2) при нек-рых дополнительных предположениях можно свести к вычислению интеграла с весом Лагерра:

$$F(p) = \frac{1}{p} \int_0^\infty x^s e^{-x} \varphi(x)\, dx \qquad (6)$$

при нек-ром $s \geqslant 0$. При нек-рых условиях к интегралу (6) приводится и Л. п. для комплексных p (см. [9]).

Для вычисления интеграла в (6) применима квадратурная формула

$$\int_0^\infty x^s e^{-x} \varphi(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(s)} \varphi\left(x_k^{(s)}\right), \qquad (7)$$

где коэффициенты $A_k^{(s)}$ и узлы $x_k^{(s)}$ выбираются так, чтобы равенство (7) при фиксированном n было точным или для всех многочленов степени $\leqslant 2n-1$, или для некрой системы рациональных функций в зависимости от свойств функции $\varphi(x)$. Коэффициенты $A_k^{(s)}$ и узлы $x_k^{(s)}$ для таких квадратурных формул просчитаны для многих значений параметра s (см. [9] — [11]).

Проблема обращения Л. п., как задача отыскания решения $f(x)$ интегрального уравнения первого рода (2), относится к классу некорректных задач и может быть решена, в частности, посредством регуляризирующего алгоритма.

Задачу численного обращения Л. п. можно также решать методами, основанными на разложении функции-оригинала в функциональный ряд. Сюда в первую очередь можно отнести разложение в степенной ряд, в обобщенный степенной ряд, в ряд по показательным функциям, а также в ряды по ортогональным функциям, в частности по многочленам Чебышева, Лежандра,

Якоби и Лагерра. Задача разложения оригинала в ряды по многочленам Чебышева, Лежандра, Якоби в окончательном своем виде сводится к проблеме моментов на конечном промежутке. Пусть известно Л. п. $F(p)$ функции $\beta(t)f(t)$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\beta(t) f(t)\, dt,$$

где $f(t)$ — искомая функция, а $\beta(t)$ — неотрицательная, интегрируемая на $[0, \infty)$ функция. Предполагается, что функция $f(t)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[0, T]$ и принадлежит классу $L_2(\beta(t), 0, \infty)$. По изображению $F(p)$ функции $\beta(t)f(t)$ функция $f(t)$ строится в виде ряда по смещенным многочленам Якоби, в частности по смещенным многочленам Лежандра, Чебышева первого и второго рода, коэффициенты к-рого a_k вычисляются по формуле

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k)} F(i),$$

где $\alpha_i^{(k)}$ — коэффициенты смещенного многочлена Лежандра, Чебышева первого и второго рода соответственно, записанных в виде $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^{(k)} x^i$ (см. [4]).

Пусть задано Л. п. $F(p)$ функции $f(t)$, причем $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{-\lambda} |f(t)|^2\, dt < \infty, \quad \lambda > -1.$$

Тогда $f(t)$ можно разложить в ряд по обобщенным многочленам Лагерра

$$f(t) = t^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{k!}{\Gamma(k+\lambda+1)} L_k^{(\lambda)}(t),$$

сходящийся к $f(t)$ в среднем. Коэффициенты a_k этого ряда вычисляются по формуле

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left\{ \frac{1}{z^{\lambda+1}} F\left(\frac{1}{z}\right) \right\}_{z=1}.$$

Другим приемом численного обращения Л. п. является построение квадратурных формул для интеграла обращения (4).

Изображение $F(p)$ стремится к нулю, если точка p удаляется на бесконечность так, что $\mathrm{Re}\, p$ при этом неограниченно растет. Предполагается, что $F(p)$ убывает по степенному закону, т. е. что $F(p)$ представима в виде

$$F(p) = \frac{1}{p^s} \varphi(p), \quad s > 0,$$

а $\varphi(p)$ регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > \sigma_a$ и непрерывна при $\mathrm{Re}\, p \geqslant \sigma_a$. Интеграл (4) при этом имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} p^{-s} \varphi(p)\, dp. \tag{8}$$

Для интеграла (8) построена интерполяционная квадратурная формула, основанная на интерполировании $\varphi(p)$ многочленами от $1/p$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(s)}(t)\, \varphi(p_k) + R_n, \tag{9}$$

где p_k — узлы интерполирования, произвольные, расположенные справа от прямой $\mathrm{Re}\, p = \sigma_a$, R_n — остаточный член формулы и

$$A_k^{(s)}(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{kj} t^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)}.$$

Коэффициенты a_{kj} зависят только от выбранных узлов p_k и для нек-рых способов их выбора (в частности, для равноотстоящих узлов) вычислены (см. [12]). Задача исследования сходимости интерполяционных квадратурных формул заключается в выяснении связей между

свойствами $\varphi(p)$ и узлами p_k, при к-рых можно быть уверенным в стремлении остаточного члена R_n формулы (9) к нулю. Эта задача решена для нек-рых конкретных узлов p_k и для нек-рых частных классов функций $\varphi(p)$ (см. [13]).

Для интеграла (4) можно строить квадратурные формулы наивысшей степени точности в классе рациональных функций частного вида. Чтобы параметры формулы не зависели от σ_a и t, выполняется замена переменной $p=z/t+\sigma_a$. Интеграл (4) принимает вид

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\,\frac{e^{\sigma_a t}}{t}\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^{z}F^{*}(z)\,dz=\frac{e^{\sigma_a t}}{t}\,J(s),$$

$$\varepsilon>0,\quad F^{*}(z)=F\left(\frac{z}{t}+\sigma_a\right)=F(p).$$

Как и прежде, предполагается, что $F^{*}(z)=z^{-s}\varphi(z)$ и для вычисления интеграла $J(s)$ строится квадратурная формула

$$J(s)\approx\sum_{k=1}^{n}A_k^{(s)}\,\varphi\left(z_k^{(s)}\right), \tag{10}$$

точная для любого многочлена степени $\leqslant 2n-1$ от переменной $1/z$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы формула (10) была интерполяционной и чтобы узлы $z_k^{(s)}$ были корнями нек-рой системы ортогональных многочленов $\omega_n^{(s)}(1/z)$. Окончательно это условие приводит к формуле

$$f(t)\approx\frac{e^{\sigma_a t}}{t}\sum_{k=1}^{n}A_k^{(s)}\left(z_k^{(s)}\right)^{s}F\left(\frac{z_k^{(s)}}{t}+\sigma_a\right), \tag{11}$$

где $z_k^{(s)}$ — корни ортогональных многочленов $\omega_n^{(s)}(1/z)$. Для многочленов $\omega_n^{(s)}(1,z)$ известны явное выражение, рекуррентное соотношение, дифференциальное уравнение, решением к-рого они являются, производящая функция. Для нек-рых частных значений s показано, что корни многочленов $\omega_n(1/z)$ лежат в правой полуплоскости (см. [13]). В [12] приведены значения узлов и коэффициентов $A_k^{(s)}$ формулы (11) для $s=1, 2, 3, 4, 5$; $n=1(1)15$ с 20 верными десятичными знаками и для $s=0{,}01\ (0{,}01)3$; $n=1(1)10$ с 7—8 верными десятичными знаками.

Лит.: [1] Laplace P. S., Théorie analytique des probabilités, P., 1812; [2] Ван дер Поль Б., Бреммер Х., Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, пер. с англ., М., 1952; [3] Бохнер С., Лекции об интегралах Фурье, пер. с англ., М., 1962; [4] Диткин В. А., Прудников А. П., Операционное исчисление, М., 1966; [5] их же, Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974; [6] Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation, Bd 1—3, Basel, 1950—56; [7] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976; [8] Земанян А. Г., Интегральные преобразования обобщенных функций, пер. с англ., М., 1974; [9] Айзенштат В. С., Крылов В. И., Метельский А. С., Таблицы для численного преобразования Лапласа и вычисления интегралов вида $\int_0^\infty x^s e^{-x} f(x)dx$, Минск, 1962; [10] Salzer H. E., Zucker R., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1949, № 55, p. 1004—12; [11] Пальцев А. А., Скобля Н. С., «Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук», 1965, № 3, с. 15—23; [12] Крылов В. И., Скобля Н. С., Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа, Минск, 1968; [13] их же, Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа, М., 1974.

Н. С. Жаврид.

ЛАПЛАСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ в геометрии — переход от одной *фокальной сети конгруэнции* к другой фокальной сети той же конгруэнции. Понятие Л. п. сети ввел Г. Дарбу (G. Darboux, 1888), обнаруживший, что аналитич. преобразование решений уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=a\,\frac{\partial\theta}{\partial u}+b\,\frac{\partial\theta}{\partial v}+c\theta,$$

где a, b, c — известные функции переменных u, v, может быть интерпретировано геометрически как пе-

реход от одной фокальной сети конгруэнции к другой ее фокальной сети. Л. п. сетей устанавливает связь теории *сопряженных сетей* с линейчатой геометрией. Существуют различные обобщения Л. п. сети.

Лит.: [1] Tzitzeica G., Géométrie différentielle projective des réseaux, P.—Bucarest, 1924; [2] Итоги науки. Геометрия. 1963, М., 1965. *В. Т. Базылев.*

ЛАПЛАСА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\frac{1}{2}\,\alpha e^{-\alpha|x-\beta|},\quad -\infty<x<\infty,$$

где β, $-\infty<\beta<\infty$, — параметр сдвига, а $\alpha>0$, — масштабный параметр. Плотность Л. р. симметрична относительно точки $x=\beta$, производная плотности имеет разрыв при $x=\beta$. Характеристич. функция Л. р. с параметрами α и β равна

$$e^{it\beta}\,\frac{1}{1+t^2/\alpha^2}.$$

Л. р. имеет конечные моменты любого порядка, в частности его математич. ожидание равно β, а дисперсия равна $2\,\alpha^2$.

Л. р. было впервые введено П. Лапласом [1] и часто наз. «первым законом распределения Лапласа» в отличие от «второго закона распределения Лапласа», как иногда наз. *нормальное распределение*. Л. р. наз. также двусторонним показательным распределением в силу того, что Л. р. совпадает с распределением случайной величины

$$\beta+X_1-X_2,$$

где X_1 и X_2 — независимые случайные величины, имеющие одинаковое *показательное распределение* с плотностью $\alpha e^{-\alpha x}$, $x>0$. Л. р. с плотностью $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ и *Коши распределение* с плотностью $\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}$ связаны следующим образом:

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-|x|}\,dx=\frac{1}{1+t^2}$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt=e^{-|x|}.$$

Лит.: [1] Laplace P. S., Théorie analytique des probabilités, P., 1812; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967. *А. В. Прохоров.*

ЛАПЛАСА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. об определителях — см. ст. *Алгебраическое дополнение*.

2) Л. т. об аппроксимации биномиального распределения нормальным распределением; первый вариант *центральной предельной теоремы* теории вероятностей: если S_n — число «успехов» в n *Бернулли испытаниях* с вероятностью успеха p, $0<p<1$, то при $n\to\infty$ для любых действительных чисел x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$

$$\mathsf{P}\left\{x_1<\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}<x_2\right\}\longrightarrow\Phi(x_2)-\Phi(x_1),\qquad(*)$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy$$

— функция распределения стандартного нормального закона.

Самостоятельное значение имеет т. н. локальная Л. т.: для вероятности

$$\mathsf{P}\{S_n=m\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},\ 0\leqslant m\leqslant n,\ m\text{ — целое},$$

справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{S_n = m\} = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\varphi(x)(1+\varepsilon_n),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

— плотность стандартного нормального распределения и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно для всех m, для к-рых $x = \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ принадлежит какому-либо конечному интервалу.

В общем виде Л. т. была доказана П. Лапласом [1]. Один частный случай Л. т. ($p = 1/2$) был изучен А. Муавром [2], в связи с чем Л. т. иногда наз. т е о р е м о й М у а в р а — Л а п л а с а.

Для практич. применения Л. т. важно иметь представление об ошибках, возникающих при использовании приближенных формул. В более точной (по сравнению с [1]) асимптотич. формуле

$$\mathsf{P}\{S_n < y\} \quad \Phi\left(\frac{y-np+0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) + R_n(y)$$

остаточный член $R_n(y)$ имеет порядок $O(1/\sqrt{n})$ равномерно для всех действительных y. Из равномерных аппроксимаций биномиального распределения посредством нормального распределения наиболее удачна формула Я. Успенского (1937): если $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, то для любых y_1 и y_2

$$\mathsf{P}\{y_1 < S_n < y_2\} \quad \Phi\left(\frac{y_2-np+0,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_1-np+0,5}{\sigma}\right) + \\ + \psi\left(\frac{y_2-np+0,5}{\sigma}\right) - \psi\left(\frac{y_1-np+0,5}{\sigma}\right) + \Delta,$$

где

$$\psi(y) = \frac{1-2p}{6\sigma}(1-y^2)\varphi(y)$$

и при $\sigma \geqslant 5$

$$|\Delta| < (0,13+0,18|1-2p|)\sigma^{-2} + e^{-3\sigma/2}.$$

Для улучшения относительной точности аппроксимации С. Н. Бернштейном (1943) и В. Феллером (W. Feller, 1945) были предложены другие формулы.

Лит.: [1] L a p l a c e P. S., Théorie analytique des probabilités, P., 1812; [2] M o i v r e A. de, Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, L., 1730; [3] П р о х о р о в Ю. В., Р о з а н о в Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [4] F e l l e r W., «Ann. Math. Statistics», 1945, v. 16, p. 319—29; [5] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967. *А. В. Прохоров.*

ЛАПЛАСА УРАВНЕНИЕ — однородное дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0, \qquad (1)$$

где $u = u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция от n действительных переменных. Левая часть Л. у. наз. *Лапласа оператором* от функции u. Регулярные решения Л. у. класса C^2 в нек-рой области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, т. е. решения, имеющие непрерывные частные производные до 2-го порядка в D, наз. *гармоническими функциями* в D. Л. у. является основным представителем дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка эллиптич. типа, на к-ром вырабатывались и вырабатываются основные методы решения *краевых задач* для эллиптических уравнений.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — п о т е н ц и а л ь н о е в е к т о р н о е п о л е в D, т. е. $\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} u$, где $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — потенциал. Так как

$$\Delta u \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad} u = -\operatorname{div} \boldsymbol{v},$$

то физич. смысл Л. у. состоит в том, что оно выполняется для потенциала любого такого поля в областях D, свободных от источников поля. Напр., Л. у. удовлетворяет гравитационный потенциал сил тяготения в областях, свободных от притягивающих масс, потенциал электростатич. поля в областях, свободных от зарядов, и т. д. Таким образом, Л. у. выражает закон сохранения для потенциального поля. С этой точки зрения форма (1) Л. у. получается при выборе декартовой прямоугольной системы координат; в других системах координат оператор Лапласа и Л.у. принимают другой вид. При наличии источников поля в правой части (1) появляется функция, пропорциональная плотности источников, и Л. у. переходит в *Пуассона уравнение*. Л. у. возникает и во многих других вопросах математич. физики, в к-рых рассматриваются стационарные поля, напр. при изучении стационарного распределения температур, статических задач теории упругости и др.

Основными для Л. у. являются следующие краевые задачи теории потенциала: 1) *Дирихле задача*, или первая краевая задача, когда ищется гармонич. функция, принимающая на границе области ∂D заданные непрерывные значения; 2) *Неймана задача*, или вторая краевая задача, когда ищется гармонич. функция u такая, что ее нормальная производная du/dn принимает на ∂D заданные непрерывные значения; 3) *смешанная задача*, когда ищется гармонич. функция u, удовлетворяющая на границе линейному соотношению $\alpha(y)\partial u(y)/\partial n+\beta(y)u(y)=g(y)$, $y\in\partial D$, $\alpha(y)\neq 0$.

В случае $n=2$ Л. у. тесно связано с теорией аналитич. функций комплексного переменного $z=x_1+ix_2$, характеризующихся тем, что их действительная и мнимая части являются сопряженными гармонич. функциями.

Л. у. встречается у Л. Эйлера и Ж. Д'Аламбера (см. [1], [2]) в связи с задачами гидромеханики и первоначальным рассмотрением функций комплексного переменного. Однако широкую известность оно получило после появления работ П. Лапласа (см. [3], [4]) по теории гравитационного потенциала и небесной механике.

Уравнение (1) иногда наз. скалярным Л. у. в отличие от векторного Л. у.

$$\Delta \boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0. \qquad (2)$$

В случае, напр., векторного поля $\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i$, заданного в прямоугольной декартовой системе координат пространства $\mathbb{R}^3$, векторное Л. у. (2) равносильно трем скалярным Л. у. $\Delta v_i = 0$ для каждой из компонент $v_i = v_i(x_1, x_2, x_3)$, $i=1, 2, 3$. В других системах координат векторное Л. у. равносильно системе трех уравнений с частными производными 2-го порядка относительно компонент векторного поля $\boldsymbol{v}$, получающейся из (2) после выполнения указанных там операций векторного анализа в соответствующих координатах (см. [7]).

Лит.: [1] Euler L., «Novi Commentarii Acad. Sci. Petropolitanae», 1761, t. 6; [2] D'Alembert J. le Rond, Opuscules mathématiques, t. 1, P., 1761; [3] Laplace P. S., «Mém. Acad. Paris (1782)», 1785; [4] его же, Traité de mécanique céleste, t. 2, P., 1799; [5] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [6] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [7] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 2, М., 1960.

Е. Д. Соломенцев.

ЛАПЛАСА УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — методы, заменяющие исходную краевую задачу дискретной задачей, содержащей конечное число N неизвестных, нахождение к-рых с соответствующей точностью позволяет определить решение исходной задачи с заданной точностью ε; N зависит от ε и стремится к ∞ при $\varepsilon \to 0$.

Л. у. в случае d пространственных переменных $x=(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ имеет вид

$$\Delta u(x) \equiv \sum_{r=1}^{d} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_r^2} = 0$$

и является однородным уравнением Пуассона. Краевые задачи для уравнения Лапласа являются частными случаями краевых задач для уравнения Пуассона и более общих уравнений эллиптич. типа (см. [1]), а численные методы решения краевых задач для уравнений эллиптич. типа (см. [2]) содержат в себе многие численные методы для уравнения Лапласа. Специфика Л. у. позволяет конструировать и использовать методы, обладающие существенно лучшими характеристиками, чем методы для более общих уравнений, хотя на практике часто этим возможностям предпочитают простоту реализации метода на ЭВМ.

Основными численными методами для уравнений эллиптич. типа являются: вариационно-разностные методы (проекционно-разностные, методы конечных элементов) и разностные методы (методы сеток). Оба класса методов связаны с аппроксимацией исходной области Ω нек-рой сеточной областью Ω_N, содержащей N узлов сетки, и построением системы алгебраич. уравнений

$$L_N u_N = f_N \qquad (*)$$

относительно значений функции, определяемой в этих узлах. В вариационно-разностных методах, являющихся специальными случаями вариационных и проекционных методов, используется идея аппроксимации рассматриваемого пространства функций, содержащего решение исходной задачи, нек-рыми специальными конечномерными подпространствами с заданными базисными функциями, а в системе (*) вектор u_N состоит из коэффициентов разложения получаемой аппроксимации искомого решения по выбранному базису. В предположении, что решение исходной задачи в ограниченной области Ω на плоскости имеет вид

$$u(x) = \sum_{r=1}^{k} c_r \chi_r(x) + u_0(x),$$

где $u_0(x) \in W_2^{1+m}(\Omega)$, $m>0$, $W_2^{1+m}(\Omega)$ — пространство Соболева, а функции $\chi_k(x) \in W_2^1(\Omega)$ заданы и отражают асимптотич. поведение $u(x)$ вблизи особых точек (угловых точек границы, точек перемены типа граничного условия), для многих типов областей Ω и смешанных краевых задач эти методы позволяют, напр., найти решение $u(x)$ с точностью ε в $W_2^1(\Omega)$ при затрате $O(\varepsilon^{-2/m}\ln^2 \varepsilon)$ арифметич. действий (см. [3]), а в ряде более частных случаев оценки вычислительной работы уменьшаются до $O(\varepsilon^{-2/m}\ln \varepsilon|)$ и $O(\varepsilon^{-2/m})$.

В разностных методах обычно используется в той или иной форме аппроксимация производных разностями, и в системе (*) вектор состоит из компонент, аппроксимирующих значения решения в узлах сетки Ω_N. Наиболее изучены характеристики упомянутых методов для краевых задач в ограниченных областях Ω на плоскости. Напр., для условия Дирихле $u|_\Gamma = \varphi(s)$, где Γ — граница Ω и $\varphi(s)$ — достаточно гладкие, можно на основе улучшения дифференциальных свойств решения Л. у. по мере удаления от Γ так построить систему (*), что число N по порядку равно числу N_Γ точек на Γ, используемых для задания $\varphi(s)$ с точностью ε, а u_N может быть найдено с точностью ε при затрате $O(N_\Gamma \ln^2 N_\Gamma)$ арифметич. действий и дает возможность найти решение исходной задачи с точностью ε в любой фиксированной точке из строго внутренней подобласти при затрате конечного числа действий (см. [4]). Методы такого типа являются асимптотически оптимальными; в случае

же использования, напр., более простых методов с прямоугольной сеткой, обладающих точностью $O(N^{-1})$, затраты на нахождение u_N с точностью ε составляют $O(N|\ln N||\ln\varepsilon|)$; $N \asymp N_\Gamma^2$ (см. [4]). Наиболее детально изучены оценки погрешности метода сеток для Л. у. (см. [4], [5]); при наличии особых точек на Γ целесообразно использовать специальную структуру сеток вблизи этих точек (см. [6]). Часто используются и разностные методы, основанные на аппроксимации нек-рых интегральных характеристик для Л. у. (см. [7] — [9]).

Относительно редко применяется метод коллокаций, в к-ром система (*) получается как следствие выполнения исходного уравнения в узлах сетки и предположения, что приближение к решению исходной задачи ищется в нек-ром конечномерном подпространстве. Специальный класс численных методов решения краевых задач для Л. у. основан на сведении этих задач к сингулярным интегральным уравнениям (см. [1]) и последующему решению полученных интегральных уравнений численными методами (см. [10], [11]).

Лит.: [1] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [2] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [3] Дьяконов Е. Г., в сб.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, с. 149—64; [4] Бахвалов Н. С., в сб.: Международный конгресс математиков в Ницце. 1970, М., 1972, с. 27—33; [5] Волков Е. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физики», 1969, т. 9, № 3, с. 573—84; [6] его же, «Тр. матем. ин-та АН СССР», 1979, т. 150, с. 67—98; [7] Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 2, с. 3—66; [8] Самарский А. А., Фрязинов И. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 6, с. 167—97; [9] Волков Е. А., «Докл. АН СССР», 1978, т. 238, № 5, с. 1036—39; [10] Партон В. З., Перлин П. И., Интегральные уравнения теории упругости, М., 1977; [11] Иванов В. В., в сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972, с. 209—19.

Е. Г. Дьяконов.

ЛАПЛАСА — БЕЛЬТРАМИ УРАВНЕНИЕ, Бельтрами уравнение,— обобщение *Лапласа уравнения* для функций на плоскости на случай функций u на произвольном двумерном римановом многообразии R класса C^2. Для поверхности R с локальными координатами ξ, η и *первой квадратичной формой*

$$ds^2 = E d\xi^2 + 2F d\xi d\eta + G d\eta^2$$

Л.— Б. у. имеет вид

$$\Delta u \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{F\dfrac{\partial u}{\partial \eta} - G\dfrac{\partial u}{\partial \xi}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{F\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - E\dfrac{\partial u}{\partial \eta}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = 0. \qquad (*)$$

При $E=G$ и $F=0$, т. е. для случая, когда (ξ, η) — изотермич. координаты на R, уравнение (*) переходит в уравнение Лапласа. Л.— Б. у. было введено Э. Бельтрами в 1864—65 (см. [1]).

Левая часть уравнения (*), поделенная на $\sqrt{EG-F^2}$, наз. вторым дифференциальным параметром Бельтрами.

Регулярные решения u Л.— Б. у. являются обобщениями гармонич. функций и наз. обычно гармоническими функциями на поверхности R. Физически эти решения интерпретируются подобно обычным гармонич. функциям, напр. как потенциал скоростей потока несжимаемой жидкости, текущего по поверхности R, или как потенциал электростатич. поля на R, и т. п. Гармонич. функции на поверхности сохраняют свойства обычных гармонич. функций. Для них справедливо обобщение *Дирихле принципа*: среди всех функций v класса $C^2(G) \cap C(\bar{G})$ в области $G \subset R$, принимающих на границе ∂G те же значения, что гармонич. функция $v \in C(\bar{G})$, последняя дает минимум интегралу Дирихле

$$D(v) = \iint_G \nabla v \cdot \sqrt{EG-F^2}\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$\nabla v = \frac{E\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 - 2F\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta} + G\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2}{EG - F^2}$$

— первый дифференциальный параметр Бельтрами, являющийся обобщением квадрата градиента $\mathrm{grad}^2 U$ на случай функций на поверхности.

По поводу обобщения Л.— Б. у. на римановы многообразия высших размерностей см. *Лапласа оператор*.

Лит.: [1] Beltrami E., Richerche di analisi applicata alla geometria, в кн.: Opere matematiche, t. 1, Milano, 1902, p. 107—98; [2] Шиффер М., Спенсер Д. К., Функционалы на конечных римановых поверхностях, пер. с англ., М., 1957.

Е. Д. Соломенцев, Е. В. Шикин.

ЛАРМОРОВСКИЙ РАДИУС, радиус Лармора,— радиус окружности, по к-рой движется заряженная частица в плоскости, перпендикулярной магнитному полю $\boldsymbol{H}$. Движение заряда e в однородном магнитном поле происходит под действием силы Лоренца и описывается уравнением

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{V}, \boldsymbol{H}], \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{p}$ — импульс заряженной частицы, c — скорость света, $\boldsymbol{V}$ — скорость заряда в лабораторной системе отсчета. Решение уравнения (1) в декартовой системе координат с осью z, направленной по полю $\boldsymbol{H}$, имеет вид

$$V_x = V_{0t}\cos(\omega t + \alpha), \quad V_y = -V_{0t}\sin(\omega t + \alpha), \quad V_z = V_{0z},$$
$$x = x_0 + r\sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r\cos(\omega t + \alpha), \quad z = z_0 + V_{0z}t, \qquad (2)$$

где $\omega = ecH/\varepsilon$ — т. н. частота Лармора, ε — энергия заряженной частицы, не меняющаяся при движении в однородном магнитном поле, V_{0t}, V_{0z}, α, x_0, y_0, z_0 — постоянные, определяемые из начальных условий,

$$r = \frac{V_{0t}}{\omega} = \frac{V_{0t}\varepsilon}{ecH}$$

— Л. р. В однородном магнитном поле заряд движется по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля с Л. р. r. Скорость частицы при этом постоянна по величине.

Если скорость частицы мала по сравнению со скоростью света, то можно приближенно положить $\varepsilon = mc^2$ и выражение для Л. р. принимает вид

$$r = V_{0t}/\omega_0 = V_{0t}mc/eH.$$

В результате вращения заряженных частиц в магнитном поле возникает магнитный момент системы.

Лит.: [1] Тамм И. Е., Основы теории электричества, 7 изд., М., 1957; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

В. В. Параил.

ЛАСКЕРА КОЛЬЦО — коммутативное кольцо, в к-ром любой идеал обладает примарным разложением, т. е. представляется в виде пересечения конечного числа примарных идеалов. Аналогично, A-модуль наз. модулем Ласкера, если любой его подмодуль обладает примарным разложением. Любой модуль конечного типа над Л. к. является ласкеровым. Э. Ласкер [1] доказал наличие примарного разложения в кольцах многочленов. Э. Нётер [2] установила, что любое нётерово кольцо является Л. к.

Лит.: [1] Lasker E., «Math. Ann.», 1905, Bd 60, S. 20—116; [2] Noether E., там же, 1921, Bd 83, S. 24—66; [3] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

В. И. Данилов.

ЛАТИНСКИЙ КВАДРАТ — квадратная матрица порядка n, каждая строка и каждый столбец к-рой являются перестановкой элементов конечного множества S, состоящего из n элементов. Говорят, что Л. к. по-

строен на множестве S; обычно $S=\{1, 2, \ldots, n\}$. Л. к. существует для любого n; напр., $A=\|a_{ij}\|$, где

$$a_{ij}\equiv i+j-1 \pmod n,\ i, j=1, 2, \ldots, n,$$

есть Л. к.

Каждый Л. к. можно рассматривать как таблицу умножения *квазигруппы*; верно и обратное: таблица умножения конечной квазигруппы есть Л. к. Для того чтобы Л. к. $A=\|a_{ij}\|$ был *Кэли таблицей* группы, необходимо и достаточно выполнение условия (к р и т е р и я к в а д р а т а):
если $a_{ik}\ a_{i_1k_1}$, $a_{il}=a_{i_1l_1}$, $a_{jk}=a_{j_1k_1}$, то $a_{jl}\ a_{j_1l_1}$.
По двум Л. к. $A=\|a_{kl}\|$ порядка n и $B=\|b_{rs}\|$ порядка m можно всегда построить Л. к. $C=\|c_{ij}\|$ порядка mn, напр. следующим образом:

$$c_{ij}=b_{rs}+(a_{kl}-1)\,m,\ i=r+m\,(k-1),\ j=s+m\,(l-1).$$

Для числа L_n Л. к. порядка n верна оценка снизу:

$$L_n\geqslant n!\,(n-1)!\ldots 2!\,1!$$

Л. к. наз. р е д у ц и р о в а н н ы м (или Л. к. с т а н д а р т н о г о в и д а), если элементы его первой строки и первого столбца расположены в натуральном порядке. Для числа l_n редуцированных Л. к. порядка n верны соотношения:

$$L_n=n!\,(n-1)!\,l_n,\ l_n\geqslant m_n=(n-2)!\,(n-3)!\ldots 2!\,1!$$

Два Л. к., построенные на одном и том же множестве S, наз. э к в и в а л е н т н ы м и, если один из другого получается перестановкой строк, столбцов и переименованием элементов. Пусть k_n — число классов эквивалентности Л. к. порядка n. Известны следующие первые значения l_n и k_n:

n	3	4	5	6	7	8
k_n	1	2	2	22	563	1 676 257
l_n	1	4	56	9408	16 942 080	535 281 401 856
m_n	1	2	12	288	34 560	24 883 200

Кроме того, $l_9=377\ 597\ 570\ 964\ 258\ 816$. Задача получения оценок для l_n остается нерешенной (1982).

В теории планирования экспериментов требуется строить Л. к. с различными ограничениями на расположения элементов в них. Л. к. наз. п о л н ы м, если для любых натуральных α, β, $\alpha\neq\beta$, $1\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant n$, существуют такие i, j, k, l, что

$$(a_{ij}, a_{i, j+1})=(\alpha, \beta) \text{ и } (a_{kl}, a_{k+1, l})=(\alpha, \beta).$$

Известны алгоритмы построения полных Л. к. только в случае четных n, для нек-рых нечетных n имеются примеры полных Л. к.

Л а т и н с к и м п о д к в а д р а т о м данного Л. к. порядка n наз. такая его подматрица, что она сама является Л. к. порядка k, $k<n$. Любой Л. к. порядка k может быть латинским подквадратом Л. к. порядка n при $n\geqslant 2k$.

При построении *ортогональных латинских квадратов* существенную роль играет понятие трансверсали Л. к. Ч а с т и ч н о й т р а н с в е р с а л ь ю длины t Л. к. $A=\|a_{ij}\|$ наз. такое множество T, состоящее из t клеток Л. к.

$$T=\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_t, j_t)\},$$

что $i_k\neq i_l$, $j_k\neq j_l$, $a_{i_kj_k}\neq a_{i_lj_l}$ при $k\neq l$, $1\leqslant k,\ l\leqslant t$.

Всегда $t\leqslant n$; при $t=n$ частичная трансверсаль наз. т р а н с в е р с а л ь ю. Существование в Л. к. порядка n множества из n непересекающихся трансверсалей является необходимым и достаточным условием суще-

ствования для него ортогонального сократата. Л. к. 6-го порядка

$$\begin{array}{cc} 012 & 345 \\ 120 & 453 \\ 201 & 534 \\ 345 & 012 \\ 453 & 120 \\ 534 & 201 \end{array}$$

не имеет ни одной трансверсали.

В любом Л. к. порядка $n \geqslant 7$ существует по крайней мере одна частичная трансверсаль длины $t \geqslant (2n-1)/3$. При $n \geqslant 4$ всегда можно построить Л. к. такой, что обе его главные диагонали являются трансверсалями.

Несколько обобщений Л. к. Частичным, или неполным, Л. к. порядка n наз. матрица порядка n, к-рой только часть клеток заполнена элементами множества S мощности n, но в каждой строке и в каждом столбце элементы S встречаются не более одного раза. Существуют частичные Л. к., к-рые нельзя дополнить до Л. к., напр.:

$$\begin{array}{cccc} 1 & . & . & . \\ . & 2 & 3 & 4 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array}$$

Неполный Л. к., содержащий точно $n-1$ элементов, может быть дополнен до Л. к. Известно, что две таблицы Кэли двух разных групп порядка n отличаются друг от друга по крайней мере на $2n$ местах.

Бесконечным Л. к. наз. бесконечная матрица, элементы к-рой — натуральные числа, встречающиеся в каждой строке и в каждом столбце точно один раз.

Имеется несколько обобщений понятия Л. к. на многомерный случай. Так, m-мерным перестановочным кубом порядка n наз. m-мерная матрица

$$A = \| a_{i_1 i_2 \dots i_m} \|$$

порядка n, элементами к-рой являются первые n натуральных чисел и для любого k набор

$$a_{i_1 \dots i_{k-1}\, 1\, i_{k+1} \dots i_m},\ a_{i_1 \dots i_{k-1}\, 2\, i_{k+1} \dots i_m}, \dots, a_{i_1 \dots i_{k-1}\, n\, i_{k+1} \dots i_m}$$

есть перестановка первых n натуральных чисел. А m-мерным гиперкубом порядка n и класса r наз. m-мерная матрица порядка n, элементы к-рой принадлежат множеству из n^r элементов, каждый элемент встречается в матрице n^{m-r} раз, а в каждом $(n-1)$-мерном сечении матрицы (т. е. среди элементов

$$a_{i_1 \dots i_{k-1}\, i_k^0\, i_{k+1} \dots i_m},$$

где $i_k^0 = \text{const}$, а остальные индексы пробегают все n значений) встречается n^{m-r-1} раз.

Лит.: [1] Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; [2] Dénes J., Keedwell A. D., Latin Squares and their Applications, Budapest, 1974; [3] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970; [4] Райзер Г.-Дж., Комбинаторная математика, пер. с англ., М., 1966.

В. М. Михеев.

ЛАТИНСКИЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК — прямоугольная матрица размера $m \times n$, $m \leqslant n$, каждая строка к-рой является перестановкой (без повторений) элементов множества S, состоящего из n элементов, причем в столбцах каждый элемент встречается не более одного раза. При $m = n$ Л. п. является *латинским квадратом* порядка n. Обычно $S = \{1, 2, \dots, n\}$, и о Л. п. говорят, что он построен на множестве S.

Л. п. существует при любых натуральных m, n, $m \leqslant n$. Примером Л. п. может служить матрица, первая строка к-рой есть $(1, 2, \dots, n)$, а все последующие получаются из предыдущей циклич. сдвигом на

один шаг. Л. п. размера $m \times n$, $m < n$, всегда может быть дополнен до латинского квадрата порядка n так, что первые m строк латинского квадрата будут совпадать со строками Л. п.

Для числа $L(m, n)$ Л. п. размера $m \times n$ верна следующая оценка снизу:

$$L(m, n) \geqslant n!\,(n-1)!\ldots(n-m+1)!$$

Л. п. наз. нормализованным, если его первая строка есть $(1, 2, \ldots, n)$. Число $K(m, n)$ нормализованных Л. п. связано с $L(m, n)$ соотношением:

$$L(m, n) = n!\,K(m, n).$$

Подсчет $L(m, n)$ при $m = 2, 3$ связан с классич. *комбинаторными задачами:* с задачей о числе беспорядков (см. *Инверсия*) и с задачей о супружеских парах. Так, число беспорядков $D_n = K(2, n)$, а число размещений U_n в задаче о супружеских парах есть число Л. п. размера $3 \times n$, первые две строки к-рых суть:

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\ldots n \\ n\,1\,2\ldots n-1 \end{pmatrix}.$$

Для U_n верны формулы:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2k}{2k-1}\binom{2k-1}{k}(n-k)!,$$

$$U_n \sim n!\,e^{-2}\left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2!\,(n-1)_2} - \ldots + \frac{(-1)^k}{k!\,(n-1)_k} + \ldots\right),$$

$$(m)_k = m(m-1)\ldots(m-k+1).$$

Число $K(3, n)$ выражается через D_k и U_l:

$$K(3, n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} D_{n-k} D_k U_{n-2k},$$

где $m = [n/2]$, $U_0 = 1$. Верна также следующая асимптотика:

$$K(3, n) \sim (n!)^2\,e^{-3}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2!\,(n)_2} + \ldots + \frac{b_s}{s!\,(n)_s} + \ldots\right),$$

где $b_s = H_s(-1/2)$, $H_s(t)$ — *Эрмита многочлен*. Известно также, что

$$K(3, r+s) \equiv 2^r K(3, s) \pmod{r}.$$

Задача о перечислении Л. п., имеющих более трех строк, не решена (1982). При $m < n^{1/3 - \delta}$, где $\delta = \delta(n) \to +0$ так, что $n^{-\delta(n)} \to 0$, получена асимптотика:

$$L(m, n) \sim (n!)^m \exp\left\{-\frac{m(m-1)}{2}\right\}.$$

На Л. п. распространяются нек-рые понятия и теоремы, связанные с латинскими квадратами. Так, два Л. п. $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ размера $m \times n$ наз. ортогональными, если все пары вида (a_{ij}, b_{ij}) различны. Множество Л. п., в к-ром любые два Л. п. ортогональны, имеет не более $m-1$ Л. п.

Часто под Л. п. понимают следующее обобщение Л. п.: латинским прямоугольником размера $r \times s$, построенным на множестве S, состоящем из n элементов, наз. матрица размера $r \times s$ с элементами из S, встречающимися в каждой строке и каждом столбце не более одного раза. Л. п. размера $r \times s$, построенный на n символах, может быть расширен до латинского квадрата порядка n тогда и только тогда, когда каждый символ встречается в Л. п. не менее $r + s - n$ раз.

Лит.: [1] Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, пер. с англ., М., 1963.

См. также лит. при ст. *Латинский квадрат*. *В. М. Михеев.*

ЛЕБЕГА ИНТЕГРАЛ — одно из наиболее важных обобщений понятия интеграла. Пусть (X, μ) — пространство с неотрицательной полной счетноаддитивной мерой μ, причем $\mu X < +\infty$. Простой функцией наз. измеримая функция $g: X \to \mathbb{R}^1$, принимающ

щая не более счетного множества значений: $g(x)=y_n$, $y_n \neq y_k$ при $n \neq k$, если $x \in X_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$. Простая функция g наз. с у м м и р у е м о й, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu X_n$$

сходится абсолютно; сумма этого ряда есть и н т е г р а л Л е б е г а:

$$\int_X g \, d\mu.$$

Функция $f: X \to \mathbb{R}^1$ суммируема на X, $f \in L(X, \mu)$, если существует равномерно сходящаяся на множестве полной меры к f последовательность простых суммируемых функций g_n и предел

$$\lim_{n \to \infty} \int_X g_n \, d\mu = I$$

конечен. Число I есть и н т е г р а л Л е б е г а:

$$\int_X f \, d\mu.$$

Определение корректно: предел I существует и не зависит от выбора последовательности g_n. Если $f \in L(X, \mu)$, то f — измеримая почти всюду конечная функция на X. Л. и. есть линейный неотрицательный функционал на $L(X, \mu)$, обладающий следующими свойствами:

1) если $f(x) \in L(X, \mu)$ и

$$\mu \{x \in X, \ f(x) \neq h(x)\} = 0,$$

то $h(x) \in L(X, \mu)$ и

$$\int_X f \, d\mu = \int_X h \, d\mu;$$

2) если $f \in L(X, \mu)$, то $|f| \in L(X, \mu)$ и

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leqslant \int_X |f| \, d\mu;$$

3) если $f \in L(X, \mu)$, $|h| \leqslant f$ и h измерима, то $h \in L(X, \mu)$ и

$$\left| \int_X h \, d\mu \right| \leqslant \int_X f \, d\mu;$$

4) если $m \leqslant f \leqslant M$ и f измерима, то $f \in L(X, \mu)$ и

$$m\mu X \leqslant \int_X f \, d\mu \leqslant M\mu X.$$

В случае, когда $\mu X = +\infty$ и $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mu X_n < +\infty$, интеграл Лебега

$$\int_X f \, d\mu$$

определяется как

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f \, d\mu$$

при условии, что этот предел существует и конечен для любой последовательности E_n такой, что $\mu E_n < +\infty$, $E_n \subset E_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$. В этом случае свойства 1), 2), 3) сохраняются, а свойство 4) нарушается.

О переходе к пределу под знаком Л. и. см. *Лебега теорема*.

Если A есть измеримое множество X, то Л. и.

$$\int_A f \, d\mu$$

определяется или, как указано выше, заменой X на A, или как

$$\int_X f \chi_A \, d\mu,$$

где χ_A — характеристич. функция A; эти определения эквивалентны. Если $f \in L(A, \mu)$, то $f \in L(A', \mu)$ для любого измеримого $A' \subset A$. Если

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

A_n измеримо для каждого n, для $n \neq k$

$$A_n \cap A_k = \varnothing$$

и $f \in L(A, \mu)$, то

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

Обратно, если при тех же условиях на A_n для каждого n, $f \in L(A_n, \mu)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| \, d\mu < +\infty,$$

то $f \in L(A, \mu)$ и верно предыдущее равенство (σ-аддитивность Л. и.).

Функция множества $A \subset X$

$$F(A) = \int_A f \, d\mu$$

абсолютно непрерывна относительно μ; если $f \geqslant 0$, то $F(A)$ есть неотрицательная абсолютно непрерывная относительно μ мера. Обратное утверждение представляет *Радона — Никодима теорему*.

Для функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ название «интеграл Лебега» применяется к соответствующему функционалу, если мера μ есть *Лебега мера*; при этом множество суммируемых функций обозначается просто $L(X)$ и интеграл

$$\int_X f(x) \, dx.$$

Для других мер этот функционал наз. *Лебега—Стилтьеса интегралом*.

Если $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f \in L[a, b]$ и $x : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, — неубывающая абсолютно непрерывная функция, то

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(x(t)) \, x'(t) \, dt.$$

Если $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $f \in L[a, b]$ и $g : [a, b] \to \mathbb{R}^1$, — монотонна на $[a, b]$, то $fg \in L[a, b]$ и существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = g(a) \int_a^\xi f(x) \, dx + g(b) \int_\xi^b f(x) \, dx$$

(вторая теорема о среднем).

А. Лебег дал в 1902 (см. [1]) определение интеграла для $X \subset \mathbb{R}^1$ и меры μ, являющейся мерой Лебега. Он строил простые функции, равномерно приближающие почти всюду на множестве конечной меры E измеримую неотрицательную функцию $f : E \to R^1$, и доказал существование общего предела (конечного или бесконечного) интегралов этих простых функций при стремлении их к f. Л. и. является базой для различных обобщений понятия интеграла. Как отметил Н. Н. Лузин [2], свойство 2) — т. н. абсолютная интегрируемость, выделяет Л. к. для $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ из всевозможных обобщенных интегралов.

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.— Л., 1934; [2] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951; [3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981.

И. А. Виноградова.

ЛЕБЕГА КОНСТАНТЫ — 1) Величины

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \, dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)\,t}{2\sin t/2}$$

есть *Дирихле ядро*. Л. к. L_n при каждом n является:
1) максимальным значением $|S_n(f, x)|$ для всех x и функций $f(t)$ таких, что $|f(t)| \leqslant 1$ при почти всех t;
2) точной верхней гранью $|S_n(f, x)|$ для всех x и всех непрерывных функций $f(t)$ таких, что $|f(t)| \leqslant 1$;
3) точной верхней гранью интегралов

$$\int_0^{2\pi} |S_n(f, x)|\,dx$$

для всех функций $f(t)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt \leqslant 1.$$

Здесь $S_n(f, x)$ есть частная сумма ряда Фурье по тригонометрич. системе 2π-периодической функции $f(t)$. Справедлива асимптотич. формула:

$$L_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1), \quad n \longrightarrow \infty.$$

В частности, $L_n \to \infty$ при $n \to \infty$, что связано с расходимостью тригонометрич. рядов Фурье нек-рых непрерывных функций. В более широком смысле Л. к. определяются для других ортонормированных систем как величины

$$L_n = \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in (a, b)} \int_a^b |D_n(x, t)|\,dt,$$

где $D_n(x, t)$ есть ядро Дирихле для данной ортонормированной на (a, b) системы функций, и играют важную роль в вопросах сходимости рядов Фурье по этим системам. Л. к. введены А. Лебегом (H. Lebesgue, 1909). См. также *Лебега функции*.

Лит.: [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965. *К. И. Осколков.*

2) Л. к. интерполяционного процесса — числа

$$\lambda_n = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \sum_{k=0}^{n} |l_{nk}(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$l_{nk}(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные узлы интерполяции, лежащие на нек-ром отрезке $[a, b]$.

Пусть $C[a, b]$ и $\mathcal{P}_n[a, b]$ — соответственно пространства непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций и многочленов степени не выше чем n, рассматриваемых на том же отрезке, с равномерной метрикой, и пусть $P_n(x, f)$ — интерполяционный многочлен степени n, принимающий в узлах x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, те же значения, что и функция f. Если через P_n обозначить оператор, ставящий в соответствие функции $f(x)$ многочлен $P_n(x, f)$, $P_n : C[a, b] \to \mathcal{P}_n[a, b]$, то $\|P_n\| = \lambda_n$, где слева стоит норма оператора в пространстве линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(C[a, b], P_n[a, b])$ и

$$\|f(x) - P_n(x, f)\|_{C[a, b]} \leqslant (1 + \lambda_n) E_n(f),$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f алгебраич. многочленами степени $\leqslant n$.

При любом выборе на отрезке $[a, b]$ узлов интерполяции $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$. Для равноотстоящих узлов существует такая постоянная $c > 0$, что $\lambda_n \geqslant c 2^n n^{-3/2}$. Для узлов, совпадающих с нулями многочлена Чебышева,

Л. к. имеют минимальный порядок возрастания, именно:

$$\lambda_n \asymp \ln n.$$

Если функция f m раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$, $Y=\{y_k\}_{k=0}^n$ — заданный набор чисел («приближений значений $f(x_k)$»), $P_n(x, Y)$ — интерполяционный многочлен степени n, принимающий в узлах x_k, $k=0, 1, \ldots, n$, значения y_k,

$$\lambda_{nm} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \sum_{k=1}^n |\, l_{nk}^{(m)}(x)\,|, \quad n=0, 1, \ldots,$$

то

$$\| f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x, Y) \|_{C[a, b]} \leqslant$$
$$\leqslant \| f^{(m)}(x) - P_n^{(m)}(x, f) \|_{C[a, b]} +$$
$$+ \lambda_{nm} \max_{k=0, 1, \ldots, n} |\, f(x_k) - y_k\,|.$$

Л. к. λ_{nm} произвольного отрезка $[a, b]$ связаны с аналогичными константами Λ_{nm} для отрезка $[-1, 1]$ соотношением

$$\Lambda_{nm} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^m \lambda_{nm},$$

в частности $\lambda_n = \Lambda_n$. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЛЕБЕГА МЕРА в $\mathbb{R}^n$ — счетно-аддитивная мера λ, являющаяся продолжением объема как функции n-мерных интервалов на более широкий класс $\mathcal{A}$ множеств, измеримых по Лебегу. Класс $\mathcal{A}$ содержит в себе класс $\mathcal{B}$ борелевских множеств и состоит из множеств вида $A \cup B$, где $B \subset B_1$, A, $B_1 \subset \mathcal{B}$ и $\lambda(B_1)=0$. Не всякое подмножество $\mathbb{R}^n$ принадлежит $\mathcal{A}$. Для любого $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \inf \sum_j \lambda(I_j), \qquad (*)$$

где inf берется по всевозможным счетным семействам интервалов $\{I_j\}$ таким, что $A \subset \bigcup I_j$. Формула (*) имеет смысл для каждого $A \subset \mathbb{R}^n$ и определяет функцию множеств λ^* (совпадающую на $\mathcal{A}$ с λ), называемую в н е ш н е й м е р о й Л е б е г а. Множество A принадлежит $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda(I) = \lambda^*(A \cap I) + \lambda^*(I \setminus A)$$

для любого конечного интервала I; при всех $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda^*(A) = \inf \{\lambda(U) : A \subset U,\ U \text{ — открыто}\}$$

и при всех $A \in \mathcal{A}$

$$\lambda(A) = \lambda^*(A) = \sup \{\lambda(F) : A \supset F,\ F \text{ — компактно}\};$$

если $\lambda^*(A) < \infty$, то последнее равенство достаточно для включения $A \in \mathcal{A}$. Если O — ортогональный оператор в $\mathbb{R}^n$ и $a \in \mathbb{R}^n$, то $\lambda(OA + a) = \lambda(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Л. м. введена А. Лебегом [1].

Лит.: [1] L e b e s g u e H., «Ann. mat. pura ed appl.», (3) 1902, v. 7, p. 231; [2] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [3] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [4] К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981. *В. В. Сазонов.*

ЛЕБЕГА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования тригонометрич. рядов. Ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (*)$$

суммируем в точке x_0 м е т о д о м с у м м и р о в а н и я Л е б е г а к сумме s, если в нек-рой окрестности $(x_0-h,\ x_0+h)$ этой точки сходится проинтегрированный ряд

$$\frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

и его сумма $F(x)$ в точке x_0 имеет симметрич. производную, равную s:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0-h)}{2h} = s.$$

Последнее условие можно представить также в виде

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \frac{\sin nh}{nh} \right] = s.$$

Л. м. с. не является регулярным в том смысле, что не может суммировать любой сходящийся тригонометрич. ряд (*) (см. *Регулярные методы суммирования*), однако если ряд (*) есть ряд Фурье суммируемой функции $f(x)$, то он суммируем Л. м. с. почти всюду к $f(x)$. Метод предложен А. Лебегом [1].

Лит.: [1] Lebesgue H., Leçons sur les séries trigonométriques, P., 1906; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961. *И. И. Волков.*

ЛЕБЕГА МНОЖЕСТВО функции f, определенной на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^k$,— множество точек $y \in G$ таких, что

$$\lim_{\lambda(\Delta) \to 0} \frac{1}{\lambda(\Delta)} \int_{\Delta} |f(y) - f(x)| \, dx = 0,$$

где Δ — замкнутый куб, содержащий точку y, и λ — мера Лебега. Функция f здесь может быть действительной или векторной. *В. В. Сазонов.*

ЛЕБЕГА НЕРАВЕНСТВО — оценка уклонения частных сумм ряда Фурье с помощью наилучших приближений. Л. н. в случае тригонометрич. системы понимается как соотношение

$$\max_x |R_n(f, x)| \leqslant (L_n + 1) E_n(f), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $R_n(f, x)$ есть n-й остаток (тригонометрического) ряда Фурье непрерывной 2π-периодической функции f, L_n — *Лебега константа*, $E_n(f)$ — равномерное наилучшее приближение тригонометрич. полиномами порядка n. Л. н.— соотношение общего характера: его аналоги выполнены для произвольных ортонормированных систем при соответствующих определениях констант Лебега и наилучших приближений, а также для сравнения остатков рядов Фурье с наилучшими приближениями в нормах других пространств, напр. L^p, $1 \leqslant p < \infty$. Л. н. и подобные ему соотношения часто используются в теории аппроксимации для получения оценок наилучших приближений снизу. Л. н. доказано А. Лебегом (H. Lebesgue).

Лит.: [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1, М., 1965. *К. И. Осколков.*

ЛЕБЕГА ПРИЗНАК — признак точечной сходимости ряда Фурье. Если 2π-периодическая интегрируемая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ в точке x_0 при нек-ром $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{h \to +0} \int_h^{\delta} \left| \frac{\varphi_{x_0}(t+h)}{t+h} - \frac{\varphi_{x_0}(t)}{t} \right| dt = 0, \qquad (*)$$

где

$$\varphi_{x_0}(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S,$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к числу S. Л. п. доказан А. Лебегом [1]. Условие (*) равносильно совокупности двух условий

$$\int_0^h |\varphi_{x_0}(t)| \, dt = o(h),$$

$$\int_h^{\delta} \frac{1}{t} |\varphi_{x_0}(t+h) - \varphi_{x_0}(t)| \, dt = o(1), h \to +0.$$

Л. п. сильнее *Дирихле признака*, *Жордана признака*, *Дини признака*, *Валле Пуссена признака* и *Юнга признака*.

Лит.: [1] Lebesgue H., «Math. Ann.», 1905, Bd 61, S. 251—80; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961. *Б. И. Голубов.*

ЛЕБЕГА ПРОСТРАНСТВО — пространство с мерой $(M, \mathfrak{B}, \mu)$ (где M — нек-рое множество, $\mathfrak{B}$ — нек-рая σ-алгебра его подмножеств, именуемых измеримыми, а

μ — нек-рая мера, определенная на измеримых множествах), изоморфное «стандартному образцу», состоящему из нек-рого отрезка Δ и не более чем счетного множества точек a_i (в «крайних» случаях этот «образец» может состоять только из отрезка Δ или только из точек a_i) и снабженному следующей мерой m: на Δ берется обычная *Лебега мера*, а каждой из точек a_i приписывается мера $m(a_i)=m_i>0$; при этом мера предполагается нормированной, т. е. $\mu(M)=m(\Delta)+\Sigma m_i=1$. «Изоморфизм» здесь можно понимать в строгом смысле или по mod 0; соответственно получается более узкий или более широкий вариант понятия Л. п. (в последнем случае можно говорить о Л. п. по mod 0). Можно дать определение Л. п. в терминах «внутренних» свойств пространства с мерой $(M, \mathfrak{B}, \mu)$ (см. [1] — [3]).

Л. п.— наиболее часто встречающийся тип пространств с нормированной мерой, ибо любое полное сепарабельное метрич. пространство с нормированной мерой (определенной на его борелевских подмножествах и затем обычным образом пополненной) является Л. п. Помимо свойств, общих всем пространствам с мерой, Л. п. обладает рядом специфических «хороших» свойств. Напр., любой автоморфизм булевой σ-алгебры с мерой $(\mathfrak{B}, \mu)$ порождается нек-рым автоморфизмом Л. п. M. При ряде естественных операций из Л. п. снова получается Л. п. Так, подмножество A положительной меры в Л. п. M само является Л. п. (его измеримыми подмножествами считаются те, которые измеримы в M, а мера $\mu_A(X)=\mu(X)/\mu(A)$); прямое произведение конечного или счетного числа Л. п. есть Л. п. Другие свойства Л. п. связаны с *измеримыми разбиениями*.

Лит.: [1] Halmos P. R., Neumann J., «Ann. Math.», 1942, v. 43, № 2, p. 332—50; [2] Рохлин В. А., «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 1, с. 107—50; [3] Haezendonck J., «Bull. Soc. math. Belg.», 1973, t. 25, № 3, p. 243—58.

Д. В. Аносов.

ЛЕБЕГА РАЗЛОЖЕНИЕ — 1) Л. р. функции ограниченной вариации — каноническое представление функции ограниченной вариации в виде суммы не более чем трех слагаемых. Если $f(x)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$, то она может быть представлена в виде

$$f(x)=A(x)+S(x)+D(x),$$

где $A(x)$ — абсолютно непрерывная функция (см. *Абсолютная непрерывность*), $S(x)$ — *сингулярная функция*, а $D(x)$ — *скачков функция*. В нек-рых случаях, напр., если $f(a)=A(a)$, это представление единственно. Л. р. установлено А. Лебегом (H. Lebesgue, 1904, см. [1]).

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.— Л., 1934; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974; [3] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953.

Б. И. Голубов.

2) Л. р. заданной на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A})$ ($\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра) σ-конечной обобщенной меры μ относительно определенной там же σ-конечной обобщенной меры ν — представление μ в виде $\mu=\alpha+\beta$, где α, β суть σ-конечные обобщенные меры, причем α абсолютно непрерывна относительно ν, а β сингулярна относительно ν. Такое представление всегда возможно и единственно.

Лит.: [1] Халмош П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, пер. с англ., М., 1962.

В. В. Сазонов.

ЛЕБЕГА РАЗМЕРНОСТЬ — размерность, определенная посредством покрытий; важнейший *размерностный инвариант* $\dim X$ топологич. пространства X, открытый А. Лебегом [1]. Он высказал гипотезу, что $\dim I^n=n$ для n-мерного куба I^n. Л. Брауэр [2] впервые доказал это, а также более сильное тождество: $\dim I^n=\operatorname{Ind} I^n=n$. Точное определение инварианта $\dim X$ (для класса

метрич. компактов) дал П. С. Урысон, доказавший для пространств X этого класса тождество

$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$$

(тождество Урысона, см. *Размерности теория*), распространенное на класс всех сепарабельных метрич. пространств в 1925 В. Гуревичем (W. Hurewicz) и Л. А. Тумаркиным.

Для компактов X Л. р. определяется как наименьшее целое число n, обладающее тем свойством, что при любом $\varepsilon>0$ существует конечное открытое ε-покрытие компакта X, имеющее кратность $\leqslant n+1$; при этом ε-покрытием метрич. пространства наз. покрытие, все элементы к-рого имеют диаметр $<\varepsilon$, а кратностью конечного покрытия пространства X наз. наибольшее такое целое число k, что существует точка пространства X, содержащаяся в k элементах данного покрытия. Для произвольного нормального (в частности, метризуемого) пространства X Л. р. наз. наименьшее целое число n такое, что ко всякому конечному открытому покрытию ω пространства X существует вписанное в него (конечное открытое) покрытие α кратности $n+1$. При этом покрытие α наз. вписанным в покрытие ω, если каждый элемент покрытия α является подмножеством хотя бы одного элемента покрытия ω.

Лит.: [1] Lebesgue H., «Math. Ann.», 1911, Bd 70, S. 166—68; [2] Brouwer L. E. J., «J. reine und angew. Math.», 1913, Bd 142, S. 146—52; [3] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973. *П. С. Александров.*

ЛЕБЕГА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. в теории размерности: n-мерный куб для любого $\varepsilon>0$ обладает конечным замкнутым ε-покрытием кратности $\leqslant n+1$, и в то же время существует такое $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n)>0$, что любое конечное замкнутое ε_0-покрытие n-мерного куба имеет кратность $\geqslant n+1$. Это утверждение привело в дальнейшем к определению основного размерностного инварианта — *Лебега размерности* $\dim X$ нормального топологич. пространства X. *Б. А. Пасынков.*

2) Л. т. о предельном переходе под знаком интеграла; пусть на множестве E задана последовательность измеримых функций $f_n(x)$, к-рая сходится почти всюду (или по мере) на E к функции $f(x)$; если на E существует такая суммируемая функция $\Phi(x)$, что при всех n и x

$$|f_n(x)|\leqslant\Phi(x),$$

то $f_n(x)$ и $f(x)$ суммируемы на E и

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

Впервые доказана А. Лебегом [1]. Важный частный случай $\Phi(x)=\mathrm{const}$ и E с конечной мерой, также называемый Л. т., был им получен раньше [2].

Иногда Л. т. называют теорему, впервые доказанную Б. Леви [3]: пусть на множестве E задана неубывающая последовательность измеримых неотрицательных функций $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\ldots$ и

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

почти всюду, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

Лит.: [1] Lebesgue H., «Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et sci. phys.», 1909, v. 1, p. 25—117; [2] Lebesgue H., «Ann. mat. pura ed appl.», (3), 1902, v. 7, p. 231; [3] Levi B., «Rend. Ist. Lombardo sue lett», (2), 1906, v. 39, p. 775—80; [4] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [5] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974. *Т. П. Лукашенко.*

ЛЕБЕГА ТОЧКА — значение действительной переменной x такое, что для данной суммируемой по Лебегу на (a, b) функции $f(x)$ выполнены соотношения

$$\int_0^h |f(x \pm t) - f(x)|\, dt = o(h), \quad h \to 0.$$

Согласно теореме Лебега множество точек, в к-рых эти соотношения выполнены (т. н. множество Лебега), имеет полную меру (Лебега) на интервале (a, b), т. е. в почти каждой точке x, а именно, во всех Л. т. функция $f(x)$ в среднем мало отличается от ее значения в близлежащих точках $x \pm t$. Понятие Л. т. имеет аналоги и для функций многих переменных. Это понятие и утверждения типа приведенной теоремы Лебега лежат в основе различных исследований проблем сходимости почти всюду, в частности исследований сингулярных интегралов.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981.

К. И. Осколков.

ЛЕБЕГА ФУНКЦИИ — функции

$$L_n^{\Phi}(t) = \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\, \varphi_k(t) \right| dx, \quad t \in [a, b],$$

где $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — заданная ортонормированная по мере Лебега на отрезке $[a, b]$ система функций, $n = 1, 2, \ldots$ Аналогично определяются Л. ф. в случае, когда ортонормированная система Φ задана на произвольном пространстве с мерой. Справедливо равенство

$$L_n^{\Phi}(t) = \sup_{f:\, \|f\|_{C[a,\,b]} \leqslant 1} |S_n(f)(t)|, \quad t \in [a, b],$$

где

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=1}^n c_k(f)\, \varphi_k(t)$$

— частная сумма ряда Фурье функции f по системе Φ. В случае, когда Φ — тригонометрич. система, Л. ф. постоянны и сводятся к *Лебега константам*. Л. ф. введены А. Лебегом (H. Lebesgue).

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958.

Б. С. Кашин.

ЛЕБЕГА ЧИСЛО — 1) Л. ч. открытого покрытия ω метрич. пространства X — любое такое число $\varepsilon > 0$, что как только подмножество A пространства X имеет диаметр $< \varepsilon$, так A содержится хотя бы в одном элементе покрытия ω. Для любого открытого покрытия компакта существует хотя бы одно Л. ч.; можно построить двухэлементное покрытие прямой, для к-рого нет ни одного Л. ч.

2) Л. ч. системы замкнутых подмножеств λ метрич. пространства X — любое такое число $\varepsilon > 0$, что как только множество $A \subset X$ диаметра $\leqslant \varepsilon$ пересекает все элементы какой-нибудь подсистемы λ' системы λ, так пересечение элементов системы λ непусто. Любая конечная система замкнутых подмножеств компакта обладает хотя бы одним Л. ч. *Б. А. Пасынков.*

ЛЕБЕГА — СТИЛТЬЕСА ИНТЕГРАЛ — обобщение *Лебега интеграла*. Для неотрицательной меры μ название «интеграл Лебега—Стилтьеса» употребляется в том случае, когда $X = \mathbb{R}^n$ и μ не есть мера Лебега; тогда интеграл $\int_X f d\mu$ определяется так же, как интеграл Лебега в общем случае. Если мера μ знакопеременная, то $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 — неотрицательные меры, и Л.—С. и.

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\mu_1 - \int_X f\, d\mu_2$$

при условии, что оба интеграла в правой части существуют. Для $X = \mathbb{R}^1$ счетная аддитивность и ограниченность меры μ эквивалентна тому, что мера порождена

нек-рой функцией Φ ограниченной вариации. В таком случае Л.— С. и. записывается в виде

$$\int_a^b f d\Phi.$$

Для дискретной меры Л.— С. и. представляет собой числовой ряд.

Лит.: [1] Камке Е., Интеграл Лебега — Стилтьеса, пер. с нем., М., 1959. *И. А. Виноградова.*

ЛЕБЕГОВСКИЙ СПЕКТР — термин *спектральной теории*. Пусть A — самосопряженный, а U — унитарный операторы, действующие в гильбертовом пространстве H. Оператор A, соответственно U, имеет простой спектр Лебега, если он унитарно эквивалентен оператору умножения на λ в пространстве комплекснозначных функций $f(\lambda)$, к-рые определены на действительной оси $\mathbb{R}$, соответственно на окружности

$$S^1 = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| = 1\},$$

и для которых

$$\|f\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\lambda < \infty,$$

где интегрирование ведется по обычной *Лебега мере* на $\mathbb{R}$, соответственно на S^1, откуда и назв. Л. с. (см. *Унитарно эквивалентные операторы*). Для U это определение эквивалентно следующему: в H существует такой ортонормированный базис e_j, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, что $Ue_j = e_{j+1}$. Далее, оператор имеет спектр Лебега, если H можно разложить в ортогональную прямую сумму инвариантных подпространств, в каждом из к-рых оператор имеет простой Л. с. Хотя для данного оператора может быть много таких разложений, число «слагаемых» для каждого из них одно и то же (оно может быть и бесконечным *кардинальным числом*). Это число наз. кратностью Л. с. Наконец, аналогичные понятия можно ввести для однопараметрич. группы унитарных операторов $U(t)$, непрерывной в слабой (или, что в данном случае то же, сильной) операторной топологии. По теореме Стоуна $U(t) = e^{iAt}$, где A — нек-рый самосопряженный оператор. Если A имеет Л. с. нек-рой кратности, то говорят, что теми же свойствами обладает и $U(t)$. Напр., группа $U(t)$ имеет простой Л. с., если она унитарно эквивалентна группе $f(\lambda) \to e^{i\lambda t} f(\lambda)$ в $L^2(\mathbb{R})$, а та в свою очередь эквивалентна группе сдвигов $f(\lambda) \to f(\lambda + t)$ в том же пространстве $L^2(\mathbb{R})$. *Д. В. Аносов.*

ЛЕБЕДЕВА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(\tau) = \int_0^\infty [I_{i\tau}(x) + I_{-i\tau}(x)] K_{i\tau}(x) f(x)\, dx, \quad 0 \leqslant \tau < \infty,$$

где $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ — модифицированные цилиндрич. функции. Введено Н. Н. Лебедевым [1]. Если

$$x^{-1/2} f(x) \in L(0, 1), \quad x^{1/2} f(x) \in L(1, \infty),$$

то почти при всех x имеет место формула обращения

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty F(\tau)\, \tau \operatorname{sh} \pi\tau K_{i\tau}^2(x)\, dx.$$

Лит.: [1] Лебедев Н. Н., «Сиб. матем. ж.», 1962, т. 3, № 2, с. 213—22. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ЛЁВЕНХЕЙМА — СКОЛЕМА ТЕОРЕМА — см. *Гёделя теорема о полноте.*

ЛЕВИ КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — формула для логарифма характеристич. функции $\ln\varphi(\lambda)$ безгранично делимого распределения:

$$\ln\varphi(\lambda) = i\gamma\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2} \right) dM(x) +$$

$$+ \int_0^\infty \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2} \right) dN(x),$$

где характеристики Л. к. п. γ, σ^2, M, N удовлетворяют следующим условиям: $-\infty<\gamma<\infty$, $\sigma^2\geqslant 0$, $M(x)$ и $N(x)$ — неубывающие непрерывные слева функции на $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ соответственно и такие, что

$$\lim_{x\to\infty} N(x) = \lim_{x\to-\infty} M(x) = 0$$

и

$$\int_{-1}^{0} x^2\, dM(x) < \infty, \quad \int_{0}^{1} x^2\, dN(x) < \infty.$$

Каждому безгранично делимому распределению соответствует единственный набор характеристик Л. к. п. γ, σ^2, M, N, и обратно, при приведенных выше условиях на γ, σ^2, M и N по любому такому набору Л. к. п. определяет логарифм характеристич. функции нек-рого безгранично делимого распределения.

Так, для нормального распределения со средним a и дисперсией σ^2

$$\gamma = a,\ \sigma^2 = \sigma^2,\ N(x)\equiv 0,\ M(x) = 0.$$

Для распределения Пуассона с параметром λ

$$\gamma = \lambda\ 2,\ \sigma^2 = 0,\ M(x) = 0,\ N(x) = -\lambda \text{ при } x\leqslant 1,$$
$$N(x) = 0 \text{ при } x > 1.$$

Устойчивому распределению с показателем α, $0<\alpha<2$, соответствует Л. к. п. с

$$\sigma^2 = 0 \text{ и нек-рым } \gamma,\ M(x) = c_1/|x|^{\alpha},\ N(x) = -c_2/x^{\alpha},$$

где $c_i\geqslant 0$, $i=1, 2$, — постоянные $(c_1 + c_2>0)$. Л. к. п. безгранично делимого распределения было предложено П. Леви (P. Lévy, 1934). Оно является обобщением формулы А. Н. Колмогорова, найденной им в 1932 для случая, когда безгранично делимое распределение имеет конечную дисперсию. Для $\ln\varphi(\lambda)$ имеется эквивалентная Л. к. п. формула, предложенная в 1937 А. Я. Хинчиным и называемая *Леви — Хинчина каноническим представлением*. Вероятностный смысл функций N и M и область использования Л. к. п. определяются следующим: каждой безгранично делимой функции распределения $F(x)$ соответствует стохастически непрерывный однородный процесс с независимыми приращениями

$$X = \{X(t),\ 0\leqslant t < \infty\},\ X(0) = 0,$$

такой, что

$$F(x) = \mathsf{P}\{X(1) < x\}.$$

В свою очередь сепарабельный процесс X упомянутого типа имеет с вероятностью 1 выборочные траектории без разрывов второго рода, и поэтому для $b>a>0$ определена случайная величина $Y([a, b])$, равная числу элементов в множестве

$$\left\{t : a\leqslant \lim_{\tau\downarrow 0} X(t+\tau) - \lim_{\tau\downarrow 0} X(t-\tau) < b,\ 0\leqslant t\leqslant 1\right\}.$$

В этих обозначениях для функции N, соответствующей $F(x)$, имеет место следующее соотношение

$$\mathsf{E}\{Y([a, b])\} = N(b) - N(a).$$

Аналогичное соотношение имеет место и для функции M.

В терминах характеристик Л. к. п. функции распределения $\mathsf{P}\{X(1)<x\}$ легко выражаются многие свойства поведения выборочных траекторий сепарабельного процесса X. В частности, при $\sigma^2=0$

$$\lim_{x\to 0} N(x) > -\infty,\ \lim_{x\to 0} M(x) < \infty,$$

$$\gamma = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dM(x) + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dN(x),$$

почти все выборочные функции X с вероятностью 1 будут ступенчатыми функциями с конечным числом скачков на любом конечном интервале. Если $\sigma^2 = 0$ и

$$\int_{-1}^{0} |x| \, dM(x) + \int_{0}^{1} x \, dN(x) < \infty,$$

то выборочные траектории X с вероятностью 1 имеют ограниченную вариацию на любом конечном интервале. Непосредственно через характеристики Л. к. п. $\mathsf{P}\{X(1) < x\}$ определяется инфинитезимальный оператор, соответствующий процессу X, рассматриваемому как марковская случайная функция. Многие аналитич. свойства безгранично делимой функции распределения непосредственно выражаются в терминах характеристик ее Л. к. п.

Имеются аналоги Л. к. п. для безгранично делимых распределений, задаваемых на широком классе алгебраич. структур.

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1949; [2] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [4] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [5] Ито К., Вероятностные процессы, пер. с япон., т. 2, М., 1963. *Б. А. Рогозин.*

ЛЕВИ МЕТРИКА — метрика L в пространстве $\mathcal{F}$ функций распределения одномерных случайных величин:

$$L \equiv L(F, G) = \inf\{\varepsilon : F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant G(x) \leqslant F(x+\varepsilon) + \varepsilon, \ \forall x\}$$

для любых $F, G \in \mathcal{F}$. Введена П. Леви (см. [1]). Если между графиками функций F и G вписывать квадраты со сторонами, параллельными осям координат (в точках разрыва графики дополняются вертикальными отрезками), то сторона наибольшего из них равна L.

Л. м. можно рассматривать как частный случай *Леви — Прохорова метрики*. Определение Л. м. переносится на множество M всевозможных неубывающих функций, заданных на $\mathbb{R}^1$ (при этом допускаются бесконечные значения метрики).

Важнейшие свойства Л. м.:

1) Л. м. индуцирует в $\mathcal{F}$ слабую топологию. Метрич. пространство $(\mathcal{F}, L)$ является сепарабельным и полным. Сходимость последовательности функций из M в метрике L эквивалентна полной сходимости.

2) Если $F \in M$ и

$$F_{-1}(x) = \inf\{t : F(t) < x\},$$

то для любых $F, G \in M$

$$L(F, G) = L(F_{-1}, G_{-1}).$$

3) Регулярность Л. м.: для любых $F, G, H \in \mathcal{F}$

$$L(F * H, G * H) \leqslant L(F, G),$$

следствием этого свойства является свойство полуаддитивности:

$$L(F_1 * F_2, G_1 * G_2) \leqslant L(F_1, G_1) + L(F_2, G_2)$$

и «неравенство сглаживания»:

$$L(F, G) \leqslant L(F * H, G \times H) + 2L(E, H)$$

(E — распределение, вырожденное в нуле).

4) Если $\alpha_k \geqslant 0$, $F_k, G_k \in \mathcal{F}$, то

$$L\left(\sum \alpha_k F_k, \sum \alpha_k G_k\right) \leqslant \max\left(1, \sum \alpha_k\right) \max L(F_k, G_k).$$

5) Если $\beta_r(F)$, $r > 0$,— абсолютный момент распределения F, то

$$L(F, E) \leqslant \{\beta_r(F)\}^{r/(r+1)}.$$

6) Л. м. на M связана со средней метрикой

$$\rho_1 = \rho_1(F, G) = \int |F(x) - G(x)|\, dx$$

неравенством

$$L^2 \leqslant \rho_1.$$

7) Л. м. на M связана с равномерной метрикой

$$\rho = \rho(F, G) = \sup_x |F(x) - G(x)|$$

соотношениями

$$L \leqslant \rho \leqslant L + \min\{Q_F(L), Q_G(L)\}, \qquad (*)$$

где

$$Q_F(x) = \sup_t |F(t+x) - F(t)|$$

($Q_F(x)$ — *концентрации функция*, если $F \in \mathcal{F}$). В частности, если одна из функций, напр. G, имеет равномерно ограниченную производную, то

$$\rho \leqslant (1 + \sup_x G'(x))\, L.$$

Следствием (*) является теорема Пойа — Гливенко об эквивалентности слабой и равномерной сходимости в том случае, когда предельное распределение непрерывно.

8) Если $F_{a,\sigma}(x) = F(\sigma x + a)$, где a и $\sigma > 0$ — константы, то для любых $F, G \in \mathcal{F}$

$$L(\sigma F, \sigma G) \leqslant \sigma L(F_{a,\sigma}, G_{a,\sigma})$$

(в частности, Л. м. инвариантна относительно сдвига распределений) и

$$\lim_{\sigma \to 0} L(F_{a,\sigma}, G_{a,\sigma}) = \rho(F, G).$$

9) Если f, g — характеристич. функции, соответствующие распределениям F, G, то для любых $T > e$

$$L(F, G) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^T |f(t) - g(t)|\, \frac{dt}{t} + 2e\, \frac{\ln T}{T}.$$

Понятие Л. м. можно распространить на случай распределений в $\mathbb{R}^n$.

Лит.: [1] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937; 2 éd., P., 1954; [2] Золотарев В. М., Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1971, т. 112, с. 224—31; [3] Золотарев В. М., Сенатов В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, № 2, с. 239—50; [4] Линник Ю. В., Петровский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972.

В. М. Золотарев.

ЛЕВИ НЕРАВЕНСТВО — неравенство для распределения максимума сумм независимых случайных величин, центрированных соответствующими медианами. Именно, пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ и mX — медиана случайной величины X, тогда для любого x имеет место Л. н.

$$\mathsf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} (S_k - m(S_k - S_n)) \geqslant x\} \leqslant 2\mathsf{P}\{S_n \geqslant x\}$$

и

$$\mathsf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k - m(S_k - S_n)| \geqslant x\} \leqslant 2\mathsf{P}\{|S_n| \geqslant x\}.$$

Непосредственным следствием этих неравенств являются Л. н. для симметрично распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$:

$$\mathsf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant x\} \leqslant 2\mathsf{P}\{S_n \geqslant x\}$$

$$\mathsf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant x\} \leqslant 2\mathsf{P}\{|S_n| \geqslant x\}.$$

Л. н. можно рассматривать как обобщение *Колмогорова неравенства*. Л. н. было получено П. Леви [1]

при исследовании общих проблем сходимости распределений сумм независимых случайных величин к устойчивым законам. Существует обобщение Л. н. для мартингалов.

Лит.: [1] Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, P., 1937; 2 éd., P., 1954; [2] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962.

А. В. Прохоров.

ЛЕВИ ПРОБЛЕМА — проблема геометрич. характеризации областей данного аналитич. пространства, являющихся пространствами Штейна; была поставлена Э. Леви [1] для областей аффинного пространства $\mathbb{C}^n$ в следующей форме. Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$, каждая граничная точка ζ к-рой обладает следующим свойством: существуют окрестность U точки ζ в $\mathbb{C}^n$ и голоморфная функция в $U \cap D$, не продолжаемая голоморфно в точку ζ. Является ли D *голоморфности областью*? Указанное свойство равносильно любому из следующих утверждений об области D: 1) ни для какой $\zeta \in \partial D$ не существует последовательности ограниченных голоморфных поверхностей S_ν, сходящейся к голоморфной поверхности S, причем $\partial S_\nu \to \partial S$, $\bar{S}_\nu$, $\partial S \subset D$, $\zeta \in S$; 2) область D псевдовыпукла, т. е. — $\log \rho(z, \partial D)$, $z \in D$, где ρ — евклидово расстояние,— плюрисубгармоничная функция в D; 3) D — псевдовыпуклое многообразие, т. е. в D существует плюрисубгармонич. функция, стремящаяся к $+\infty$ при приближении к ∂D. Л. п. для $\mathbb{C}^n$ была положительно решена в 1953—54 независимо К. Ока (K. Oka), Х. Бремерманом (H. Bremermann) и Ф. Норге (F. Norguet), причем К. Ока решил проблему в более общей постановке, относящейся к *наложения областям* над $\mathbb{C}^n$ (см. [2] — [6]). Результат К. Ока обобщается на области наложения над любым многообразием Штейна: если такая область D является псевдовыпуклым многообразием, то D — многообразие Штейна. Л. п. положительно решена и в ряде других случаев, напр. для некомпактных областей наложения над проективным пространством $\mathbb{CP}^n$ или над кэлеровым многообразием, на к-ром существует строго плюрисубгармонич. функция (см. [2]), для областей в кэлеровом многообразии с положительной голоморфной бисекционной кривизной [7]. В то же время известны примеры псевдовыпуклых многообразий и областей, не являющихся многообразиями Штейна и даже не голоморфно выпуклых. Необходимым и достаточным условием штейновости комплексного пространства является его сильная псевдовыпуклость (см. *Псевдовыпуклость и псевдовогнутость*). Далее, сильно псевдовыпуклая область любого комплексного пространства голоморфно выпукла и является собственной модификацией некоторого пространства Штейна (см. [2], [4]).

Л. п. может быть поставлена также для областей D в бесконечномерном топологич. комплексном векторном пространстве E. Если E локально выпукло и D — область голоморфности, то D псевдовыпукла, т. е. в D существует плюрисубгармонич. функция, стремящаяся к $+\infty$ при приближении к ∂D. Обратная теорема неверна даже в банаховых пространствах, но доказана для банаховых пространств со счетным базисом и ряда других классов пространств E (см. [2]).

Лит.: [1] Levi F. E., «Ann. mat. pura ed appl.», 1911, v. 18, p. 69—79; [2] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 125—51; 1977, т. 15, с. 93—171; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [5] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963; [6] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2 — Функции нескольких переменных, М., 1976; [7] Suzuki O., «Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.», 1976, v. 12, p. 439—45.

А. Л. Онищик.

ЛЕВИ УСЛОВИЕ — поддающееся эффективной проверке условие псевдовыпуклости в смысле Леви областей комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, предложенное Э. Леви [1] и состоящее в следующем. Пусть область

D в окрестности $U\zeta$ граничной точки $\zeta\in\partial D$ задана условием

$$D\cap U\zeta=\{z=(z_1,\ \ldots,\ z_n)\in U\zeta;\ \varphi(z)=\varphi(z,\ \overline{z})<0\},$$

где действительная функция φ принадлежит классу $C^2(U\zeta)$ и $\operatorname{grad}\varphi(\zeta)\neq 0$. Тогда, если область D псевдовыпукла в точке ζ в смысле Леви, то неотрицателен (комплексный) гессиан

$$H(\zeta;\ \varphi)(a,\ \overline{a})=\sum_{j,\ k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\,\partial\overline{z}_k}(\zeta)\,a_j\overline{a}_k\geqslant 0 \qquad (1)$$

при всех $a=(a_1,\ \ldots,\ a_n)\in\mathbb{C}^n$, комплексно ортогональных $\operatorname{grad}\varphi(\zeta)$, т. е. таких, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_k}(\zeta)\,a_k=0. \qquad (2)$$

Обратно, если в точке $\zeta\in\partial D$ выполнено условие

$$H(\zeta;\ \varphi)(a,\ \overline{a})>0 \qquad (3)$$

при всех $a\neq 0$, удовлетворяющих условию (2), то область D псевдовыпукла в смысле Леви в точке ζ.

При $n=2$ в приведенных формулировках неравенства (1), (3) можно заменить соответственно еще более простыми равносильными неравенствами $L(\varphi)(\zeta)\geqslant 0$, $L(\varphi)(\zeta)>0$, где

$$L(\varphi)=-\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}_2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\,\partial\overline{z}_1} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\overline{z}_1\,\partial z_2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_1\,\partial\overline{z}_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_2\,\partial\overline{z}_2} \end{vmatrix}$$

— определитель Леви функции $\varphi(z)$.

Л. у. (1) — (3) обобщается также для областей на комплексных многообразиях (см. [4]).

Лит.: [1] Levi E. E., «Ann. mat. pura ed appl.», 1910, v. 17, p. 61—87; 1911, v. 18, p. 69—79; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976; [4] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969.

Е. Д. Соломенцев.

ЛЕВИ — КРАМЕРА ТЕОРЕМА: если сумма двух независимых непостоянных случайных величин нормально распределена, то и каждое из слагаемых нормально распределено; высказана П. Леви [1] и доказана Г. Крамером [2]. Эквивалентные формулировки: 1) если композиция двух собственных распределений является нормальным распределением, то и каждое из них является нормальным распределением; 2) если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — характеристич. функции и

$$\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)=\exp(-\gamma t^2+i\beta t),$$
$$\gamma\geqslant 0,\ -\infty<\beta<\infty, \qquad (*)$$

то

$$\varphi_j(t)=\exp(-\gamma_j t^2+i\beta_j t),\ \gamma_j\geqslant 0,\ -\infty<\beta_j<\infty.$$

В формулировке 1) Л.— К. т. допускает обобщение на композицию двух знакопеременных мер с ограничениями на отрицательную вариацию; в формулировке 2) — на случай, когда вместо условия (*) рассматривается условие

$$\prod_{j=1}^{m}\{\varphi_j(t)\}^{\alpha_j}=\exp(-\gamma t^2+i\beta t),\ \gamma\geqslant 0,\ -\infty<\beta<\infty,\quad t\in E,$$

где $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_m(t)$ — характеристич. функции, $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m$ — положительные числа, E — множество действительных чисел с точкой сгущения в нуле. Имеются обобщения Л.— К. т. на случайные величины в евклидовых пространствах и в локально компактных абелевых группах.

Л.—К. т. обладает свойством устойчивости, т. е. близость распределения суммы независимых случайных величин к нормальному влечет близость распределения каждого из слагаемых к нормальному; известны количественные оценки устойчивости.

Теоремы, аналогичные Л.— К. т., получены для распределения Пуассона, для композиции распределения Пуассона и нормального, для других классов безгранично делимых распределений (см. [6]).

Лит.: [1] Lévy P., «J. math. pures et appl.», 1935, t. 14, p. 347—402; [2] Cramér H., «Math. Z.», 1936, Bd 41, S. 405—14; [3] Райков Д. А., «Докл. АН СССР», 1937, т. 14, с. 9—12; [4] Линник Ю. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, с. 34—59; [5] Сапогов Н. А., «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ. и астр.», 1959, № 19, с. 78—105; [6] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [7] Фельдман Г. М., «Теория вероятн. и ее примен.», 1977, т. 22, вып. 1, с. 136—43.

И. В. Островский.

ЛЕВИ — МАЛЬЦЕВА РАЗЛОЖЕНИЕ — представление конечномерной алгебры Ли L над полем характеристики нуль в виде прямой суммы (векторных пространств) ее радикала R (максимального разрешимого идеала в L) и нек-рой полупростой подалгебры Ли $S \subset L$. Получено Э. Леви [1] и А. И. Мальцевым [2]. Теорема Леви — Мальцева утверждает, что такое разложение $L = R + S$ всегда существует; при этом подалгебра S определена однозначно с точностью до автоморфизма вида $\exp(adz)$, где adz — внутреннее дифференцирование алгебры Ли L, определяемое нек-рым элементом z нильрадикала (наибольшего нильпотентного идеала) алгебры L. Если G — связная односвязная вещественная группа Ли, то в группе G существуют замкнутые односвязные аналитич. подгруппы R и S, где R — максимальный связный замкнутый разрешимый нормальный делитель в G, S — полупростая подгруппа в G, $R \cap S = \{e\}$ и отображение $(r, s) \to rs$, $r \in R$, $s \in S$, является аналитич. изоморфизмом многообразия $R \times S$ на G; разложение $G = RS = SR$ также наз. в этом случае Л.— М. р.

Лит.: [1] Levi E. E., «Atti Accad. sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur.», 1905, v. 40, p. 3—17; [2] Мальцев А. И., «Докл. АН СССР», 1942, т. 36, № 2, с. 46—50; [3] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [4] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., 1972; [5] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976.

А. И. Штерн.

ЛЕВИ — ПРОХОРОВА МЕТРИКА — метрика в пространстве $\mathfrak{M}$ конечных борелевских мер на метрич. пространстве (U, d), определяемая равенством:

$$\pi(P, Q) = \inf\{\varepsilon: P(A) \leqslant Q(A^\varepsilon) + \varepsilon,\ Q(A) \leqslant P(A^\varepsilon) + \varepsilon;\ \forall A \subset \mathfrak{B}\},$$

где $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра борелевских множеств из (U, d) и

$$A^\varepsilon = \{x: d(x, y) < \varepsilon,\ y \in A\}.$$

Л.— П. м. введена Ю. В. Прохоровым [1] как обобщение *Леви метрики*. Величина π не изменится, если в ее определении оставить одно из двух неравенств и заменить $\mathfrak{B}$ системой всех открытых или всех замкнутых множеств из $\mathfrak{B}$ (см. [2]).

Важнейшие свойства Л.— П. м.

1) Метрич. пространство $(\mathfrak{M}, \pi)$ сепарабельно тогда и только тогда, когда сепарабельно (U, d).

2) Пространство (U, d) полно, если полно пространство $(\mathfrak{M}, \pi)$. Обратное верно, если меры из $\mathfrak{M}$ имеют сепарабельные носители.

3) В пространстве $\mathfrak{M}_0$ Л.— П. м обладает свойствами, аналогичными свойствам метрики Леви. Именно, свойством регулярности 3) и его следствиями, свойствами 4), 5), свойством 6) (в случае $U = \mathbb{R}^1$), частично свойством 7) (именно, $\pi \leqslant V$), а также аналогом свойства 8), если (U, d) является линейным нормированным пространством: если $P_{a,\sigma}(A) = P(\sigma A + a)$, где $\sigma > 0$,

$a \in U$, то для любых $P, Q \in \mathfrak{M}$

$$\lambda(\sigma P,\ \sigma Q) \leqslant \sigma\lambda(P_{a,\sigma},\ Q_{a,\sigma}),$$
$$\lim_{\sigma \to 0} \lambda(P_{a,\sigma},\ Q_{a,\sigma}) = \operatorname{var}(P,\ Q).$$

4) В случае $U = R^k$ Л.— П. м. в $\mathfrak{M}_0$ оценивается с помощью характеристич. функций f, g, соответствующих мерам P, Q (см. [3], [4]).

5) Л.— П. м. является минимальной метрикой по отношению к расстоянию по вероятности

$$\varkappa(X, Y) = \inf\{\varepsilon\colon P\{d(X, Y) > \varepsilon\} < \varepsilon\}$$

см. [5]).

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., «Теория вероятн. и ее ...», 1956, т. 1, в. 2, с. 177—238; [2] Dudley R. M., «Ann. Math. Statistics», 1968, v. 39, № 5, p. 1563—72; [3] Юринский В. В., «Теория вероятн. и ее примен.», 1975, т. 20, в. 1, с. 3—12; [4] Абрамов В. А., там же, 1976, т. 21, в. 2, с. 406—410; [5] Strassen V., «Ann. Math. Statistics», 1965, v. 36, № 2, p. 423—39; [6] Биллингслей П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977. *В. М. Золотарев.*

ЛЕВИ — ХИНЧИНА КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — формула для логарифма характеристич. функции $\ln\varphi(\lambda)$ безгранично делимого распределения:

$$\ln\varphi(\lambda) = i\gamma\lambda + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x),$$

где подинтегральная функция при $x=0$ равна $-\lambda^2/2$ и характеристики Л.— Х. к. п. γ и G удовлетворяют следующим условиям: γ — действительное число, $G(x)$ — неубывающая непрерывная слева функция ограниченной вариации.

Л.—Х. к. п. было предложено А. Я. Хинчиным (1937) и эквивалентно формуле, предложенной несколько ранее П. Леви (P. Lévy, 1934) и называемой *Леви каноническим представлением*. Каждому безгранично делимому распределению соответствует единственный набор характеристик Л.— Х. к. п. γ и G, и обратно, при условиях на γ и G, приведенных выше, по любому такому набору Л.— Х. к. п. определяет логарифм характеристич. функции нек-рого безгранично делимого распределения. Для слабой сходимости последовательности безгранично делимых распределений, определяемых характеристиками γ_n, G_n, $n=1, 2, \ldots$, к распределению (которое необходимо будет безгранично делимым) с характеристиками γ и G необходимо и достаточно, чтобы $\lim\gamma_n = \gamma$ и G_n вполне сходились к G при $n \to \infty$.

Лит. см. при ст. *Леви каноническое представление.*

Б. А. Рогозин.

ЛЕВИ-ЧИВИТА СВЯЗНОСТЬ — *аффинная связность* на римановом пространстве M, к-рая является *римановой связностью* (т. е. связностью, относительно к-рой метрич. тензор ковариантно постоянный) и имеет нулевое кручение. Аффинная связность на M определяется этими условиями однозначно, так что каждое риманово пространство M обладает единственной Л. Ч. с. Впервые это понятие возникло в 1917 у Т. Леви-Чивита [1] в виде понятия *параллельного перенесения* вектора в римановой геометрии. Сама идея восходит еще к Ф. Миндингу (F. Minding), к-рый в 1837 ввел понятие развертки линии на поверхности.

Относительно локальной координатной системы в M, где $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, Л.-Ч. с. на M определяется формами $\omega_j^i = \left\{ {i \atop jk} \right\} dx^k$, где

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right);$$

ее тензор кривизны R^i_{jkl} определяется формулой

$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = \frac{1}{2} R^i_{jkl} dx^k \wedge dx^l.$$

Пусть $R_{ij,\,kl}=g_{im}R^m_{jkl}$, тогда

$$R_{ij,\,kl}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\,\partial x^k}\right\}+$$
$$+g_{pq}\left(\left\{\begin{matrix}p\\il\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}q\\jk\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}p\\ik\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}q\\jl\end{matrix}\right\}\right);$$

при этом:

$$R_{ij,\,kl}=-R_{ij,\,lk};\quad R_{ij,\,kl}=R_{kl,\,ij};$$
$$R_{ij,\,kl}+R_{ik,\,lj}+R_{il,\,jk}=0.$$

Тензор кривизны Л.-Ч. с. имеет $n^2(n^2-1)/12$ существенных компонент, где $n=\dim M$. Напр., при $n=2$ имеется только одна существенная компонента $R_{12,\,12}=K\det|g_{ij}|$, где K — гауссова кривизна.

Если риманово пространство M изометрически погружено в евклидово пространство E_N, то его Л.-Ч. с. характеризуется следующим образом: для произвольных двух векторных полей X, Y на $M\subset E_N$ ковариантная производная $(\nabla_Y X)_x$ в точке $x\in M$ является ортогональной проекцией на касательную плоскость $T_x(M)\subset E_N$ обычного дифференциала $(dYX)_x$ поля X в E_N относительно вектора $Y_x\in T_x(M)$. Другими словами, отображение соседней бесконечно близкой касательной плоскости на исходную совершается путем ортогонального проектирования.

Лит.: [1] Levi-Civita T., «Rend. Circolo math. Palermo», 1917, v. 42, p. 173—205; [2] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [3] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967. *Ю. Г. Лумисте.*

ЛЁВНЕРА МЕТОД, метод Лёвнера параметрических представлений однолистных функций, параметрический метод Лёвнера,— метод в теории однолистных функций, заключающийся в использовании *Лёвнера уравнения* для решения экстремальных задач. Метод был предложен К. Лёвнером [1]. Он основан на том, что множество функций $f(z)$, $f(0)=0$, регулярных и однолистных в круге $E=\{z:|z|<1\}$ и отображающих E на области типа (s), получаемые из круга $|w|<1$ проведением разреза вдоль части нек-рой жордановой дуги, исходящей из точки окружности $|w|=1$ и не проходящей через точку $w=0$, плотно (в *топологии* равномерной сходимости функций внутри круга E) во всем семействе функций $f(z)$, $f(0)=0$, регулярных и однолистных в E и таких, что $|f(z)|<1$ в E. Связывая длину удаляемой дуги с параметром t, удается установить, что функция $w=f(z)$, $f(0)=0$, однолистно отображающая E на область D типа (s), является решением дифференциального уравнения (см. *Лёвнера уравнение*)

$$\frac{\partial f(z,\,t)}{\partial t}=-f(z,\,t)\,\frac{1+k(t)\,f(z,\,t)}{1-k(t)\,f(z,\,t)},\qquad(*)$$

$f(z,\,t_0)=f(z)$, удовлетворяющим начальному условию $f(z,\,0)=z$. Здесь $t\in[0,\,t_0]$, $k(t)$ — непрерывная комплекснозначная функция на промежутке $[0,\,t_0]$, соответствующая области D, причем $|k(t)|=1$. К. Лёвнер использовал этот метод для получения точных оценок коэффициентов c_3 и b_n, $n=2,\,3,\ldots$, разложений

$$w=f(z)=z+\sum\nolimits_{n=2}^{\infty}c_nz^n$$

и

$$z=f^{-1}(w)=w+\sum\nolimits_{n=2}^{\infty}b_nw^n$$

в классе S функций $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, регулярных и однолистных в E.

Л. м. был использован (см. [3]) для получения основных результатов теории однолистных функций (теорем искажения, взаимного роста, теорем вращения).

Пусть S' — подкласс функций $f(z)$ класса S, имеющих в E представление

$$f(z) = \lim_{t \to \infty} e^t f(z, t),$$

где $f(z, t)$ как функция от z регулярна и однолистна в E, $|f(z, t)|<1$ в E, $f(0, t)=0$, $f'_z(0, t)>0$, а как функция от t, $0<t<\infty$, является решением дифференциального уравнения (*), удовлетворяющим начальному условию $f(z, 0)=z$; $k(t)$ в уравнении (*) — любая комплекснозначная функция, кусочно непрерывная и по модулю равная единице на промежутке $[0, \infty)$. Для того чтобы оценить какую-либо величину в классе S, достаточно оценить ее в подклассе S', поскольку любую функцию $f(z)$ класса S можно аппроксимировать функциями $f_n(z)$, $f_n(0)=0$, $f'_n(0)>0$, каждая из к-рых однолистно отображает E на плоскость w с разрезом по жордановой дуге, уходящей в ∞ и не проходящей через $w=0$, а значит и функциями $f_n(z)$, $f'_n(0) \in S'$. При этой аппроксимации оцениваемые величины для аппроксимирующих функций сходятся к той же величине, что и для функции $f(z)$.

Л. м. используется в работах по теории однолистных функций (см. [3] с. 536—37); он часто приводит к успеху при получении явных оценок, но, как правило, не обеспечивает описания всех экстремальных функций и полной информации об их единственности. Для полного решения экстремальных задач Л. м. обычно сочетают с вариационным методом (см. [3] с. 538—539 и *Вариационно-параметрический метод*). Л. м. распространен на двусвязные области. Получено обобщенное уравнение типа уравнения Лёвнера для многосвязных областей, для автоморфных функций (см. [4]).

Лит.: [1] Löwner K., «Math. Ann.», 1923, Bd 89, S. 103—21; [2] Peschl E., «J. reine und angew. Math.», 1936, Bd 176, S. 61—94; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [4] Александров И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976. *Е. Г. Голузина.*

ЛЁВНЕРА УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dw}{dt} = -w \frac{1+e^{i\alpha(t)}w}{1-e^{i\alpha(t)}w},$$

где $\alpha(t)$ — действительная непрерывная на интервале $-\infty<t<\infty$ функция. Обобщением Л. у. является уравнение Куфарева — Лёвнера (у. К.— Л.):

$$\frac{dw}{dt} = -wP(w, t),$$

где $P(w, t)$, $|w|<1$, $-\infty<t<\infty$,— измеримая по t при фиксированном w и регулярная по w функция с положительной действительной частью, нормированная условием $P(0, t)=1$. Л. у. и у. К. - Л., возникшие в теории однолистных функций, лежат в основе параметрич. метода исследования экстремальных проблем конформного отображения.

Решение $w(t, z, \tau)$, $w(\tau, z, \tau)=z$, у. К.— Л., рассматриваемое как функция начального значения z, при всяком $t>\tau$ конформно отображает круг $|z|<1$ на однолистную односвязную область, принадлежащую кругу $|w|<1$. По формуле

$$f(z) = a + b \lim_{t \to \infty} e^t w(t, z, 0)$$

при надлежащем выборе $P(w, t)$ в у. К.— Л. и комплексных постоянных a, b можно получить произвольную регулярную однолистную функцию в круге $|z|<1$. Л. у. порождает на этом пути, в частности, конформные отображения круга на области, получаемые из всей плоскости проведением разреза вдоль нек-рой дуги Жордана (см. [1] — [4]).

Дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial \tau} = z\,\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial z}\,P(z,\tau),$$

к-рому удовлетворяет функция

$$f(z,\tau) = \lim_{t\to\infty} e^{t}w(t,z,\tau),$$

также называют у. К.— Л.

Л. у. было установлено К. Лёвнером [1]; у. К.— Л. впервые было получено П. П. Куфаревым (см. [5]).

Лит.: [1] Löwner K., «Math. Ann.», 1923, Bd 89, № 2, S. 103—21; [2] Куфарев П. П., «Ученые зап. Томск. ун-та», 1947, т. 5, с. 20—21; [3] Pommerenke C., «J. reine und angew. Math.», 1965, Bd 218, S. 159—73; [4] Гутлянский В. Я., «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, № 4, с. 750—53; [5] Куфарев П. П., «Матем. сб.», 1943, т. 13, № 1, с. 87—118; [6] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966. *В. Я. Гутлянский.*

ЛЕЖАНДРА МНОГОЧЛЕНЫ, сферические многочлены,— многочлены, ортогональные на сегменте $[-1,1]$ с единичным весом $\varphi(x)=1$. Стандартизованные Л. м. определяются *Родрига формулой*

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

и имеют представление

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!\,(n-2k)!}\,x^{n-2k}.$$

Наиболее употребительны формулы

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\,xP_n(x) - nP_{n-1}(x),$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x);\quad P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n,$$

$$(1-x^2)\,P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - xnP_n(x),$$

$$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)\,P_n(x).$$

Л. м. можно определить как коэффициенты разложения производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n,$$

где ряд в правой части сходится, если $x\in[-1,1]$.

Несколько первых стандартизованных Л. м. имеют вид

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=(3x^2-1)/2,$$

$$P_3(x)=(5x^3-3x)/2,\quad P_4(x)=(35x^4-30x^2+3)/8,$$

$$P_5(x)=(63x^5-70x^3+15x)/8,$$

$$P_6(x)=(231x^6-315x^4+105x^2-5)/16.$$

Л. м. порядка n удовлетворяет дифференциальному уравнению (уравнению Лежандра)

$$(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\,\frac{dy}{dx} + n(n+1)\,y = 0,$$

к-рое появляется при решении уравнения Лапласа в сферич. координатах методом разделения переменных. Ортонормированные Л. м. имеют вид

$$\hat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\;P_n(x),\quad n=0,1,2,\ldots,$$

и допускают равномерную и весовую оценки

$$|\hat{P}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2n+1}{2}},\quad x\in[-1,1],$$

$$(1-x^2)^{1/4}\,|\hat{P}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2n+1}{\pi n}},\quad x\in[-1,1].$$

Ряды Фурье по Л. м. внутри интервала $(-1,1)$ аналогичны тригонометрич. рядам Фурье; есть теорема о равносходимости этих двух рядов, к-рая означает, что ряд Фурье — Лежандра функции $f(x)$ в точке

$x \in (-1, 1)$ сходится тогда и только тогда, когда в точке $\theta = \arccos x$ сходится тригонометрич. ряд Фурье функции

$$F(\theta) = (\sin\theta)^{1/2} f(\cos\theta).$$

В окрестности концов положение иное, ибо последовательность $\{\hat{P}_n(\pm 1)\}$ возрастает со скоростью $\sqrt{n}$. Если функция $f(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 1/2$, то ряд Фурье — Лежандра сходится к функции $f(x)$ равномерно на всем сегменте $[-1, 1]$. При условии $\alpha = 1/2$ этот ряд, вообще говоря, расходится в точках $x = \pm 1$.

Эти многочлены введены А. Лежандром [1].

Лит.: [1] Legendre A. M., «Mémoires de mathématique et de physique, présentes à l'Académie royale des sciences par divers savants», 1785, t. 10, p. 411—34; [2] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, пер. с англ., М., 1952; см. также лит. при статье *Ортогональные многочлены.*

П. К. Суетин.

ЛЕЖАНДРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — 1) Преобразование математич. анализа, осуществляющее двойственность между объектами в дуальных пространствах (наряду с проективной двойственностью в аналитич. геометрии и полярной двойственностью в выпуклой геометрии). Пусть $f : A \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, рассматриваемая на открытом множестве A нормированного пространства X и обладающая тем свойством, что отображение $x \to f'(x)$ (здесь $f'(x)$ — *Фреше производная f*) взаимно однозначно отображает A на множество $B \subset X^*$. Тогда Л. п. f — это функция на B, определенная формулой

$$f^*(x^*) = \langle x^*, (f')^{-1}(x^*)\rangle - f((f')^{-1}(x^*)). \qquad (1)$$

В случае, если f — функция на $\mathbb{R}^n$ и при этом определитель $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)$ отличен от нуля в области A, Л. п. задается формулами

$$f'(x) = y, \quad f^*(y) = \langle x, f'(x)\rangle - f(x); \qquad (1')$$

здесь

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i, \quad f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right).$$

Преобразование $x \to f^*(f'(x))$ встречается еще у Г. Лейбница (G. Leibnitz), в общем виде определено А. Лежандром (A. Legendre, 1789), хотя ранее рассматривалось также Л. Эйлером (L. Euler, 1776).

В случае, если f — конечномерная функция, являющаяся гладкой, строго выпуклой и растущей на бесконечности быстрее линейной функции, то Л. п. можно определить так:

$$f^*(x^*) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} (\langle x^*, x\rangle - f(x)). \qquad (2)$$

Выражение (2) с заменой max на sup было положено (см. [2]) в основу теории двойственности выпуклых функций (см. *Сопряженная функция*)

Примеры. Л. п. функции

$$f_p(x) = \frac{|x|^p}{p}, \quad 1 < p < \infty,$$

одного переменного будет функция

$$f_{p'}(y) = \frac{|y|^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1;$$

Л. п. функции $(x, x)/2$ в гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ будет функция $(y, y)/2$.

Л. п., основанное на замене переменных $x \to y = f'(x)$, является частным случаем *прикосновения преобразования*; сущность Л. п. заключается в возможности двойственного описания поверхности в пространстве — как множества точек $(x, f(x))$ и как огибающей семейства ее касательных плоскостей, задаваемых парой $(x^*,$

$<x^*, \cdot> - f^*(x^*))$, состоящей из линейного функционала x^* и аффинной касательной функции $x \to <x^*, x> - f^*(x^*)$.

Л. п. играет важную роль в анализе, особенно в выпуклом анализе (см. [1], [2], [4]), в теории дифференциальных уравнений, в вариационном исчислении (см. [6]), в классич. механике, термодинамике, теории упругости и других разделах математич. физики. Так, применение Л. п. к решению y дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ переводит его в решение Y уравнения $F(Y', XY' - Y, X) = 0$, где $X = y'(x)$, $Y(X) = -y^*(X)$, к-рое иногда интегрируется проще исходного. Применение Л. п. к *лагранжиану* задачи классического вариационного исчисления переводит его в *Гамильтона функцию*. При этом система уравнений Эйлера (в вариационном исчислении) и уравнения Лагранжа (в классич. механике) переходят в эквивалентную систему канонич. уравнений. В термодинамике Л. п. осуществляет переход от одних функций состояния к другим, напр. от удельного объема и энтропии к температуре и давлению.

Лит.: [1] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, М., 1970; [2] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., 3 изд., т. 1, М.—Л., 1936; [3] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [4] Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, пер. с англ., М., 1973; [5] Fenchel W., «Canad. J. Math.», 1949, v. 1, p. 73—77; [6] Carathéodory C., Variations rechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Lpz.— B., 1935. *В. М. Тихомиров.*

2) Интегральное преобразование вида

$$f(n) = T\{F(x)\} = \int_{-1}^{1} P_n(x) F(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $P_n(x)$ — *Лежандра многочлен* порядка n. Формула обращения имеет вид

$$T^{-1}\{f(n)\} = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) P_n(x) f(n),$$

$$-1 < x < 1,$$

если ряд сходится. Л. п. сводит дифференциальную операцию

$$\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx}$$

к алгебраической по формуле

$$T\left\{\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{dF(x)}{dx}\right\} = -n(n+1) f(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для Л. п. имеет место теорема о свертке: если

$$T\{F_i(x)\} = f_i(n), \quad i = 1, 2,$$

то

$$f_1(n) f_2(n) = T\{h(x)\},$$

где

$$h(x) = \frac{1}{\pi}\int\int_{E(x)} f_1(\xi) f_2(\xi)(1 - x^2 - \xi^2 - \eta^2 + 2x\xi\eta)^{-1/2}\, d\xi\, d\eta,$$

$E(x)$ — внутренность эллипса $\xi^2 + \eta^2 - 2x\xi\eta = 1 - x^2$. Л. п. является частным случаем *Якоби преобразования*.

Лит.: [1] Tranter C. J., «Quart. J. Math.», 1950, v. 1, p. 1—8; [2] Итоги науки. Математический анализ, 1966, М., 1967, с. 7—82. *Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.*

ЛЕЖАНДРА СИМВОЛ — арифметическая функция чисел p и a, определенная для простых нечетных p и целых a, не делящихся на p. Л. с. обозначается $\left(\frac{a}{p}\right)$. Л. с. $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, если сравнение $x^2 \equiv a \pmod p$ разрешимо; в противном же случае $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$. Иногда Л. с. доопределяют и для чисел a, делящихся на p, полагая, что в

этом случае $\left(\frac{a}{p}\right)=0$. Л. с. обладает следующими свойствами:

1) если $a\equiv b \pmod p$, то $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{p}\right)=1$;

3) $\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$;

4) $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$;

5) $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2}$;

6) $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}$;

7) если p и q — простые нечетные, то

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{(p-1)/2\cdot(q-1)/2}.$$

Последний факт, впервые доказанный К. Гауссом (C. Gauss, 1796), носит название квадратичного закона взаимности. Перечисленные свойства позволяют легко вычислять Л. с., не прибегая к решению сравнений. Напр.,

$$\left(\frac{438}{593}\right)=\left(\frac{2}{593}\right)\left(\frac{3}{593}\right)\left(\frac{73}{593}\right)=$$
$$=+1\left(\frac{593}{3}\right)\left(\frac{593}{73}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{73}\right)=-1\left(\frac{3}{73}\right)^2=-1.$$

Еще более облегчает вычисление Л. с. использование *Якоби символа*. При фиксированном p Л. с. является действительным характером мультипликативной группы классов вычетов по модулю p.

Введен А. Лежандром (A. Legendre, 1785).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972. *Ю. В. Нестеренко.*

ЛЕЖАНДРА ТЕОРЕМА — 1) Неопределенное (диофантово) уравнение

$$ax^2+by^2+cz^2=0,$$

коэффициенты к-рого a, b и c — попарно взаимно простые целые рациональные числа, свободные от квадратов и не все одного знака, имеет ненулевое рациональное решение тогда и только тогда, когда разрешимы все три сравнения:

$$x^2\equiv -bc \pmod{|a|},$$
$$x^2\equiv -ca \pmod{|b|},$$
$$x^2\equiv -ab \pmod{|c|}.$$

К Л. т. сводится вопрос о представлении нуля произвольной тернарной квадратичной формой с рациональными коэффициентами.

Доказана А. Лежандром (A. Legendre, 1785).

Лит.: [1] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972, гл. 1, § 7. *Ю. В. Нестеренко.*

2) Сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых углов.

3) Если в одном треугольнике сумма углов равна двум прямым углам, то она равна двум прямым углам во всяком другом треугольнике.

Теоремы 2), 3) были доказаны А. Лежандром (A. Legendre, 1800, 1833) при попытках обосновать постулат Евклида о параллельных. Аналогичные утверждения были установлены Дж. Саккери (G. Saccheri, см. *Саккери четырехугольник*).

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.—Л., 1949; [2] Погорелов А. В., Основания геометрии, 3 изд., М., 1968. *А. Б. Иванов.*

ЛЕЖАНДРА УРАВНЕНИЕ — см. *Лежандра функции.*

ЛЕЖАНДРА УСЛОВИЕ — необходимое условие для решения простейшей задачи вариационного исчисления,

предложенное А. Лежандром (A. Legendre, 1786): для того чтобы кривая $y_0(x)$ доставляла минимум функционалу

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2,$$

необходимо, чтобы во всех точках кривой $y(x)$ вторая производная от подинтегральной функции по y' была неотрицательна

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geqslant 0, \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2.$$

Если y есть n-мерный вектор с координатами $y_1, \ldots, y_n$ то Л. у. требует неотрицательности квадратичной формы

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_{y'_i y'_j}(x, y(x), y'(x))\, \eta_i \eta_j \geqslant 0,$$

$$x \in [x_1, x_2], \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Для случая максимума функционала знак неравенства в Л. у. меняется на противоположный. Для вариационных задач на условный экстремум аналогом Л. у. является *Клебша условие*.

Л. у., так же как и *Эйлера уравнение*, является необходимым условием слабого экстремума. При нарушении Л. у. вторая вариация функционала не сохраняет свой знак и кривая $y(x)$ не доставляет экстремум функционалу.

Если в Л. у. знак нестрогого неравенства заменен на знак строгого неравенства, то такое условие наз. усиленным условием Лежандра. Усиленное Л. у. в отличие от Л. у. не является необходимым. Усиленное Л. у. участвует в формулировке достаточных условий экстремума. Экстремаль, на к-рой выполняется усиленное Л. у., наз. неособой (неособенной) экстремалью. Такая экстремаль дважды непрерывно дифференцируема, и уравнение Эйлера для нее можно представить в виде обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка, разрешенного относительно старшей производной. Если на неособой экстремали выполняется усиленное *Якоби условие*, то можно построить поле экстремалей, окружающее данную экстремаль, что является первым шагом при исследовании достаточных условий экстремума.

Лит.: [1] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М., 1950; [2] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950.

И. Б. Вапнярский.

ЛЕЖАНДРА ФУНКЦИИ — функции, являющиеся решениями дифференциального уравнения Лежандра:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right] y = 0, \qquad (*)$$

где ν и μ — произвольные числа. Если $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, а $\mu = 0$, то ограниченные на $[-1, 1]$ решения уравнения (*) наз. *Лежандра многочленами*; при целых μ, $-\nu \leqslant \mu \leqslant \nu$, ограниченные на $[-1, 1]$ решения уравнения (*) наз. присоединенными функциями Лежандра.

А. Б. Иванов.

ЛЕЖАНДРОВО МНОГООБРАЗИЕ — такое n-мерное гладкое подмногообразие L^n $(2n+1)$-мерного контактного многообразия M^{2n+1} (т. е. многообразия, снабженного пфаффовой формой α, внешнее произведение к-рой на n-ю внешнюю степень ее внешнего дифференциала $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ во всех точках M^{2n+1}), что пфаффова форма α, задающая контактную структуру на M^{2n+1}, обращается в нуль тождественно на L^n (т. е. $\alpha(X) = 0$ для любого вектора X, касающегося L^n в какой-нибудь точке последнего). В важном частном случае, когда $M^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, r)$ и $\alpha = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - dr$, а L^n расположено

так, что q_i можно принять за координаты на нем, условие, чтобы L^n было Л. м., означает, что оно задается уравнениями вида

$$r = f(q_1, \ldots, q_n), \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial q_1} \quad \ldots, \; p_n = \frac{\partial f}{\partial q_n}.$$

и при этом p_i также можно принять за координаты на L^n, то координаты q_i и p_i связаны *Лежандра преобразованием*; если же в окрестности нек-рой точки этого сделать нельзя, то преобразование Лежандра имеет в этой точке особенность.

Примеры Л. м. уже давно встречались в различных вопросах анализа и геометрии, но само понятие Л. м. введено сравнительно недавно по аналогии с *лагранжевым многообразием*. *Д. В. Аносов.*

ЛЕЙБНИЦА ПРИЗНАК сходимости знакочередующегося ряда: если члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \; a_n > 0,$$

монотонно убывают ($a_n > a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$) и стремятся к нулю ($\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$), то ряд сходится; при этом остаток ряда

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине. Признак установлен Г. Лейбницем (G. Leibniz, 1682). *В. И. Битюцков.*

ЛЕЙБНИЦА РЯД — знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

сходящийся к $\pi/4$. Рассмотрен Г. Лейбницем (G. Leibniz, 1673–74). *В. И. Битюцков.*

ЛЕЙБНИЦА ФОРМУЛА для производных произведения — формула, дающая выражение для производной порядка n от произведения двух функций через их производные порядков $k = 0, 1, \ldots, n$ (под производными нулевого порядка понимаются сами функции). А именно, если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют в нек-рой точке производные до порядка n включительно, то их произведение uv имеет в этой точке производные тех же порядков и

$$(uv)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Эта формула была сообщена Г. Лейбницем (G. Leibniz) в письме к И. Бернулли (J. Bernoulli) в 1695. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК — порядок на прямом произведении

$$X = \prod\nolimits_{\alpha \in L} X_\alpha$$

частично упорядоченных множеств X_α, где множество индексов L — вполне упорядочено, определяемый следующим образом: если $\{x_\alpha\}, \{y_\alpha\} \in X$, то $\{x_\alpha\} \leqslant \{y_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда либо $x_\alpha = y_\alpha$ для всех $\alpha \in L$, либо существует такое $\alpha \in L$, что $x_\alpha < y_\alpha$ и $x_\beta = y_\beta$ для всех $\beta < \alpha$. Множество X, упорядоченное лексикографич. порядком, наз. лексикографическим, или ординальным, произведением множеств X_α. Если все множества X_α совпадают между собой ($X_\alpha = Y$ для всех $\alpha \in L$), то их лексикографич. произведение наз. ординальной степенью множества Y и обозначается $^L Y$. Говорят также, что X упорядочено по принципу первого различия (как слова упорядочены в словаре). Таким образом, если L — натуральный ряд, то

$$\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} < \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$$

означает, что для нек-рого k

$$x_k < y_k \text{ и } x_i = y_i \text{ для всех } i < k.$$

Л. п. является частным случаем упорядоченного произведения частично упорядоченных множеств (см. [3]). Л. п. может быть определен аналогично и для любого частично упорядоченного множества индексов L (см. [1]), однако в этом случае отношение на множестве $\prod_{\alpha \in L} X_\alpha$ не обязано быть порядком в обычном смысле.

Лексикографич. произведение конечного числа вполне упорядоченных множеств вполне упорядочено. Лексикографич. произведение цепей есть цепь.

Для конечного L Л. п. рассматривался фактически еще Г. Кантором [4] при определении произведения порядковых типов линейно упорядоченных множеств.

Л. п. широко используется вне математики, например при упорядочении слов в словарях, справочниках и т. п.

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [3] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970; [4] Cantor G., «Math. Ann.», 1895, Bd 46, № 4, S. 481—512; [5] Hausdorff F., Grundzüge der Mengenlehre, Lpz., 1914. *Т. С. Фофанова.*

ЛЕМНИСКАТНЫЕ ФУНКЦИИ, лемнискатические функции, — частный случай *эллиптических функций*, возникающий при обращении эллиптич. интеграла частного вида

$$z = \int_0^u (1 - t^4)^{-1/2}\, dt.$$

Эти интегралы появились впервые при вычислении длины дуги *Бернулли лемнискаты* в работах Дж. Фаньяно (G. Fagnano, 1715). Сами Л. ф. ввел К. Гаусс (C. Gauss, 1797).

Л. ф. две:

$$u = \cos \operatorname{lemn} z = \operatorname{cl} z,$$

$$\sin \operatorname{lemn} z = \operatorname{sl} z = \cos \operatorname{lemn} \left(\frac{\omega}{2} - z \right),$$

где

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 (1 - t^4)^{-1/2}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2.$$

Л. ф. выражаются через *Якоби эллиптические функции* с модулем $k = \sqrt{2}/2$:

$$\operatorname{sl} z = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\operatorname{sn}(z\sqrt{2})}{\operatorname{dn}(z\sqrt{2})}, \quad \operatorname{cl} z = \operatorname{cn}(z\sqrt{2}).$$

В теории *Вейерштрасса эллиптических функций* Л. ф. появляются в т. н. гармоническом случае, когда инварианты $g_2 = 4$, $g_3 = 0$.

Лит.: [1] Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963, гл. 22. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛЕМНИСКАТЫ — 1) Плоские алгебраич. кривые порядка $2n$, произведение расстояний каждой точки к-рых до заданных точек (фокусов) $F_1, F_2, \ldots, F_n$ равно заданному числу r (радиусу Л.). Уравнение Л. в декартовых прямоугольных координатах

$$|(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)| = r^n, \quad r > 0, \quad z = x + iy.$$

Окружность есть Л. с одним фокусом, *Кассини овал* — Л. с двумя фокусами. См. также *Бернулли лемниската* и *Бута лемниската*. *Д. Д. Соколов.*

2) Л.— кривая уровня многочлена. Если все фокусы F_k: $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, различны и радиус Л. достаточно мал, то Л. состоит из n континуумов, попарно не имеющих общих точек. При достаточно большом радиусе Л. состоит из одной связной компоненты. Как показал Д. Гильберт (D. Hilbert, 1897), границу Γ произвольной односвязной конечной области можно сколь угодно хорошо приблизить Л., т. е. для любого

$\varepsilon>0$ можно указать Λ такую, что в ε-окрестности каждой точки Γ существуют точки Λ и каждая точка Λ попадает в ε-окрестность соответствующей точки Γ.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Уолш Дж.-Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, пер. с англ., М., 1961. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛЕРЕ СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, спектральная последовательность непрерывного отображения,— спектральная последовательность, связывающая когомологии со значениями в пучке абелевых групп $\mathcal{F}$ на топологич. пространстве X с когомологиями его прямых образов $f_q\mathcal{F}$ при непрерывном отображении $f: X \to Y$. Точнее, второй член Л. с. п. имеет вид

$$E_2^{p,\,q} = H^p(Y,\, f_q(\mathcal{F})),$$

а ее предел E_∞ есть биградуированная группа, связанная с нек-рой фильтрацией градуированной группы $H^*(X, \mathcal{F})$. Конструкция Л. с. п. может быть обобщена на когомологии с носителями в заданных семействах. В случае локально компактных пространств и когомологий с компактными носителями Л. с. п. была построена Ж. Лере в 1946 (см. [1], [2]).

Если $\mathcal{F}=A$ — постоянный пучок, отвечающий абелевой группе A, f — проекция локально тривиального расслоения со слоем F, а пространство Y локально стягиваемо, то $f_q(\mathcal{F})$ будут локально постоянными пучками со слоем $H^q(F, A)$. Если, кроме того, Y односвязно или же X — расслоенное пространство со связной структурной группой, то $f_q(\mathcal{F})$ — постоянные пучки и член E_2 принимает особенно простой вид:

$$E_2^{p,\,q} = H^p(Y,\, H^q(F,\, A)).$$

Условие локальной стягиваемости может быть заменено другими топологич. условиями на X, Y, F (напр., Y локально компактно, F компактно).

Используя сингулярные когомологии, можно построить для любого расслоения в смысле Серра с линейно связными слоями аналог Л. с. п., обладающий всеми перечисленными выше свойствами Л. с. п. локально тривиального расслоения (спектральная последовательность Серра). Аналогичная спектральная последовательность существует в сингулярных гомологиях.

Лит.: [1] Leray J., «J. math. pures et appl.», 1950, t. 29, p. 1—139; [2] его же, там же, p. 169 213; [3] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [4] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964. *Д. А. Пономарев.*

ЛЕРЕ ФОРМУЛА, Коши — Фантапье формула,— формула интегрального представления голоморфных функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$, обобщающая интегральную формулу Коши (см. *Коши интеграл*).

Пусть D — конечная область комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ с кусочно гладкой границей ∂D; $\chi(\zeta; z): \partial D \to \mathbb{C}^n$ — любая гладкая вектор-функция от $\zeta \in \partial D$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ такая, что скалярное произведение

$$\langle \zeta - z,\ \chi(\zeta;\ z)\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu)\,\chi_\nu(\zeta;\ z) \neq 0$$

всюду на ∂D для всех $z \in D$. Тогда любая голоморфная в D функция $f(z)$, непрерывная в замкнутой области D, представима в виде

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,\delta(\chi(\zeta;\ z)) \wedge d\zeta}{\langle \zeta - z,\ \chi(\zeta;\ z)\rangle^n},\quad z \in D. \quad (*)$$

Формула (*) обобщает классическую интегральную формулу Коши для аналитич. функций одного комплексного переменного и наз. формулой Лере. Ж. Лере (J. Leray), получивший эту формулу (см. [1]), назвал ее формулой Коши — Фантапье. В этой фор-

муле дифференциальные формы $\delta(\chi(\zeta; z))$ и $d\zeta$ составляются по законам:

$$\delta(\chi(\zeta; z)) = \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu-1} \chi_\nu(\zeta; z)\, d\chi_1(\zeta; z) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge d\chi_{\nu-1}(\zeta; z) \wedge d\chi_{\nu+1}(\zeta; z) \wedge \ldots \wedge d\chi_n(\zeta; z)$$

и

$$d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n,$$

где $\wedge$ — знак внешнего умножения (см. *Внешнее произведение*). Выбирая вид функции χ, из формулы (*) можно получить различные интегральные представления. При этом следует иметь в виду, что, вообще говоря, интеграл Лере в формуле (*) не равен тождественно нулю, когда z находится вне D.

См. также *Бохнера — Мартинелли представление*.

Лит.: [1] Лере Ж., Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии, пер. с франц., М., 1961; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

ЛЕФШЕЦА ДВОЙСТВЕННОСТЬ, Лефшеца — Пуанкаре двойственность, – утверждение о двойственности между гомологиями и когомологиями, установленное С. Лефшецем (S. Lefschetz). Более точно, если (X, A) — такая пара пространств, что $X \setminus A$ есть n-мерное топологич. многообразие, то для любой абелевой группы G и для любого i имеет место изоморфизм

$$H_i(X, A; G) \approx H_c^{n-i}(X \setminus A; G);$$

здесь в правой части стоят когомологии с компактными носителями; если многообразие $X \setminus A$ неориентируемо, то нужно, как обычно, брать когомологии с локальными коэффициентами.

Ю. Б. Рудяк.

ЛЕФШЕЦА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. о неподвижных точках, Лефшеца — Хопфа теорема,— теорема, позволяющая выразить число неподвижных точек непрерывного отображения через его *Лефшеца число*. Так, если непрерывное отображение $f: X \to X$ конечного клеточного пространства X не имеет неподвижных точек, то его число Лефшеца $L(f)$ равно нулю. Частным случаем последнего утверждения является *Брауэра теорема* о неподвижной точке.

Ю. Б. Рудяк.

2) Л. т. о гиперплоском сечении, слабая Л. т.: пусть X – алгебраич. подмногообразие комплексной размерности n в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^N$ и пусть $P \subset \mathbb{C}P^N$ — гиперплоскость, проходящая через все особые точки многообразия X (если они есть), а $Y = X \cap P$ — гиперплоское сечение многообразия X; тогда относительные группы гомологий $H_i(X, Y, \mathbb{Z})$ равны нулю при $i < n$. Отсюда вытекает, что естественный гомоморфизм

$$H_i(Y; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом для $i < n-1$ и сюръективен для $i = n-1$ (см. [1]).

По формулам универсальных коэффициентов отсюда получаются соответствующие утверждения для групп целочисленных когомологий. Во всяком случае для когомологий с коэффициентами в поле рациональных чисел имеют место двойственные утверждения: гомоморфизм пространств когомологий

$$H^i(X; \mathbb{Q}) \longrightarrow H^i(Y; \mathbb{Q}),$$

индуцированный вложением $Y \subset X$, является изоморфизмом для $i < n-1$ и инъективен для $i = n-1$ (см. [6]).

Аналогичное утверждение справедливо для гомотопич. групп: $\pi_i(X, Y) = 0$ при $i < n$. В частности, канонич. гомоморфизм $\pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ является изоморфизмом при $n \geqslant 3$ и сюръективен при $n = 2$ (теорема Лефшеца о фундаментальной группе). Существует обобщение этой теоремы на случай произ-

вольного алгебраически замкнутого поля (см. [7]), а также на случай, когда Y — нормальное полное пересечение в X (см. [8]).

3) Сильная Л. т. — теорема о существовании разложения Лефшеца когомологий комплексного кэлерова многообразия на примитивные составляющие.

Пусть V — компактное кэлерово многообразие размерности n с кэлеровой формой ω и пусть

$$\eta \in H^{1,1}(V, \mathbb{C}) \subset H^2(V, \mathbb{C})$$

— класс когомологий типа $(1, 1)$, соответствующий форме ω при изоморфизме де Рама (если V — проективное алгебраич. многообразие над $\mathbb{C}$ с естественной метрикой Ходжа, то η — класс когомологий, двойственный классу гомологий гиперплоского сечения) и

$$L: H^i(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{i+2}(V, \mathbb{C})$$

— линейный оператор, определяемый умножением на η, т. е.

$$Lz = z \cdot \eta, \ z \in H^i(V, \mathbb{C}).$$

Имеет место изоморфизм (см. [1])

$$L^k: H^{n-k}(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n-k}(V, \mathbb{C})$$

для любого $k = 0, 1, \ldots, n$. Ядро оператора

$$L^{k+1}: H^{n-k}(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+k+2}\ V, \mathbb{C})$$

обозначается $H_0^{n-k}(V, \mathbb{C})$ и наз. примитивной частью $(n-k)$-когомологий многообразия V. Элементы из $H_0^{n-k}(V, \mathbb{C})$ наз. примитивными когомологиями, а соответствующие им циклы — примитивными циклами. Сильная Л. т. устанавливает следующее разложение когомологий в прямую сумму примитивных (наз. разложением Лефшеца):

$$H^m(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{[m/2]} L^k H_0^{m-2k}(V, \mathbb{C})$$

для всех $m = 0, 1, 2, \ldots, 2n$. Отображения

$$L^k: H_0^{m-2k}(V, \mathbb{C}) \longrightarrow H^m(V, \mathbb{C}), \ k = 0, 1, \ldots, [m/2],$$

являются вложениями. Разложение Лефшеца коммутирует с разложением Ходжа

$$H^m(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}(V, \mathbb{C})$$

см. [13]). В частности, определена примитивная часть $H_0^{p,q}(V, \mathbb{C})$ в $H^{p,q}(V, \mathbb{C})$ и

$$H_0^m(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=m} H_0^{p,q}(V, \mathbb{C}).$$

Сильная Л. т. и разложение Лефшеца имеют аналоги в абстрактной алгебраич. геометрии для l-адических и кристальных когомологий (см. [4], [14]).

4) Л. т. о когомологиях типа $(1, 1)$ — теорема о соответствии между двумерными алгебраич. классами когомологий комплексного проективного алгебраич. многообразия и классами когомологий типа $(1, 1)$.

Пусть V — неособое проективное алгебраич. многообразие над полем $\mathbb{C}$. Элемент $z \in H^2(V, \mathbb{Z})$ наз. алгебраическим, если двойственный ему (в смысле Пуанкаре) класс гомологий определяется нек-рым дивизором. Л. т. о когомологиях типа $(1,1)$ утверждает, что класс $z \in H^2(V, \mathbb{Z})$ алгебраичен тогда и только тогда, когда

$$z \in j(H^2(V, \mathbb{Z})) \cap H^{1,1}(V, \mathbb{C}),$$

где $H^{1,1}(V, \mathbb{C})$ — компонента Ходжа типа $(1, 1)$ двумерных комплексных когомологий $H^2(V, \mathbb{C})$, а отображение $j: H^2(V, \mathbb{Z}) \to H^2(V, \mathbb{C})$ индуцировано естественным вложением $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (см. [1], а также [6], [12]).

По поводу алгебраич. классов когомологий в размерностях, больших 2, см. *Ходжа гипотеза*.

Для произвольного комплексного аналитич. многообразия V существует аналогичная характеризация элементов группы $H^2(V, \mathbb{Z})$, являющихся классами Чжэня расслоений на комплексные прямые над V (см. [11]).

Лит.: [1] Lefschetz S., L'analysis situs et la géométrie algébrique, P., 1924; [2] его же, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1921, v. 22, p. 327—482; [3] его же, «Ann. Math.», 1937, v. 38, p. 819—22; [4] Berthelot P., Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p>0$, B. — [a. o.], 1974; [5] Deligne P., Katz N., Groupes de monodromie en géométrie algébrique, B. [a. o.], 1973; [6] Griffiths P., Harris J., Principles of algebraic geometry, N. Y., 1978; [7] Grothendieck A., Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, P.— Amst., 1968; [8] Hartshorne R., Ample subvarieties of algebraic varieties, B.— [u. a.], 1970; [9] Мамфорд Д., Абелевы многообразия, пер. с англ., М., 1971; [10] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [11] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976; [12] Чжэнь Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, пер. с англ., М., 1961; [13] Вейль А., Введение в теорию кэлеровых многообразий, пер. с франц., М., 1961; [14] Делинь П., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 159—90.

В. А. Исковских.

ЛЕФШЕЦА ФОРМУЛА — формула, выражающая число неподвижных точек эндоморфизма топологич. пространства через следы соответствующих эндоморфизмов в пространствах когомологий.

Эта формула была установлена впервые С. Лефшецом для конечномерных ориентируемых топологич. многообразий [1] и для конечных клеточных комплексов (см. [2, 3]). Этим работам С. Лефшеца предшествовала работа Л. Брауэра (L. Brouwer, 1911) о неподвижной точке непрерывного отображения n-мерной сферы в себя. Некоторый новый вариант доказательства Л. ф. для конечных клеточных комплексов был дан Х. Хопфом (H. Hopf, см. [9]).

Пусть X — связное ориентируемое n-мерное компактное топологич. многообразие или n-мерный конечный клеточный комплекс, $f: X \to X$ — непрерывное отображение, $\Lambda(f, X)$ — *Лефшеца число* отображения f. Предполагается, что все неподвижные точки отображения $f: X \to X$ изолированы. Для каждой неподвижной точки $x \in X$ пусть $i(x)$ — ее индекс Кронекера (локальная степень отображения f в окрестности точки x). Тогда Л. ф. для X и f имеет вид

$$\sum_{f(x)=x} i(x) = \Lambda(f, X). \qquad (1)$$

Имеется [8] обобщение Л. ф. на случай произвольных непрерывных отображений компактных евклидовых окрестностных ретрактов.

Пусть X — дифференцируемое компактное ориентированное многообразие, $f: X \to X$ — дифференцируемое отображение. Неподвижная точка $x \in X$ для отображения f наз. невырожденной, если она изолирована и $\det(df_x - E) \neq 0$, где $df_x: T_x(X) \to T_x(X)$ — дифференциал отображения f в точке x, а E — тождественное преобразование. Для невырожденной точки $x \in X$ ее индекс $i(x)$ совпадает с числом $\operatorname{sgn} \det(df_x - E)$. В этом случае Л. ф. (1) показывает, что число Лефшеца $\Lambda(f, X)$ равно разности между числом неподвижных точек с индексом $+1$ и числом неподвижных точек с индексом -1, в частности не превосходит общего числа неподвижных точек. Левую часть формулы (1) в этом случае можно определить так же, как индекс пересечения $\Gamma_f \Delta$ на $X \times X$, где Γ_f — график отображения f и $\Delta \subset X \times X$ — диагональ.

Следствием Л. ф. является формула Хопфа, утверждающая, что эйлерова характеристика $\chi(X)$ равна сумме индексов нулей глобального C^∞-векторного поля v на X (предполагается, что все нули векторного поля v изолированы) (см. [5]).

Существует вариант Л. ф. для компактных комплексных многообразий и когомологии Дольбо (см. [5]). Пусть X — компактное комплексное многообразие размерности m и $f: X \to X$ — голоморфное отображение с невырожденными неподвижными точками. Пусть $H^{p,q}(X)$ — когомологии Дольбо многообразия X типа (p, q) и $f^*: H^{p,q}(X) \to H^{p,q}(X)$ — индуцированный отображением f эндоморфизм. Число

$$\Lambda(f, \mathcal{O}_X) = \sum_{q=0}^{m} (-1)^q \operatorname{Tr}(f^*; H^{0,q}(X))$$

наз. голоморфным числом Лефшеца. Тогда имеет место следующая голоморфная Л. ф.

$$\Lambda(f, \mathcal{O}_X) = \sum_{f(x)=x} \frac{1}{\det(E - df_x)},$$

где df_x — голоморфный дифференциал отображения f в точке x.

В абстрактной алгебраич. геометрии Л. ф. послужила отправной точкой для поиска *Вейля когомологий* в связи с гипотезами Вейля о *дзета-функциях* алгебраич. многообразий, определенных над конечными полями. Аналог Л. ф. в абстрактной алгебраич. геометрии устанавливается для l-адических когомологий с компактными носителями и с коэффициентами в конструктивных $\mathbb{Q}_l$-пучках, где $\mathbb{Q}_l$ — поле l-адических чисел, l — простое число, отличное от характеристики поля k. Эту формулу часто называют формулой следа.

Пусть X — алгебраич. многообразие (или схема) над конечным полем k, $F: X \to X$ — морфизм Фробениуса и $\mathcal{F}$ — пучок на X и $H^i_C(X, \mathcal{F})$ — когомологии с компактными носителями многообразия (схемы) X с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$. Тогда морфизм F определяет эндоморфизм когомологии

$$F^*: H^i_C(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i_C(X, \mathcal{F}).$$

Если $k_n \supset k$ — расширение степени n поля k, $X_n = X \otimes k_n$, $\mathcal{F}_n$ $\mathcal{F} \otimes k_n$ — многообразие (схема) и пучок, полученные из X и $\mathcal{F}$ посредством расширения поля скаляров, то соответствующий морфизм Фробениуса $F_n: X_n \to X_n$ совпадает с n-й степенью F^n морфизма F.

Пусть теперь X — отделимая схема конечного типа над конечным полем k из q элементов, $\mathcal{F}$ — конструктивный $\mathbb{Q}_l$ пучок на X, l — простое число, отличное от характеристики поля k, X^{F^n} — множество неподвижных геометрич. точек морфизма F^n или, что то же самое, множество $X(k_n)$ геометрич. точек схемы X со значениями в поле k_n. Тогда для любого целого $n \geqslant 1$ имеет место следующая Л. ф. (или формула следа) (см. [6], [7]):

$$\sum_{x \in X^{F^n}} \operatorname{Tr}(F^{n*}, \mathcal{F}_x) =$$

$$= \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(F^{*n}, H^i_C(X, \mathcal{F})), \qquad (2)$$

где $\mathcal{F}_x$ — слой пучка $\mathcal{F}$ в точке x. В случае постоянного пучка $\mathcal{F} = \mathbb{Q}_l$ имеем $\operatorname{Tr}(F^{n*}, \mathbb{Q}_l) = 1$ и левая часть формулы (2) представляет собой не что иное, как число геометрич. точек схемы X со значениями в поле k_n. В частности, при $n = 1$ — это просто число точек схемы X со значениями в основном поле k. Если схема X является собственной над k (напр., если X — полное алгебраич. многообразие над k), то $H^i_C(X, \mathcal{F}) = H^i(H, \mathcal{F})$ и правая часть формулы (2) является альтернированной суммой следов эндоморфизма Фробениуса в обычных когомологиях схемы X.

Имеются (см. [7]) обобщения формулы (2).

Лит.: [1] Lefschetz S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1926, v. 28, № 1, p. 1—49; [2] его же, «Proc. Nat. Acad. Sci.

USA», 1927, v. 13, p. 614—22; [3] его же, «Ann. Math.» (2), 1937, v. 38, № 4, p. 819—22; [4] Kleiman S. L., в кн.: Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Amst.— P., 1968, p. 359—386; [5] Griffiths P., Harris J., Principles of algebraic geometry, N. Y., 1978; [6] Cohomologie étale. SGA 4½, B.— Hdlb.— N. Y., 1977; [7] Cohomologie *l*-adique et fonctions *L*, SGA 5, B. — Hdlb.— N. Y., 1977; [8] Дольд А., Лекции по алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1976; [9] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.—Л., 1938.

В. А. Исковских

ЛЕФШЕЦА ЧИСЛО — инвариант отображения цепного (коцепного) комплекса или топологич. пространства в себя. Пусть X — цепной комплекс абелевых групп (соответственно топологич. пространство), $f: X \to X$ — эндоморфизм степени 0 (соответственно непрерывное отображение), $H_i(X, \mathbb{Q})$ — *гомологий группы* объекта X с коэффициентами в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, причем

$$\sum_i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X, \mathbb{Q}) < \infty,$$

и пусть t_i - след линейного преобразования

$$f_*: H_i(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_i(X, \mathbb{Q}).$$

По определению, число Лефшеца отображения f есть

$$\Lambda(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i t_i.$$

В случае коцепного комплекса определение аналогично. В частности, Л. ч. тождественного отображения e_X равно *эйлеровой характеристике* $\chi(X)$ объекта X. Если X — цепной (коцепной) комплекс свободных абелевых групп или топологич. пространство, то число $\Lambda(f)$ всегда целое. Л. ч. было введено С. Лефшецем [1] для решения задачи о числе неподвижных точек непрерывного отображения (см. *Лефшеца формула*).

Для нахождения Л. ч. эндоморфизма f комплекса X, состоящего из конечномерных векторных пространств X над $\mathbb{Q}$, можно воспользоваться следующей формулой (к-рая иногда наз. формулой следа Хопфа)

$$\Lambda(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i T_i,$$

где T_i — след линейного преобразования $f: X_i \to X_i$. В частности, если X — конечное клеточное пространство, $\varphi: X \to X$ — его непрерывное отображение в себя и $\psi: X \to X$ — нек-рая клеточная аппроксимация отображения φ, то

$$\Lambda(\varphi) = \Lambda(\psi) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i T_i,$$

где T_i — след преобразования

$$\psi_{i*}: C_i(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow C_i(X, \mathbb{Q}),$$

индуцированного отображением ψ, а $C_i(X_i, \mathbb{Q})$ — группа рациональных i-мерных цепей клеточного пространства X.

Все сказанное выше допускает обобщение на случай произвольного поля коэффициентов.

Лит.: [1] Lefschetz S., «Trans Amer. Math. Soc.», 1926, v. 28, p. 1—49; [2] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М. — Л., 1938.

Ю. Б. Рудяк.

ЛЖЕЦА ПАРАДОКС — см. *Антиномия.*

ЛИ *p*-АДИЧЕСКАЯ ГРУППА — *аналитическая группа* над полем $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел (более общо — над любым локально компактным неархимедовым полем K). Естественными примерами Ли p-а. г. являются группы Галуа нек-рых бесконечных расширений полей. Напр., если $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\nu})$ — поле, полученное присоединением к полю $\mathbb{Q}$ рациональных чисел первообразного корня ζ_{p^ν} степени p^ν из единицы, и $k = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, $K = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} Q(\zeta_{p^\nu})$, то при $p \neq 2$ группа Галуа расширения

K/k изоморфна Ли p-а. г., $\mathbb{Z}_p$ — группе целых p-адических чисел.

Многие результаты теории обычных групп Ли (связь между группами и алгебрами Ли, конструкция и свойства экспоненциального отображения) имеют аналоги и в p-адическом случае. Эти результаты находят применение в алгебраич. теории чисел и в теории групп.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Lazard M., «Publ. Math. IHES», 1965, t. 26, p. 389—603.

А. А. Кириллов.

ЛИ АЛГЕБР МНОГООБРАЗИЕ над кольцом k — класс $\mathfrak{V}$ алгебр Ли над k, удовлетворяющих некрой фиксированной системе тождеств. К наиболее распространенным Ли а. м. относятся многообразия: $\mathfrak{A}$ — абелевых алгебр Ли, заданное тождеством $xy=0$, $\mathfrak{N}_c$ — нильпотентных класса c алгебр Ли, в к-рых любые произведения длины больше c равны нулю, $\mathfrak{S}_l$ — разрешимых длины $\leqslant l$ алгебр Ли, в к-рых производный ряд сводится к нулю не более чем за l шагов. Совокупность $v(k)$ всех алгебр Ли а. м. над k — группоид относительно умножения: $\mathfrak{W}=\mathfrak{U}\mathfrak{V}$, где $\mathfrak{W}$ — класс расширений алгебр из $\mathfrak{V}$ при помощи идеалов из $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{S}_l=\mathfrak{A}^l$; алгебры из $\mathfrak{A}^2$ наз. метабелевыми.

Центральная проблема теории Ли а. м.— описание базисов тождеств Ли а. м., в частности с точки зрения их конечности или бесконечности (если кольцо k нётерово). В случае, если k — поле характеристики $p>0$, имеются примеры локально конечных Ли а. м., лежащих в $\mathfrak{A}^3$ и не обладающих конечным базисом тождеств. В случае поля k характеристики 0 примеров бесконечно базируемых многообразий пока нет (1982). Конечная базируемость сохраняется при умножении справа на нильпотентное многообразие или при объединении с таким многообразием. К числу шпехтовых (т. е. таких, в к-рых каждое многообразие конечно базируемо) Ли а. м. относятся Ли а. м. $\mathfrak{N}_l\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}\mathfrak{N}_l$ над любым нётеровым кольцом, $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}\cap\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_c$ над любым полем характеристики $\neq 2$, Ли а. м. $\mathrm{var}(k_2)$, определенное тождествами, справедливыми в алгебре Ли k_2 матриц порядка 2 над полем k, $\mathrm{char}(k)\neq 0$. Над полем k характеристики 0 нет пока примера конечномерной алгебры Ли A такой, что $\mathrm{var}(A)$ бесконечно базируемо, над бесконечным полем k характеристики $p>0$ такие примеры имеются. Над конечным полем или, общее, над любым конечным кольцом k с единицей тождества конечной алгебры Ли A следуют из своей конечной подсистемы.

Ли а. м. $\mathrm{var}(A)$, порожденное конечной алгеброй A, наз. многообразием Кросса и содержится в многообразии Кросса $\mathfrak{S}(f, m, c)$, состоящем из алгебр Ли, в к-рых все главные факторы имеют порядок $\leqslant m$, все нильпотентные факторы имеют класс $\leqslant c$, все внутренние дифференцирования $\mathrm{ad}\ x$ аннулируются унитарным многочленом $f\in k[t]$. Почти кроссовы многообразия (т. е. некроссовы многообразия, все собственные подмногообразия к-рых кроссовы) описаны в разрешимом случае, имеются примеры неразрешимых почти кроссовых многообразий. Группоид $v(k)$ над бесконечным полем — свободная полугруппа с 0 и 1, над конечным полем $v(k)$ может не быть ассоциативным. Решетка $\mathscr{L}(\mathfrak{V})$ подмногообразий Ли а. м. $\mathfrak{V}$ над полем k модулярна, но не дистрибутивна в общем случае. Дистрибутивность решетки $\mathscr{L}(\mathfrak{A}^2)$ имеет место лишь в случае бесконечного поля. Базисы тождеств конкретных алгебр Ли найдены лишь в немногих нетривиальных случаях: для k_2 ($\mathrm{char}(k)=0$ либо $\mathrm{char}(k)=2$), а также для некоторых метабелевых алгебр Ли. Важные результаты получены об алгебрах Ли с тождеством $(\mathrm{ad}x)^n=0$ (см. *Ли нильалгебра*).

Лит.: [1] Артамонов В. А., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 2, с. 135—67; [2] Amayo R., Stewart I., Infinite-dimensional Lie algebras, Leyden, 1974; [3] Бахтурин Ю. А., Lectures on Lie algebras, B., 1978.

Ю. А. Бахтурин.

ЛИ АЛГЕБРА, лиева алгебра,— унитарный k-модуль L над коммутативным кольцом k с единицей, к-рый снабжен билинейным отображением $(x, y) \mapsto [x, y]$ прямого произведения $L \times L$ в L, обладающим следующими двумя свойствами:

1) $[x, x]=0$ (откуда вытекает антикоммутативность $[x, y]=-[y, x]$);

2) $[x, [y, z]]+[y, [z, x]]+[z, [x, y]]=0$ (тождество Якоби).

Таким образом, Ли а. является алгеброй над k (не обязательно ассоциативной); обычным образом определяются понятия подалгебры, идеала, факторалгебры и гомоморфизма алгебр Ли. Ли а. L наз. коммутативной, если $[x, y]=0$ для всех $x, y \in L$.

Наиболее важным является случай, когда k — поле (в особенности k $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), а L — векторное пространство (вообще говоря, бесконечномерное) над k.

Ли а. появились в математике в кон. 19 в. в связи с изучением *Ли групп* (см. также *Ли локальная группа*, *Ли группа преобразований*, *Ли теорема*), а в неявной форме несколько раньше в механике. Общей предпосылкой возникновения этого понятия было понятие «инфинитезимального преобразования», восходящее по меньшей мере ко времени возникновения исчисления бесконечно малых. Замкнутость интегралов класса C_2 уравнения Гамильтона относительно скобок Пуассона, удовлетворяющих тождеству Якоби,— одно из самых ранних замечаний, выраженное, собственно, на языке Ли а. (см. [8], [10]). Сам термин «Ли а.» был введен Г. Вейлем (H. Weyl) в 1934 (до этого времени использовались термины «инфинитезимальные преобразования рассматриваемой группы», или «инфинитезимальная группа»). С течением времени роль Ли а. возрастала пропорционально месту, занимаемому группами Ли в математике (особенно в геометрии), а также в классической и квантовой механике. Этим в первую очередь объясняется особое место Ли а. среди многих других многообразий универсальных алгебр. В наше время аппарат Ли а. воспринимается уже не только как полезное и мощное средство линеаризации теоретико-групповых задач (будь то в теории групп Ли или в значительной мере поглотившей ее и чрезвычайно разросшейся теории *алгебраических групп*, или же в стоящей несколько особняком теории *конечных групп*); это также источник красивых и трудных задач линейной алгебры.

Имеется несколько естественных источников, доставляющих важнейшие примеры Ли а.

1) В рамках общей алгебры значение Ли а. определяется прежде всего тем, что множество $\mathrm{Der}(A)$ всех *дифференцирований* любой k-алгебры является Ли а. с операцией

$$[D_1, D_2]=D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

Дифференцирования Ли а. L вида

$$\mathrm{ad}\, x\colon\ y \mapsto [x, y],\ x, y \in L,$$

наз. внутренними дифференцированиями, или присоединенными эндоморфизмами. Они образуют в $\mathrm{Der}(L)$ подалгебру $\mathrm{ad}\, L$, а отображение $x \to \mathrm{ad}\, x$ является гомоморфизмом Ли а. $L \to \mathrm{Der}(L)$ (присоединенное представление Ли а. L); его образ $\mathrm{ad}\, L$ изоморфен факторалгебре алгебры L по ее центру

$$Z(L)=\{x \in L \mid [x, y]=0\ \forall y \in L\}.$$

2) Еще один существенный источник Ли а. связан со следующим простым наблюдением. Если L — ассо-

циативная алгебра над k с умножением $(x, y) \mapsto xy$, то умножение в k-модуле L, задаваемое правилом

$$(x, y) \mapsto [x, y] = xy - yx,$$

наделяет L структурой Ли а. над k. Говорят, что $(L, [\ ,\ ])$ — Ли а., ассоциированная с ассоциативной алгеброй $(L, \cdot)$. Так, классич. пример Ли а. $(L, [\ ,\ ])$ получится, если в качестве $(L, \cdot)$ взять (ассоциативную) алгебру $M_n(k)$ всех квадратных матриц порядка n над k.

Следующие четыре бесконечные серии подалгебр в Ли а. указанного типа наз. **классическими** (k — поле нулевой характеристики):

$$A_n = \{x \in M_{n+1}(k) \mid \operatorname{tr} x = 0\},\ n \geqslant 1;$$

$$B_n = \{x \in M_{2n+1}(k) \mid xB + B^t x = 0\},\ n \geqslant 2,$$

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & 0 \end{Vmatrix},\quad E_n = \begin{Vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{Vmatrix} \in M_n(k);$$

$$C_n = \{x \in M_{2n} \mid xC + C^t x = 0\},\ n \geqslant 3,\ C = \begin{Vmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{Vmatrix};$$

$$D_n = \{x \in M_{2n} \mid xD + D^t x = 0\},\ n \geqslant 4,\ D = \begin{Vmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом $\dim A_n = n(n+2)$, $\dim B_n = n(2n+1)$, $\dim C_n = n(2n+1)$, $\dim D_n = n(2n-1)$.

Если, кроме того, поле k алгебраически замкнуто, то эти Ли а. замечательны тем, что ими и еще пятью *Ли особыми алгебрами* G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 размерностей 14, 52, 78, 133 и 248 соответственно исчерпываются, с точностью до изоморфизма, все простые (т. е. некоммутативные и не содержащие идеалов, отличных от 0 и самой алгебры) конечномерные Ли а. над k.

3) Еще один источник Ли а.— векторные поля на многообразии (см. [13], [14]). Пусть F — кольцо C^∞-гладких функций на C^∞-гладком многообразии M. Векторное пространство $\operatorname{Vect}(M)$ всех C^∞-гладких векторных полей на M образует Ли а. относительно операции коммутирования (см. *Ли скобка*), играющую важную роль в теории многообразий; Ли а. $\operatorname{Vect}(M)$ совпадает с Ли а. $\operatorname{Der}(F)$. Эта алгебра, вообще говоря, бесконечномерна. Если M — группа Ли, то подпространство в $\operatorname{Vect}(M)$, состоящее из всех левоинвариантных векторных полей, является конечномерной подалгеброй и наз. **алгеброй Ли группы Ли** M; она играет важную роль в теории групп Ли, позволяя переформулировать многие свойства групп Ли в терминах Ли а. См. также *Ли алгебра алгебраической группы*, *Ли алгебра аналитической группы*.

Если в приведенном выше примере заменить кольцо F на коммутативную алгебру $\mathcal{O}_n(k) = k[[X_1, \ldots, X_n]]$ формальных степенных рядов над полем k, то вместо $\operatorname{Vect}(M)$ получается Ли а. W_n формальных векторных полей, состоящая из дифференциальных операторов

$$D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial X_i},\quad f_i \in \mathcal{O}_n(k).$$

Подалгебры $S_n \subset W_{n+1}$, $H_n \subset W_{2n}$, состоящие из дифференцирований, аннулирующих соответственно внешние дифференциальные формы

$$\omega = dX_1 \wedge \ldots \wedge dX_{n+1},$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dX_i \wedge dX_{i+n},$$

а также подалгебра $K_n \subset W_{2n-1}$ дифференцирований, умножающих форму

$$\omega = dX_{2n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (X_i\, dX_{i+n-1} - X_{i+n-1}\, dX_i)$$

на элементы из $\mathfrak{G}_n(k)$, вместе с алгеброй W_n составляют важный класс простых бесконечномерных Ли а. (а л г е б р ы Л и к а р т а н о в с к о г о т и п а). Алгебра W_n наз. о б щ е й, S_n — с п е ц и а л ь н о й, H_n — г а м и л ь т о н о в о й, K_n — к о н т а к т н о й. Эти алгебры встречались еще у С. Ли (S. Lie) при изучении псевдогрупп преобразований (k $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), а затем исследовались по разным поводам Э. Картаном (E. Cartan) и др. (см. [15], [17], [18], [19]).

4) Следующая общая конструкция позволяет строить $\mathbb{Z}$-алгебру Ли L по любой группе G; она находит применение в теории групп (см. *Бёрнсайда проблема*, [16]). Пусть

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$$

— нижний центральный ряд группы G. Тогда L — это прямая сумма аддитивно записанных факторгрупп G_i/G_{i+1}, причем, по определению, произведение элементов $x \in G_i/G_{i+1}$ и $y \in G_j/G_{j+1}$ есть элемент из G_{i+j}/G_{i+j-1}, являющийся классом коммутатора элементов $x \in G_i$ и $y \in G_j$, представляющих соответственно x и y. На произвольные элементы из L эта операция распространяется по дистрибутивности. Имеются (см. [16]) нек-рые обобщения этой конструкции.

Строение алгебр Ли. Одним из общих результатов, показывающих, в частности, что конструкция 2) имеет в известном смысле универсальный характер, является *Биркгофа — Витта теорема*, согласно к-рой для любой Ли а. L над полем k существует такая ассоциативная k-алгебра U, что L изоморфно вкладывается в Ли а. $(U, [\ ,\ ])$, ассоциированную с U. Если при этом L конечномерна, то можно считать, что и U конечномерна (см. *Универсальная обертывающая алгебра*).

Пусть L — конечномерная Ли а. над полем k нулевой характеристики. Тогда L линейна, т. е. изоморфна подалгебре нек-рой Ли а. $M_n(k)$ (т е о р е м а А д о). В L имеется наибольший разрешимый идеал R, называемый р а д и к а л о м (см. *Ли разрешимая алгебра*). Кроме того, в L существует подалгебра S (называемая п о д а л г е б р о й Л е в и) такая, что L — прямая сумма векторных пространств S и R, причем любая другая подалгебра с таким свойством переводится в S автоморфизмом алгебры L (т е о р е м а Л е в и — М а л ь ц е в а). Подалгебра S является полупростой (т. е. ее радикал равен нулю), и она может быть охарактеризована как максимальная полупростая подалгебра в L. Таким образом, L является полупрямой суммой полупростой и разрешимой Ли а., что сводит задачу классификации конечномерных Ли а. над полем нулевой характеристики к описанию Ли а. этих двух типов. Хотя разрешимые Ли а. в нек-ром смысле «получаются» из тривиально устроенных одномерных (а именно, обладают цепочкой подалгебр $L = L_0 \supset L_1 \supset \dots$ $L_n = 0$ таких, что L_i — идеал в L_{i-1} и L_{i-1}/L_i одномерна); строение их настолько сложно, что к настоящему времени (1982) фактически отсутствует даже корректная постановка задачи о классификации разрешимых Ли а. Напротив, конечномерные полупростые Ли а. над полем нулевой характеристики допускают полное описание (см. *Ли полупростая алгебра*): всякая такая алгебра разлагается в прямую сумму простых идеалов (и обратно, прямая сумма простых Ли а.— полупроста). В случае алгебраически замкнутого поля все простые Ли а. явно перечислены (см. п. 2); в случае произвольного поля k имеется процедура их нахождения, с

помощью к-рой в ряде случаев (напр., при $k = \mathbb{R}$) также найдена явная классификация.

Конечномерные Ли а. над полем характеристики $p>0$ исследованы значительно менее полно (даже для алгебраически замкнутых полей). Эти Ли а. обладают многими специфич. свойствами. Напр., весьма нетривиальным оказался даже вопрос описания полупростых Ли а. в терминах простых алгебр (см. [23]). При любом p существуют параметрич. семейства простых Ли а., попарно неизоморфных друг другу. Теория Ли а. для этого случая находится в процессе становления, причудливым образом отражая в себе черты двух разных классов комплексных Ли а.— конечномерных простых и бесконечномерных транзитивных простых, соответствующих примитивным псевдогруппам Ли (см. [17], [18], [19]).

Изучение бесконечномерных Ли а. началось еще в 19 в. одновременно с изучением конечномерных. Такие Ли а. естественно появляются при классификации примитивных псевдогрупп преобразований, предпринятой в 1909 Э. Картаном [20]. Эти алгебры обладают фильтрацией, для к-рой ассоциированная градуированная Ли а. имеет вид $\oplus_{i=1}^{\infty} G_i$ и транзитивна. Бесконечномерные градуированные Ли а. являются предметом интенсивных исследований, в к-рых обнаруживаются связи этих Ли а. не только с классическими геометрич. вопросами, но и со многими другими областями математики (см. *Ли градуированная алгебра*, а также [17], [22]). Важные примеры бесконечномерных Ли а. появлялись в последнее время в теории уравнений математич. физики (напр., для уравнения Кортевега — де Фриса) и в формальном вариационном исчислении (см. [14]).

Абстрактная теория бесконечномерных Ли а. (см., напр., [9]) находится пока в начальной фазе своего развития. Для построения структурной теории Ли а. и для большинства приложений в физике важную роль играет теория представлений Ли а.

См. также *Супералгебра*, *Ли алгебр многообразие*. *Лит.*: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., [гл. 1—8], М., 1972 -78; [2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Капланский И., Алгебры Ли и локально компактные группы, пер. с англ., М., 1974; [4] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974; [5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [6] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [7] Серр Ж. П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [8] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [9] Amayo R. K., Stewart Ian, Infinite-dimensional Lie algebras, Leyden, 1974; [10] Humphreys J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, N. Y.— Hdlb.— B., 1972; [11] Seligman G. B., Modular Lie algebras, B.— Hdlb.— N. Y., 1967; [12] Арнольд В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [13] Годбийон К., Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, пер. с франц., М., 1973; [14] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 1979; [15] Международный конгресс математиков. Ницца. 1970. Доклады советских математиков, М., 1972, с. 111—17; [16] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, с. 289—310; 1959, т. 23, с. 3—34; 1970, т. 34, с. 744—56; [17] Гийемин В., «Математика», 1966, т. 10, № 4, с. 3—31; [18] Кац В. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, с. 1323—67; 1974, т. 38, с. 800—34; [19] Кострикин А. И., Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, с. 251—322; [20] Cartan E., «Ann. Scient. École norm. supér.», 1909, t. 26, p. 93—161; [21] Lazard M., там же, 1954, t. 71, p. 101—90; [22] Singer I. M., Sternberg S., «J. Analyse Math.», 1965, v. 15, p. 1—114; [23] Block R. E., «Ann. Math.», 1969, v. 90, № 3, 433—59.

А. И. Кострикин, В. Л. Попов.

ЛИ АЛГЕБРА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ — аналог *Ли алгебры аналитической группы*, относящийся к случаю аффинных алгебраич. групп. Как и в аналитич. случае, Ли а. г. G есть касательное пространство к G в единице, а структура алгебры Ли определена в нем с помощью левоинвариантных дифференцирований алгебры функций на G. Точное определение состоит в следующем.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле, G — аффинная алгебраич. K-группа, $A=K[G]$ — алгебра регулярных функций на G и $\mathrm{Lie}(G)$ — множество всех дифференцирований K-алгебры A, к-рые коммутируют с автоморфизмами алгебры A, определенными левыми сдвигами из G. Пространство $\mathrm{Lie}(G)$ является алгеброй Ли с операцией $[D_1, D_2]=D_1\circ D_2-D_2\circ D_1$ (см. *Ли линейная алгебра*), а операция $D^{[p]}=D\circ\ldots\circ D$ (p сомножителей) определяет на $\mathrm{Lie}(G)$ структуру p-алгебры Ли (p равно характеристике поля K, если она положительна, и равно 1, если она нулевая). Пусть $L(G)$ — касательное пространство к G в единице e, т. е. векторное пространство над K всех K-дифференцирований из A в A-модуль $A/\mathfrak{m}_e$, где $\mathfrak{m}_e$ — максимальный идеал точки e, и пусть $\varphi_e : A \to A/\mathfrak{m}_e$ канонич. гомоморфизм. Для любого $D\in\mathrm{Lie}(G)$ композиция $\varphi_e\circ D$ является элементом из $L(G)$, а отображение $\mathrm{Lie}(G)\to L(G)$, определенное формулой $D\to\varphi_e D$, является изоморфизмом векторных пространств над K. Это позволяет перенести с $\mathrm{Lie}(G)$ на $L(G)$ структуру p-алгебры Ли. Эта p-алгебра Ли $L(G)$ и наз. Ли а. а. г. G. Если k — подполе в K и G определена над k, то левоинвариантные k-дифференцирования k-алгебры $A_k\subset A$, определяющей k-структуру на G, образуют k-структуру на $\mathrm{Lie}(G)$, а указанный выше изоморфизм определен над k.

Пример. Пусть V — конечномерное векторное пространство над K и $G=GL(V)$ — алгебраич. группа всех автоморфизмов пространства V. Тогда касательное пространство к G в точке e естественно отождествляется с векторным пространством $\mathrm{End}\,V$ всех эндоморфизмов пространства V, а структура Ли а. а. г. G на $\mathrm{End}\,V$ задается формулами: $[X, Y]=XY-YX$, $X^{[p]}=X^p$. Полученная алгебра Ли обозначается $\mathfrak{gl}(V)$.

Ли а. а. г. обладают рядом свойств, аналогичных свойствам алгебр Ли аналитич. групп. Так, дифференциал гомоморфизма алгебраич. групп в единице есть гомоморфизм их алгебр Ли. Размерность Ли а. а. г. G равна размерности группы G. Ли а. а. г. G и ее связной компоненты единицы совпадают. Дифференциал присоединенного представления алгебраич. группы является присоединенным представлением ее алгебры Ли. Если H — алгебраич. подгруппа в алгебраич. группе G, то $L(H)$ есть подалгебра в $L(G)$. Более того, пусть J — идеал всех регулярных функций на G, обращающихся в нуль на H. Тогда, отождествляя $L(G)$ с $\mathrm{Lie}(G)$, можно описать $L(H)$ как множество всех таких элементов из $\mathrm{Lie}(G)$, к-рые аннулируют J. Это описание особенно удобно при рассмотрении линейных алгебраич. групп, т. е. алгебраич. подгрупп G в $\mathrm{GL}(V)$. А именно, пусть J — идеал $K[\mathrm{End}\,V]$, состоящий из элементов, равных нулю на G. Тогда $L(G)\subset\mathfrak{gl}(V)$ состоит в точности из таких эндоморфизмов X пространства V, что дифференцирование алгебры $K[\mathrm{End}\,V]$, порожденное эндоморфизмом $Y\mapsto XY$ пространства $\mathrm{End}\,V$, переводит J в себя. Операции же в $L(G)$ индуцированы описанными выше операциями в $\mathfrak{gl}(V)$.

Если $p=1$, то связь между аффинными алгебраич. группами и их алгебрами Ли является по существу столь же тесной, как связь между аналитич. группами и их алгебрами Ли. Это позволяет в значительной степени сводить изучение аффинных алгебраич. групп к изучению их алгебр Ли и обратно. При этом алгебры Ли линейных алгебраич. групп (т. е. алгебраич. подгрупп в $\mathrm{GL}(V)$) выделяются среди всех подалгебр Ли в $\mathfrak{gl}(V)$ с помощью внутреннего критерия (см. *Ли алгебраическая алгебра*). В случае $p>1$ указанная связь не является столь тесной и в значительной степени теряет свое значение. А именно, в этом случае в общем справедливыми остаются лишь результаты, позволяющие извлекать из свойств группы сведения о свойствах ее алгебры Ли. Напротив, многие теоремы, устанавливающие в случае $p=1$ эту связь в обратную сторону, перестают

быть справедливыми. Напр., могут существовать различные связные подгруппы данной группы, алгебры Ли к-рых совпадают; алгебра Ли неразрешимой алгебраич. группы может быть разрешимой (это так, напр., для группы матриц порядка 2 с определителем 1 при $p \neq 2$) и т. п.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 2, М., 1958.

В. Л. Попов.

ЛИ АЛГЕБРА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ, алгебра Ли группы Ли G, определенной над полем k, полным относительно нек-рого нетривиального *абсолютного значения*,—алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G, рассматриваемой как *Ли локальная группа*. Таким образом, $\mathfrak{g}$ как векторное пространство отождествляется с касательным пространством к G в точке e. Операция умножения $[\ ,\ ]$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ может быть определена любым из следующих эквивалентных способов.

1) Пусть ad — дифференциал *присоединенного представления* группы G. Тогда $\mathrm{ad}X$ для любого вектора $X \in \mathfrak{g}$ является линейным преобразованием пространства $\mathfrak{g}$, причем $\mathrm{ad}X(Y) = [X, Y]$ для любого $Y \in \mathfrak{g}$.

2) Пусть $k = \mathbb{R}$, X и $Y \in \mathfrak{g}$ — два касательных вектора к G в точке e и $x(t)$ и $y(t)$ — гладкие кривые в G, для к-рых X и Y являются касательными векторами при $t = 0$. Тогда $[X, Y]$ есть касательный вектор при $s \to 0$ к кривой $q(t) = x(s)y(s)x(s)^{-1}y(s)^{-1}$, где $s \geqslant 0$, а $s^2 = t$.

3) Пусть $U(G)$ — ассоциативная k-алгебра обобщенных функций на G с носителем в e и с умножением, определяемым сверткой $*$. Пространство $\mathfrak{g}$ отождествляется с множеством примитивных элементов в биалгебре $U(G)$ и для любых X, $Y \in \mathfrak{g}$ вектор $X*Y - Y*X$ также лежит в $\mathfrak{g}$. Тогда $X*Y - Y*X = [X, Y]$.

4) Пусть $\mathscr{L}$ — векторное пространство всех векторных полей на G, инвариантных относительно левых сдвигов на элементы из G. Сопоставление векторному полю его значения в точке $e \in G$ является изоморфизмом векторных пространств $\mathscr{L}$ и $\mathfrak{g}$. С другой стороны, всякому векторному полю $L \in \mathscr{L}$ сопоставляется левоинвариантное дифференцирование k-алгебры A аналитич. функций на G по формуле $L(f)(g) = (df)_g(L_g)$ для любых $f \in A$, $g \in G$, и это сопоставление является изоморфизмом пространства $\mathscr{L}$ с векторным пространством D всех левоинвариантных дифференцирований алгебры A. Для любого $X \in \mathfrak{g}$ через $L_X \in \mathscr{L}$ обозначается левоинвариантное векторное поле, для к-рого $(L_X)_e = X$. Если X, $Y \in \mathfrak{g}$, то произведение $[X, Y]$ может быть определено как такой вектор из $\mathfrak{g}$, что поле $L_{[X, Y]}$ задает дифференцирование $L_X \cdot L_Y - L_Y \cdot L_X$ алгебры A.

Пример. Пусть G — аналитич. группа всех невырожденных матриц порядка n с коэффициентами в k. Тогда касательное пространство $\mathfrak{g}$ к G в единице отождествляется с пространством всех матриц порядка n с коэффициентами в k, а структура алгебры Ли на $\mathfrak{g}$ определяется формулой $[X, Y] = XY - YX$.

Сопоставление аналитич. группе ее алгебры Ли обладает важными функториальными свойствами и в значительной степени сводит изучение аналитич. групп к изучению их алгебр Ли. А именно, пусть G_1 и G_2 — аналитич. группы с алгебрами Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, $\varphi\colon G_1 \to G_2$ — аналитич. гомоморфизм. Тогда $d\varphi_e\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ гомоморфизм алгебр Ли. Ли а. а. г. $G_1 \times G_2$ изоморфна $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Если $\mathfrak{g}$ — Ли а. а. г. G, H — подгруппа Ли в G (см. *Ли группа*) и $\mathfrak{h}$ — Ли а. а. г. H, то $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, причем, если H нормальна, то $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Пусть характеристика поля k равна 0. Алгебра Ли пересечения подгрупп Ли совпадает с пересечением их алгебр Ли. Алгебра Ли ядра гомоморфизма φ аналитич. групп есть ядро гомоморфизма $d\varphi_e$ их алгебр Ли. Алгебра Ли факторгруппы G/H, где H — аналитич. нормальная подгруппа в G, есть факторалгебра алгеб-

ры Ли группы G по идеалу, отвечающему подгруппе H. Если $\mathfrak{g}$ — Ли а. а. г. G и $\mathfrak{h}$ — подалгебра в G, то существует единственная связная подгруппа Ли $H \subset G$ с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$; при этом H не обязательно замкнута в G. Ли а. а. г. разрешима (нильпотентна, полупроста) тогда и только тогда, когда сама группа разрешима (нильпотентна, полупроста).

Указанная связь между категориями аналитич. групп и алгебр Ли не является все же, в отличие от случая локальных групп Ли, эквивалентностью этих категорий. А именно, неизоморфные аналитич. группы могут иметь изоморфные алгебры Ли. Аналитич. группы с изоморфными алгебрами Ли наз. *локально изоморфными*. В случае поля k нулевой характеристики каждой конечномерной алгебре Ли над k отвечает нек-рый класс локально изоморфных аналитич. групп. Пусть k $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Среди всех локально изоморфных аналитич. групп имеется единственная с точностью до изоморфизма связная и односвязная группа; категория аналитич. групп такого типа эквивалентна категории конечномерных алгебр Ли над k. В частности, всякий гомоморфизм алгебр Ли индуцирован аналитич. гомоморфизмом соответствующих связных и односвязных аналитич. групп. Любая связная группа Ли, локально изоморфная данной связной и односвязной группе Ли G, имеет вид G/D, где D — дискретный нормальный делитель, лежащий в центре группы G.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948. *В. Л. Попов.*

ЛИ p-АЛГЕБРА, ограниченная алгебра Ли,— алгебра L над полем k характеристики $p > 0$ (или, более общо, над кольцом простой характеристики $p > 0$), снабженная p-отображением $x \to x^{[p]}$ таким, что выполняются следующие соотношения:

$$\operatorname{ad}(x^{[p]}) = (\operatorname{ad} x)^{[p]},$$

$$(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]},$$

$$(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \Lambda_p(x, y).$$

Здесь $\operatorname{ad} x : y \to [x, y]$ — внутреннее дифференцирование алгебры L, определяемое элементом $x \in L$ (оператор присоединенного представления), а $\Lambda_p(x, y)$ элемент из L, являющийся линейной комбинацией одночленов Ли

$$(\operatorname{ad} x_1 \dots \operatorname{ad} x_{p-1})\, x$$

с $x_i = x$ или y для всех $i = 1, \dots, p-1$.

Типичный пример Ли p-а. получается, если рассмотреть произвольную ассоциативную алгебру A над k как универсальную алгебру с двумя производными операциями:

i) $(x, y) \to [x, y] = xy - yx$,

ii) $x \to x^p$.

В частности, свойство $\operatorname{ad}(x^p) = (\operatorname{ad} x)^p$ является прямым следствием тождества

$$(\operatorname{ad} x)^n y = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j} y x^j$$

при $n = p$, когда $\binom{n}{j} = 0$, $j = 1, \dots, p-1$. Так как всякая *Ли алгебра* вложима в подходящим образом выбранную ассоциативную алгебру A с операциями i) - ii) (теорема Пуанкаре - Биркгофа - Витта), то часто $x^{[p]}$ заменяют, с нек-рой долей двусмысленности, на x^p.

Для всякой Ли p-а. L существует p-универсальная (ограниченная универсальная) обертывающая ассоциативная алгебра $U_p(L)$. Если $\dim_k L = n$, то $\dim_k U_p(L) = p^n$. Это же

замечание показывает, что для произвольной алгебры Ли имеет смысл говорить о ее наименьшей p-оболочке, или о p-замыкании.

Обычная подалгебра Ли M (идеал Ли) в L наз. p-подалгеброй (p-идеалом), если $x^{[p]} \in M$ для всех $x \in M$. Гомоморфизм $\varphi : L \to K$ Ли p-а. наз. p-гомоморфизмом, коль скоро

$$\varphi(x^{[p]}) = (\varphi(x))^{[p]}, \quad x \in L.$$

Если при этом K — линейная Ли p-а. над k, то говорят также о p-представлении φ алгебры L.

Задание p-структуры $x \to x^{[p]}$ на алгебре Ли L с базисом $\{e_1, e_2, \ldots\}$ и нулевым центром $Z(L)$ единственно и вполне определяется заданием образов $e_i^{[p]}$ базисных элементов e_i. С другой стороны, коммутативная алгебра Ли L, для к-рой всегда, очевидно, $\Lambda_p(x, y) = 0$, снабжается p-структурой путем рассмотрения пары (L, π), где π — произвольное p-полулинейное отображение

$$\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y), \quad \pi(\lambda x) = \lambda^p \pi(x), \quad \lambda \in k.$$

Над алгебраически замкнутым полем k всякая конечномерная коммутативная Ли p-а. L разлагается в прямую сумму $L = L_0 \oplus L_1$ тора

$$L_0 = \langle e_1, \ \ldots, \ e_r \mid e_i^{[p]} - e_i \rangle$$

и нильпотентной подалгебры L_1 с тождеством

$$x^{[p^m]} = (x^{[p^{m-1}]})^{[p]} = 0$$

для достаточно большого m (см. [1]).

Важным источником Ли p-а. служат теория алгебраич. групп, теория формальных групп и теория несепарабельных полей (см. [2]). Алгебра Ли $\mathrm{Der}_k(A)$ все дифференцирований произвольной алгебры A является p-подалгеброй в $\mathrm{End}_k(A)$. Если, в частности, $A = k[X]/X^p k[X]$, то $W_1 = \mathrm{Der}_k(A)$ натянута на дифференцирования $d_i : X \to X^{i+1}$, $i = -1, 0, 1, \ldots, p-2$, с правилом коммутирования

$$[d_i, d_j] = (j-i)\, d_{i+j} \quad \text{при} \quad i+j \leqslant p-2,$$
$$[d_i, d_j] = 0 \quad \text{при} \quad i+j > p+2,$$

и p-структурой

$$d_i^{[p]} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq 0, \quad d_0^{[p]} = d_0.$$

Этот пример простой Ли p-а. послужил поводом к поискам других простых алгебр. Все известные к настоящему времени (1982) конечномерные простые Ли p-а. над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 5$ исчерпываются алгебрами классич. типа (вместе с пятью исключительными). Это A_n, $n \geqslant 1$, B_n, $n \geqslant 2$, C_n, $n \geqslant 3$, D_n, $n \geqslant 4$, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 и алгебрами картановского типа W_n, $n \geqslant 1$, S_n, $n \geqslant 2$, H_n, $n \geqslant 1$, K_n, $n \geqslant 2$. Размерности последних четырех алгебр равны соответственно np^n, $n(p^{n+1}-1)$, $p^{2n}-2$ и $p^{2n-1}-\varepsilon$, где $\varepsilon = 0$ при $n+2 \not\equiv 0 (p)$ и $\varepsilon = 1$ при $n+2 \equiv 0 (p)$. Все эти алгебры определены над простым подполем поля k, так что неизоморфных простых p-алгебр фиксированной размерности — конечное число (как правило, 0, 1 или 2). Недоказанная пока (1982) гипотеза, возникшая в связи с работой [3], заключается в том, что других конечномерных простых Ли p-а. в этом случае не существует. При $p = 2$, 3, 5, однако, ситуация заведомо сложнее.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] Seligman G. B., Modular Lie algebras, B.— Hdlb.— N. Y., 1967; [3] Кострикин А. И., Шафаревич И. Р., «Докл. АН СССР», 1966, т. 168, с. 740—42; [4] Zassenhaus H., «Hamb. Abh.», 1939, Bd 13, S. 1—100.

А. И. Кострикин.

ЛИ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА — 1) Алгебра Ли алгебраич. подгруппы (см. *Алгебраическая группа*) полной линейной группы всех автоморфизмов конечно-

мерного векторного пространства V над полем k. Если $\mathfrak{g}$ — произвольная подалгебра в алгебре Ли всех эндоморфизмов V, то существует наименьшая Ли а. а., содержащая $\mathfrak{g}$; она наз. *алгебраической оболочкой подалгебры Ли* $\mathfrak{g}$. Для алгебраичности алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над произвольным алгебраически замкнутым полем k необходимо, чтобы вместе с каждым линейным оператором $u \in \mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ лежали его полупростая и нильпотентная компоненты s и n (см. *Жордана разложение*). Это условие определяет т. н. *почти алгебраические алгебры Ли*. Оно не является достаточным для того, чтобы $\mathfrak{g}$ была Ли а. а. В случае поля k характеристики 0 необходимое и достаточное условие алгебраичности алгебры Ли $\mathfrak{g}$ состоит в том, что вместе с n и $s = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_m)$ в $\mathfrak{g}$ лежат все операторы вида $\varphi(s) \cdot \mathrm{diag}(\varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_m))$, где φ — произвольное Q-линейное отображение из k в k. Исследовано [3] строение Ли а. а. в случае поля характеристики $p > 0$.

2) Алгебра Ли L над коммутативным кольцом k, в к-рой для любого элемента $x \in L$-эндоморфизм $\mathrm{ad}\, x : y \to [x, y]$, заданный на L, является корнем нек-рого многочлена со старшим коэффициентом 1 и остальными коэффициентами из k. Конечномерная над полем k алгебра Ли является Ли а. а. Обратное неверно: над любым полем k существуют бесконечномерные Ли а. а. с конечным числом порождающих [4]. Ряд вопросов о Ли а. а. получает решение уже в классе *Ли нильалгебр*.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 2, М., 1958; [3] Seligman G., Modular Lie algebras, B. — Hdlb.— N. Y., 1967; [4] Голод Е. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 273—76.

Ю. А. Бахтурин.

ЛИ БАНАХОВА ГРУППА — множество G, снабженное одновременно структурой группы и структурой аналитич. банахова многообразия; эти две структуры согласованы в следующем смысле: отображение $(g, h) \to gh^{-1}$ из $G \times G$ в G является аналитическим. В случае, если банахово многообразие конечномерно, это понятие совпадает с обычным понятием группы Ли.

Примеры. Банахово пространство с операцией сложения, множество A^* обратимых элементов в банаховой алгебре A с операцией умножения, множество $C^k(M, G)$ k-гладких функций на гладком многообразии со значениями в группе Ли G с операцией поточечного умножения являются Ли б. г. С другой стороны, множество $\mathrm{Diff}^k M$ k-гладких взаимно однозначных отображений гладкого многообразия M на себя не является Ли б. г.: естественные структуры банахова многообразия и группы (относительно операции композиции) в этом случае не согласованы.

Для Ли б. г. остаются справедливыми нек-рые основные теоремы теории групп Ли: каждой Ли б. г. соответствует банахова алгебра Ли, по к-рой, в свою очередь, восстанавливается локальная Ли б. г. Известно, однако, что не всякая локальная Ли б. г. продолжается до глобальной [2]; окрестность единицы в Ли б. г. покрывается образом экспоненциального отображения; имеется соответствие между связными замкнутыми подгруппами Ли б. г. и замкнутыми подалгебрами соответствующей алгебры Ли.

Имеются различные обобщения понятия Ли б. г. (см. [3]), в к-рых структура банахова пространства заменяется структурой линейного топологич. пространства более общего типа.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] De la Harpe P., Classical Banach — Lie algebras and Banach — Lie groups of operators in Hilbert space, B. [a. o.], 1972; [3] Omori H., Infinite dimensional Lie transformation groups, B. [a. o.], 1974.

А. А. Кириллов.

ЛИ ВПОЛНЕ РАЗРЕШИМАЯ АЛГЕБРА, треугольная алгебра Ли,— конечномерная ал-

гебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем k, для к-рой собственные значения операторов присоединенного представления $\mathrm{ad}\ X$ принадлежат k для всех $X \in \mathfrak{g}$.

Ли в. р. а. разрешима, класс всех Ли в. р. а. содержит класс нильпотентных алгебр Ли и содержится в классе экспоненциальных алгебр Ли. Он замкнут относительно перехода к подалгебрам, факторалгебрам и конечным прямым суммам, но не замкнут относительно расширений.

Ли в. р. а. над совершенным полем обладают многими свойствами разрешимых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем (теорема Ли, наличие цепочки идеалов $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$, для к-рых $\dim \mathfrak{g}_i = \dim \mathfrak{g} - i$, и др.). В произвольной конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существуют максимальные вполне разрешимые подалгебры, они содержат нильрадикал. Если $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ или если k совершенно и $\mathfrak{g}$ — алгебраич. линейная алгебра Ли, то все вполне разрешимые подалгебры сопряжены. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над k, отвечающая k-разложимой алгебраич. группе над совершенным полем k, есть Ли в. р. а.

Любая Ли в. р. а. над полем характеристики 0 изоморфно вкладывается в алгебру Ли верхних треугольных матриц с коэффициентами из k (которая сама есть Ли в. р. а.). Простейший пример Ли в. р. а., не являющейся нильпотентной,— это двумерная алгебра Ли с базисом X, Y и определяющим соотношением $[X, Y] = X$.

Лит. см. при ст. *Ли вполне разрешимая группа*.

В. В. Горбацевич.

ЛИ ВПОЛНЕ РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА, треугольная группа Ли,— связная вещественная группа Ли G, для любого элемента g к-рой собственные значения оператора присоединенного представления $\mathrm{Ad}\ g$ действительны.

Связная группа Ли G будет Ли в. р. г. тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ вполне разрешима, поэтому ряд свойств класса Ли в. р. г. параллелен свойствам *Ли вполне разрешимых алгебр*.

Для Ли в. р. г. справедлива следующая теорема о неподвижной точке [2]: всякая вполне разрешимая подгруппа Ли G проективной группы имеет неподвижную точку в каждом G-инвариантном замкнутом подмножестве действительного проективного пространства. Имеют место также другие аналоги свойств комплексных разрешимых групп Ли. Произвольная связная группа Ли G обладает максимальными связными вполне разрешимыми подгруппами Ли T, все они сопряжены в G (см. [2]). При изучении строения вещественных полупростых групп Ли подгруппа T часто используется как вещественный аналог борелевской подгруппы.

Односвязная Ли в. р. г. изоморфно вкладывается в группу вещественных верхних треугольных матриц над $\mathbb{R}$ с положительными диагональными элементами (к-рая сама есть Ли в. р. г.).

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с франц., М., 1972; [2] Винберг Э. Б., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, с. 270—73.

В. В. Горбацевич.

ЛИ ГРАДУИРОВАННАЯ АЛГЕБРА — алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем K, градуированная при помощи нек-рой абелевой группы A, т. е. разложенная в прямую сумму подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in A$, таким образом, что $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Если A — упорядоченная группа, то для каждой *фильтрованной алгебры* Ли ассоциированная с ней градуированная алгебра является Ли г. а.

Ли г. а. играют важную роль в классификации простых конечномерных алгебр Ли, йордановых алгебр и их обобщений, примитивных псевдогрупп преобразований (см. [3], [4]). Для любой полупростой вещественной алгебры Ли ее *Картана разложение* может рассматриваться как $\mathbb{Z}_2$-градуировка. Локальная классификация римановых симметрич. пространств сво-

дится к классификации $\mathbb{Z}_2$-градуированных простых комплексных алгебр Ли [6].

Некоторые конструкции градуированных алгебр Ли. 1) Пусть U — ассоциативная алгебра, снабженная возрастающей фильтрацией $(U_k : k \in \mathbb{Z})$, причем $[U_k, U_l] \subset U_{k+l-d}$, где d — фиксированное натуральное число, и $\mathfrak{u}_k = U_{k+d}/U_{k+d-1}$. Тогда операция коммутирования в U индуцирует в пространстве $\mathfrak{u} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{u}_k$ структуру $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры Ли. Таким путем могут быть получены нек-рые алгебры Ли функций с *Пуассона скобкой* в качестве коммутатора. В следующих двух примерах $U_k = U_1^k$ при $k > 0$ и $U_k = 0$ при $k < 0$. а) Пусть U — алгебра линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, U_1 — подпространство, натянутое на ее образующие $p_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $q_i = x_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $[U_k, U_l] \subset U_{k+l-2}$ и $\mathfrak{u}$ есть алгебра Ли многочленов от p_i, q_i с обычной скобкой Пуассона. б) Пусть U — универсальная обертывающая алгебра конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем $U_1 = \mathfrak{g}$. Тогда $[U_k, U_l] \subset U_{k+l-1}$ и $\mathfrak{u}$ канонически изоморфна (как векторное пространство) симметрич. алгебре над $\mathfrak{g}$, т. е. алгебре многочленов на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ (теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта). Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли связной группы Ли G, то коммутатор элементов из $\mathfrak{u}$ можно интерпретировать либо как скобку Пуассона для соответствующих левоинвариантных функций на кокасательном расслоении T^*G, либо как скобку Пуассона на каждой орбите копприсоединенного представления, определяемую посредством стандартной симплектич. структуры на этих орбитах.

2) Пусть char $K \neq 2$, E есть n-мерное векторное пространство над K, снабженное невырожденной квадратичной формой Q; $e_1, \ldots, e_n$ — нек-рый ортогональный базис в E. Разложение *Клиффорда алгебры* $C(Q)$ в сумму одномерных подпространств $\langle e_{i_1} \ldots e_{i_k} \rangle$, $i_1 < \ldots < i_k$, является ее $\mathbb{Z}_2^n$-градуировкой. При $n = 2m$ элементы алгебры $C(Q)$ с нулевым следом образуют простую Ли г. а. типа A_N, $N = 2^m - 1$; ее градуировка обладает высокой степенью симметрии; в частности, все градуирующие подпространства равноправны. Аналогичные градуировки (при помощи различных конечных групп) имеются и у других простых алгебр Ли [1].

3) Каждой *псевдогруппе* Ли преобразований отвечает нек-рая алгебра Ли векторных полей. Росток l этой алгебры Ли в любой точке обладает естественной $\mathbb{Z}$-фильтрацией

$$l = l_{-1} \supset l_0 \supset l_1 \supset \ldots,$$

где к l_k относятся ростки тех векторных полей, координаты к-рых разлагаются в степенные ряды без членов степени меньше чем $k+1$. Ассоциированная Ли г. а. может быть интерпретирована как нек-рая алгебра Ли полиномиальных векторных полей.

Классификация простых градуированных алгебр Ли. Простым примитивным псевдогруппам Ли соответствуют следующие 4 серии простых бесконечномерных Ли г. а. (см. [5]):

W_n — алгебра Ли всех полиномиальных векторных полей в n-мерном аффинном пространстве;

S_n — ее подалгебра, состоящая из векторных полей с нулевой дивергенцией;

H_n, где $n = 2m$, — подалгебра, состоящая из векторных полей, аннулирующих дифференциальную форму

$$\sum_{i=1}^{m} dx_i \wedge dx_{m+i}$$

(гамильтоновых векторных полей);

K_n, где $n=2m+1$,— подалгебра, состоящая из векторных полей, умножающих дифференциальную форму

$$\sum_{i=1}^{m}(x_{m+i}\,dx_i - x_i\,dx_{m+i}) + dx_n$$

на функцию.

Над полями характеристики $p>0$ могут быть определены простые конечномерные Ли г. а., аналогичные W_n, S_n, H_n и K_n (см. [5]).

Простые Ли г. а. другого типа получаются следующим образом [4]. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(A)$ — алгебра Ли, определяемая при помощи неразложимой матрицы Картана $A=\|a_{ij}\|$, $i, j=1, \ldots, n$ (здесь и далее употребляются обозначения статьи *Картана матрица*). Алгебра $\mathfrak{g}$ снабжается $\mathbb{Z}^k$-градуировкой так, что $h_i\in\mathfrak{g}_0$, $e_i\in\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $f_i\in\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$, где α_i — строка $(0\ldots1\ldots0)$, причем 1 стоит на i-м месте. Элементы $\alpha\in\mathbb{Z}^n$, для к-рых $\mathfrak{g}_\alpha\neq0$, наз. корнями, а α_i — простыми корнями. Всякий корень есть линейная комбинация простых корней с целыми коэффициентами одного знака и $\dim\mathfrak{g}_\alpha<\infty$ для любого $\alpha\in\mathbb{Z}^n$. Факторалгебра $\mathfrak{g}'(A)$ алгебры $\mathfrak{g}$ по ее центру, лежащему в $\mathfrak{g}_0$, проста как градуированная алгебра, т. е. не имеет нетривиальных градуирован. идеалов.

Пусть P — совокупность линейных комбинаций строк матрицы A с положительными коэффициентами. Имеет место один из следующих случаев:

(П) P содержит строку, все элементы к-рой положительны;

(Н) P содержит нулевую строку;

(О) P содержит строку, все элементы к-рой отрицательны.

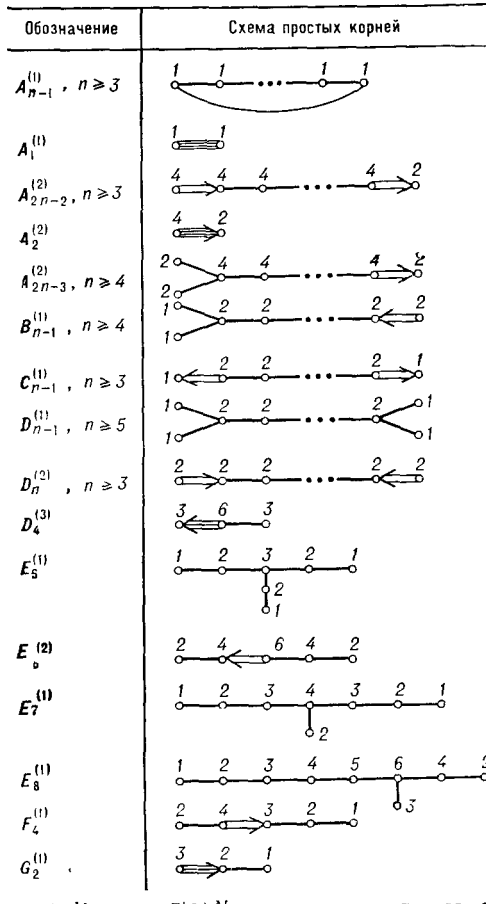
В случае (П) $\mathfrak{g}(A)=\mathfrak{g}'(A)$ — простая конечномерная алгебра Ли. В случае (О) $\mathfrak{g}(A)$ — простая бесконечномерная алгебра Ли. В случае (Н) алгебра $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}'(A)$ проста лишь как градуированная алгебра. Она может быть превращена в $K[u, u^{-1}]$-алгебру так, что: а) $u\mathfrak{g}'_\alpha=\mathfrak{g}'_{\alpha+\nu}$, где ν — нек-рая строка из положительных чисел; б) факторалгебра $\mathfrak{g}'/(1-u)\mathfrak{g}'=\bar{\mathfrak{g}}$ есть простая конечномерная алгебра Ли. Наибольший общий делитель всех компонент ν_i строки ν, равный 1, 2 или 3, наз. индексом алгебры $\mathfrak{g}'$.

В следующей таблице приведен список всех простых Ли г. а. с матрицей Картана типа (Н). Здесь алгебра $\mathfrak{g}'$ обозначается так же, как и $\bar{\mathfrak{g}}$, но с добавлением ее индекса, указываемого в скобках.

Схема простых корней описывает матрицу A. Ее вершины соответствуют простым корням; i-я и j-я вершины соединены $(a_{ij}a_{ji})$-кратным ребром, ориентированным от i-й вершины к j-й, если $|a_{ij}|>|a_{ji}|$, и неориентированным, если $|a_{ij}|=|a_{ji}|$. Возле вершин указаны числа ν_i.

С помощью Ли г. а. с матрицей Картана типа (Н) классифицируются $\mathbb{Z}_m$-градуированные простые конечномерные алгебры Ли (см. [4], [2]). А именно, пусть $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}'(A)$, где A удовлетворяет условию (Н), и $p:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}$ — такой гомоморфизм, что $p(\alpha_i)\geqslant0$ и $p(\nu)=m$. Тогда $\mathfrak{g}'_k=\sum_{p(\alpha)=k}\mathfrak{g}'_\alpha$ при любом $k\in\mathbb{Z}$ изоморфно отображается на подпространство $\mathfrak{g}_k\subset\bar{\mathfrak{g}}$, зависящее только от вычета k по модулю m, и разложение $\bar{\mathfrak{g}}=\sum_{k=0}^{m-1}\mathfrak{g}_k$ есть $\mathbb{Z}_m$-градуировка алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Если поле K алгебраически замкнуто, то описанным способом получаются, причем без повторений, все $\mathbb{Z}_m$-градуированные простые конечномерные алгебры Ли над K. Индекс алгебры $\mathfrak{g}'$ равен порядку автоморфизма $\theta: x\mapsto\left(\exp\frac{2\pi i}{m}\right)x$, $x\in\bar{\mathfrak{g}}_k$, алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ по модулю группы внутренних автоморфизмов.

Имеется классификация простых $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли $\mathfrak{g}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathfrak{g}_k$, удовлетворяющих ус-



ловиям: а) $\dim \mathfrak{g}_k \leqslant C|k|^N$ для нек-рых C и N; б) $\mathfrak{g}$ порождается подпространством $\mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$; в) представление $\mathfrak{g}_0$ на $\mathfrak{g}_{-1}$ неприводимо. В этом случае либо $\mathfrak{g}$ конечномерна, либо $\mathfrak{g}$ есть одна из алгебр W_n, S_n, H_n, K_n, либо $\mathfrak{g}$ есть алгебра $\mathfrak{g}'(A)$, определяемая матрицей Картана типа (H), снабженная подходящей $\mathbb{Z}$-градуировкой [4].

Иногда $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй Ли наз. *супералгебра* Ли.

Лит.: [1] Алексеевский А. В., «Функциональный анализ и его приложения», 1974, т. 8, № 4, с. 1—4; [2] Винберг Э. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, № 3, с. 488—526; [3] Кантор И. Л., «Тр. семинара по векторному и тензорному анализу...», 1972, в. 16, с. 407—99; [4] Кац В. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1968, т. 32, № 6, с. 1323—67, [5] Кострикин А. И., Шафаревич И. Р., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 2, с. 252—322; [6] Helgason S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, N. Y., 1978. *Э. Б. Винберг.*

ЛИ ГРУППА — группа G, обладающая такой структурой *аналитического многообразия*, что отображение $\mu : (x, y) \to xy^{-1}$ прямого произведения $G \times G$ в G аналитично. Другими словами, Ли г.— это множество, наделенное согласованными структурами группы и аналитич. многообразия. Ли г. наз. вещественной, комплексной или p-адической в зависимости от поля, над к-рым рассматривается ее аналитич. многообразие. В дальнейшем, как правило, рассматриваются вещественные Ли г. (всякая комплексная Ли г. естественно наделяется структурой вещественной Ли г.— с помощью конструкции ограничения основного поля; о Ли г. над полями p-адических чисел см. *Ли p-адическая группа*, *Аналитическая группа*).

Примеры Ли г. Полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел (см.

Линейная группа) и ее подгруппы, замкнутые в естественной евклидовой топологии.

Основные понятия теории Ли г. введены в математику в 70-е гг. 19 в. С. Ли (S. Lie). Ли г. возникли в связи с проблемой разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах и исследованием непрерывных групп преобразований. Успешное применение теории групп к решению алгебраич. уравнений высших степеней, выразившееся в создании теории Галуа, повлекло за собой попытку построения аналога теории Галуа для дифференциальных уравнений. И хотя группы в теории дифференциальных уравнений заняли несколько иное место, нежели в теории алгебраич. уравнений, это привело к созданию теории Ли г., а также теории алгебраич. групп, глубоко связанных со многими областями математики. Первоначально Ли г. определялись как локальные группы преобразований, т. е. как семейства локальных аналитич. преобразований n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$), аналитически зависящих от конечной системы параметров, причем требовалось, чтобы параметры произведения преобразований выражались через параметры сомножителей посредством аналитич. функций. Позже перешли к абстрактному рассмотрению Ли г., но также с локальной точки зрения (см. *Ли локальная группа)*. Систематич. исследование глобального строения Ли г. первыми начали Э. Картан (E. Cartan) и Г. Вейль (H. Weyl). Первое современное изложение теории Ли г. было дано в 1938 Л. С. Понтрягиным (см. [1]).

Возникает вопрос, не приведет ли замена аналитичности многообразия G и отображения μ дифференцируемостью к расширению класса Ли г.? Этот вопрос был решен еще С. Ли: если μ дважды непрерывно дифференцируемо, то G является Ли г. Значительно более сложной оказалась п я т а я п р о б л е м а Г и л ь б е р т а: пусть G есть n-мерное топологич. многообразие и отображение $\mu : (x, y) \to xy^{-1}$ непрерывно, будет ли G Ли г.? Для компактных групп эта проблема была решена положительно Дж. Нейманом (J. Neumann) в 1933, а для локально компактных абелевых групп — Л. С. Понтрягиным в 1934. В общем случае положительное решение было получено в 1952 А. М. Глисоном (A. M. Gleason), Д. Монтгомери и Л. Зиппином (см. [13], а также [18]). Таким образом, можно определить Ли г. как топологич. группу, топологич. пространство к-рой является конечномерным (или локально евклидовым) многообразием, что весьма важно для общей теории топологич. групп.

Подмножество H Ли г. G наз. п о д г р у п п о й (точнее, п о д г р у п п о й Л и), если H является подгруппой абстрактной группы G и подмногообразием аналитич. многообразия G. М о р ф и з м Л и г. G_1 Ли г. G_2 — это аналитич. отображение $f : G_1 \to G_2$, являющееся гомоморфизмом абстрактных групп; если к тому же f биективно, а f^{-1} аналитично, то f наз. и з о м о р ф и з м о м Л и г.; в случае локальной биективности f, говорят, что Ли г. G_1 и G_2 л о к а л ь н о и з о м о р ф н ы. Пусть H — замкнутая нормальная подгруппа Ли г. G. Тогда факторгруппа G/H наделяется такой структурой аналитич. многообразия, что G/H превращается в Ли г., а канонич. отображение $G \to G/H$ является морфизмом. Р а з м е р н о с т ь ю Ли г. G наз. размерность G как аналитич. многообразия. В дальнейшем рассматриваются только конечномерные Ли г., хотя многие результаты обобщаются на случай *Ли банаховых групп*.

Соответствие между группами и алгебрами Ли. Основным методом исследования в теории Ли г. является инфинитезимальный метод, созданный С. Ли. Этот метод позволяет в значительной мере редуцировать изучение такого сложного объекта, как Ли г., к изучению чисто алгебраич. объекта — *Ли алгебры*. Каж-

дой Ли г. G сопоставляется алгебра Ли $L(G)$, к-рая строится следующим образом (см. также *Ли алгебра аналитической группы*). Левоинвариантным векторным полем на G наз. векторное поле, инвариантное относительно дифференциалов левых сдвигов, т. е. X — левоинвариантное векторное поле, если $(dL_g)X(h)=X(gh)$ для любых $g, h\in G$, где $L_g(h)=gh$. Левоинвариантные векторные поля на G образуют векторное пространство, к-рое можно отождествлять с касательным пространством $T_e(G)$ в единице e группы G, сопоставляя полю X его значение в e. Если $X, Y\in T_e(G)$, то с к о б к а Л и $X\circ Y-Y\circ X$ также будет левоинвариантным полем и это задает в $T_e(G)$ билинейную операцию, относительно к-рой $T_e(G)$ становится алгеброй Ли $L(G)$ (здесь $\circ$ означает композицию векторных полей, рассматриваемых как дифференцирования алгебры бесконечно дифференцируемых действительно-значных функций на многообразии G). Можно дать более явную конструкцию операции коммутирования $[X, Y]$ в $L(G)$. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — интегральные кривые полей X, Y в G, проходящие через единицу группы. Тогда $[X, Y]$ будет касательным вектором в точке e к кривой

$$z(s)=x(\sqrt{s})\,y(\sqrt{s})\,x(\sqrt{s})^{-1}\,y(\sqrt{s})^{-1}.$$

Восстановить группу Ли G по ее алгебре Ли $L(G)$ позволяет экспоненциальное отображение $\exp: L(G)\to G$, сопоставляющее полю $X\in L(G)$ элемент x (1) его интегральной кривой $x(t)$. Если G — линейная Ли г., т. е. подгруппа полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, то $L(G)$ отождествляется с подалгеброй полной матричной алгебры Ли $L(n, \mathbb{R})$ и экспоненциальное отображение принимает вид

$$\exp X=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}A^m.$$

Отображение $\exp: L(G)\to G$ аналитично и локально изоморфно, и поэтому определяет в окрестности единицы группы G локальную карту (к а н о н и ч е с к и е к о о р д и н а т ы). Согласно *Кэмпбелла — Хаусдорфа формуле* запись умножения в G в канонич. координатах, т. е. отображение

$$(X, Y)\longrightarrow \exp^{-1}(\exp X\exp Y),\ X, Y\in L(G),$$

выражается через операции в алгебре Ли $L(G)$. Таким образом, локально Ли г. полностью определяется своей алгеброй Ли.

Соответствие между группами и алгебрами Ли обладает глубокими функториальными свойствами. Ли г. определяется своей алгеброй Ли с точностью до локального изоморфизма; в частности, если Ли г. G_1 и G_2 связны и односвязны, то из изоморфизма их алгебр Ли следует изоморфизм $G_1\cong G_2$. Связные подгруппы Ли г. G взаимно однозначно соответствуют подалгебрам алгебры Ли $L(G)$. Пусть $f: G_1\to G_2$ — морфизм двух Ли г. Тогда дифференциал морфизма в единице оказывается гомоморфизмом алгебр Ли:

$$df_e: L(G_1)\longrightarrow L(G_2).$$

Вообще говоря, не всякий гомоморфизм $L(G_1)\to L(G_2)$ имеет вид df_e, однако в случае односвязной группы G_1 это так. Связная подгруппа H связной Ли г. G тогда и только тогда нормальна, когда $L(H)$ является идеалом в алгебре Ли $L(G)$; если к тому же H замкнута в G, то

$$L(G/H)\cong L(G)/L(H).$$

По построению алгебра Ли $L(G)$ данной Ли г. G является аналитически инвариантной. В действительности же $L(G)$ топологически инвариантна, что непосредственно вытекает из следующей т е о р е м ы К а р т а н а: непрерывное гомоморфное отображение (вещe-

ственной) Ли г. G в Ли г. H является морфизмом. Для комплексных Ли г. последнее утверждение не всегда верно, хотя оно сохраняет силу для p-адических Ли г. (см. [3]). Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$ связной Ли г. G является Ли г., к-рая отождествляется с подгруппой группы $\mathrm{Aut}(L(G))$. В частности, если Ли г. G односвязна, то

$$\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(L(G)) \text{ и } L(\mathrm{Aut}(G)) \simeq D(L(G)),$$

где $D(L(G))$ обозначает алгебру Ли дифференцирований алгебры $L(G)$. Соответствие

$$g \longrightarrow \mathrm{Ad}(g) = d_e(\mathrm{Int}(g)),$$

где $\mathrm{Int}(g)$ — внутренний автоморфизм, порожденный элементом $g \in G$, наз. присоединенным представлением Ли г. G; его дифференциал будет присоединенным представлением $x \to \mathrm{ad}x$ алгебры Ли $L(G)$.

Глобальное строение групп Ли. Важным результатом здесь является теорема существования глобальной Ли г. с заданной вещественной алгеброй Ли, доказанная в 1930 Э. Картаном. Он показал также, что замкнутая подгруппа вещественной Ли г. является подгруппой Ли. К этому времени выявилась особая роль двух типов Ли г.: полупростых и разрешимых (см. *Ли полупростая группа*, *Ли разрешимая группа*). Связная Ли г. G наз. полупростой, если она не содержит неединичных связных разрешимых нормальных подгрупп; если к тому же G не содержит и других нетривиальных связных нормальных подгрупп, то она наз. простой. Алгебра Ли $L(G)$ полупростой, простой или разрешимой Ли г. G является соответственно полупростой, простой или разрешимой алгеброй Ли. Исследование произвольных Ли г. в существенной степени сводится к изучению полупростых и разрешимых. Всякая Ли г. G обладает наибольшей связной разрешимой нормальной подгруппой, к-рая наз. разрешимым радикалом и обозначается $R(G)$. В группе G существуют максимальные полупростые подгруппы. Если S — одна из них, то $G = S \cdot R(G)$, причем все максимальные полупростые подгруппы сопряжены; если G односвязна, то $S \cap R(G) = (e)$ и произведение будет полупрямым (теорема Леви — Мальцева). Существование этого разложения доказано впервые Э. Леви (E. Levi) в 1905 для комплексных алгебр Ли, сопряженность полупростых компонент установлена А. И. Мальцевым в 1942 (см. [16], а также *Леви — Мальцева разложение*).

Наиболее общий факт о разрешимых Ли г. получен еще С. Ли: всякая связная разрешимая линейная группа над полем $\mathbb{C}$ приводится к треугольному виду, т. е. описание связных разрешимых Ли г. сводится к описанию подгрупп полной треугольной группы $T(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Детальное исследование разрешимых Ли г. провел А. И. Мальцев в [16].

При изучении строения полупростых Ли г. важную роль играют их максимальные компактные подгруппы, изученные Э. Картаном в тесной связи с теорией симметрич. пространств (см. [10]). Согласно классич. теореме Картана максимальные компактные подгруппы полупростой Ли г. G сопряжены; если B — максимальная компактная подгруппа в G, то существует такое подмногообразие $E \subset G$, аналитически изоморфное евклидову пространству, что $G = BE$, причем отображение $B \times E \to BE$, $(b, e) \to be$, является изоморфизмом аналитич. многообразий. Таким образом, топологич. строение группы G определяется топологич. строением группы B. А. И. Мальцев [16] распространил теорему Картана на произвольные связные Ли г. Другое разложение связной Ли г. в произведение максимальной компактной подгруппы и евклидова простран-

ства было найдено К. Ивасавой (см. *Ивасавы разложение*).

Линейная представимость. С самого начала развития теории Ли г. было ясно, что произвольные Ли г. близки к линейным группам Ли. С. Ли доказал, что во многих случаях Ли г. локально изоморфны линейным Ли г. Общая теорема была получена И. Д. Адо в 1935: всякая Ли г. локально изоморфна линейной (см. [15]). В то же время нетрудно указать примеры Ли г., не являющихся линейными: такой будет односвязная накрывающая группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ или (в случае поля $\mathbb{C}$) комплексный компактный тор. Если G — односвязная разрешимая группа Ли, то всякая ее подгруппа Ли односвязна и изоморфна линейной группе Ли. В общем случае найден следующий критерий для линейной представимости [16]: связная Ли г. G тогда и только тогда является линейной, когда линейны ее радикал $R(G)$ и полупростая факторгруппа $G/R(G)$; в свою очередь, для линейной представимости радикала $R(G)$ необходимо и достаточно, чтобы его коммутант был односвязен, а линейность полупростой Ли г. $G/R(G)$ зависит от строения ее центра. Компактные, а также комплексные полупростые Ли г. не только линейны, но и являются *линейными алгебраическими группами* [12].

Классификация. Одной из главных проблем теории Ли г. является проблема классификации произвольных связных Ли г. с точностью до изоморфизма. В классе всех локально изоморфных связных Ли г., имеющих одну и ту же алгебру Ли, существует единственная односвязная Ли г. G_0, и всякая Ли г. G из этого класса изоморфна G_0/N, где N — нек-рая дискретная центральная нормальная подгруппа. Поэтому классификация Ли г. сводится к классификации конечномерных алгебр Ли и вычислению центров односвязных Ли г. С другой стороны, она сводится к классификации двух принципиально различных типов групп: полупростых и разрешимых (см. *Ли полупростая группа*, *Ли разрешимая группа*). На первый взгляд разрешимые Ли г. устроены проще и их классификация, казалось бы, не должна быть трудной. Однако это впечатление обманчиво и пока (1982) нет никакой надежды получить классификацию разрешимых Ли г. Полупростые Ли г., напротив, удалось полностью классифицировать. Полную классификацию комплексных полупростых алгебр Ли получил В. Киллинг (W. Killing) в 1888 -90 (см. [1], [3]). Так как комплексная полупростая алгебра Ли является прямой суммой простых подалгебр, то достаточно классифицировать простые алгебры Ли. Оказалось, что существует лишь девять различных типов комплексных простых алгебр Ли, а именно, четыре бесконечные серии

$$A_n,\ n \geqslant 1,\ B_n,\ n \geqslant 2,\ C_n,\ n \geqslant 2,\ D_n,\ n \geqslant 4,$$

и пять исключительных алгебр

$$G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8$$

(см. также *Ли полупростая алгебра*). Бесконечным сериям комплексных простых алгебр Ли соответствуют классические линейные группы Ли. Соответствующие односвязные группы имеют вид: тип A_n — $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$, тип B_n — $\mathrm{Spin}(f_{2n+1})$, где $\mathrm{Spin}(f_{2n+1})$ обозначает *спинорную группу*, соответствующую невырожденной квадратичной форме f_{2n+1} размерности $2n+1$; тип C_n — *симплектическая группа* степени $2n$; тип D_n — $\mathrm{Spin}(f_{2n})$. Нетрудно вычисляются центры этих групп. Напр., центр $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$ — циклич. группа порядка $n+1$, а центры $\mathrm{Spin}(f_{2n+1})$ и симплектич. группы — циклич. группы 2-го порядка. Так получается классификация комплексных полупростых Ли г. Классификация вещественных полупростых Ли г. оказывается значительно сложнее и опирается на классификацию

их вещественных форм. Наиболее важен здесь факт существования у всякой комплексной полупростой группы G единственной компактной вещественной формы B; это означает, что алгебра Ли $L(G)$ изоморфна $L(B)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, т. е. получается комплексификацией алгебры Ли $L(B)$. Основываясь на этом, Э. Картан в 30-х гг. 20 в. получил полную классификацию вещественных форм комплексных полупростых Ли г. В терминах *Галуа когомологий* это равносильно описанию множества $H^1(\mathbb{R}, \mathrm{Aut}(G))$ (см. также *Линейная алгебраическая группа*).

Впоследствии метод Киллинга был усовершенствован Э. Картаном и Г. Вейлем, что дало возможность решить ряд других классификационных проблем, а также развить важную теорию представлений Ли г. Получена классификация полупростых подгрупп классич. комплексных простых Ли г. (см. [17]).

Современное развитие и применения. В 50-х гг. 20 в. в теории Ли г. начался новый этап развития, что выразилось, в частности, в создании теории алгебраич. групп (см. *Линейная алгебраическая группа*). Еще ранее К. Шевалле (C. Chevalley, см. [12]) детально объяснил алгебраич. природу основных результатов теории Ли. Привлечение методов алгебраич. геометрии позволило по-новому осветить эти классич. результаты и открыло новые глубокие связи с теорией функций, теорией чисел и т. д. Значительное развитие получила теория p-адических групп Ли (см. [3], [6]). Ли г. связаны практически со всеми основными разделами математики: с геометрией и топологией — через теорию *Ли групп преобразований*, с анализом — через теорию линейных представлений и т. д. Чрезвычайно важны также разнообразные применения Ли г. в физике и механике.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли, пер. с франц., [гл. 1—8], М., 1972—78; [4] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [5] Вигнер Е., Теория групп и ее приложения к квантомеханической теории атомных спектров, пер. с англ., М., 1961; [6] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [7] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [8] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [9] Хамермеш М., Теория групп и ее применение к физическим проблемам, пер. с англ., М., 1966; [10] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [11] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М.— Л., 1940; [12] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ. и франц., т. 1—3, М., 1948—58; [13] Hochschild G., The Structure of Lie Groups, S. F., 1965; [14] Montgomery D., Zippin L., Topological transformation groups, N. Y.— L., 1955; [15] Адо И. Д., «Изв. Физ.-матем. об-ва» (Казань), 1935, т. 7, с. 1—43; [16] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1945, т. 16, с. 163—90; [17] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, № 4, с. 143—74; [18] Скляренко Е., в кн.: Проблемы Гильберта, М., 1969, с. 101—15.

В. П. Платонов.

ЛИ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ — гладкое действие связной группы Ли G на гладком многообразии M, т. е. гладкое (класса C^∞) отображение $A: G\times M\to M$ такое, что:

(I) $A(g'g'', m) = A(g', A(g'', m)) \quad \forall g', g''\in G, m\in M$;

(II) $A(e, m) = m \quad \forall m\in M$

(e — единица группы G).

Ли г. п., удовлетворяющая также условию:

(III) если $A(g, m) = m \quad \forall m\in M$, то $g = e$,

наз. эффективной.

Примеры Ли г. п. Любое гладкое линейное представление группы Ли G в конечномерном векторном пространстве M; действие группы Ли G на себе с помощью левых или правых сдвигов $A(g, m) = gm$ или $A(g, m) = mg^{-1}$ соответственно ($g, m\in G$); действие группы Ли G на себе с помощью внутренних автоморфизмов $A(g, m) = gmg^{-1}$ ($g, m\in G$); *однопараметрическая группа преобразований*, т. е. гладкое действие группы $\mathbb{R}$ на многообразии M.

Наряду с определенными выше глобальными Ли г. п. рассматриваются также л о к а л ь н ы е Ли г. п., являвшиеся основным объектом классич. теории групп Ли [1]. При этом вместо G рассматривается локальная группа Ли, т. е. окрестность U единицы в нек-рой группе Ли, а вместо M — открытое подмножество $W \subset \mathbb{R}^n$.

Если G — Ли г. п. на M, то, выбрав подходящие окрестность $U \ni e$ в G и открытое подмножество $W \subset M$, получают локальную Ли г. п. Обратный переход — от локальной Ли г. п. к глобальной (г л о б а л и з а ц и я) — возможен не всегда. Однако если $\dim M \leqslant 4$ и W достаточно мало, то глобализация возможна (см. [2]).

Иногда рассматриваются Ли г. п. класса C^k, $1 \leqslant k \leqslant \infty$, или C^ω (аналитические), т. е. предполагается принадлежность отображения A соответствующему классу. Если A непрерывно, то для его принадлежности классу C^k или C^ω достаточно, чтобы для любого $g \in G$ преобразование $A_g : m \to A(g, m)$ многообразия M принадлежало этому классу (см. [3]). В частности, задание Ли г. п. G на M эквивалентно заданию непрерывного гомоморфизма $G \to \mathrm{Diff}\, M$ в группу $\mathrm{Diff}\, M$ диффеоморфизмов многообразия M, снабженную естественной топологией.

Любой Ли г. п. соответствует гомоморфизм $A_* : \mathfrak{g} \to \Phi(M)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в алгебру Ли $\Phi(M)$ гладких векторных полей на M, сопоставляющий элементу $X \in \mathfrak{g}$ поле скоростей однопараметрич. группы преобразований

$$(t, m) \to A(\exp tX, m),$$

где $t \in \mathbb{R}$, $m \in M$, $\exp : \mathfrak{g} \to G$ — экспоненциальное отображение (см. [5]). Если G эффективна, то гомоморфизм A_* инъективен. Для связной группы G гомоморфизм A_* полностью определяет Ли г. п. Обратно, любому гомоморфизму $\beta : \mathfrak{g} \to \Phi(M)$ отвечает локальная Ли г. п. [6]. Если все векторные поля из $\beta(\mathfrak{g})$ п о л н ы (т. е. их интегральные кривые $x(t)$ определены для всех t), то существует глобальная Ли г. п. G на M, для к-рой $\mathrm{Im}\, A_* \mathfrak{g}$. Достаточно потребовать, чтобы $\beta(\mathfrak{g})$ как алгебра Ли порождалась полными векторными полями; условие полноты автоматически выполнено, если M компактно [4].

Если G — Ли г. п. многообразия M, то стационарная подгруппа $G_m = \{g \in G \mid A(g, m) = m\}$ для любой точки $m \in M$ является замкнутой подгруппой Ли в G; ее называют также с т а б и л и з а т о р о м, или п о д г р у п п о й и з о т р о п и и, точки m. Соответствующая подалгебра Ли $\mathfrak{g}_m \subset \mathfrak{g}$ состоит из всех таких $X \in \mathfrak{g}$, что $A_*(X)_m = 0$. Подалгебра $\mathfrak{g}_m$ непрерывно зависит от m в естественной топологии на множестве всех подалгебр в $\mathfrak{g}$ [7]. Орбита $G(m) = \{A(g, m), g \in G\}$ точки m является погруженным подмногообразием в M, диффеоморфным G/G_m. Если G компактна, то все орбиты являются компактными вложенными подмногообразиями. Примеры невложенных орбит дает действие группы $\mathbb{R}$ на торе

$$T^2 = \{(z_1, z_2) \mid z_i \in \mathbb{C}, \quad |z_i| = 1, \quad i = 1, 2\},$$

заданное формулой

$$A(t, (z_1, z_2)) = (e^{it} z_1, e^{i\alpha t} z_2),$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ иррационально.

Ли г. п. $A_i : G \times M_i \to M_i$, $i = 1, 2$, наз. п о д о б н ы м и, если существует такой диффеоморфизм $f : M_1 \to M_2$, что $A_1(g, m) = A_2(g, f(m))$, $g \in G$, $m \in M_1$. Важной задачей теории групп преобразований является задача классификации Ли г. п. с точностью до подобия. В настоящее время (1982) она решена лишь в нек-рых частных случаях. Еще С. Ли [1] дал классификацию локальных Ли г. п. в областях пространства $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$ с

точностью до локального подобия. Частичная классификация проведена для Ли г. п. на трехмерных многообразиях. Хорошо изучены также компактные Ли г. п. О транзитивных Ли г. п. см. *Однородное пространство.*

Лит.: [1] Lie S., «Math. Ann.», 1880, Bd 16, S. 441—528; [2] Mostow G., «Ann. Math.», 1950, v. 52, p. 606—36; [3] Bochner S., Montgomery D., «Ann. Math.», 1945, v. 46, p. 685 94; [4] Palais R., «Mem. Amer. Math. Soc.», 1957, v. 22, p. 1 123; [5] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, пер. с нем., М., 1975; [6] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [7] Richardson R., в кн.: Proceedings of the conference on transformation groups, New Orleans, 1967, B.— [a. o.], 1968, p. 429—40; [8] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М.— Л., 1940.

В. В. Горбацевич.

ЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ тензорного поля Q по направлению векторного поля X — главная линейная часть приращения тензорного поля Q при его преобразовании, к-рое индуцировано локальной однопараметрич. группой φ_t преобразований многообразия, порожденной полем X. Ли д. $\delta_X Q$ тензорного поля Q по направлению векторного поля X равен $(\mathcal{L}_X Q)\,dt$, где $\mathcal{L}_X Q$ — *Ли производная* тензорного поля Q по направлению X.

Понятие Ли д. допускает следующую физич. интерпретацию. Если однопараметрич. группа преобразований φ_t области евклидова пространства описывает стационарный поток жидкости с полем скоростей X, t — время, а Q есть тензорное поле, описывающее ту или иную характеристику жидкости (тензор скоростей деформации, тензор напряжений, плотность и т. п.), то Ли д. $\delta_X Q$ описывает главную линейную часть изменения со временем поля Q с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с жидкостью, т. е. в переменных Лагранжа.

Д. В. Алексеевский.

ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ — естественная операция на дифференцируемом многообразии, сопоставляющая дифференцируемому векторному полю X и дифференцируемому геометрич. объекту Q на многообразии M нек-рый новый геометрич. объект $\mathcal{L}_X Q$, описывающий скорость изменения геометрич. объекта Q относительно однопараметрич. группы преобразований φ_t многообразия M, порожденной полем X. Геометрич. объект $\mathcal{L}_X Q$ наз. производной Ли геометрического объекта Q относительно векторного поля X.

В частном случае, когда Q есть векторнозначная функция на M, ее производная Ли $\mathcal{L}_X Q$ совпадает с производной $\partial_X Q$ функции Q по направлению векторного поля X и задается формулой

$$(\mathcal{L}_X Q)(x) = \frac{d}{dt}\, Q \circ \varphi_t(x)\Big|_{t=0}, \quad x \in M,$$

где φ_t — локальная однопараметрич. группа преобразований многообразия M, порожденная полем X, или в локальных координатах x^i — формулой

$$\mathcal{L}_X Q(x^i) = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j} Q(x^i),$$

где

$$X = \sum_j X^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

В общем случае определение Ли д. состоит в следующем. Пусть W — нек-рое $\mathrm{GL}^k(n)$-пространство, т. е. многообразие с фиксированным действием полной дифференциальной группы $\mathrm{GL}^k(n)$ порядка k (группы k-струй в нуле диффеоморфизмов $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(0) = 0$). Пусть $Q : P^k M \to W$ — геометрич. объект порядка k типа w на n-мерном многообразии M, рассматриваемый как $\mathrm{GL}^k(n)$-эквивариантное отображение главного $\mathrm{GL}^k(n)$-расслоения реперов $P^k M$ k-го порядка на M в W. Локальная однопараметрич. группа преобра-

зований φ_t многообразия M, порожденная векторным полем X на M, индуцирует локальную однопараметрич. группу преобразований $\varphi_t^{(k)}$ многообразия кореперов P^kM. Ее поле скоростей

$$X^{(k)} = \frac{d}{dt}\,\varphi_t^{(k)}\Big|_{t=0}$$

наз. полным лифтом поля X на P^kM. Производная Ли геометрич. объекта Q типа M относительно векторного поля X на M определяется как геометрич. объект $\mathscr{L}_XQ$ типа TW (где TW — касательное расслоение многообразия W, рассматриваемое естественным образом как $\mathrm{GL}^k(n)$-пространство), задаваемый формулой

$$\mathscr{L}_XQ = \frac{d}{dt}\,Q\circ\varphi_t^{(k)}\Big|_{t=0}.$$

Значение производной Ли $\mathscr{L}_XQ$ в точке $p_k\in P^kM$ зависит, и притом линейно, только от 1-струи в точке p_k отображения Q и от значения в этой точке векторного поля $X^{(k)}$ (или, что эквивалентно, от k-струи поля X в соответствующей точке $x\in M$).

Если геометрич. объект Q линеен, т. е. соответствующее $\mathrm{GL}^k(n)$-пространство W является векторным пространством с линейным действием группы $\mathrm{GL}^k(n)$, то касательное многообразие TW естественным образом отождествляется с прямым произведением $W\times W$, и поэтому производную Ли

$$\mathscr{L}_XQ\colon\ P^kM \longrightarrow TW = W\times W$$

можно рассматривать как пару геометрич. объектов типа W. Первый из них есть само Q, а второй, обычно отождествляемый с самой производной Ли линейного геометрич. объекта Q, равен производной $\partial_{X^{(k)}}Q$ функции Q по направлению векторного поля $X^{(k)}$:

$$\mathscr{L}_XQ = (Q,\ \partial_{X^{(k)}}Q).$$

Таким образом, производную Ли линейного геометрич. объекта можно рассматривать как геометрич. объект того же типа, что и Q.

Локальные координаты x^i в многообразии M определяют локальные координаты $x^i,\ y^i_j$ в многообразии P^1M кореперов 1-го порядка:

$$\theta\in P^1M,\quad \theta = \sum_j y^i_j\,dx^j.$$

В этих координатах производная Ли любого геометрич. объекта $Q = Q(x^i,\ y^i_j)$ 1-го порядка (напр., тензорного поля) по направлению векторного поля

$$X = \sum_j X^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

задается формулой

$$(\mathscr{L}_XQ)\,(x^i,\ y^i_j) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x^i}\,Q - \sum_{i,\,j,\,l} y^i_l\,X^l_j\frac{\partial}{\partial y^i_j}\,Q,$$

где

$$X^l_j = \frac{\partial}{\partial x^j}\,X^l.$$

Аналогичная формула справедлива для производной Ли геометрич. объекта любого порядка.

Производная Ли $\mathscr{L}_X$ в пространстве дифференциальных форм на многообразии M выражается через оператор внешнего дифференцирования d и оператор внутреннего умножения i_X (определяемый как свертка векторного поля с дифференциальной формой) с помощью следующей формулы гомотопии:

$$\mathscr{L}_X = d\circ i_X + i_X\circ d.$$

Обратно, оператор внешнего дифференцирования d,

действующий на p-форму ω, выражается через Ли д. по формуле

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}\mathcal{L}_{X_i}\omega\times$$

$$\times(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{p+1})+$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega(\mathcal{L}_{X_i}X_j, X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{p+1}),$$

где $\hat{}$ означает, что соответствующий символ должен быть пропущен, $X_1, \ldots, X_{p+1}$ — векторные поля.

В отличие от *ковариантного дифференцирования*, требующего введения связности, операция Ли д. определяется структурой дифференцируемого многообразия, а производная Ли геометрич. объекта Q по направлению векторного поля X является конкомитантом геометрич. объектов X и Q.

Лит.: [1] Slebodziński W., «Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique», 1931, v. 17, p. 864—70; [2] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1965, М., 1967, с. 429—65; [3] Yano K., The theory of Lie derivatives and its applications, Amst., 1957; [4] Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1970; [5] Вагнер В., «Докл. АН СССР», 1945, т. 46, с. 383—86; [6] Лаптев Б. Л., «Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу», 1956, т. 10, с. 227—48; [7] Евтушик Л. Е., «Докл. АН СССР», 1960, т. 132, с. 998—1001; [8] Palais R. S., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1954, v. 5, p. 902—08.

Д. В. Алексеевский.

ЛИ КВАДРИКА — одна из *соприкасающихся квадрик* к поверхности в геометрии эквиаффинной или проективной группы. В гиперболич. точке M_0 она определяется следующим образом.

Пусть дано векторное поле $v^i(t)$ вдоль линии $L: u^i(t)$, к-рая является асимптотической (или, по крайней мере, имеет в M_0 касание 2-го порядка с асимптотической). Квадрика, содержащая три бесконечно близкие прямые, проходящие через три точки линии $u^i(t)$ в направлении векторов $v^i(t)r_i(t)-c^i\overset{\circ}{r}_i-c\overset{\circ}{N}$, $\overset{\circ}{r}_1, \overset{\circ}{r}_2, \overset{\circ}{N}$ — репер в M_0, N — аффинная нормаль, и наз. квадрикой Ли. Ее уравнение имеет вид

$$g_{ij}\xi^i\xi^j + H\xi\xi - 2\xi\cdot 0,$$

где $(\xi^1 : \xi^2 : \xi : 1)$ вместе с $(c^1 : c^2 : c : 1)$ — однородные координаты указанных прямых, g_{ij} — асимптотич. тензор, H — аффинная средняя кривизна.

Ли к. (наряду с квадрикой Вильчинского и квадрикой Фубини) принадлежат пучку *Дарбу квадрик*. Первая имеет уравнение

$$g_{ij}\xi^i\xi^j + \varkappa\xi\xi - 2\xi\cdot 0,$$

для нее L — геодезическая 1-го рода, а вторая — уравнение

$$g_{ij}\xi^i\xi^j + \frac{2}{3}(H+\varkappa)\,\xi\xi - 2\xi\cdot 0,$$

для нее L имеет M_0 касание 3-го порядка; здесь $\varkappa$ — гауссова кривизна тензора g_{ij}.

Понятие Ли к. введено в его письме к Ф. Клейну (F. Klein) от 18.12.1878 (см. [1]).

Лит.: [1] Lie S., Gesammelte Abhandlungen. Anmerkungen zum 3-ten Bd, Lpz.— Oslo, 1922, S. 718; [2] Широков П. А., Широков А. П., Аффинная дифференциальная геометрия, М., 1959; [3] Фиников С. П., Проективно дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937.

М. И. Войцеховский.

ЛИ КОЛЬЦО, лиево кольцо,— кольцо A, удовлетворяющее следующим условиям:

$$a^2 = 0$$

и

$$(ab)c+(bc)a+(ca)b=0$$

(тождество Якоби), где a, b, c — любые элементы из кольца A. Первое из этих условий влечет антикоммутативность кольца A:

$$ba = -ab.$$

Ли к. образуют многообразие колец, в общем случае

неассоциативных. В него входят, однако, все кольца с нулевым умножением.

См. также *Неассоциативные кольца и алгебры.*

О. А. Иванова.

ЛИ КОМПАКТНАЯ ГРУППА — компактная группа, являющаяся конечномерной вещественной группой Ли. Ли к. г. могут быть охарактеризованы как конечномерные локально связные компактные топологич. группы.

Если G^0 — связная компонента единицы Ли к. г. G, то группа связных компонент G/G^0 конечна. Собственно к теории групп Ли относится изучение строения связных Ли к. г.

Следующие примеры связных Ли к. г. играют важную роль в общей структурной теории Ли к. г.

1) Мультипликативная группа T^1 всех комплексных чисел, равных по модулю 1.

2) Группа $\mathrm{SU}(n)$ всех комплексных унитарных матриц порядка n с определителем 1.

3) Группа $\mathrm{SO}(n)$ всех вещественных ортогональных матриц порядка n с определителем 1.

4) Группа $\mathrm{Sp}(n)$ всех матриц $X \in \mathrm{SU}(2n)$, для к-рых $XJX^T = J$, где $J = \begin{Vmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{Vmatrix}$, T — знак транспонирования и 1_n — единичная матрица порядка n.

Полная классификация связных Ли к. г. была получена в трудах Э. Картана [1] и Г. Вейля [2]. Она состоит в следующем.

Имеются два основных типа связных Ли к. г.

1) Связные коммутативные Ли к. г. Это в точности торы, т. е. группы вида $T^n = \underbrace{T^1 \times \ldots \times T^1}_{n \text{ раз}}$.

2) Связные полупростые Ли к. г. (см. *Ли полупростая группа*). Если G — связная полупростая Ли к. г., то универсальная накрывающая группа $\tilde{G}$ группы G также является Ли к. г. (теорема Вейля). Центр Z группы $\tilde{G}$ конечен, а все связные группы Ли, локально изоморфные G, компактны и исчерпываются с точностью до изоморфизма группами вида G/D, где $D \subset Z$. Алгебры Ли полупростых Ли к. г. могут быть внутренне охарактеризованы среди всех конечномерных вещественных алгебр Ли как алгебры с отрицательно определенной *Киллинга формой*.

Указанные два основных типа связных Ли к. г. определяют строение произвольных связных Ли к. г. А именно, последние с точностью до изоморфизма исчерпываются всевозможными факторгруппами вида $(G \times T)/D$, где G — связная односвязная Ли к. г. с центром Z, T — тор, а D — конечная подгруппа в группе $Z \times T$, пересекающаяся с T лишь по единице. Алгебры Ли произвольных Ли к. г. также могут быть внутренне охарактеризованы среди всех конечномерных вещественных алгебр Ли: это в точности алгебры Ли $\mathfrak{g}$, обладающие таким положительно определенным скалярным произведением $(\ ,\ )$, что $([x, y], z) + (y, [x, z]) = 0$ для любых $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Они наз. компактными алгебрами Ли.

Таким образом, классификация связных Ли к. г. сводится к классификации связных односвязных полупростых Ли к. г. (или, что то же, полупростых компактных алгебр Ли) и описанию их центров. Оказывается, что полупростые компактные алгебры Ли находятся во взаимно однозначном соответствии с полупростыми комплексными алгебрами Ли (и тем самым с приведенными *корневыми системами*). А именно, если $\mathfrak{g}$ — полупростая компактная алгебра Ли, то ее комплексификация $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ полупроста. Обратно, в любой полупростой алгебре Ли над $\mathbb{C}$ существует, и притом единственная с точностью до сопряженности, компактная вещественная форма. В частности, окончательный резуль-

тат классификации **простых компактных** алгебр Ли и соответствующих им связных односвязных Ли к. г. таков. Имеется 4 бесконечных серии т. н. к л а с с и ч е с к и х п р о с т ы х к о м п а к т н ы х а л г е б р Л и, соответствующих следующим сериям неприводимых приведенных систем корней: A_n, $n\geqslant 1$, B_n, $n\geqslant 2$, C_n, $n\geqslant 3$ и D_n, $n\geqslant 4$. Это соответственно алгебры Ли групп $\mathrm{SU}(n+1)$, $\mathrm{SO}(2n+1)$, $\mathrm{Sp}(n)$ и $\mathrm{SO}(2n)$. Кроме них имеется еще лишь пять т. н. и с к л ю ч и т е л ь н ы х п р о с т ы х к о м п а к т н ы х а л г е б р Л и, соответствующих системам корней типов G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8. Всякая компактная простая алгебра Ли изоморфна одной из этих алгебр Ли, а сами они попарно неизоморфны друг другу. Ли к. г. $\mathrm{SU}(n)$ и $\mathrm{Sp}(n)$, $n\geqslant 1$, связны и односвязны. Группа $\mathrm{SO}(n)$, $n\geqslant 3$, связна, но неодносвязна. Ее универсальная накрывающая наз. с п и н о р н о й Л и к. г. и обозначается $\mathrm{Spin}(n)$. Центры связных односвязных полупростых Ли к. г. совпадают с центрами соответствующих односвязных комплексных групп Ли (см. *Ли полупростая группа*).

Всякая Ли к. г. допускает точное линейное представление; образ такого представления является вещественной алгебраич. группой. Любая Ли к. г. G обладает комплексификацией $G_{\mathbb{C}}$ (см. *Комплексификация группы Ли*). При этом $G_{\mathbb{C}}$ является комплексной редуктивной алгебраич. группой, аффинная алгебра A_G к-рой может быть описана как алгебра всех п р е д с т а в л я ю щ и х ф у н к ц и й н а G, т. е. таких непрерывных комлексозначных функций, что линейная оболочка сдвигов f на элементы из G конечномерна. Алгебра A_G обладает естественной вещественной структурой и потому определяет нек-рую алгебраич. группу над $\mathbb{R}$. Вещественные точки этой группы образуют G, а комплексные — $G_{\mathbb{C}}$. Группа G является максимальной компактной подгруппой в $G_{\mathbb{C}}$. В результате получается взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных Ли к. г. и редуктивных алгебраич. групп над $\mathbb{C}$.

Всякая Ли к. г. является вещественной аналитич. группой. Комплексные компактные аналитич. группы наз. также к о м п л е к с н ы м и Л и к. г. Всякая связная комплексная Ли к. г. (как комплексная группа Ли) изоморфна комплексному тору $\mathbb{C}^n/\Gamma$, где Γ — дискретная подгруппа ранга $2n$ в $\mathbb{C}^n$, и (как вещественная группа Ли) изоморфна T^{2n}. Два комплексных тора $\mathbb{C}^n/\Gamma_1$ и $\mathbb{C}^n/\Gamma_2$ изоморфны (как комплексные группы Ли) тогда и только тогда, когда $\Gamma_2 = g(\Gamma_1)$ для нек-рого $g\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Лит.: [1] К а р т а н Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949; [2] В е й л ь Г., «Успехи матем. наук», 1938, в. 4, с. 201—46; [3] П о н т р я г и н Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1962; [5] Ж е л о б е н к о Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [6] Н а й м а р к М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [7] В и н б е р г Э. Б., О н и щ и к А. Л., Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. 1967/68, М., 1969; [8] Б у р б а к и Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [9] С е р р Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [10] А д а м с Д ж., Лекции по группам Ли, пер. с англ., М., 1979. *В. Л. Попов.*

ЛИ ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА над полем k — алгебра Ли $\mathfrak{g}$, элементы к-рой являются линейными преобразованиями нек-рого векторного пространства V над k; сложение элементов и их умножение на элементы из k определяются обычным образом, а коммутатор $[x, y]$ элементов $x, y\in\mathfrak{g}$ задается формулой

$$[x, y] = xy - yx$$

(xy и yx — обычные произведения линейных преобразований). Ли л. а., состоящая из всех линейных преобразований пространства V, обозначается $\mathfrak{gl}(V)$. Если $V=k^n$, то $\mathfrak{gl}(V)$ естественно отождествляется с

множеством всех квадратных матриц порядка n над k и обозначается $\mathfrak{gl}(n, k)$. Произвольная Ли л. а.— это подалгебра нек-рой алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$.

Примеры. 1) Пусть V наделено структурой ассоциативной алгебры. Тогда все дифференцирования алгебры V образуют Ли л. а. Если V — алгебра Ли, то для фиксированного элемента $x \in V$ присоединенное к x линейное преобразование пространства V, определенное формулой $y \to [x, y]$, $y \in V$, будет дифференцированием алгебры V; оно обозначается $\operatorname{ad} x$. Множество

$$\operatorname{ad} V = \{\operatorname{ad} x \mid x \in V\}$$

является Ли л. а., она наз. присоединенной линейной алгеброй Ли, или алгеброй Ли внутренних дифференцирований алгебры V. 2) Пусть k — поле, полное относительно нек-рого нетривиального абсолютного значения, V — нормируемое полное пространство над k и G — линейная группа Ли преобразований пространства V, т. е. подгруппа Ли в группе Ли всех автоморфизмов пространства V. Тогда *Ли алгебра аналитической группы* G естественно отождествляется с подалгеброй Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, т. е. является Ли л. а.

Проблема существования изоморфизма произвольной конечномерной алгебры Ли с нек-рой Ли л. а. возникла уже в первых работах по теории групп и алгебр Ли, но была положительно решена лишь в 1935 теоремой Адо (см. [4]): каждая конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем нулевой характеристики обладает точным конечномерным представлением ρ (и, более того, если $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}$, то представление ρ можно выбрать так, чтобы все элементы из $\rho(\mathfrak{n})$ были нильпотентны). Для групп Ли аналог этой теоремы, вообще говоря, не имеет места: напр., универсальная накрывающая группы вещественных унимодулярных матриц порядка 2 не допускает точного линейного представления.

См. также *Ли алгебраическая алгебра*.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Адо И. Д., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 6, с. 159—73.

В. Л. Попов.

ЛИ ЛОКАЛЬНАЯ АЛГЕБРА — алгебра Ли, элементами к-рой являются гладкие функции на гладком вещественном многообразии M (или, более общо, гладкие сечения гладкого векторного расслоения E над M), а операция коммутирования непрерывна в C^∞-топологии и носит локальный характер, т. е.

$$\operatorname{supp}[f_1, f_2] \subset \operatorname{supp} f_1 \cap \operatorname{supp} f_2,$$

где $\operatorname{supp} f$ — носитель функции (сечения) f. Известна полная классификация Ли л. а. для расслоений E с одномерным слоем (в частности, для обычных функций) (см. [3]). А именно, операция коммутирования в этом случае является бидифференциальным оператором первого порядка, т. е. имеет вид

$$[f_1, f_2] = \sum_{i,j} c^{ij}(x)\, \partial_i f_1\, \partial_j f_2 + \sum_k a^k(x)(f_1 \partial_k f_2 - f_2 \partial_k f_1),$$

где $\partial_i = \partial/\partial x^i$ — частные производные по локальным координатам на M. Далее, пусть $P(x)$ — подпространство в касательном пространстве $T_x M$ к многообразию M в точке $x \in M$, порожденное векторами

$$a(x) = \sum_k a^k(x)\, \partial_k \quad \text{и} \quad c^i(x) = \sum_j c^{ij}(x)\, \partial_j,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда распределение $\{P(x),\ x \in M\}$ интегрируемо, так что многообразие M распадается в объединение $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$ интегральных многообразий. Операция коммутирования перестановочна с ограничением на

M_α, и возникающие таким образом структуры Ли л.а. на M_α транзитивны в том смысле, что $P(x)$ для любой точки x совпадает с касательным пространством к интегральному многообразию M_α, содержащему x.

Каждая транзитивная Ли л. а. локально определяется размерностью подстилающего многообразия с точностью до замены переменных в базе и слое. Для четномерного многообразия она изоморфна алгебре скобок Пуассона, а для нечетномерных — алгебре скобок Лагранжа (см. [1]).

Примером Ли л. а., иллюстрирующим общую теорию, является структура алгебры Ли в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, в к-рой

$$[f_1, f_2] = \sum_{i,j,k} c_k^{ij} x^k \partial_i f_1 \partial_j f_2,$$

где c_k^{ij} — структурные константы нек-рой n-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. [2]). В этом случае многообразие $M = \mathbb{R}^n$ естественно отождествляется с пространством $\mathfrak{g}^*$, двойственным к $\mathfrak{g}$, а разбиение на подмногообразия M_α совпадает с разбиением $\mathfrak{g}^*$ на орбиты *копприсоединенного представления*.

Ли л. а. возникают как алгебры Ли нек-рых бесконечномерных групп Ли. В частности, они являются алгебрами Ли для дифференциальных групп в смысле Дж. Ритта [4]. Из работы [6] вытекает описание всех Ли л. а., связанных с расслоениями на прямой с двумерным слоем. Все такие Ли л. а. являются расширениями алгебры скобок Лагранжа (которая в этом случае совпадает с алгеброй Ли векторных полей) с помощью тривиальной Ли л. а. с одномерным слоем. Анонсирована [6] классификация «простых» Ли л. а.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Математические методы классической физики, М., 1974; [2] Березин Ф. А., «Функциональный анализ и его приложения», 1967, т. 1, в. 2, с. 1—14; [3] Кириллов А. А., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 57—76; [4] Ritt J. F., «Ann. Math.», 1950, v. 52, p. 708—26; [5] Его же, там же, 1951, v. 53, p. 491—519; [6] Weisfeiler B., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 1, p. 127—30.

А. А. Кириллов.

ЛИ ЛОКАЛЬНАЯ ГРУППА, аналитическая локальная группа,— аналитическое многообразие G над полем k, полным относительно нек-рого нетривиального абсолютного значения, снабженное отмеченным элементом e (единицей), открытым подмножеством $U \ni e$ и парой аналитич. отображений $(g, h) \mapsto gh$ многообразия $U \times U$ в G и $g \mapsto g^{-1}$ окрестности U в себя, для которых:

1) в некоторой окрестности точки e выполняется тождество $ge = eg$;

2) в некоторой окрестности точки e выполняется тождество $e = gg^{-1} = g^{-1}g$;

3) для некоторой окрестности $U' \subset U$ точки e выполняется включение $U'U' \subset U$, причем $g(hr) = (gh)r$, где g, h, r — любые элементы из U'.

Ли л. г. впервые появились в трудах С. Ли (S. Lie) и его школы (см. [1]) как локальные *Ли группы преобразований*.

Пусть G_1 и G_2 — две Ли л. г. с единицами e_1 и e_2 соответственно. Локальным гомоморфизмом G_1 в G_2 (обозначается $f : G_1 \to G_2$) наз. аналитич. отображение $f : U \to G_2$ нек-рой окрестности $U \ni e_1$ в G_1, для к-рого $f(e_1) = e_2$ и $f(gh) = f(g)\,f(h)$ для g, h из нек-рой окрестности $U_1 \subset U$ точки e_1. Определяемая естественным образом композиция локальных гомоморфизмов также есть локальный гомоморфизм. Локальные гомоморфизмы $G_1 \to G_2$, совпадающие в нек-рой окрестности точки e_1, наз. эквивалентными. Если существуют такие локальные гомоморфизмы $f : G_1 \to G_2$ и $f_2 : G_2 \to G_1$, что композиции $f_2 \circ f_1$ и $f_1 \circ f_2$ эквивалентны тождественным отображениям, то Ли л. г. G_1 и G_2 наз. эквивалентными.

Пример. Пусть $\overline{G}$ — аналитич. группа с единицей e и G — открытая окрестность точки e в $\overline{G}$. Тогда

аналитич. структура на $\overline{G}$ индуцирует аналитич. структуру на G, причем операции умножения и взятия обратного элемента в $\overline{G}$ превращают G в Ли л. г. (в частности, сама $\overline{G}$ может рассматриваться как Ли л. г.). Все Ли л. г. G, получаемые таким способом из фиксированной аналитич. группы $\overline{G}$, эквивалентны между собой.

Один из принципиальных вопросов теории групп Ли состоит в том, насколько общий характер имеет приведенный выше пример, т. е. будет ли всякая Ли л. г. (с точностью до эквивалентности) окрестностью некрой аналитич. группы. Ответ на этот вопрос положителен (см. [2], [3], [4]), в случае банаховых Ли л. г. ответ отрицателен (см. [4]).

Важнейшим средством изучения Ли л.г. является сопоставление Ли л. г. ее алгебры Ли. А именно, пусть G — Ли л. г. над полем k и e — ее единица. Выбор *карты с* аналитич. многообразия G в точке e позволяет отождествить нек-рую окрестность точки e в G с нек-рой окрестностью U нуля в n-мерном координатном пространстве k^n, так что U становится Ли л. г. Пусть U_0 — такая окрестность нуля в Ли л. г. U, что для любых x, $y \in U_0$ определено произведение $z = xy \in U$. Тогда в координатной форме умножение в Ли л. г. U в окрестности U_0 задается n аналитич. функциями

$$z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$, $(z_1, \ldots, z_n)$ — соответственно координаты точек x, $y \in U_0$ и $z = xy \in U$. В достаточно малой окрестности нуля функция f_i представляется в виде суммы сходящегося степенного ряда (также обозначаемого далее через f_i), а наличие в U единицы и ассоциативного закона выражается следующими свойствами этих рядов, рассматриваемых как формальные степенные ряды от $2n$ переменных:

а) $f_i(x_1, \ldots, x_n; 0, \ldots, 0) = x_i$ и $f_i(0, \ldots, 0; y_1, \ldots, y_n) = y_i$ для всех i,

б) $f_i(u_1, \ldots, u_n; f_1(v_1, \ldots, v_n; w_1, \ldots, w_n), \ldots, f_n(v_1, \ldots, v_n; w_1, \ldots, w_n)) = f_i(f_1(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n), \ldots, f_n(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n); w_1, \ldots, w_n))$ для всех i.

Свойства а) и б) означают, что система формальных степенных рядов $F_c = (f_1, \ldots, f_n)$ является *формальной группой*. В частности, однородная компонента степени 2 каждого из рядов f_i является *билинейной формой* на k^n, т. е. имеет вид

$$\sum_{j,l} b_{jl}^i x_j y_l = b_i(x, y), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n),$$

что позволяет определить на k^n умножение $[\ ,\ ]$ по правилу:

$$[x, y] = (b_1(x, y) - b_1(y, x), \ldots, b_n(x, y) - b_n(y, x)).$$

Относительно этого умножения k^n является алгеброй Ли. Указанная структура алгебры Ли переносится в касательное пространство $\mathfrak{g}$ к многообразию G в точке e с помощью определенного картой c изоморфизма $g \to k^n$. Формальные группы F_c и $F_{c'}$, определенные разными картами, изоморфны, а указанная структура алгебры Ли на $\mathfrak{g}$ не зависит от выбора карты c. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ наз. алгеброй Ли локальной группы Ли. Для любого локального гомоморфизма Ли л. г. его дифференциал в единице является гомоморфизмом алгебр Ли, откуда следует, что сопоставление Ли л. г. ее алгебры Ли является функториальным. В частности, эквивалентные Ли л. г. имеют изоморфные алгебры Ли.

Если поле k имеет характеристику 0, указанная выше конструкция, восходящая к С. Ли [1], позволяет свести изучение свойств Ли л. г. к изучению соответствующих свойств их алгебр Ли. В этом случае алгебра Ли $\mathfrak{g}$ определяет Ли л. г. G однозначно с точностью до эквивалентности. А именно, карта c может быть выбра-

на так, что произведение xy в Ли л. г. U выражается в виде нек-рого сходящегося ряда (т. н. ряда Кэмпбелла — Хаусдорфа) от элементов пространства k^n, полученных из x и y с помощью операции коммутирования $[\ ,\ ]$ и умножения на элементы из k (см. *Кэмпбелла — Хаусдорфа формула*). Обратно, для произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ над k ряд Кэмпбелла — Хаусдорфа сходится в нек-рой окрестности нуля в $\mathfrak{h}$ и определяет в этой окрестности структуру Ли л. г. с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Таким образом, для любой заданной алгебры Ли $\mathfrak{h}$ существует единственная с точностью до эквивалентности Ли л. г., алгеброй Ли к-рой является $\mathfrak{h}$. Более того, всякий гомоморфизм алгебр Ли *индуцирован* нек-рым *единственным* гомоморфизмом соответствующих Ли л. г. Иначе говоря, сопоставление Ли л. г. ее алгебры Ли определяет эквивалентность категории Ли л. г. и категории конечномерных алгебр Ли над k. Кроме того, сопоставление Ли л. г. соответствующей формальной группы определяет эквивалентность категории Ли л. г. и категории формальных групп над k.

Алгебра Ли может быть определена и для любой банаховой Ли л. г.; основной результат об эквивалентности категорий Ли л. г. и алгебр Ли обобщается на этот случай (см. [2]).

Лит.: [1] Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd 1—3, Lpz., 1888—93; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Серр Жк.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [5] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М.— Л., 1940. *В. Л. Попов.*

ЛИ НИЛЬАЛГЕБРА — алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем k, определяемая наличием функции $n: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{N}$ такой, что $(\operatorname{ad} x)^{n(x,y)}(y) = 0$, где $(\operatorname{ad} x)(y) = [x, y]$, для любых $x, y\in\mathfrak{g}$. Основной вопрос о Ли н.— условия на $\mathfrak{g}$, k, n, при к-рых $\mathfrak{g}$ (локально) нильпотентна (см. *Ли нильпотентная алгебра*). Конечномерная над k Ли н.— нильпотентна. С другой стороны, над любым полем существуют конечно порожденные ненильпотентные Ли н. [1]. Пусть n — константа. Ли н. локально нильпотентна, если $\operatorname{char} k = 0$ или если $n\leqslant p+1$, где $p = \operatorname{char} k > 0$ (теорема Кострикина [2]). Локальная нильпотентность имеет место и в случае, когда $\mathfrak{g}$ локально разрешима. Бесконечно порожденная Ли н. ненильпотентна при $n\geqslant p-2$ (см. [3]), а при $n\geqslant p+1$ ненильпотентность сохраняется и при условии разрешимости. Неизвестно (1982), нильпотентны ли Ли н., если $\operatorname{char} k=0$ (при $n\leqslant 4$ ответ положительный). Открыт (1982) вопрос о локальной нильпотентности Ли н. при $n>p+1$. Изучение Ли н. над полем k, $\operatorname{char} k=p>0$, тесно связано с *Бёрнсайда проблемой*.

Лит.: [1] Голод Е. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 273—76; [2] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 1, с. 3—34; [3] Размыслов Ю. П., Алгебра и логика, 1971, т. 10, № 1, с. 33—44; [4] Бахтурин Ю. А., Lectures on Lie algebras, B., 1978; [5] Braun A., «J. Algebra», 1974, v. 31, p. 287—92. *Ю. А. Бахтурин.*

ЛИ НИЛЬПОТЕНТНАЯ АЛГЕБРА — алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем K, удовлетворяющая одному из следующих эквивалентных условий:

1) существует конечная убывающая цепочка идеалов $\{\mathfrak{g}_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ алгебры $\mathfrak{g}$ таких, что $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_n=\{0\}$ и $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_{i+1}$ для $0\leqslant i<n$;

2) $C^k\mathfrak{g}=\{0\}$ (аналогично $C_k\mathfrak{g}=\{0\}$) для достаточно большого k, где $C^k\mathfrak{g}$ и $C_k\mathfrak{g}$ — члены соответственно нижнего и верхнего центральных рядов;

3) существует такое k, что $\operatorname{ad} x_1 \dots \operatorname{ad} x_k = 0$ для любых $x_1, \dots, x_k\in\mathfrak{g}$.

Абелева алгебра нильпотентна. Если V — конечномерное векторное пространство над K, а $F=\{V_i\}$ — флаг в нем, то

$$\mathfrak{n}(F)=\{x\in\operatorname{End} V \mid xV_i\subset V_{i-1} \text{ для всех } i\geqslant 1\}$$

является нильпотентной подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V)$ всех линейных преобразований пространства V. Если в V выбрать базис, согласованный с флагом F, то в нем элементы алгебры $\mathfrak{n}(F)$ представятся верхними треугольными матрицами с нулями на главной диагонали. Если F — полный флаг (т. е. $\dim V_k = k$), то соответствующая матричная Ли н. а. $\mathfrak{n}(m, k)$ состоит из всех верхних треугольных матриц порядка $m = \dim V$ с нулями на главной диагонали.

Для любой неодномерной Ли н. а. коразмерность ее коммутатора $\operatorname{codim}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \geqslant 2$. В частности, если $\dim \mathfrak{g} \leqslant 2$, то $\mathfrak{g}$ абелева. Единственная неабелева трехмерная Ли н. а. $\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{n}(3, K)$. Ли н. а. перечислены еще в нескольких малых размерностях (для $\dim \mathfrak{g} \leqslant 7$ при $K = \mathbb{C}$), но общего подхода к их классификации пока (1982) нет.

Ли н. а. (ранее их называли *специальными алгебрами Ли*, или *алгебрами Ли ранга 0*) встретились уже на первых шагах исследований С. Ли (S. Lie) по интегрированию дифференциальных уравнений. Классификация *Ли разрешимых алгебр* сведена в нек-ром смысле к перечислению Ли н. а. В произвольной конечномерной алгебре Ли существует наибольший нильпотентный идеал (*нильрадикал* в терминологии [2]). Рассматривается и другой нильпотентный идеал — пересечение ядер неприводимых конечномерных представлений (нильпотентный радикал) (см. [1], [4]). Если $\mathfrak{r}$ — радикал алгебры $\mathfrak{g}$, то нильпотентный радикал $\mathfrak{n}$ совпадает с

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}.$$

Факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ редуктивна и $\mathfrak{n}$ есть минимальный из идеалов, обладающих этим свойством. В случае $\operatorname{char} K = 0$ нильрадикал состоит из всех таких $x \in \mathfrak{r}$, что $\operatorname{ad} x$ нильпотентен.

При изучении редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ естественно возникают ее нильпотентные подалгебры, являющиеся нильпотентными радикалами в *параболических подалгебрах* алгебры $\mathfrak{g}$. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ эти нильпотентные подалгебры совпадают с рассмотренными выше подалгебрами $\mathfrak{n}(F)$. Нильпотентный радикал борелевской подалгебры (см. *Бореля подгруппа*) в $\mathfrak{g}$ есть максимальная подалгебра в $\mathfrak{g}$, состоящая из нильпотентных элементов,— единственная с точностью до сопряженности. Более широкий класс Ли н. а. образуют произвольные идеалы параболич. подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$, состоящие из нильпотентных элементов. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ эти Ли н. а. были классифицированы в [6] (*стандартные нуль-алгебры*), а в общем случае в [7].

Центр Ли н. а. нетривиален и любая Ли н. а. может быть получена рядом центральных расширений с помощью Ли н. а. Класс Ли н. а. замкнут относительно перехода к подалгебре, факторалгебре, центральному расширению и конечной прямой сумме. В частности, любая подалгебра в $\mathfrak{n}(m, K)$ нильпотентна. Обратно, произвольная конечномерная Ли н. а. изоморфна подалгебре в $\mathfrak{n}(m, K)$ при нек-ром m (если $\operatorname{char} K = 0$) — это частный случай теоремы Адо (см. [1], [2]).

Если $\mathfrak{g}$ — произвольная конечномерная алгебра Ли, то любой ее нильпотентный идеал ортогонален ей относительно *Киллинга формы*, в частности для Ли н. а. эта форма тривиальна.

Одной из основных в теории Ли н. а. является *теорема Энгеля*: если $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — конечномерное представление Ли нильпотентной алгебры $\mathfrak{g}$, причем $\rho(x)$ нильпотентно для любого $x \in \mathfrak{g}$, то существует такой полный флаг F, что $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}(F)$. Из теоремы Энгеля следует, что конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда и только тогда, когда $\operatorname{ad}^n x = 0$ при нек-ром n и всех $x \in \mathfrak{g}$, т. е. когда любой $x \in \mathfrak{g}$ является нильпотентным элементом.

В теореме Энгеля содержится описание нильпотентных представлений Ли н. а.; описание произвольных конечномерных представлений принадлежит Х. Цассенхаузу (H. Zassenhaus, см. [2]): если поле K алгебраически замкнуто, а V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, то $V=\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$, где подмодули V_i таковы, что ограничение действия любого $x\in\mathfrak{g}$ на них есть сумма скалярного и нильпотентного операторов. Если V — конечномерное векторное пространство над полем K характеристики 0, то любая алгебраическая Ли н. а. $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ имеет вид $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\dotplus\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{n}$ — идеалы, состоящие соответственно из полупростых и нильпотентных линейных преобразований, принадлежащих алгебре $\mathfrak{g}$ [5].

Лит.: [1] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар «Софус Ли», пер. с франц., М., 1961; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [6] Гуревич Г. Б., «Матем. сб.», 1954, т. 35, с. 437—60; [7] Хакимджанов Ю. Б., «Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ.», 1974, № 6, с. 49—55.

В. В. Горбацевич.

ЛИ НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — группа Ли, нильпотентная как абстрактная группа. Абелева группа Ли нильпотентна. Если $F=\{V_i\}$ — флаг в конечномерном векторном пространстве V над полем K, то

$$N(F)=\{g\in\mathrm{GL}(V)\mid gv\equiv v \bmod V_i\ \forall\ v\in V_i,\ i\geqslant 1\}$$

будет нильпотентной алгебраич. группой над K; в базисе, согласованном с флагом F, ее элементы представляются верхними треугольными матрицами с единицами на главной диагонали. Если F — полный флаг (т. е. $\dim V_k-k$), то соответствующая $N(F)$ матричная Ли н. г. $N(n,k)$ состоит из всех матриц порядка $n=\dim V$ указанного выше вида.

Если K — полное нормированное поле, то $N(F)$ — Ли н. г. над K. Ее алгеброй Ли служит $\mathfrak{n}(F)$ (см. *Ли нильпотентная алгебра*). Вообще, алгебра Ли группы Ли G над полем K характеристики 0 нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентна связная компонента единицы G_0 группы G. Это позволяет перенести на Ли н. г. свойства нильпотентных алгебр Ли (см. [2], [4], [5]). Групповой вариант теоремы Энгеля при этом допускает следующее усиление (теорема Колчина): если G — подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$, где V — конечномерное векторное пространство над произвольным полем K, а каждый $g\in G$ унипотентен, то существует такой полный флаг F в V, что $G\subset N(F)$ (при этом G автоматически оказывается нильпотентной) (см. [3]).

Ли н. г. разрешимы, поэтому свойства Ли разрешимых групп переносятся и на них, причем часто в усиленной форме, ибо всякая Ли н. г. треугольна. Связная группа Ли G нильпотентна тогда и только тогда, когда в канонич. координатах (см. *Ли группа*) групповая операция в G записывается полиномиально [4]. Всякая односвязная вещественная Ли н. г. G изоморфна алгебраич. группе, более того — алгебраич. подгруппе в $N(n,\mathbb{R})$. При этом точное представление группы G в $N(n,\mathbb{R})$ можно выбрать так, чтобы группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,G$ вкладывалась в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ — нормализатор образа группы G (см. [1]).

Если G — связная матричная вещественная Ли н. г., то она разлагается в прямое произведение компактной абелевой и односвязной групп Ли. Связная линейная алгебраич. группа G над полем характеристики 0 разлагается в прямое произведение абелева нормального делителя, состоящего из полупростых элементов, и нормального делителя, состоящего из унипотентных элементов [5].

Ранее Ли н. г. наз. специальными группами Ли, или группами Ли ранга 0. В теории представлений полупростых групп Ли при изучении дискретных подгрупп в таких группах существен-

но используются орисферич. группы Ли, являющиеся Ли н. г.

Лит.: [1] Birkhoff G., «Ann. Math.», 1937, v. 38, p. 526—32; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [5] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958.

В. В. Горбацевич.

ЛИ ОСОБАЯ АЛГЕБРА — простая алгебра Ли (см. *Ли полупростая алгебра*), не являющаяся классической. Над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики существует всего 5 Ли о. а.: E_6, E_7, E_8, F_4 и G_2 размерностей 78, 133, 248, 52 и 14 соответственно. Индексы в обозначениях равны рангам этих алгебр Ли. Простейшие линейные представления этих Ли о. а. имеют размерности 27, 56, 248, 26 и 7 соответственно. Алгебра G_2 есть алгебра дифференцирований *Кэли—Диксона алгебры*, а F_4— алгебра дифференцирований единственной особой *йордановой алгебры*, к-рую можно представить как алгебру эрмитовых матриц третьего порядка над алгеброй Кэли—Диксона. Алгебра E_6 есть линейная оболочка дифференцирований и умножений на элементы особой йордановой алгебры. Алгебры E_7 и E_8 и формы всех Ли о. а. над алгебраически незамкнутыми полями также связаны с алгеброй Кэли — Диксона. Различные модели Ли о. а. получаются при рассмотрении их градуировок посредством циклич. групп. Связные группы Ли, соответствующие Ли о. а., наз. особыми группами Ли и часто обозначаются теми же буквами. Напр., комплексная группа G_2— это группа автоморфизмов алгебры Кэли—Диксона над $\mathbb{C}$; комплексная группа F_4— это группа автоморфизмов особой йордановой алгебры над $\mathbb{C}$.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [2] его же, Exceptional Lie Algebras, N. Y., 1971; [3] Фрейденталь Г., «Математика», 1957, т. 1, № 1, с. 117—53; [4] Розенфельд Б. А., в кн.: Algebraical and Topological Foundations of Geometry, Oxf.— [a. o.], 1962, p. 135—55; [5] Винберг Э. Б., в кн.: Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу..., в. 13, М., 1966, с. 7—9; [6] Tits J., «Judag. Math.», 1966, v. 28, № 2, p. 223—37; [7] его же, Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, B.— [u. a.], 1967.

Э. Б. Винберг.

ЛИ ПОЛУПРОСТАЯ АЛГЕБРА — алгебра Ли, не имеющая ненулевых разрешимых идеалов (см. *Ли разрешимая алгебра*). В дальнейшем рассматриваются конечномерные Ли п. а. над полем k характеристики 0 (о Ли п. а. над полем ненулевой характеристики см. *Ли алгебра*).

Полупростота конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равносильна выполнению любого из следующих условий:

1) $\mathfrak{g}$ не содержит ненулевых абелевых идеалов;

2) *Киллинга форма* алгебры $\mathfrak{g}$ невырождена (критерий Картана);

3) $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму неабелевых простых идеалов;

4) всякое конечномерное линейное представление алгебры $\mathfrak{g}$ вполне приводимо (иначе: всякий конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль полупрост);

5) одномерные когомологии алгебры $\mathfrak{g}$ со значениями в любом конечномерном $\mathfrak{g}$-модуле тривиальны.

Любой идеал и любая факторалгебра Ли п. а. также полупросты. Разложение Ли п. а., указанное в условии 3), единственно. Частным случаем свойства 5) является следующее утверждение: все дифференцирования Ли п. а. являются внутренними. Свойство полупростоты алгебры Ли сохраняется как при расширении, так и при сужении основного поля.

Пусть $\mathfrak{g}$ — Ли п. а. над алгебраически замкнутым полем k. Присоединенное представление изоморфно отображает алгебру $\mathfrak{g}$ на линейную алгебру Ли $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$, к-рая является алгеброй Ли алгебраич. группы $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$ и тем самым *Ли алгебраической алгеброй*. Элемент $X\in\mathfrak{g}$ наз. полупростым

(нильпотентным), если ad X полупрост (соответственно нильпотентен). Это свойство элемента X сохраняется при любом гомоморфизме алгебры $\mathfrak{g}$ в другую Ли п. а. Связная компонента единицы $(\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g})^0$ совпадает с группой внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$, т. е. порождается автоморфизмами вида $\exp(\mathrm{ad}\,X)$, $X\in\mathfrak{g}$.

При изучении Ли п. а. над алгебраически замкнутым полем k существенную роль играют корни Ли п. а., к-рые определяются следующим образом. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Для ненулевой линейной функции $\alpha\in\mathfrak{h}^*$ через $\mathfrak{g}_\alpha$ обозначается линейное подпространство в $\mathfrak{g}$, заданное условием:

$$\mathfrak{g}_\alpha=\{X\in\mathfrak{g}\mid [H,X]=\alpha(H)X,\ H\in\mathfrak{h}\}.$$

Если $\mathfrak{g}_\alpha\neq 0$, то α наз. к о р н е м алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Множество Σ всех ненулевых корней наз. к о р н е в о й с и с т е м о й, или с и с т е м о й к о р н е й, алгебры $\mathfrak{g}$. Имеет место к о р н е в о е р а з л о ж е н и е:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{g}_\alpha.$$

Корневая система и корневое разложение Ли п. а. обладают следующими свойствами:

1) Σ порождает $\mathfrak{h}^*$ и является приведенной *корневой системой* в абстрактном смысле (в линейной оболочке системы Σ над полем действительных чисел). Система Σ неприводима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ проста.

2) Для любого $\alpha\in\Sigma$

$$\dim\mathfrak{g}_\alpha=\dim[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]=1.$$

Существует единственный элемент $H_\alpha\in[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]$ такой, что $\alpha(H_\alpha)=2$.

3) Для каждого ненулевого $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ существует единственный $Y_\alpha\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ такой, что $[X_\alpha,Y_\alpha]=H_\alpha$, причем

$$[H_\alpha,X_\alpha]=2X_\alpha\ \text{ и }\ [H_\alpha,Y_\alpha]=-2Y_\alpha.$$

Кроме того,

$$\beta(H_\alpha)=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)},\quad \alpha,\ \beta\in\Sigma,$$

где $(\ ,\ )$ — скалярное произведение, индуцированное формой Киллинга.

4) Если $\alpha,\ \beta\in\Sigma$ и $\alpha+\beta\neq 0$, то $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^\beta$ ортогональны относительно формы Киллинга и $[\mathfrak{g}^\alpha,\mathfrak{g}^\beta]=\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Базис $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ корневой системы Σ наз. также с и с т е м о й п р о с т ы х к о р н е й а л г е б р ы $\mathfrak{g}$. Пусть Σ_+ — система положительных корней относительно данного базиса и пусть $X_{-\alpha}=Y_\alpha(\alpha\in\Sigma_+)$. Тогда элементы

$$H_{\alpha_1},\ \ldots,\ H_{\alpha_k},\ X_\alpha\quad(\alpha\in\Sigma)$$

составляют базис алгебры $\mathfrak{g}$, наз. б а з и с о м К а р т а н а. С другой стороны, элементы

$$X_{\alpha_i},\ X_{-\alpha_i}\quad(i=1,\ \ldots,\ n)$$

составляют систему образующих алгебры $\mathfrak{g}$, причем определяющие соотношения имеют следующий вид:

$$\big[\big[X_{\alpha_i},X_{-\alpha_i}\big],X_{\alpha_j}\big]=n(i,j)X_{\alpha_j},$$

$$\big[\big[X_{\alpha_i},X_{-\alpha_i}\big],X_{-\alpha_j}\big]=-n(i,j)X_{\alpha_j},$$

$$\big(\mathrm{ad}\,X_{\alpha_i}\big)^{1-n(i,j)}X_{\alpha_j}=0,$$

$$\big(\mathrm{ad}\,X_{-\alpha_i}\big)^{1-n(i,j)}X_{-\alpha_j}=0;$$

здесь $i,j=1,\ldots,n$ и

$$n(i,j)=\alpha_j(H_i)=\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}.$$

Из свойства 4) следует равенство

$$[X_\alpha,\ X_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \in \Sigma, \\ 0, & \text{если } \alpha+\beta \notin \Sigma, \end{cases}$$

где $N_{\alpha,\beta} \in k$. Элементы $X_\alpha\ (\alpha \in \Sigma_+)$ можно выбрать таким образом, чтобы

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} \text{ и } N_{\alpha,\beta} = \pm\,(p+1),$$

где p — наибольшее целое число такое, что $\beta - p\alpha \in \Sigma$. Соответствующий базис Картана наз. б а з и с о м Ш е в а л л е. Структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в этом базисе являются целыми, что позволяет связать с $\mathfrak{g}$ алгебры Ли и алгебраич. группы (см. *Шевалле группа*) над полями произвольной характеристики. Если $k \supset \mathbb{C}$, то линейная оболочка над $\mathbb{R}$ векторов

$$iH_\alpha,\ X_\alpha - X_{-\alpha},\ i\,(X_\alpha + X_{-\alpha}) \quad (\alpha \in \Sigma_+)$$

является компактной вещественной формой алгебры $\mathfrak{g}$.

Ли п. а. определяется с точностью до изоморфизма своей подалгеброй Картана и соответствующей корневой системой. Точнее, если $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — Ли п. а. над k, $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — их подалгебры Картана, Σ_1 и Σ_2 — соответствующие корневые системы, то всякий изоморфизм $\mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_2$, индуцирующий изоморфизм корневых систем Σ_1 и Σ_2, продолжается до изоморфизма $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$. С другой стороны, любая приведенная корневая система может быть реализована как корневая система нек-рой Ли п. а. Таким образом, классификация Ли п. а. (соответственно простых неабелевых алгебр Ли) над алгебраически замкнутым полем k по существу совпадает с классификацией приведенных корневых систем (соответственно неприводимых приведенных корневых систем).

Простые алгебры Ли, отвечающие корневым системам типов A — D, наз. к л а с с и ч е с к и м и и имеют следующий вид.

Тип $A_n (n \geqslant 1)$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, k)$ — алгебра линейных преобразований пространства k^{n+1} со следом 0; $\dim \mathfrak{g} = n(n+2)$.

Тип $B_n (n \geqslant 2)$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1, k)$ — алгебра линейных преобразований пространства k^{2n+1}, кососимметрических относительно заданной невырожденной симметрической билинейной формы; $\dim \mathfrak{g} = n(2n+1)$.

Тип $C_n (n \geqslant 3)$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, k)$ — алгебра линейных преобразований пространства k^{2n}, кососимметрических относительно заданной невырожденной кососимметрической билинейной формы; $\dim \mathfrak{g} = n(2n+1)$.

Тип $D_n (n \geqslant 4)$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n, k)$ — алгебра линейных преобразований пространства k^{2n}, кососимметрических относительно заданной невырожденной симметрической билинейной формы; $\dim \mathfrak{g} = n(2n-1)$.

Простые алгебры Ли, отвечающие корневым системам типов E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, наз. о с о б ы м и, или и с к л ю ч и т е л ь н ы м и (см. *Ли особая алгебра*).

Картана матрица Ли п. а. над алгебраическим замкнутым полем также определяет эту алгебру однозначно с точностью до изоморфизма. Матрицы Картана простых алгебр Ли имеют следующий вид:

$$A_n: \left\| \begin{array}{rrrrrr} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{array} \right\|,$$

$$B_n: \left\| \begin{array}{rrrrrr} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{array} \right\|,$$

$$C_n:\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$D_n:\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$E_6:\begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$E_7:\begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$E_8:\begin{Vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$F_4:\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}, \qquad G_2:\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Классификация расщепляемых Ли п. а. над произвольным полем k характеристики 0 (р а с щ е п л я е м о й наз. Ли п. а. $\mathfrak{g}$, обладающая такой подалгеброй Картана $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$, что все характеристич. корни операторов $\mathrm{ad}X$, $X\in\mathfrak{h}$, лежат в k) выглядит аналогично случаю алгебраически замкнутого поля. А именно, каждой неприводимой приведенной корневой системе соответствует единственная расщепляемая Ли п. а. В частности, расщепляемые Ли п. а. типов $A-D$ имеют указанный выше вид с той разницей, что в случаях B и D нужно рассматривать невырожденные симметрические билинейные формы индекса Витта n.

Проблема классификации произвольных Ли п. а. над k сводится к следующей задаче: перечислить с точностью до изоморфизма все k-формы $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}$, т. е. такие k-подалгебры $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}$, что $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\otimes_k K$. Здесь K — алгебраически замкнутое расширение поля k, а $\mathfrak{g}$ — заданная Ли п. а. над K. Решение этой задачи также можно получить в терминах корневых систем (*см.* *Форма* алгебраической группы). В случае, когда $\mathfrak{g}$ — классическая простая алгебра Ли над k (отличная от D_4), существует другой метод классификации k-форм в $\mathfrak{g}$, основанный на рассмотрении простых ассоциативных алгебр (см. [3]).

В случае, когда $k=\mathbb{R}$, классификация Ли п. а. выглядит следующим образом (см. [6], [7], [8]). Всякая простая неабелева алгебра Ли над $\mathbb{R}$ либо является простой алгеброй Ли над $\mathbb{C}$ (рассматриваемой как алгебра над $\mathbb{R}$), либо есть вещественная форма простой алгебры Ли над $\mathbb{C}$. Классификация вещественных форм

$\mathfrak{g}_0$ в простых классич. алгебрах Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$ имеет следующий вид.

I. Тип A_n: $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, $n\geqslant 1$.
A_{I}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$.
A_{II}: $n+1=2m$ четно, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{su}^*(2n)$ — подалгебра элементов из $\mathfrak{sl}(2m, \mathbb{C})$, сохраняющих нек-рую кватернионную структуру.
A_{III}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{su}(p, n+1-p)$ — подалгебра элементов из $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, кососимметрических относительно невырожденной эрмитовой формы положительного индекса p, $0\leqslant p\leqslant (n+1)/2$.

II. Тип B_n: $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$, $n\geqslant 2$.
B_{I}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{so}(p, 2n+1-p)$ — алгебра линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$, кососимметрических относительно невырожденной симметрической билинейной формы положительного индекса p, $0\leqslant p\leqslant n$.

III. Тип C_n: $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, $n\geqslant 3$.
C_{I}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ — алгебра линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n}$, кососимметрических относительно невырожденной кососимметрической билинейной формы.
C_{II}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sp}(p, n-p)$, $0\leqslant p\leqslant n/2$,— подалгебра в $\mathfrak{su}(2p, 2(n-p))$, состоящая из преобразований, сохраняющих нек-рую кватернионную структуру.

IV. Тип D_n: $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, $n\geqslant 4$.
D_{I}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{so}(p, 2n-p)$ — алгебра линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^{2n}$, кососимметрических относительно невырожденной билинейной симметрич. формы положительного индекса p, $0\leqslant p\leqslant n$.
D_{III}: $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{so}^*(2n)$ — подалгебра в $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, состоящая из преобразований, сохраняющих нек-рую кватернионную структуру.

Ли п. а. над полем $\mathbb{C}$ были впервые рассмотрены в работах В. Киллинга [1], к-рый дал их классификацию, хотя в его доказательствах имелись пробелы, восполненные Э. Картаном [2]. Уже в работах В. Киллинга и Э. Картана появились корни алгебры Ли как характеристич. корни оператора $\mathrm{ad}X$. Э. Картан дал также классификацию вещественных Л. п. а., установив глубокую связь между этими алгебрами и *глобально симметрическими римановыми пространствами*.

Лит.: [1] Killing W., «Math. Ann.», 1888, Bd 31, S. 252—90; 1889, Bd 33, S. 1—48, Bd 34, S. 57—122; 1890, Bd 36, S. 161—89; [2] Cartan E., Œuvres complètes, pt. 1, t. 1, P., 1952, p. 137—287; [3] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [4] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [5] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [6] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [7] Helgason S., Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, N. Y.— San Francisco — L., 1978; [8] Араки Ш., «Математика», 1966, т. 10, № 1, с. 90—126.
А. Л. Онищик.

ЛИ ПОЛУПРОСТАЯ ГРУППА — связная группа Ли, не содержащая нетривиальных связных разрешимых (или, что равносильно, связных абелевых) нормальных делителей. Связная группа Ли полупроста тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли полупроста. Связная группа Ли G наз. простой, если ее алгебра Ли проста, т. е. если G не содержит нетривиальных связных нормальных делителей, отличных от G. Связная группа Ли является полупростой тогда и только тогда, когда она разлагается в локально прямое произведение простых неабелевых нормальных делителей.

Классификация Ли п. г. сводится к локальной классификации, т. е. к классификации *Ли полупростых алгебр*, а также к глобальной классификации групп Ли G, отвечающих заданной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

В случае групп Ли над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел основной результат локальной классификации состоит в том, что всякая односвязная простая неабе-

лева комплексная группа Ли изоморфна одной из групп $SL_n(\mathbb{C})$, $n\geqslant 1$, $Spin_n(\mathbb{C})$, $n\geqslant 5$ (универсальная накрывающая группы $SO_n(\mathbb{C})$), $Sp_n(\mathbb{C})$, $n\geqslant 3$ (см. *Классическая группа*) или же одной из особых комплексных групп Ли (см. *Ли особая алгебра*). Глобальная классификация групп Ли, отвечающих полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{C}$, выглядит следующим образом. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, Σ — система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Каждой Ли п. г. G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ соответствует решетка $\Gamma(G)\subset\mathfrak{h}$, являющаяся ядром экспоненциального отображения $\exp\colon \mathfrak{h}\to G$. В частности, если G односвязна, то $\Gamma(G)$ совпадает с решеткой $\Gamma_0=\Gamma_0(\mathfrak{g})$, порожденной элементами $2\pi i H_\alpha$, $\alpha\in\Sigma$ (см. *Ли полупростая алгебра*), а если G — группа без центра (присоединенная группа), то $\Gamma(G)$ есть решетка

$$\Gamma_1=\Gamma_1(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{h}\mid \alpha(X)\in 2\pi i\mathbb{Z} \text{ для всех } \alpha\in\Sigma\}.$$

В общем случае $\Gamma_0\subset\Gamma(G)\subset\Gamma_1$. Для любой аддитивной подгруппы $M\subset\mathfrak{h}$, удовлетворяющей условию $\Gamma_0\subset M\subset\Gamma_1$, существует единственная с точностью до изоморфизма связная группа Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ такая, что $\Gamma(G)=M$. При этом центр группы G изоморфен $\Gamma_1/\Gamma(G)$, а фундаментальная группа

$$\pi_1(G)\cong\Gamma(G)/\Gamma_0.$$

Факторгруппа $Z_u=\Gamma_1/\Gamma_0$ (центр односвязной группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$) конечна и для различных типов простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$ имеет следующий вид:

$\mathfrak{g}$	A_n	B_n	C_n	D_{2n}	D_{2n+1}	E_6	E_7	E_8, F_4, G_2
Z_u	$\mathbb{Z}_{n+1}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0

Порядок группы Γ_1/Γ_0 совпадает с числом вершин расширенной диаграммы простых корней алгебры $\mathfrak{g}$, при отбрасывании к-рых получается диаграмма простых корней. Аналогичная классификация имеет место для компактных вещественных Ли п. г., каждая из к-рых вкладывается в единственную комплексную Ли п. г. в качестве максимальной компактной подгруппы (см. *Ли компактная группа*).

Глобальная классификация некомпактных вещественных Ли п. г. может быть проведена аналогично, но более сложным образом. В частности, центр $Z_{\mathfrak{g}}$ односвязной группы Ли, отвечающей полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$, можно вычислить следующим способом. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ — *Картана разложение*, где $\mathfrak{k}$ — максимальная компактная в $\mathfrak{g}$ подалгебра, а $\mathfrak{p}$ — ее ортогональное дополнение относительно формы Киллинга, θ — соответствующий инволютивный автоморфизм, продолженный в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, содержащая подалгебру Картана $\mathfrak{h}'\subset\mathfrak{k}$, θ_0 — автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, совпадающий с θ на корнях относительно $\mathfrak{h}$ и продолженный на корневые векторы соответствующим образом, $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0+\mathfrak{p}_0$ — разложение Картана вещественной формы $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, отвечающей θ_0. Тогда $Z_{\mathfrak{g}}\simeq\Gamma_1(\mathfrak{k}_0)/\Gamma_0[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$ (см. [3], где эта группа вычислена для всех типов простых алгебр $\mathfrak{g}$ над $\mathbb{R}$).

Всякая комплексная Ли п. г. G обладает единственной структурой аффинной алгебраич. группы, согласованной с заданной на ней аналитич. структурой, причем любой аналитич. гомоморфизм группы G в алгебраич. группу является рациональным. Соответствующая алгебра регулярных функций на G совпадает с алгеброй голоморфных представляющих функций.

С другой стороны, некомпактная вещественная Ли п. г. не всегда допускает точное линейное представление — простейшим примером является односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $\gamma l(2, \mathbb{R})$. Если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над $\mathbb{R}$, то в центре Z_u односвязной группы G_0, отвечающей $\mathfrak{g}$, существует наименьшая подгруппа $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$, называемая л и н е а р и з а т о р о м, такая, что $G_0/\mathscr{L}(\mathfrak{g})$ изоморфна линейной Ли п. г. Если $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{u}$ — компактная вещественная форма алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, то

$$\mathscr{L}(\mathfrak{g}) \cong \Gamma_0(\mathfrak{u}) \cap \mathfrak{h}' / \Gamma_0([\mathfrak{k}, \mathfrak{k}])$$

(см. [3], где эта группа вычислена для всех типов простых алгебр Ли $\mathfrak{g}$).

Лит.: [1] А д а м с Д ж., Лекции по группам Ли, пер. с англ., М., 1979; [2] С е р р Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] С и р о т а А. И., С о л о д о в н и к о в А. С., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 3, с. 87—144. *А. Л. Онищик.*

ЛИ ПРОИЗВОДНАЯ тензорного поля Q по направлению векторного поля X на многообразии M — тензорное поле $\mathscr{L}_X Q$ на многообразии M того же типа, что и Q, к-рое задается формулой

$$(\mathscr{L}_X Q)_x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} ((\varphi_t^* Q)_x - Q_x), \quad x \in M,$$

где φ_t^* — локальная однопараметрич. группа преобразований пространства тензорных полей, порожденная векторным полем X. В локальных координатах x^i Л. п. тензорного поля $Q = \left(Q^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l}\right)$ типа (k, l) по направлению векторного поля X (X^i) имеет координаты $\left(\partial_i - \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$:

$$(\mathscr{L}_X Q)^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} = X^i \partial_i Q^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{k} \partial_i X^{i_\alpha} Q^{i_1 \dots \widehat{i_\alpha} \, i i_{\alpha+1} \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{l} \partial_{j_\beta} X^i Q^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots \widehat{j_\beta} \, i j_{\beta+1} \dots j_l}.$$

См. также *Ли дифференцирование.* *Д. В. Алексеевский.*

ЛИ ПРОИЗВОДНАЯ ГРУППА – *коммутант* группы Ли. Для любой группы Ли G ее Ли п. г. $[G, G]$ является нормальной (не обязательно замкнутой) подгруппой Ли в G. Соответствующий идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G совпадает с коммутантом $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (называемым также п р о и з в о д н о й а л г е б р о й Л и для $\mathfrak{g}$). Коммутант односвязной (или связной линейной) группы Ли G всегда замкнут в G.

Лит.: [1] Ш е в а л л е К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948. *А. Л. Онищик.*

ЛИ РАЗРЕШИМАЯ АЛГЕБРА — алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем K, удовлетворяющая одному из следующих эквивалентных условий:

1) члены производного ряда $D^k\mathfrak{g}$ для $\mathfrak{g}$ равны $\{0\}$ при достаточно большом k;

2) существует конечная убывающая цепочка идеалов $\{\mathfrak{g}_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ алгебры $\mathfrak{g}$ таких, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_n = \{0\}$ и $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ (т. е. алгебры Ли $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ — абелевы) для всех $0 \leqslant i < n$;

3) существует конечная убывающая цепочка подалгебр $\{\mathfrak{g}'_i\}_{0 \leqslant i \leqslant m}$ таких, что $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'_m = \{0\}$, $\mathfrak{g}'_{i+1}$ — идеал в $\mathfrak{g}'_i$ и $\mathfrak{g}'_i/\mathfrak{g}'_{i+1}$ — одномерная (абелева) алгебра Ли для $0 \leqslant i < m$.

Нильпотентная алгебра Ли разрешима. Если $F = \{V_i\}$ — полный флаг в конечномерном векторном пространстве V над K, то

$$\mathfrak{b}(F) = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid xV_i \subset V_i \text{ для всех } i\}$$

есть разрешимая подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V)$ всех линейных преобразований пространства V. Если в V выбрать базис, согласованный с флагом F, то в нем элементы алгебры $\mathfrak{b}(F)$ представятся верхними треугольными матрицами; полученная матричная Ли р. а. обозначается $\mathfrak{t}(n, K)$, где n $\dim V$.

Класс Ли р. а. замкнут относительно перехода к подалгебре, факторалгебре и расширению. В частности, любая подалгебра в $\mathfrak{t}(n, K)$ разрешима. Если $\mathrm{char}K = 0$ и поле K алгебраически замкнуто, то любая конечномерная Ли р. а. изоморфна подалгебре в $\mathfrak{t}(n, K)$ при нек-ром n. Одним из основных свойств Ли р. а. является т е о р е м а Л и: пусть $\mathfrak{g}$ — Ли р. а. над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — ее конечномерное линейное представление. Тогда в V существует такой полный флаг F, что $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}(F)$. В частности, если ρ неприводимо, то $\dim V = 1$. Идеалы алгебры $\mathfrak{g}$ можно выбрать образующими полный флаг, т. е. такими, что $\dim \mathfrak{g}_i = \dim \mathfrak{g} - i$.

Конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем характеристики 0 разрешима тогда и только тогда, когда алгебра $D^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна. Другой критерий разрешимости (к р и т е р и й К а р т а н а): алгебра $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $D^1\mathfrak{g}$ ортогонально всей $\mathfrak{g}$ относительно *Киллинга формы* (или любой билинейной формы, ассоциированной с точным конечномерным представлением алгебры $\mathfrak{g}$).

Ли р. а. впервые рассмотрел С. Ли (S. Lie) в связи с изучением разрешимых групп Ли преобразований. Изучение Ли р. а. приобрело большое значение после введения понятия р а д и к а л а (т. е. наибольшего разрешимого идеала) произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и доказано, что в случае $\mathrm{char}K = 0$ алгебра $\mathfrak{g}$ является полупрямой суммой своего радикала и максимальной полупростой подалгебры (см. *Леви — Мальцева разложение*). Это позволило свести задачу классификации произвольных алгебр Ли к перечислению полупростых (что для $K = \mathbb{C}$ было сделано уже В. Киллингом) и разрешимых алгебр. Классификация же Ли р. а. проведена (для $K = \mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$) лишь в размерностях $\leqslant 6$.

Если $\mathfrak{q}$ — *разрешимая* алгебраич. подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где V — конечномерное пространство над полем K характеристики 0, то $\mathfrak{g}$ разлагается в полупрямое произведение нильпотентного идеала, образуемого всеми нильпотентными преобразованиями из $\mathfrak{q}$ и нек-рой абелевой подалгебры, состоящей из полупростых преобразований [6]. Аналогичное строение имеет вообще любая р а с щ е п л я е м а я Ли р. а., т. е. конечномерная Ли р. а. над K, каждый элемент x к-рой разлагается в сумму $x = s + n$, где $s, n \in \mathfrak{g}$, $[s, n] = 0$, s полупрост, а n нильпотентен [8]. Каждой конечномерной Ли р. а. над K однозначно сопоставляется минимальная содержащая ее расщепляемая Ли р. а. (р а с щ е п л е н и е М а л ь ц е в а). Решена [8] также задача классификации Ли р. а., имеющих заданное расщепление Мальцева. Таким образом, задача классификации Ли р. а. сводится, в известном смысле, к изучению нильпотентных алгебр Ли.

Кроме радикала, в произвольной конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ выделяют максимальные разрешимые подалгебры. Если K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, то все такие подалгебры в $\mathfrak{g}$ (они наз. б о р е л е в с к и м и) сопряжены. Напр., $\mathfrak{t}(n, K)$ является борелевской подалгеброй в алгебре Ли всех матриц порядка n. Если K не является алгебраически замкнутым или $\mathrm{char}K$ конечна, то теорема Ли, вообще говоря, не верна. Однако она распространяется на случай, когда K совершенно и содержит характеристич. корни всех $\rho(x)$, $x \in \mathfrak{q}$. Если это условие выполнено для присоединенного представления Ли р. а. $\mathfrak{g}$,

то g наз. треугольной. На треугольные алгебры Ли переносятся многие свойства Ли р. а. над алгебраически замкнутым полем. В частности, если char $K=0$, то все максимальные треугольные подалгебры в произвольной конечномерной алгебре Ли сопряжены (см. [1], [7]). Максимальные треугольные подалгебры используются при изучении полупростых алгебр Ли над алгебраически незамкнутым полем в качестве хорошего аналога борелевских подалгебр. Они играют также основную роль в описании связных равномерных подгрупп в группах Ли [9].

Лит.: [1] Борель А., Титс Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [4] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [5] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [6] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [7] Винберг Э. Б., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, с. 270—73; [8] Мальцев А. И., Избр. труды, т. 1, М., 1976, с. 155—76; [9] Онищик А. Л., «Матем. сб.», 1967, т. 74, с. 398—416.

В. В. Горбацевич.

ЛИ РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — группа Ли, разрешимая как абстрактная группа. В дальнейшем рассматриваются вещественные или комплексные Ли р. г.

Нильпотентная, в частности абелева, группа Ли разрешима. Если $F=\{V_i\}$ — полный *флаг* в конечномерном векторном пространстве V (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то

$$B(F)=\{g\in \mathrm{GL}(V)\mid gV_i\subset V_i,\ \forall i\}$$

является разрешимой алгебраич. подгруппой в $\mathrm{GL}(V)$ и, в частности, Ли р. г. Если в V выбрать базис, согласованный с флагом F, то в нем элементы группы $B(F)$ представятся невырожденными верхними треугольными матрицами; полученная матричная Ли р. г. обозначается через $T(n, K)$, где $K=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G разрешима тогда и только тогда, когда разрешима связная компонента единицы $(G)_0$ группы G. Алгебрами Ли групп $B(F)$ и $T(n, K)$ являются соответственно $\mathfrak{t}(F)$ и $\mathfrak{t}(n, K)$ (см. *Ли разрешимая алгебра*). В силу соответствия между подалгебрами в $\mathfrak{g}$ и связными подгруппами Ли в G на Ли р. г. переносятся все свойства разрешимой алгебры Ли (см. [1], [3]).

Для Ли р. г. справедлив аналог теоремы Ли о разрешимых алгебрах Ли: если $\rho: G\to \mathrm{GL}(V)$ — конечномерное комплексное представление Ли р. г. G, то существует полный флаг F в V такой, что $\rho(G)\subset B(G)$. В частности, в V существует общий собственный вектор для всех $\rho(g)$, $g\in G$.

Ли р. г. были впервые рассмотрены С. Ли (S. Lie), предполагавшим, что непрерывные группы могут играть в теории интегрирования в квадратурах дифференциальных уравнений ту же роль, что группа Галуа в теории алгебраич. уравнений. Однако, вообще говоря, группа автоморфизмов дифференциального уравнения тривиальна, и поэтому только для линейных и нек-рых других уравнений в этом направлении получены содержательные результаты. Так, для этих уравнений выразимость решений через квадратуры и экспоненты от них фактически эквивалентна разрешимости соответствующей (матричной) группы Галуа [2]. Если же эта группа нильпотентна, то экспоненты от квадратур в решение не входят.

В силу теоремы Леви — Мальцева о разложении в полупрямое произведение произвольной связной односвязной группы Ли Ли р. г. играют существенную роль при изучении произвольных групп Ли. В произвольной связной группе Ли G рассматриваются также максимальные разрешимые подгруппы. Если $K=\mathbb{C}$, то они наз. борелевскими и сопряжены в группе G. Напр., $B(F)$ — борелевская подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$.

Односвязная Ли р. г. всегда имеет точное конечномерное представление, для неодносвязных это не всегда так. В односвязной Ли р. г. произвольная связная подгруппа замкнута и односвязна [6]. Экспоненциальное отображение exp: $\mathfrak{g} \to G$ даже для односвязной Ли р. г. не обязано быть ни инъективным, ни сюръективным. Ли р. г., для к-рых exp — диффеоморфизм, наз. э к с п о н е н ц и а л ь н ы м и (см. *Ли экспоненциальная группа*). Односвязная Ли р. г. диффеоморфна $\mathbb{R}^N$, а произвольная связная Ли р. г. — $\mathbb{R}^n \times T^m$, где T^m есть m-мерный тор.

Связная линейная Ли р. г. над $\mathbb{R}$ представляется в виде полупрямого произведения $K \cdot S$, где K — компактная абелева подгруппа, а S — односвязный нормальный делитель. Алгебраическая связная разрешимая группа над любым полем характеристики 0 разлагается в полупрямое произведение нормального делителя, состоящего из унипотентных элементов, и абелевой подгруппы, состоящей из полупростых элементов [3]. Для связных Ли р. г. можно определить [4] аналог расщепления Мальцева.

Если алгебра Ли связной группы Ли G треугольна (над $\mathbb{R}$), то G наз. т р е у г о л ь н о й. Для треугольных групп Ли справедлив аналог *Ли теоремы* о разрешимых алгебрах. Максимальные связные треугольные подгруппы в произвольной связной группе Ли сопряжены [5]. Связная треугольная группа Ли изоморфна подгруппе в $T(n, \mathbb{R})$ и является экспоненциальной группой, если она односвязна.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [2] К а п л а н с к и й И., Введение в дифференциальную алгебру, пер. с англ., М., 1959; [3] Ш е в а л л е К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [4] A u s l a n d e r L., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 79, p. 227—61; [5] В и н б е р г Э. Б., «Докл. АН СССР», 1961, т. 141, с. 270—73; [6] М а л ь ц е в А. И., Избр. труды, т. 1, М., 1976, с. 177—200.

В. В. Горбацевич.

ЛИ РЕДУКТИВНАЯ АЛГЕБРА — конечномерная алгебра Ли над полем k характеристики 0, присоединенное представление к-рой вполне приводимо. Свойство редуктивности алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равносильно любому из следующих свойств:

1) радикал $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с центром $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$;

2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{g}_0$, где $\mathfrak{g}_0$ — полупростой идеал в $\mathfrak{g}$;

3) $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{g}_i$, где $\mathfrak{g}_i$ — простые идеалы;

4) $\mathfrak{g}$ допускает точное вполне приводимое конечномерное линейное представление.

Свойство редуктивности алгебры Ли сохраняется как при расширении, так и при сужении основного поля k.

Важный класс Ли р. а. над $k = \mathbb{R}$ составляют компактные алгебры Ли (см. *Ли компактная группа*). Группу Ли, алгебра Ли к-рой редуктивна, часто наз. р е д у к т и в н о й г р у п п о й Л и. Если k алгебраически замкнуто, то алгебра Ли над k является редуктивной тогда и только тогда, когда она изоморфна алгебре Ли нек-рой редуктивной алгебраич. группы над k.

Обобщением понятия Ли р. а. является следующее понятие. Подалгебра $\mathfrak{h}$ конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над k наз. р е д у к т и в н о й в $\mathfrak{g}$, если присоединенное представление $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ вполне приводимо. В этом случае $\mathfrak{h}$ будет Ли р. а. Если k алгебраически замкнуто, то для редуктивности подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ необходимо и достаточно следующее условие: $\mathrm{ad}\, \mathfrak{r}(\mathfrak{h})$ состоит из полупростых линейных преобразований.

Лит.: [1] С е р р Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969.

А. Л. Онищик.

ЛИ СВОБОДНАЯ АЛГЕБРА н а д к о л ь ц о м R — алгебра Ли $L = L(X)$ над R, в к-рой выделено

свободное порождающее множество X, любое отображение к-рого в произвольную алгебру G над R продолжается до гомоморфизма из L в G. Мощность множества X вполне определяет $L(X)$ и наз. ее рангом. Ли с. а. есть свободный R-модуль (о базисах к-рого см. *Базисный коммутатор*). Подалгебра M Ли с. а. над полем сама является Ли с. а. (теорема Ширшова [1]). Если же $R=\mathbb{Z}$, то это верно лишь при условии, что L/M — свободная абелева группа [2]. Конечно порожденные подалгебры в Ли с. а. над полем образуют подрешетку в решетке всех подалгебр [3]. Установлены [4] канонич. связи Ли с. а. со свободными группами и свободными ассоциативными алгебрами.

Лит.: [1] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1953, т. 33, № 2, с. 441—52; [2] Witt E., «Math. Z.», 1956, Bd 64, S. 195—216; [3] Кукин Г. П., «Алгебра и логика», 1977, т. 16, № 5, с. 577—85; [4] Magnus W., «J. reine und angew. Math.», 1937, Bd 177, S. 105—15. *Ю. А. Бахтурин.*

ЛИ СКОБКА — коммутатор векторных полей на дифференцируемом многообразии. Если интерпретировать векторные поля класса C^∞ на дифференцируемом (класса C^∞) многообразии M как дифференцирования алгебры $F(M)$ функций класса C^∞ на M, то Ли с. полей X и Y задается формулой

$$[X\ Y]f \quad X(Yf)-Y(Xf),$$

где $f\in F(M)$. Совокупность всех векторных полей класса C^∞ на M является алгеброй Ли относительно Ли с. *А. Л. Онищик.*

ЛИ ТЕОРЕМА — 1) Ли т.— одна из трех классич. теорем теории групп Ли, описывающих связь *Ли локальной группы* с ее алгеброй Ли. Ли т. составляют фундамент теории, развитой в 19 в. С. Ли (S. Lie) и его школой (см. [1]).

Пусть G — r-мерная вещественная эффективная локальная *Ли группа преобразований* области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, e — единица группы G и пусть в локальных координатах в окрестности множества $\{e\}\times\Omega$ в $G\times\Omega$ действие группы G на Ω задано набором аналитич. функций

$$y_i=f_i(g_1,\ \ldots,\ g_r;\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\quad i=1,\ \ldots,\ n. \tag{1}$$

где $g=(g_1,\ \ldots,\ g_r)\in G$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in\Omega$ и $g(x)\cdot y=(y_1,\ \ldots,\ y_n)\in\Omega$. Указанное действие определяет на Ω r аналитич. векторных полей

$$X_i=\sum\nolimits_{j=1}^{n}\xi_{ij}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j},\quad i=1,\ \ldots,\ r, \tag{2}$$

где $\xi_{ij}(x)=\dfrac{\partial f_j}{\partial g_i}(e,\ x)$.

Первая теорема Ли устанавливает, что функции f_j, $j=1,\ \ldots,\ n$, определяющие действие группы G, сами определяются по нек-рому вспомогательному набору аналитич. функций $\psi_{ki}(g)$, $k,\ i=1,\ \ldots,\ r$, на G, удовлетворяющих условию

$$\psi_{ki}(e)=\delta_{ki}, \tag{3}$$

δ_{ki} — символ Кронекера. Точнее, $(\psi_{ki}(g))$ — это матрица дифференциала правого сдвига на группе G на элемент g^{-1} в точке g, а набор функций (1) — это в точности решение системы уравнений

$$\frac{\partial f_j}{\partial g_i}(g,\ x)=\sum\nolimits_{k=1}^{r}\xi_{kj}(f(g,\ x))\,\psi_{ki}(g),\ i=1,\ \ldots,\ r;\quad j=1,\ \ldots,\ n, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальным условиям $f_j(e,\ x)=x$, $j=1,\ \ldots,\ n$).

Вторая теорема Ли описывает свойства функций $\xi_{ij}(x)$ и $\psi_{ki}(g)$. А именно, $\xi_{ij}(x)$ удовлетво-

ряют системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{ik}\frac{\partial\xi_{jl}}{\partial x_k}-\xi_{jk}\frac{\partial\xi_{il}}{\partial x_k}\right)=\sum_{k=1}^{r}c_{ij}^{k}\xi_{kl}, \qquad (5)$$

$$1\leqslant i,\ j\leqslant r,\ 1\leqslant l\leqslant n$$

(эта система есть условие интегрируемости системы (4)), а функции $\psi_{kl}(g)$ — в системе уравнений

$$\frac{\partial\psi_{kl}}{\partial g_m}-\frac{\partial\psi_{km}}{\partial g_l}=\sum_{i,\ j=1}^{r}c_{ji}^{k}\psi_{im}\psi_{jl},\quad 1\leqslant k,\ l,\ m\leqslant r,$$

где c_{ij}^{k} — нек-рые константы. Соотношения (5) означают, что коммутатор (скобка Ли) $[X_i,\ X_j]$ векторных полей X_i и X_j является линейной комбинацией полей $X_1,\ \ldots,\ X_r$ с постоянными коэффициентами

$$[X_i,\ X_j]=\sum_{k=1}^{r}c_{ij}^{k}X_k, \qquad (6)$$

т. е. что линейная оболочка $\mathfrak{g}$ полей $X_1,\ \ldots,\ X_r$ является алгеброй относительно скобки Ли.

Обращение первой и второй теорем Ли состоит в следующем: если функции $f_1,\ \ldots,\ f_n$ дают решение системы (4), в к-рой матрица $\|\xi_{ij}\|$ имеет максимальный ранг, и выполнены условия (3) и (5), то формула (1) определяет локальную эффективную группу Ли преобразований. Эта локальная группа порождена однопараметрич. группами преобразований, заданными формулой (2).

Третья теорема Ли утверждает, что константы c_{ij}^{k} удовлетворяют следующим соотношениям:

$$c_{ij}^{k}=-c_{ji}^{k},$$

$$\sum_{l=1}^{r}(c_{il}^{m}c_{jk}^{l}+c_{kl}^{m}c_{ij}^{l}+c_{jl}^{m}c_{ki}^{l})=0,\ 1\leqslant i,\ j,\ k,\ l,\ m\leqslant r, \qquad (7)$$

т. е. $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли. Важное значение имеет обращение третьей теоремы Ли: если c_{ij}^{k} — любые константы, удовлетворяющие соотношениям (7), то существует система векторных полей $X_1,\ \ldots,\ X_r$, удовлетворяющих соотношениям (6), и эти векторные поля возникают с помощью описанной выше конструкции из нек-рой локальной группы Ли преобразований (иначе говоря, всякая конечномерная алгебра Ли есть алгебра Ли нек-рой локальной группы Ли преобразований). Иногда (см., напр., [4]) третьей теоремой Ли наз. утверждение о существовании для каждой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ глобальной группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (см. *Ли алгебра аналитической группы*).

2) Ли т. о разрешимых алгебрах Ли: пусть φ — линейное представление конечномерной разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{b}$ в векторном пространстве V над алгебраически замкнутым полем характеристики 0; тогда в V существует такой базис, в к-ром все операторы X из $\varphi(\mathfrak{b})$ записываются верхнетреугольными матрицами. Аналогичное утверждение справедливо и для линейного непрерывного представления связной топологической разрешимой группы в конечномерном комплексном векторном пространстве (теоретико-групповой аналог Ли т.); предположение о связности группы является существенным. Вариант теоретико-группового аналога Ли т. известен под названием *Ли — Колчина теорема*.

Лит.: [1] Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, Bd 1—3, Lpz., 1888—93; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [4] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [6] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с франц., т. 3, М., 1958; [5] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, М.—Л., 1940.

В. Л. Попов.

ЛИ ТРОЙНАЯ СИСТЕМА — векторное пространство $\mathfrak{m}$ с трилинейной композицией

$$\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\longrightarrow\mathfrak{m},\quad (X, Y, Z)\longrightarrow[X, Y, Z],$$

удовлетворяющей следующим условиям:

$$[X, X, Y]=0,$$
$$[X, Y, Z]+[Y, Z, X]+[Z, X, Y]=0,$$
$$[X, Y, [Z, U, V]]=[[X, Y, Z], U, V]+[Z, [X, Y, U], V]+[Z, U, [X, Y, V]].$$

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{g}$ такое подпространство, что $[[X, Y], Z]\in\mathfrak{m}$ для любых $X, Y, Z\in\mathfrak{m}$, то операция

$$[X, Y, Z]\cdot[[X, Y], Z]$$

превращает $\mathfrak{m}$ в Ли т. с. Обратно, всякая Ли т. с. может быть получена таким способом из нек-рой алгебры Ли.

Категория конечномерных Ли т. с. над полем $\mathbb{F}$ эквивалентна категории односвязных симметрических однородных пространств (см. *Симметрическое пространство*).

Лит.: [1] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [2] Loos O., Symmetric spaces, v. 1, N. Y.— Amst., 1969.

А. С. Феденко.

ЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА, алгебра Ли типа (E),— конечномерная вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$, для любого элемента X к-рой оператор присоединенного представления $\mathrm{ad}X$ не имеет чисто мнимых собственных значений. Экспоненциальное отображение $\exp:\mathfrak{g}\to G$ в соответствующую алгебре $\mathfrak{g}$ односвязную группу Ли G является диффеоморфизмом, а G — *Ли экспоненциальной группой.*

Каждая Ли э. а. разрешима. Нильпотентная алгебра Ли над $\mathbb{R}$ есть Ли э. а. Класс Ли э. а. является промежуточным между классами всех разрешимых и вполне разрешимых алгебр Ли; он замкнут относительно перехода к подалгебрам, факторалгебрам и конечным прямым суммам, но не замкнут относительно расширений.

Простейшим примером Ли э. а., не являющейся вполне разрешимой алгеброй Ли, является трехмерная алгебра Ли с базисом X, Y, Z и умножением, заданным формулами $[X, Y]=0$, $[Z, X]=a_{11}X+a_{12}Y$, $[Z, Y]=a_{21}X+a_{22}Y$, где $[a_{ij}]$ — действительная матрица, имеющая комплексные, но не чисто мнимые собственные значения. Трехмерная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ с базисом X, Y, Z и определяющими соотношениями

$$[X, Y]=0,\quad [Z, X]=Y,\quad [Z, Y]=-X$$

разрешима, но не является Ли э. а.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ экспоненциальна тогда и только тогда, когда все корни алгебры $\mathfrak{g}$ имеют вид $\alpha+i\beta$, где α, β — вещественные линейные формы на $\mathfrak{g}$, причем β пропорциональна α (см. [1]), или же когда $\mathfrak{g}$ не имеет факторалгебр, содержащих подалгебру, изоморфную $\mathfrak{g}_0$.

Лит. см. при ст. *Ли экспоненциальная группа.*

В. В. Горбацевич.

ЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ГРУППА, группа Ли типа (E),—вещественная конечномерная группа Ли G, для к-рой экспоненциальное отображение $\exp:\mathfrak{g}\to G$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, является диффеоморфизмом.

Любая Ли э. г. разрешима, односвязна, а ее алгебра Ли является *Ли экспоненциальной алгеброй.* Класс Ли э. г. замкнут относительно перехода к связной подгруппе, факторгруппе по связному нормальному делителю и к конечному прямому произведению, но не замкнут относительно расширений. Всякая *Ли вполне разрешимая группа* (в частности, нильпотентная группа Ли) экспоненциальна, если она односвязна.

Пересечение связных подгрупп в Ли э. г. связно. Централизатор произвольного подмножества тоже связен. Связная группа Ли экспоненциальна тогда и только тогда, когда она не имеет факторгрупп, содержащих в качестве подгруппы универсальную накрывающую группы движений евклидовой плоскости.

Лит.: [1] Dixmier J., «Bull. Soc. Math. France», 1957, t. 85, p. 113—21; [2] Saitô M., «Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo Sci. Papers», 1957, v. 7, p. 1—11, p. 157—68. *В. В. Горбацевич.*

ЛИ — КОЛЧИНА ТЕОРЕМА: разрешимая подгруппа G группы $GL(V)$ (V — конечномерное векторное пространство над алгебраически замкнутым полем) имеет нормальный делитель G_1 индекса не более ρ, где ρ зависит только от $\dim V$, такой, что в V существует флаг $F\{V_i\}$, инвариантный относительно G_1. Другими словами, в V найдется базис, в к-ром элементы из G_1 записываются треугольными матрицами. Если G связна в топологии Зариского, то $G_1=G$; в этом случае Л.—К. т. является обобщением теоремы С. Ли (S. Lie), доказанной им для комплексных связных (в евклидовой топологии) разрешимых групп Ли (см. *Ли разрешимая группа*, *Ли теорема*). Это утверждение можно рассматривать также как частный случай *Бореля теоремы* о неподвижной точке.

Для произвольного поля справедлив следующий аналог Л.—К. т.: разрешимая группа матриц содержит нормальный делитель конечного индекса, коммутант к-рого нильпотентен.

Л.—К. т. была доказана Э. Колчиным [1] (для связных групп) и А. И. Мальцевым [2] (в общей формулировке). Ее наз. также иногда теоремой Колчина Мальцева.

Лит.: [1] Kolchin E. R., «Ann. Math.», 1948, v. 49, № 4, p. 1—42; [2] Мальцев А. И., Избр. труды, т. 1, М., 1976, с. 294—313; [3] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977. *В. В. Горбацевич.*

ЛИНДЕБЕРГА — ФЕЛЛЕРА ТЕОРЕМА — теорема, устанавливающая условия асимптотич. нормальности функции распределения суммы независимых случайных величин, обладающих конечными дисперсиями. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с математич. ожиданиями $a_1, a_2, \ldots$ и конечными дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$, не все из к-рых равны нулю. Пусть

$$B_n^2=\sum_{j=1}^n \sigma_j^2, \quad V_j(x)=\mathsf{P}\{X_j<x\}.$$

Для того чтобы

$$B_n^{-2}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sigma_j^2\longrightarrow 0$$

и

$$\mathsf{P}\left\{B_n^{-1}\sum_{j=1}^n (X_j-a_j)<x\right\}\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

для любого x при $n\to\infty$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия (условия Линдеберга):

$$B_n^{-2}\sum_{j=1}^n \int_{|x-a_j|\geqslant \varepsilon B_n}(x-a_j)^2\,dV_j(x)\longrightarrow 0$$

при $n\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$. Достаточность была доказана Дж. Линдебергом [1], необходимость — В. Феллером [2].

Лит.: [1] Lindeberg J. W., «Math. Z.», 1922, Bd 15, S. 211—25; [2] Feller W., «Math. Z.», 1935, Bd 40, S. 521—559; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972. *В. В. Петров.*

ЛИНДЕЛЁФА ГИПОТЕЗА о поведении ζ-функции Римана: для любого $\varepsilon>0$ выполняется

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|\zeta(1/2+it)|}{|t|^{\varepsilon}}=0$$

Высказана Э. Линделёфом [1]. Л. г. эквивалентна утверждению: при фиксированном $\sigma \in (1/2, 1)$ число нулей $\zeta(s)$, лежащих в области $\mathrm{Re}\, s > \sigma$, $T < \mathrm{Im}\, s < T+1$, есть $o(\ln T)$. Поэтому Л. г. является следствием гипотезы Римана о нулях $\zeta(s)$. Известно (1982), что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|\zeta(1/2 + it)|}{t^c} = 0,$$

где c — нек-рая постоянная, $0 < c < 6/37$.

Имеются обобщения Л. г. на L-функции Дирихле: для любого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$L(1/2 + t, \chi) = O((k|t|+1)^{\varepsilon}),$$

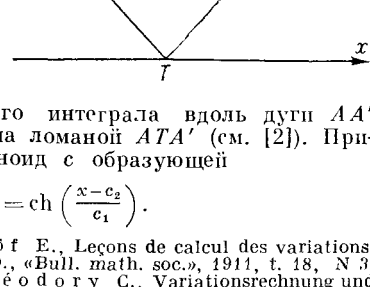
где k — модуль характера χ.

Лит.: [1] Lindelöf E., Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, P., 1905; [2] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функций Римана, пер. с англ., М., 1953, гл. XIII.

С. М. Воронин.

ЛИНДЕЛЁФА КОНСТРУКЦИЯ — геометрическое построение для исследования сопряженных точек в задаче о минимальной поверхности вращения (рис.). Л. к. остается пригодной для любой простейшей вариационной задачи на плоскости (x, y), для к-рой общий интеграл уравнения Эйлера можно представить в виде

$$\frac{y}{c_1} = f\left(\frac{x-c_2}{c_1}\right).$$



При этом касательные к экстремали в сопряженных точках A и A' пересекаются в нек-рой точке на оси x, а значение варьируемого интеграла вдоль дуги AA' равно его значению на ломаной ATA' (см. [2]). Примером является катеноид с образующей

$$\frac{y}{c_1} = \mathrm{ch}\left(\frac{x-c_2}{c_1}\right).$$

Лит.: [1] Lindelöf E., Leçons de calcul des variations, P., 1861; [2] Bolza O., «Bull. math. soc.», 1911, t. 18, N 3, p. 107–10; [3] Carathéodory C., Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen, B.— Lpz., 1935.

В. В. Охрименко.

ЛИНДЕЛЁФА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — полунепрерывный метод суммирования числовых и функциональных рядов, определенный последовательностью функций

$$g_0(\delta) = 1, \quad g_k(\delta) = \exp(-\delta k \ln k), \quad \delta > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

суммируем методом суммирования Линделёфа к сумме s, если

$$\lim_{\delta\to 0}\left[u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\delta k \ln k)\, u_k\right] = s$$

и ряд под знаком предела сходится. Метод был введен Э. Линделёфом [1] для суммирования степенных рядов.

Л. м. с. является регулярным (см. *Регулярные методы суммирования*) и применяется как аппарат для аналитич. продолжения функций. Если $f(z)$ — главная ветвь аналитич. функции, регулярной в нуле и представимой рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

для малых z, то этот ряд суммируем Л. м. с. к $f(z)$ во всей звезде функции $f(z)$, причем равномерно во

всякой замкнутой ограниченной области, содержащейся внутри звезды.

Из методов суммирования, определенных преобразованием последовательности в последовательность полунепрерывными матрицами $a_k(\omega)$ типа

$$a_k(\omega) = \frac{c_{k+1}\omega^{k+1}}{E(\omega)},$$

где

$$E(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega^k$$

— целая функция, Э. Линделёфом рассматривался случай, когда

$$E(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\omega}{\ln(k+\beta)}\right]^k, \quad \beta > 1.$$

Матрицу $\|a_k(\omega)\|$ с такой целой функцией наз. м а т р и ц е й Л и н д е л ё ф а.

Лит.: [1] L i n d e l ö f E., «J. math.», 1903, t. 9, p. 213 221; [2] e r o ж e, Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, P., 1905; [3] Х а р д и Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] К у к Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960.

И. И. Волков.

ЛИНДЕЛЁФА ПРИНЦИП — основной качественный вариационный принцип в теории конформного отображения, найденный Э. Линделёфом [1]. Пусть односвязные области D и $\tilde{D}$ на плоскости комплексного переменного z таковы, что их границы Γ и $\tilde{\Gamma}$ соответственно состоят из конечного числа жордановых дуг, причем $\tilde{D}$ содержится в D, и пусть точка $z_0 \in \tilde{D} \subset D$. Пусть, кроме того, $w = f(z)$ и $w = \tilde{f}(z)$ — функции, реализующие конформное отображение соответственно D и $\tilde{D}$ на единичный круг $\Delta = \{w: |w| < 1\}$, причем $f(z_0) = 0$, $\tilde{f}(z_0) = 0$. П р и н ц и п Л и н д е л ё ф а состоит в том, что при этих условиях: 1) прообраз $\tilde{D}_\rho$ области $|w| < \rho$, $0 < \rho < 1$, при отображении $w = \tilde{f}(z)$ лежит внутри прообраза D_ρ этой же области $|w| < \rho$ при отображении $w = f(z)$, причем соприкосновение их границ $\tilde{\Gamma}_\rho$ и Γ_ρ возможно лишь, если $\tilde{D} = D$; 2) $|\tilde{f}'(z_0)| \geqslant |f'(z_0)|$, причем знак равенства возможен лишь, если $\tilde{D} = D$; 3) если существует общая точка z_1 контуров $\tilde{\Gamma}$ и Γ, то

$$|\tilde{f}'(z_1)| \leqslant |f'(z_1)|,$$

причем знак равенства возможен лишь, если $\tilde{D} = D$. Иными словами, при вдавливании внутрь границы Γ области D: 1) все л и н и и у р о в н я Γ_ρ, т. е. прообразы окружностей $|w| = \rho$, сжимаются; 2) растяжение в точке z_0 увеличивается; 3) растяжение в неподвижных точках z_1 границы уменьшается.

Из приведенной формулировки Л. п. вытекает также, что длина образа дуги γ границы Γ, подвергшейся вдавливанию до дуги $\tilde{\gamma}$, всегда не превосходит длины образа $\tilde{\gamma}$ (длина $f(\gamma) \leqslant$ длины $\tilde{f}(\tilde{\gamma})$), причем равенство имеет место только в случае $\tilde{\Gamma} = \Gamma$. Это следствие Л. п. известно также как п р и н ц и п М о н т е л я.

В более общей ситуации, когда $\tilde{D}$ и D — конечносвязные области, ограниченные конечным числом жордановых кривых и расположенные соответственно в плоскостях z и w, $w = f(z)$ — мероморфная функция в $\tilde{D}$, значения к-рой лежат в D, Л. п. состоит в следующем. Если w_0 — точка образа $f(\tilde{D})$ области $\tilde{D}$; $\{z_\nu\}$, $\nu = 0, 1, \ldots$, — множество точек $\tilde{D}$, для к-рых $f(z_\nu) = w_0$; m_ν — кратность нуля z_ν функции $f(z) - w_0$; $g(z, z_\nu)$ — *Грина функция* области $\tilde{D}$ с полюсом z_ν,

а $g(w, w_0)$ — функция Грина области D с полюсом w_0, то имеет место неравенство

$$g(w, w_0) \geqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} m_\nu \tilde{g}(z, z_\nu) \qquad (1)$$

для всех $z \in \tilde{D}$, $w = f(z)$. При этом если в (1) имеет место равенство хотя бы в одной точке $z \in \tilde{D}$, то оно выполняется всюду в $\tilde{D}$. В частности, неравенство

$$g(w, w_0) \geqslant \tilde{g}(z, z_0), \qquad (2)$$

вытекающее из (1), и было получено Э. Линделёфом в [1]. Оно означает, что образ области $\{z: \tilde{g}(z, z_0) > \lambda\}$ всегда расположен внутри области $\{w : g(w, w_0) > \lambda\}$.

Л. п. в общем виде (1) применим и для произвольных областей $\tilde{D}$, D, но заключение, относящееся к случаю равенства, здесь уже, вообще говоря, не справедливо. Л. п. позволяет получить многие количественные оценки изменения конформного отображения при вариации области (см. [3]). Он тесно связан с *подчинения принципом*, и его можно также рассматривать как обобщение *Шварца леммы*.

Лит.: [1] Lindelöf E., «Acta soc. scient. fennica», 1908 v. 35, № 7; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 3 изд., М., 1965; [4] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 2, М., 1962; [5] Лаврентьев М. А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962.

Е. Д. Соломенцев.

ЛИНДЕЛЁФА ПРОСТРАНСТВО, финально компактное пространство,— топологическое пространство X такое, что всякое его открытое покрытие содержит счетное подпокрытие. Напр., всякое пространство со счетной базой есть Л. п.; всякое *квазикомпактное пространство* есть Л. п. Всякое замкнутое подпространство Л. п. есть Л. п. Для каждого непрерывного отображения f Л. п. в топологич. пространство X' подпространство $f(X')$ последнего — Л. п. Всякое отделимое пространство, являющееся объединением счетного семейства (би)компактных множеств,— Л. п. Всякое регулярное Л. п. паракомпактно. Произведение Л. п. и (би)компактного пространства есть Л. п.

М. И. Войцеховский.

ЛИНДЕЛЁФА ТЕОРЕМА об асимптотических значениях: 1) Пусть $w = f(z)$ — ограниченная регулярная аналитич. функция в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$ и пусть α — асимптотич. значение $f(z)$ вдоль жорданового пути L, расположенного в D и оканчивающегося в точке $e^{i\theta_0}$, т. е. $f(z) \to \alpha$, когда $z \to e^{i\theta_0}$ вдоль L. Тогда α есть угловое предельное значение функции $f(z)$ в точке $e^{i\theta_0}$, т. е. $f(z)$ равномерно стремится к α, когда $z \to e^{i\theta_0}$ внутри любого угла с вершиной $e^{i\theta_0}$, образованного двумя хордами круга $|z| < 1$.

Эта Л. т. верна и в областях D других типов, причем условия на $f(z)$ удается значительно расширить. Достаточно, напр., потребовать, чтобы $f(z)$ была мероморфной функцией в D, не принимающей трех различных значений. Л. т. обобщается также для функций $f(z)$ многих комплексных переменных, $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Напр., если $f(z)$ — ограниченная голоморфная функция в шаре $D = \{z: |z| < 1\}$, имеющая асимптотич. значение α вдоль некасательного пути L в точке $\zeta \in \partial D$, то α есть некасательное предельное значение $f(z)$ в точке ζ (см. [4]).

2) Пусть $w = f(z)$ — ограниченная регулярная аналитич. функция в круге $D = \{z: |z| < 1\}$, имеющая вдоль двух различных путей L_1 и L_2, оканчивающихся в точке $e^{i\theta_0}$, асимптотич. значения α и β. Тогда $\alpha = \beta$ и $f(z) \to \alpha$ равномерно внутри угла между путями L_1 и L_2. Эта Л. т. верна и для областей D других типов.

Для неограниченных функций она, вообще говоря, неверна.

Л. т. найдены Э. Линделёфом [1].

Лит.: [1] Lindelöf E., «Acta Soc. scient. fennica», 1915, t. 46, № 4; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Коллингвуд Э. Ф., Ловатер А. Дж., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [4] Хенкин Г. М., Чирка Е. М., в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 13—142.

Е. Д. Соломенцев.

ЛИНДЕМАНА ТЕОРЕМА: показательная функция e^z в любой алгебраич. точке $z\neq 0$ принимает трансцендентное значение; доказана Ф. Линдеманом (F. Lindemann, 1882). Л. т. называют также следующее более общее утверждение, сформулированное без доказательства Ф. Линдеманом и доказанное К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) в 1885.

Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — алгебраич. числа, $|a_1|+\ldots+|a_m|\neq 0$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — попарно различимые алгебраич. числа, тогда

$$a_1e^{\alpha_1}+\ldots+a_me^{\alpha_m}\neq 0.$$

Это утверждение эквивалентно следующему: если $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — алгебраич. числа, линейно независимые над полем рациональных чисел, то числа $e^{\beta_1}, \ldots, e^{\beta_n}$ алгебраически независимы.

Метод доказательства Л. т. получил название м е т о д а Э р м и т а — Л и н д е м а н а. Он представляет собой развитие метода Эрмита, при помощи к-рого в 1873 была доказана трансцендентность числа e, и основывается на применении *Эрмита тождества* к нек-рым специально построенным многочленам.

Из Л. т. может быть выведена трансцендентность числа π, отрицательное решение проблемы квадратуры круга, а также трансцендентность значений функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ при алгебраическом $z\neq 0$ и значений функций $\ln z$ при алгебраическом $z\neq 0, 1$.

Лит.: [1] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; [2] Фельдман Н. И., Шидловский А. Б., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 3, с. 3—81.

А. И. Галочкин.

ЛИНЕАРИЗАЦИИ МЕТОДЫ — методы, позволяющие свести решение нелинейных задач к последовательному решению родственных линейных задач.

Пусть рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$L(u)=f, \tag{1}$$

где оператор L отображает банахово пространство H в себя, $L(0)=0$, и дифференцируем по Фреше. Одним из классич. методов решения (1), связанным с линеаризацией (1), является итерационный метод Ньютона — Канторовича, в к-ром при известном приближении u^n новое приближение u^{n+1} определяется как решение линейного уравнения

$$L'_{u^n}(u^{n+1}-u^n)+L(u^n)=f; \tag{2}$$

основой метода служит аппроксимация $L(u^n+z)$ (при малых $\|z\|$) выражением $L'_{u^n}z$, где L'_{u^n} — производная Фреше оператора L в точке u^n. Различные модификации этого метода и соответствующие оценки скорости сходимости могут быть найдены в [1] — [4]. Само операторное уравнение (1) может соответствовать, напр., нелинейной краевой задаче для уравнения с частными производными (см. [2], [4], [5]), и тогда на каждом шаге в (2) должна решаться линейная краевая задача, что вызывает необходимость применения численных методов и той или иной дискретизации исходной задачи и родственных ей линейных задач. С вычислительной точки зрения более естественно рассматривать методы линеаризации после соответствующей дискретизации

исходной задачи, считая (1) операторным уравнением в конечномерном пространстве.

Другим примером Л. м. для приближенного решения (1) может служить итерационный метод секущих (ложного положения) (см. [2], [3]). Во многих случаях для задач (1), являющихся задачами математич. физики, линеаризацию $L(u^n+z)$ предпочитают проводить на основе физич. соображений, заменяя $L(u^n+z)$ на $M_{u^n}z$ с линейным оператором M_{u^n} (см. [5] — [11]). Тогда получаемые итерационные методы записываются в виде

$$M_{u^n}u^{n+1}=f-(L(u^n)-M_{u^n}u^n). \qquad (3)$$

Таковы, напр., методы упругих решений и переменных параметров для решения нелинейных задач теории упругости (см. [5] — [8]); при этом для метода упругих решений линейный оператор $M_{u^n}=M$ соответствует оператору линейной теории упругости. К ним же примыкают итерационный метод Качанова (см. [9], [10]) и метод последовательных нагружений (см. [6] — [8]), сочетающий в себе идеи линеаризации и продолжения по параметру. Иногда вместо методов (3) используются более общие итерационные методы типа

$$M_{u^n}(u^{n+1}-u^n)=-\gamma_n(L(u^n)-f) \qquad (4)$$

с итерационным параметром γ, подлежащим выбору.

При реализации упомянутых методов следует учитывать и приближенность решения систем (напр., как следствие применения вспомогательных итерационных методов) (см., напр., [1], [12], [13]). При рассмотрении нелинейных задач на собственные значения (задач нахождения точек бифуркации), напр. вида

$$L(u)=\lambda M(u),\quad L(0)=0,\quad M(0)=0, \qquad (5)$$

идея линеаризации (5), сводящая исследование задачи (5) к исследованию линейной задачи на собственные значения

$$L'_0z=\lambda M'_0z,$$

оказалась весьма плодотворной (см. [14] — [16]). Часто используется та или иная линеаризация и в сеточных методах решения нестационарных нелинейных задач (см., напр., [17] — [21]), проводимая за счет известных решений в моменты времени до t_n и дающая линейные уравнения для решения в следующий дискретный момент $t_{n+1}=t_n+\tau$ (τ — шаг по времени).

Лит.: [1] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, т. 1, М., 1969; [2] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969; [3] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [4] Беллман Р., Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968; [5] Победря Б. Е., в кн.: Упругость и неупругость, в. 3, М., 1973, с. 95—173; [6] Оден Дж., Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред, пер. с англ., М., 1976; [7] Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике, пер. с англ., М., 1975; [8] Свирский И. В., Методы типа Бубнова — Галеркина и последовательных приближений, М., 1968; [9] Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966; [10] Fučik S., Kratochvil A., Nečas I., «Acta Univ. Corolinae. Math. et Phys.», 1974, v. 15, № 1—2, p. 31—33; [11] Амосов А. А., Бахвалов Н. С., Осипик Ю. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1980, т. 20, № 1, с. 104—11; [12] Eisenstat S. C., Schultz M. H., Sherman A. H., «Lect. Notes Math.», 1974, № 430, p. 131—53; [13] Дьяконов Е. Г., в кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 7, № 5, М., 1976, с. 14—78; [14] Ворович И. И., в кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. К шестидесятилетию акад. Л. И. Седова, М., 1969; [15] Бергер М. С., в кн.: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения, пер. с англ., М., 1974, с. 71—128; [16] Скрынник И. В., Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, К., 1973; [17] Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970; [18] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 2 — Нестацио-

нарные задачи, М., 1972; [19] Ривкинд В. Я., Уральцева Н. Н., в кн.: Проблемы математического анализа, в. 3, Л., 1972, с. 69—111; [20] Fairweather G., Finite element Galerkin methods for differential equations, N. Y., 1978. [Lect. Notes pure and appl. math., v. 34]; [21] Luskin M., «SIAM J. Numer. Analysis», 1979, v. 16, № 2, p. 284—99.

Е. Г. Дьяконов.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА — частный случай *операторного кольца*.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА — раздел алгебры, в к-ром изучаются векторные (линейные) пространства, линейные операторы (линейные отображения), линейные, билинейные и квадратичные функции (функционалы или формы) на векторных пространствах.

Исторически первым разделом Л. а. была теория *линейных уравнений* (алгебраических). В связи с решением систем линейных уравнений возникло понятие *определителя*. В 1750 было получено *Крамера правило* для решения системы линейных уравнений, в к-рой число уравнений равно числу неизвестных и определитель из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. В 1849 был предложен *Гаусса метод* решения систем линейных уравнений с числовыми коэффициентами. Этот метод является простейшим по числу применяемых операций и используется с различными изменениями также для приближенного решения систем уравнений, коэффициенты к-рых также известны приближенно.

В связи с изучением систем линейных уравнений и их определителей появилось понятие *матрицы*. Понятие ранга матрицы, предложенное Г. Фробениусом (G. Frobenius) в 1877, позволило явно выразить условия совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах коэффициентов этой системы (см. *Кронекера — Капелли теорема*). Тем самым в конце 19 в. было завершено построение общей теории систем линейных уравнений.

Если в 18 и 19 вв. основное содержание Л. а. составляли системы линейных уравнений и теория определителей, то в 20 в. центральное положение занимают понятие векторного пространства и связанные с ним понятия линейного преобразования, линейной, билинейной и полилинейной функции на векторном пространстве.

Векторным, или линейным, пространством над полем K наз. множество V элементов (называемых векторами), в к-ром заданы операции сложения векторов и умножения вектора на элементы из поля K, удовлетворяющие ряду аксиом (см. *Векторное пространство*). Рассматриваются также векторные пространства над телами. Одним из важнейших понятий теории векторных пространств является понятие линейного отображения, т. е. гомоморфизма векторных пространств над одним и тем же полем. Линейным оператором, или линейным преобразованием, наз. линейное отображение пространства в себя (т. е. эндоморфизм векторного пространства). Если пространство V конечномерно, то, выбирая в V базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и полагая

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

получают квадратную матрицу $A = \|a_{ij}\|$ порядка n, к-рая наз. матрицей линейного преобразования φ в данном базисе.

Векторное пространство V над полем K, снабженное дополнительной операцией умножения векторов, удовлетворяющей нек-рым аксиомам, наз. алгеброй над K (см. *Кольца и алгебры*, *Операторное кольцо*).

Все линейные преобразования пространства V относительно естественно определенных операций сложения, умножения и умножения линейных преобра-

зований на элементы поля K образуют алгебру над полем K. Все квадратные матрицы фиксированного порядка с элементами из поля K также образуют алгебру над K. Указанное выше соответствие между линейными преобразованиями пространства V и их матрицами в заданном базисе является изоморфизмом этих алгебр, что позволяет формулировать теоремы о линейных преобразованиях параллельно на матричном языке и при их доказательстве использовать теорию матриц.

Большое значение в теории линейных преобразований имеет выбор базиса, в к-ром матрица преобразования принимает в каком-то смысле простейший вид. В случае алгебраически замкнутого поля таким видом будет, напр., жорданова нормальная форма матрицы.

Важным случаем линейного отображения является линейная функция (линейный функционал) — линейное отображение V в K. Все линейные функции на V относительно естественным образом определенных операций сложения и умножения на элементы из поля K сами образуют векторное пространство V^* над K, наз. пространством, сопряженным с пространством V. Векторы пространства V можно в свою очередь рассматривать как линейные функции на сопряженном пространстве V^*, полагая $x(f) = f(x)$ для всех $x \in V$, $f \in V^*$. Если V конечномерно, то тем самым устанавливается естественный изоморфизм между V и V^{**}.

Обобщением понятия линейной функции является понятие полилинейной функции, т. е. функции со значениями в K, зависящей от нескольких аргументов (из к-рых одни принадлежат векторному пространству V, а другие — сопряженному пространству V^*), линейной по каждому аргументу. Эти функции наз. также тензорами. Их изучением занимается *полилинейная алгебра*. Частный случай полилинейных функций — билинейные функции (см. *Билинейное отображение*). Кососимметрич. полилинейные функции наз. также *внешними формами*.

На основе понятия векторного пространства определяются различные классич. пространства, изучаемые в геометрии: аффинные пространства, проективные пространства и др.

Теория векторных пространств имеет важные связи с теорией групп. Все автоморфизмы n-мерного векторного пространства V над полем K образуют группу относительно умножения, изоморфную группе невырожденных квадратных матриц порядка n с элементами из K. Гомоморфное отображение нек-рой группы G в эту группу автоморфизмов наз. линейным представлением группы G в пространстве V. Изучение свойств представлений составляет предмет теории линейных представлений групп.

Классич. теория линейных уравнений и определителей была обобщена на случай, когда вместо чисел или элементов поля рассматриваются элементы произвольного тела.

Естественным обобщением понятия векторного пространства над полем K является понятие *модуля* над произвольным кольцом. Основные теоремы Л. а. перестают быть верными при замене векторного пространства на модуль. Изучение возможностей таких обобщений, к-рые справедливы и для модулей, привело к возникновению *алгебраической K-теории*.

Лит.: [1] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [3] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; [4] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; [5] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, 2 изд., М., 1974; [6] Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, 2 изд., М., 1956; [7] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [8] Артин Э., Геометрическая алгебра, пер. с англ., М., 1969; [9] Бурбаки Н., Ал-

гебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [10] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, пер. с англ., М., 1955.

И. В. Проскуряков.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА; численные методы — раздел вычислительной математики, посвященный математич. описанию и исследованию процессов численного решения задач линейной алгебры.

Среди задач Л. а. наибольшее значение имеют две: решение системы линейных алгебраич. уравнений и определение собственных значений и собственных векторов матрицы. Другие часто встречающиеся задачи: обращение матрицы, вычисление определителя и нахождение корней алгебраич. многочлена, как правило, не имеют самостоятельного значения в Л. а. и носят вспомогательный характер при решении основных задач Л. а.

Любой численный метод в Л. а. можно рассматривать как нек-рую последовательность выполнения арифметич. операций над элементами входных данных. Если при любых входных данных численный метод позволяет найти решение задачи за конечное число арифметич. операций, то такой метод наз. прямым. В противоположном случае численный метод наз. итерационным.

Прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Пусть дана система

$$Ax = b \qquad (1)$$

с матрицей системы A и правой частью b. Если матрица A невырожденная, то решение дается формулой $x = A^{-1}b$, где A^{-1} есть матрица, обратная к матрице A. Основная идея прямых методов заключается в преобразовании системы (1) в такую эквивалентную систему, для к-рой матрица системы легко обращается и, следовательно, легко находится решение исходной системы. Пусть обе части равенства (1) умножены слева на невырожденные матрицы $L_1, L_2, \ldots, L_k$. Тогда новая система

$$L_k L_{k-1} \ldots L_1 A x = L_k L_{k-1} \ldots L_1 b \qquad (2)$$

эквивалентна системе (1). При этом матрицы L_i всегда можно подобрать такими, что матрица системы (2) будет достаточно простой, напр. треугольной, диагональной или унитарной. В этом случае легко вычисляются A^{-1} и $|A|$.

Одним из первых прямых методов является *Гаусса метод*. Он использует левые *треугольные матрицы* L_i и позволяет привести исходную систему уравнений к системе с правой треугольной матрицей. Этот метод легко реализуется на ЭВМ, его схема с выбором главного элемента позволяет решать системы с произвольной матрицей, а компактная схема — получать результаты с повышенной точностью за счет накопления скалярных произведений. Среди прямых методов, применяемых на практике, метод Гаусса требует минимального объема вычислительной работы.

Непосредственно к методу Гаусса примыкают метод Жордана и его модификация — метод оптимального исключения (см. [2]). Эти методы используют треугольные матрицы L_i как левые, так и правые и позволяют привести исходную систему к системе с диагональной матрицей. По своим характеристикам оба метода мало чем отличаются от метода Гаусса, но второй позволяет решать системы вдвое большего порядка при одной и той же памяти ЭВМ.

Перечисленные методы входят в группу т. н. методов исключения. Это название объясняется тем, что при каждом умножении на матрицу L_i в матрице системы исключается один или несколько элементов. Исключение можно производить не только с помощью треугольных матриц, но и с помощью унитарных. Различные модификации методов исключения по су-

ществу связаны с разложением матрицы системы (1) в произведение двух треугольных или треугольной и унитарной матриц.

Некоторые методы, такие как *окаймления метод*, *пополнения метод*, не являются методами исключения, хотя и близки к методу Гаусса.

Большое распространение получили методы, основанные на построении вспомогательной системы векторов, так или иначе связанных с матрицей исходной системы и ортогональных в нек-рой метрике. Одним из первых методов этой группы был метод ортогонализации строк. Матрицы L_i в нем — левые треугольные, матрица системы (2) — унитарная. Методы, основанные на ортогонализации, обладают многими достоинствами, но чувствительны к влиянию ошибок округления. На основе развития методов типа ортогонализации был создан весьма эффективный (при решении нек-рых систем с разреженными матрицами) сопряженных направлений метод (см. [9], [10]).

Прямые методы определения собственных значений и собственных векторов матрицы. Пусть для матрицы A требуется определить собственное значение λ и собственный вектор x, т. е. решить уравнение

$$Ax-\lambda x. \qquad (3)$$

При замене $x=Cy$, где C — невырожденная матрица, уравнение (3) перейдет в уравнение $By=\lambda y$ при $B=-C^{-1}AC$. Прямые методы решения данной задачи состоят в том, что с помощью конечного числа подобных преобразований исходная матрица A приводится к матрице B настолько простого вида, чтобы для нее легко находились коэффициенты характеристич. многочлена и собственные векторы. При этом собственные значения находятся как корни характеристич. многочлена каким-либо из известных методов. Численные методы перехода от матрицы A к матрице B по существу мало чем отличаются от численных методов преобразования системы (1) в систему (2). Известно много методов подобного типа (методы Крылова, Данилевского, Хессенберга и т. д., см. [1]), однако они не нашли широкого применения на практике в силу значительной численной неустойчивости (см. [3]).

Различают полную проблему собственных значений, когда ищутся все собственные значения, и частичную проблему, когда отыскивают нек-рые из них; последняя задача более типична в случае сеточных задач, возникающих при аппроксимации дифференциальных и интегральных уравнений.

Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Эти методы дают решение системы (1) в виде предела последовательности нек-рых векторов; построение их осуществляется посредством единообразного процесса, наз. процессом итерации. Основные итерационные процессы для решения системы (1) могут быть описаны посредством единообразного процесса следующей общей схемой. Строится последовательность векторов $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, . . ., $x^{(k)}$, . . . по рекуррентным формулам

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}+H^{(k)}\,(b-Ax^{(k-1)}),$$

где $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, . . .— нек-рая последовательность матриц, $x^{(0)}$ — начальное приближение, вообще говоря, произвольное. Различный выбор последовательности матриц $H^{(k)}$ приводит к различным итерационным процессам.

Простейшими итерационными процессами являются стационарные процессы, в к-рых матрицы $H^{(k)}$ не зависят от номера шага k; их также наз. методами простой итерации (см. [5]). Если последовательность $H^{(k)}$ периодична, то процесс наз. циклическим. Всякий циклич. процесс может быть преобразован в стационарный, но обычно такое

преобразование усложняет метод. Нестационарные процессы, в частности циклические, используются для ускорения сходимости итерационных процессов (см. [5], [6]). Среди методов ускорения сходимости особое место занимают методы, использующие многочлены Чебышева (см. [5], [6]) и сопряженные направления (см. [10]).

Выбор матрицы H для стационарного процесса и матриц $H^{(k)}$ для нестационарного может осуществляться различными способами. Возможно построение матриц $H^{(k)}$ таким образом, чтобы итерационный процесс сходился к решению и по возможности быстро для широкого класса систем уравнений (см. [5]). Возможен и противоположный подход, когда при построении матриц $H^{(k)}$ максимально используются частные особенности данной системы для получения итерационного процесса с наибольшей скоростью сходимости (см. [6]). Второй способ построения матриц $H^{(k)}$ является наиболее распространенным.

Одним из наиболее распространенных принципов построения итерационных процессов является принцип релаксации (см. *Релаксации методы*). В этом случае матрицы $H^{(k)}$ выбираются из заранее описанного класса матриц так, чтобы на каждом шаге процесса уменьшалась какая-либо величина, характеризующая точность решения системы. Среди релаксационных методов наиболее разработаны координатные и градиентные методы. В координатных методах матрицы $H^{(k)}$ подобраны так, что на каждом шаге меняются одна или несколько компонент последовательных приближений. О точности приближенного решения x чаще всего судят по величине вектора невязки $r=Ax-b$.

В случае стационарных итерационных методов главный член погрешности можно оценить также с помощью δ^2-процесса (см. [5]).

Среди других итерационных методов можно отметить *простой итерации метод*, *переменных направлений метод*, методы полной и неполной релаксации и т. д. (см. [1], [6], [10]). Как правило, итерационные методы удобны для реализации на ЭВМ, однако в отличие от прямых методов они чаще всего обладают весьма ограниченной областью применения. В области же их применения итерационные методы нередко существенно превосходят прямые методы по объему вычислений. Поэтому вопрос сравнения прямых и итерационных методов может быть решен лишь при детальном изучении свойств конкретной системы. Наибольшее распространение нашли итерационные методы для решения систем, возникающих при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений (см. [5], [6]).

Итерационные методы решения полной проблемы собственных значений. В итерационных методах собственные значения вычисляются как пределы нек-рых числовых последовательностей без предварительного определения коэффициентов характеристич. многочлена. Как правило, при этом одновременно находятся и собственные векторы или нек-рые другие векторы, связанные с собственными простыми соотношениями. Большинство итерационных методов менее чувствительны к ошибкам округления, чем прямые, но значительно более трудоемки. Развитие этих методов и их применение в практике вычислений стало возможным лишь после создания ЭВМ.

Среди итерационных методов особое место занимает метод вращений (*Якоби метод*) решения полной проблемы собственных значений действительной симметричной матрицы. Основан он на построении последовательности матриц, ортогонально подобных исходной матрице A и имеющих монотонно убывающие до нуля суммы квадратов всех внедиагональных элементов.

Метод вращений очень прост, легко реализуется на ЭВМ и всегда сходится. Независимо от расположения

собственных значений он обладает асимптотически квадратичной сходимостью. Наличие кратных и близких собственных значений не только не замедляет сходимость метода, но, напротив, приводит к ее ускорению. Метод вращений устойчив к влиянию ошибок округления результатов промежуточных вычислений. Свойства этого метода послужили причиной его распространения на решение полной проблемы матриц более общего вида. Без существенных изменений метод вращений переносится на эрмитовы и косоэрмитовы матрицы. Незначительное его изменение позволяет с успехом решать полную проблему для матриц A^*A и AA^* одновременно, не вычисляя сами произведения матриц. Эффективное распространение этого метода на произвольные матрицы простой структуры реализуется обобщенным методом вращений.

Среди итерационных методов решения полной проблемы собственных значений значительную группу составляют степенные методы. Большинство их вычислительных алгоритмов укладывается в следующие схемы:

$$\begin{array}{ll} AG = G_1S_1 & A = L_1R_1 \\ \cdots\cdots \quad \text{или} & \cdots\cdots \\ AG_{k-1} = G_kS_k & R_{k-1}L_{k-1} = L_kR_k \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Здесь на каждом шаге матрица, стоящая в левой части равенства, раскладывается в произведение двух матриц. Пусть одна из них треугольная, а вторая унитарная или треугольная другого наименования. Тогда при нек-рых дополнительных предположениях матрицы $G_k^{-1}AG_k$ и R_kL_k сходятся к квазитреугольной матрице, подобной матрице A. Как правило, порядки диагональных клеток квазитреугольной матрицы невелики, поэтому полная проблема собственных значений для предельной матрицы решается достаточно просто.

Известно несколько методов такого типа. Одним из лучших среди них является QR-алгоритм (см. [7]). Вычислительные схемы степенных методов во многом совпадают с вычислительными схемами решения систем уравнений прямыми методами.

Исследование и классификация численных методов. Огромное количество численных методов Л. а. ставит актуальной задачей не столько создание новых, сколько исследование и классификацию существующих методов (одна из самых полных классификаций методов с точки зрения их математич. построения содержится в монографии [1]; описанию методов с точки зрения возможности их реализации на ЭВМ посвящены монографии [2], [3], [7]).

Первые фундаментальные работы по анализу устойчивости и ошибок округления в численных методах решения задач Л. а. появились лишь в 1947—48 и посвящены исследованию обращения матриц и решению систем уравнений методами типа Гаусса. Практич. ценность этих результатов была невелика. Существенный сдвиг в изучении данного вопроса произошел в середине 60-х гг. (см. [3]), когда был сделан решающий шаг к анализу и оценке эквивалентных возмущений. Реально вычисленное решение нек-рой задачи стало рассматриваться как точное решение той же задачи, но с возмущенными входными данными. Это возмущение, наз. эквивалентным, полностью характеризует влияние ошибок округления. Исследовано большое кол-во методов с точки зрения мажорантной оценки нормы эквивалентного возмущения (см. [3], [7]).

При фиксированном вычислительном алгоритме и способе округления вся совокупность ошибок округления является однозначной векторной функцией $\varphi_t(A)$, зависящей от числа разрядов t, с к-рыми ведется счет, и от входных данных A. Главный член

функции $\varphi_t(A)$ при $t \to \infty$ не имеет сколько-нибудь приемлемого явного выражения. Однако весьма эффективным оказалось исследование $\varphi_t(A)$ на классе случайно заданных входных данных. Оно показало, что наиболее вероятное значение отклонения вычисленного решения от точного за счет ошибок округления существенно меньше, чем максимально возможное (см. [7]).

Анализ влияния ошибок округления показал, что между лучшими методами нет принципиальной разницы с точки зрения устойчивости к ошибкам округления. Этот вывод заставляет по-новому взглянуть на проблему выбора того или иного численного метода в практич. деятельности вычислителя. Создание мощных ЭВМ существенно ослабило значение различия между методами в таких характеристиках, как объем требуемой памяти ЭВМ и количество арифметич. операций, и привело к возросшим требованиям на гарантию точности решения. В этих условиях наиболее предпочтительными становятся те методы, к-рые, не очень отличаясь от лучших по скорости и удобству реализации на ЭВМ, позволяют решать широкий класс задач как хорошо, так и плохо обусловленных и давать при этом оценку точности вычисленного решения.

Классификация и сравнение численных методов, о к-рых говорилось выше, относятся в основном к тому случаю, когда вся совокупность входных данных целиком помещается в оперативную память ЭВМ. Однако особый интерес представляют два крайних случая — решение задач Л. а. на малых и сверхмощных ЭВМ. Решение задач на таких ЭВМ имеет свою специфику. В первом случае — это малая память, ограниченная разрядная сетка и счет в режиме фиксированной запятой, во втором — наличие мультипрограммного режима работы ЭВМ, режима разделения времени и т. д.

Лит.: [1] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963; [2] Воеводин В. В., Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы, М., 1966; [3] Уилкинсон Дж.-Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [4] Воеводин В. В., «Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ.», 1970, № 2, с. 69—82; [5] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [6] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [7] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; [8] Фаддеева В. Н. [и др.], Вычислительные методы линейной алгебры. Библиографический указатель. 1828—1974 гг., Новосиб., 1976; [9] Воеводин В. В., Линейная алгебра, 2 изд., М., 1980; [10] Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А., Итерационные методы и квадратичные функционалы, Новосиб., 1972.

В. В. Воеводин.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА — алгебраическая группа, бирационально изоморфная алгебраич. подгруппе *полной линейной группы*. Алгебраич. группа G линейна тогда и только тогда, когда алгебраич. многообразие G аффинно, т. е. изоморфно замкнутому (в топологии Зариского) подмногообразию аффинного пространства.

Теория Л. а. г. возникла из потребностей решения линейных дифференциальных уравнений в квадратурах (теория Галуа дифференциальных уравнений) в конце 19 в. (С. Ли, S. Lie; Э. Пикар, E. Picard; Л. Маурер, L. Maurer), и первоначальное изучение Л. а. г. над полем комплексных чисел проводилось по аналогии с теорией групп Ли методом алгебр Ли. Л. а. г. G над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ может рассматриваться как аналитич. подгруппа группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Обычным образом определяемая алгебра *Ли группы* G будет тогда подалгеброй в алгебре Ли группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (т. е. в полной линейной алгебре Ли всех $(n \times n)$-матриц с комплексными коэффициентами). На возникающий здесь вопрос — какие подалгебры Ли полной линейной алгебры соответствуют алгебраическим (а не только аналитическим) подгруппам группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ — может быть дан исчерпывающий ответ (см. *Ли алгебраическая алгебра* 1)).

Методы теории групп и алгебр Ли в середине 20 в. были существенно усовершенствованы и обобщены К. Шевалле (C. Chevalley), что позволило ему применить их к изучению Л. а. г. над произвольными полями нулевой характеристики (см. [6]). Для полей ненулевой характеристики метод алгебр Ли является менее эффективным, так что естественно возникла необходимость глобального исследования Л. а. г. с помощью методов алгебраич. геометрии. Основы глобального исследования Л. а. г. были заложены А. Борелем (см. [2]), после чего теория Л. а. г. приобрела вид стройной дисциплины (см. [8]). Одной из основных проблем теории Л. а. г. является проблема классификации Л. а. г. с точностью до изоморфизма. Эта проблема в основном сводится к ее решению для двух типов Л. а. г.: полупростых и разрешимых. Произвольная Л. а. г. обладает такой максимальной связной разрешимой нормальной подгруппой H, что факторгруппа G/H является полупростой Л. а. г. Фундаментальным результатом является классификация Шевалле полупростых Л. а. г. над алгебраически замкнутыми полями любой характеристики (см. [7]). Эта классификация аналогична классификации Картана — Киллинга комплексных полупростых групп Ли. Классификация Шевалле основывается на том, что в полупростой алгебраич. группе строятся аналоги элементов теории Картана — Киллинга — картановская подгруппа, корни и т. д. Важную роль при этом играют подгруппы Бореля и максимальные алгебраич. торы.

Пусть G — полупростая Л. а. г. T — ее максимальный тор, $N_G(T)$ — нормализатор T в G, $W = N_G(T)/T$ — *Вейля группа* группы G. Тор T содержится лишь в конечном числе подгрупп Бореля группы G, к-рые транзитивно переставляются при сопряжении элементами из $N_G(T)$. При помощи подгрупп Бореля, содержащих T, строятся нек-рые мономорфизмы аддитивной группы поля в подгруппы Бореля (содержащие T), играющие роль корней. С помощью техники *Брюа разложений* доказывается, что указанная система структурных элементов допускает полную классификацию и определяет группу G с точностью до изоморфизма (см. [7]). Окончательная классификация полупростых групп не зависит от характеристики основного поля и поэтому совпадает с классификацией комплексных полупростых алгебраич. групп.

Классификация с точностью до k-изоморфизма полупростых Л. а. г., определенных над алгебраически незамкнутым полем k, значительно сложнее; она существенно зависит от поля k и сводится к классификации k-форм алгебраич. групп (см. *Форма* алгебраической группы). Множество k-форм алгебраич. группы G, определенной над алгебраич. замыканием K поля k, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством одномерных *Галуа когомологий* $H^1(k, \mathrm{Aut}(G))$, где $\mathrm{Aut}(G)$ — группа автоморфизмов G. В тех случаях, когда известна группа Галуа $\mathrm{Gal}(K/k)$ расширения K/k (напр., если k — поле действительных чисел или конечное поле), это дает значительную информацию о формах группы G. Но главная трудность в исследовании этой глубокой и пока (1982) еще далекой от своего решения проблемы ложится на изучение k-структуры полупростых Л. а. г.

В случае произвольного поля k максимальные k-разложимые торы играют роль, аналогичную роли максимальных алгебраич. торов в группе G над алгебраически замкнутым полем. k-разложимый тор — это тор, k-изоморфный прямому произведению k-определенных одномерных групп $\mathrm{GL}(1)$. Максимальные k-разложимые торы в G сопряжены посредством элементов из G_k и их размерность наз. k-р а н г о м G (что обозначается $\mathrm{rang}_k G$). Если $\mathrm{rang}_k G > 0$, то G наз. k-и з о т р о п н о й, в противном случае — k-а н и-

зотропной. k-изотропность для полупростой группы G эквивалентна тому, что группа G_k имеет неединичные унипотентные элементы. Для простой односвязной группы G существовала *Кнезера — Титса гипотеза*, что при $\mathrm{rang}_k G > 0$ группа G_k порождается унипотентными элементами (см. [13]), в общем случае решенная отрицательно (см. [16]). Роль подгруппы Бореля в случае произвольного поля k играет минимальная параболич. k-подгруппа, т. е. минимальная k-определенная подгруппа G, содержащая подгруппу Бореля. Естественно определяется корневая система относительно максимального k-разложимого тора в G и относительная группа Вейля (см. [3]). Если группа G обладает k-разложимым максимальным тором, то эти структурные элементы не зависят от поля k и определяют такие группы с точностью до k-изоморфизма. Группы, обладающие k-разложимыми максимальными торами, наз. k-р а з л о ж и м ы м и, или *Шевалле группами*. Именно К. Шевалле классифицировал k-разложимые алгебраич. группы и доказал, что всякая полупростая группа обладает единственной (с точностью до k-изоморфизма) k-формой такого типа (см. [7], [14]).

В общем случае А. Борелем и Ж. Титсом [3] доказано существование аналога разложения Брюа для группы G_k, в к-ром роль подгрупп Бореля играют минимальные параболич. k-подгруппы, сопряженные посредством элементов из G_k. Это позволяет в существенной мере редуцировать классификацию полупростых Л. а. г. положительного k-ранга к классификации полупростых групп k-ранга нуль, т. е. к классификации k-анизотропных групп. А именно, полупростая группа G определяется с точностью до k-изоморфизма своим классом изоморфизма над универсальным полем, своим k-индексом и полупростым k-анизотропным ядром (см. *Анизотропное ядро*) (см. [9]). В некоторых случаях удалось получить классификацию k-анизотропных полупростых групп. Так, напр., над конечным полем анизотропных полупростых групп не существует, а для широкого класса локальных полей k доказано (см. [15]), что всякая k-анизотропная простая Л. а. г. G является внутренней формой типа A_n, т. е. G_k в односвязном случае изоморфна $\mathrm{SL}(1, D)$, где D — тело конечной степени над k. В основе этих результатов лежит понятие *Титса системы*, представляющее глубокое аксиоматич. обобщение разложений Брюа в классич. случае.

Из других общих результатов следует отметить унирациональность многообразия редуктивной k-определенной Л. а. г., а также теорему Гротендика о существовании во всякой k-определенной Л. а. г. k-определенного максимального тора (см. [1], [10], [12]).

Если группа G определена над полем алгебраич. чисел или над полем алгебраич. функций одной переменной, то возникают проблемы об арифметич. свойствах G, изучением к-рых занимается *линейных алгебраических групп арифметическая теория* (см. [12]).

Идеи и техника Л. а. г. были применены к изучению произвольных линейных групп, что привело к созданию одного из основных методов в теории линейных групп (см. [11]).

Лит.: [1] Б о р е л ь А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] B o r e l A., «Ann. Math.», 1956, v. 64, № 1, p. 20—82; [3] Б о р е л ь А., Т и т с Ж., «Математика», 1967, т. 11, № 1, с. 43—111; № 2, с. 3—31; [4] С е р р Ж.-П., Алгебраические группы и поля классов, пер. с франц., М., 1968; [5] е г о ж е, Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [6] Ш е в а л л е К., Теория групп Ли, пер. с англ. и франц., т. 1—3, М., 1948—58; [7] C h e v a l l e y C., Classification des groupes de Lie algébriques, t. 1—2, P., 1956—58; [8] Ш е в а л л е К., Теория алгебраических групп, в кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958 г., М., 1962, с. 74—92; [9] Т и т с Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 2, с. 110—43; [10] D e m a z u r e M., G r o t h e n d i e c k A., Schémas en groupes, t. 1—3, B.— [u. a.], 1970; [11] П л а т о н о в В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 3, с. 573—620; [12]

Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974, с. 5—36; [13] Tits J., «Ann. Math.», 1964, v. 80, p. 313—29; [14] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [15] Брюа Ф., Титс Ж., «Математика», 1968, т. 12, № 5, с. 3—18; [16] Платонов В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1976, т. 40, № 2, с. 227—61; [17] Хамфри Дж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.
В. П. Платонов.

ЛИНЕЙНАЯ ГИПОТЕЗА — статистическая гипотеза, согласно к-рой математич. ожидание a n-мерного нормального закона $N_n(a, \sigma^2 I)$ (где I — единичная матрица), лежащее в линейном подпространстве $\Pi^s \subset R^n$ размерности $s<n$, принадлежит линейному подпространству $\Pi^r \subset \Pi^s$ размерности $r<s$.

Многие задачи математич. статистики можно редуцировать к задаче проверки Л. г., к-рая часто формулируется в следующем т. н. каноническом виде. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — нормально распределенный вектор, компоненты к-рого независимы и $\mathsf{E}X_i = a_i$ для $i=1, \ldots, s$, $\mathsf{E}X_i = 0$ для $i=s+1, \ldots, n$ и

$$\mathsf{D}X_i = \sigma^2 \text{ для } i=1, \ldots, n,$$

причем величины $a_1, \ldots, a_s$, σ^2 неизвестны. Тогда гипотеза H_0, согласно к-рой

$$a_1 = \ldots = a_r = 0, \ r < s < n,$$

является канонической линейной гипотезой.

Пример. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ и $Z_1, \ldots, Z_m$ суть $n+m$ независимых случайных величин, подчиняющихся нормальным распределениям $N_1(a, \sigma^2)$ и $N_1(b, \sigma^2)$ соответственно, причем параметры a, b, σ^2 неизвестны. Тогда гипотеза H_0: $a-b=0$ является Л. г., в то время как гипотеза $a=a_0$, $b-b_0$ при $a_0 \neq b_0$ не является таковой.

Лит.: [1] Шеман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964.
М. С. Никулин.

ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА — группа линейных преобразований векторного пространства V конечной размерности n над нек-рым телом K. Выбор базиса в пространстве V реализует Л. г. как группу невырожденных квадратных матриц степени n над телом K. Тем самым устанавливается изоморфизм между линейными и матричными группами.

Группа всех автоморфизмов свободного K-модуля V наз. также полной линейной группой и обозначается $\mathrm{GL}(V)$, а группа всех обратимых матриц порядка n над K (также называемая полной Л. г.) обозначается $\mathrm{GL}(n, K)$ или $\mathrm{GL}_n(K)$. Всякая подгруппа группы $\mathrm{GL}(V)$ наз. линейной группой степени n. Наиболее развитая часть теории Л. г. относится к случаю, когда тело K коммутативно, т. е. является полем. Поэтому в дальнейшем (если не оговорено противное) рассматриваются только Л. г. над полем.

Теория Л. г. зародилась в середине 19 в. и развивалась в тесной связи с теорией групп Ли, теорией представлений групп и теорией Галуа. Начало систематич. исследованию Л. г. было положено работами К. Жордана (см. [1]). На первом этапе развития теории Л. г. в связи с потребностями теории Галуа изучались главным образом конечные Л. г., в особенности разрешимые и классические (см. *Классическая группа*). Было установлено и несколько общих фактов, связанных с приводимостью или неприводимостью Л. г. G, т. е. со свойствами G-модуля V. Для всякой Л. г. G существует композиционный ряд G-подмодулей

$$\{0\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = V,$$

т. е. такой ряд, что все фактормодули V_{i+1}/V_i неприводимы. Другими словами, всякая матричная группа сопряжена в $\mathrm{GL}_n(K)$ нек-рой группе квазитреугольного вида с неприводимыми диагональными блоками. Пусть G_0 — подгруппа в G, состоящая из всех элементов, действующих тождественно на факторах

V_{i+1}/V_i, $i=0, \ldots, m-1$. Тогда G_0 нормальная нильпотентная подгруппа, элементы к-рой удовлетворяют (в K-алгебре $\mathrm{End}(V)$ всех линейных преобразований пространства V) уравнению $(x-1)^n=0$; такие Л. г. наз. унипотентными. Всякая унипотентная группа, рассматриваемая как матричная группа, сопряжена в $\mathrm{GL}(n, K)$ с нек-рой подгруппой группы верхних треугольных матриц с единичной диагональю. В существенной мере строение группы G по модулю G_0 определяется строением неприводимых Л. г. G_{i+1}, индуцируемых G в факторах V_{i+1}/V_i. Если Л. г. G неприводима над алгебраически замкнутым полем K, то G содержит n^2 линейно независимых над K элементов K-алгебры $\mathrm{End}(V)$, т. е. K-линейная оболочка G совпадает с $\mathrm{End}(V)$. Всякая нормальная подгруппа вполне приводимой Л. г. вполне приводима.

Бесконечные линейные группы. Хотя теория Л. г. имеет довольно большую историю, общие методы в ней были созданы сравнительно недавно. Исключение составляют только разрешимые и классические Л. г. Еще К. Жордан в 1870 исследовал структуру разрешимых Л. г. над конечными полями и получил ряд классификационных результатов об этих группах. Эти исследования получили дальнейшее развитие (см. [13]): детально изучено строение и классифицированы максимальные разрешимые и локально нильпотентные подгруппы в $\mathrm{GL}(n, K)$ над алгебраически замкнутым полем K. Основная структурная теорема о разрешимых Л. г. была получена А. И. Мальцевым (см. [8] с. 294—313) в 1951: разрешимая Л. г. Γ степени n над алгебраически замкнутым полем обладает такой нормальной подгруппой H конечного индекса, что H сопряжена подгруппе треугольной группы, а индекс $[\Gamma : H]$ меньше $\rho(n)$, где $\rho(n)$ — нек-рая эффективно определяемая функция от n; в частности, коммутант группы H является унипотентной группой и, с абстрактной точки зрения, группа Γ есть конечное расширение группы H с нильпотентным коммутантом.

Важный и весьма разветвленный раздел теории Л. г. представляют классич. группы (см., напр., [4], [7]).

Новый этап в развитии теории Л. г. начался в 60-е гг. 20 в., когда был создан общий метод исследования, базирующийся на технике алгебраич. групп (см. *Линейная алгебраическая группа*, а также [9], [18]). Этот метод позволил решить ряд проблем теории Л. г. Напр., с его помощью доказана теорема о свободных подгруппах Л. г. (см. [14]): всякая Л. г. над полем нулевой характеристики либо содержит неабелеву свободную подгруппу, либо обладает разрешимой подгруппой конечного индекса, и построена теория периодич. Л. г. (см. [9]) (оказалось, что основные структурные результаты теории конечных групп сохраняются и в более общем случае периодич. Л. г.).

Другой важный метод теории Л. г., т. н. метод аппроксимации, был впервые применен А. И. Мальцевым в 1940 (см. [8] с. 58—73). Он годится для исследования Л. г. над областями целостности конечного типа, в частности для Л. г. с конечным числом образующих. Суть метода заключается в следующем: пусть $\mathrm{GL}(n, F)$ — полная Л. г. над конечно порожденным подкольцом F поля K; тогда F по модулю максимальных идеалов аппроксимируется конечными полями F_i, что влечет аппроксимацию группы $\mathrm{GL}(n, F)$ конечными матричными группами $\mathrm{GL}(n, F_i)$. Для всякой подгруппы $\Gamma \subset \mathrm{GL}(n, F)$ получается индуцируемая аппроксимация конечными Л. г. Γ_i. Оказывается, во многих случаях свойства группы Γ в сильной степени определяются свойствами групп Γ_i. Этот метод был позднее усовершенствован (см. [18]), что привело к доказательству общей аппроксимационной теоремы, из к-рой выводится большинство результатов о бесконечных Л. г. с конечным числом образующих.

Конечные линейные группы. Наиболее крупным структурным результатом о конечных Л. г. до сих пор остается теорема Жордана (1878): существует такая целозначная функция $f(n)$, что каждая конечная Л. г. степени n над полем нулевой характеристики обладает абелевой нормальной подгруппой индекса меньше $f(n)$. Для полей положительной характеристики существуют бесконечные серии простых конечных групп степени n и поэтому непосредственное перенесение теоремы Жордана на этот случай невозможно. Тем не менее с помощью техники модулярных представлений конечных групп доказано, что существует целозначная функция $f(m, n)$ такая, что конечная Л. г. степени n над полем характеристики $p>0$, порядок силовской p-подгруппы к-рой не превосходит p^m, обладает абелевой нормальной подгруппой индекса меньше $f(m, n)$ (см. [16]).

Одной из главных проблем теории конечных Л. г. является проблема классификации простых конечных Л. г. С тех пор как в 1901 Л. Диксон изложил [2] основные факты о классич. простых конечных Л. г., было получено много новых результатов. Среди них центральное место занимают результаты К. Шевалле (см. [15]), применившего для исследования простых конечных Л. г. методы теории алгебраич. групп, что привело к открытию новых типов простых конечных Л. г. и позволило почти все известные простые конечные Л. г. получать единообразным методом (подробнее см. [11], [12]).

Линейные группы над телами и кольцами. Систематич. исследование Л. г. над некоммутативным телом K началось после работы Ж. Дьёдонне (J. Dieudonné, 1943, см. [5]), в к-рой была описана конструкция определителя над телом (см. *Определитель*). Подгруппа группы $GL(n, K)$ с определителем 1 наз. специальной линейной группой и обозначается $SL(n, K)$. Она порождается трансвекциями (преобразованиями t такими, что $\dim(1-t)V$ 1 и tv v при $v\in(1-t)V$), и всякая подгруппа группы $GL(n, K)$, инвариантная относительно $GL(n, K)$, либо скалярна, либо содержит $SL(n, K)$, за исключением случаев n 2, $|K|-2$, 3, когда группа $GL(2, K)$ разрешима. Если тело K конечномерно над своим центром Z, то существует единственный определитель со значениями в Z, называемый приведенной нормой (см. [5]), причем $SL(n, K)$ содержится в группе $UL(n, K)$ элементов с приведенной нормой 1. Вопрос о совпадении этих групп, поставленный в 1943 (проблема Танаки — Артина), был решен отрицательно в [10]. Группа $UL(n, K)$ и факторгруппа SK_1 $UL(n,K)/SL(n, K)$, называемая приведенной группой Уайтхеда, играют важную роль в теории линейных алгебраич. групп и алгебраич. K-теории [5].

Основные вопросы теории Л. г. над кольцами относятся к описанию нормальных подгрупп полной Л. г. и других классич. групп. Прогресс в этой области теснейшим образом связан с развитием алгебраич. K-теории (см. [5]). Так, задача описания нормальных подгрупп группы $GL(n, \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, фактически эквивалентна *конгруэнц-проблеме* для группы $SL(n, \mathbb{Z})$ при $n>2$. А именно, всякая нескалярная нормальная подгруппа группы $SL(n, \mathbb{Z})$, $n>2$, имеет конечный индекс и является конгруэнц-подгруппой, в то время как группа $SL(2, \mathbb{Z})$ есть конечное расширение свободной группы и потому обладает разнообразными нормальными подгруппами бесконечного индекса.

Изучались также автоморфизмы классических Л. г. над кольцами (см. [3], [19]).

Лит.: [1] Jordan C., Traité des substitutions et des équations algébriques, P., 1870; [2] Dickson L. E., Linear groups, Lpz., 1901; [3] Автоморфизмы классических групп, пер. с англ. и франц., М., 1976; [4] Артин Э., Геометрическая алгебра,

пер. с англ., М., 1969; [5] Басс Х., Алгебраическая К-теория, пер. с англ., М., 1973; [6] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [7] Дьедонне Ж., Геометрия классических групп, пер. с франц., М., 1974; [8] Мальцев А. И., Избранные труды, т. 1— Классическая алгебра, М., 1976, с. 58—73, 294—313; [9] Платонов В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 3, с. 573—620; [10] его же, там же, 1976, т. 40, № 2, с. 227—61; [11] Семинар по алгебраическим группам, пер. с англ., М., 1973; [12] Стейнберг Р., Лекции о группах Шевалле, пер. с англ., М., 1975; [13] Супруненко Д. А., Группы матриц, М., 1972; [14] Титс Ж., «Математика», 1972, т. 16, № 2, с. 47—66; [15] Шевалле К., там же, 1958, т. 2, № 1, с. 3—53; [16] Brauer R., Feit W., «Ann. Math.», 1966, v. 84, № 1, p. 119—31; [17] Draxl P., Kneser M., SK_1 von Schiefkörpern, B.— Hdlb.— N. Y., 1980; [18] Wehrfritz B., Infinite linear groups, B.— Hdlb.— N. Y., 1973; [19] Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия, 1970, М., 1971, с. 75—110.

В. П. Платонов.

ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ — см. в статье *Линейная независимость*.

ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ — способ приближенного вычисления значения функции $f(x)$, основанный на замене функции $f(x)$ линейной функцией

$$L(x)=a(x-x_1)+b,$$

параметры a и b к-рой выбираются таким образом, чтобы значения $L(x)$ совпадали со значениями $f(x)$ в заданных точках x_1 и x_2:

$$L(x_1)=f(x_1), \quad L(x_2)=f(x_2).$$

Этим условиям удовлетворяет единственная функция

$$L(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1),$$

приближающая заданную функцию $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ с погрешностью

$$f(x)-L(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_1)(x-x_2), \quad \xi\in[x_1, x_2].$$

Вычисления, необходимые для Л. и., легко реализуются при ручном счете, благодаря чему этот способ широко используется при интерполировании табличных данных.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966.

М. К. Самарин.

ЛИНЕЙНАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа невырожденных линейных преобразований конечномерного векторного пространства E над телом K, являющаяся *классической группой* (см. также *Линейная группа*). Важнейшими типами Л. к. г. являются следующие: *полная линейная группа* $\mathrm{GL}_n(K)$, *специальная линейная группа* $\mathrm{SL}_n(K)$, *симплектическая группа* $\mathrm{Sp}_n(K)$, *ортогональная группа* $\mathrm{O}_n(K, f)$, *унитарная группа* $\mathrm{U}_n(K, f)$ (здесь $n=\dim E$, f — соответствующая полуторалинейная форма на E).

В. Л. Попов.

ЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — задача определения в нек-рой области D переменных $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ решения $u(x)$ линейного дифференциального уравнения

$$(Lu)(x)=f(x), \quad x\in D,$$

удовлетворяющего на границе S этой области (или ее части) линейным краевым условиям

$$(Bu)(y)=\varphi(y), \quad y\in S.$$

См. также *Краевая задача*.

А. П. Солдатов.

ЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА; численные методы решения — методы, позволяющие получить решение Л. к. з. в виде таблицы его приближенных значений в точках сетки, не используя предварительной информации об ожидаемом виде решения. Для теории этих методов типично предположение о том, что решение исходной задачи существует и имеет достаточное число производных. Благодаря отсут-

ствию других предположений численные методы отличаются своей универсальностью.

Основой численных методов решения Л. к. з. является замена исходной системы уравнений ее сеточной аппроксимацией. В случае интегро-дифференциальных уравнений такая аппроксимация обычно строится с помощью разностных схем и квадратурных формул. При этом возникают следующие проблемы:

1) насколько быстро точное решение сеточной задачи сходится к решению исходной задачи при измельчении сетки;

2) насколько решение сеточной задачи чувствительно к изменениям исходных данных;

3) как найти, хотя бы приближенно, решение сеточной задачи.

При решении первой и второй проблем используется следующий аппарат. Пусть в замкнутой области D задано уравнение

$$Lu = f, \tag{1}$$

а на ее границе Γ, состоящей из компонент Γ_i,— граничные условия

$$l_i u = \varphi_i \text{ на } \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{2}$$

Здесь заданные непрерывные функции f, φ_i принадлежат нормированным линейным пространствам F, Φ_i соответственно, а линейные операторы L и l_i преобразуют нек-рое линейное подмножество W нормированного линейного пространства U функций, непрерывных в D, в F и Φ_i соответственно.

Пусть для аппроксимации уравнения (1) выбраны сетки D_h и $D_h^0 \subset D$, зависящие от положительного параметра h; нормированные линейные пространства U_h и F_h функций u_h и f_h, определенных в точках сеток D_h и D_h^0 соответственно, а также линейный оператор L_h, преобразующий U_h в F_h. Для аппроксимации граничного условия (2) выбирается сетка $\Gamma_{ih} \subset \Gamma$, нормированное линейное пространство Φ_{ih} функций φ_{ih}, определенных в точках сетки Γ_{ih}, и линейный оператор l_{ih}, преобразующий U_h в Φ_{ih}. Кроме того, выбираются линейные операторы P_h и p_{ih}, преобразующие F и Φ_i в F_h и Φ_{ih} соответственно. В результате получается сеточная а п п р о к с и м а ц и я

$$L_h u_h = P_h f, \tag{3}$$

$$l_{ih} u_h = p_{ih} \varphi_i \text{ на } \Gamma_{ih}, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{4}$$

исходной задачи (1), (2). Пусть через $[u]_h$, $\{f\}_h$, $\{\varphi_i\}_{ih}$ обозначены следы функций u, f, φ_i из пространств U, F, Φ_i на сетках D_h, D_h^0, Γ_{ih} соответственно. Исследование сходимости сеточных аппроксимаций u_h к решению u исходной задачи при $h \to 0$ имеет смысл производить лишь в сеточных нормах, согласованных с нормами в пространствах U, F, Φ_i, т. е. при условии, что для любых функций u, f, φ_i выполняются предельные соотношения

$$\| [u]_h \|_{U_h} \longrightarrow \| u \|_U, \ \| \{f\}_h \|_{F_h} \longrightarrow \| f \|_F,$$
$$\| \{\varphi_i\}_{ih} \|_{\Phi_{ih}} \longrightarrow \| \varphi_i \|_{\Phi_i}.$$

Если $u \in W$, $f \in F$, $\varphi_i \in \Phi_i$, то величина

$$z(h) = \| L_h [u]_h - \{Lu\} \|_{F_h} + \| P_h f - \{f\}_h \|_{F_h} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} \| l_{ih} [u]_h - \{l_i u\}_h \|_{\Phi_{ih}} + \| P_{ih} \varphi_i - \{\varphi_i\}_{ih} \|_{\Phi_{ih}}$$

наз. п о г р е ш н о с т ь ю а п п р о к с и м а ц и и задачи (1), (2) задачей (3), (4). Если u — решение задачи (1), (2), то величина

$$\rho(h) = \| L_h [u]_h - P_h f \|_{F_h} + \sum_{i=1}^{s} \| l_{ih} [u]_h - p_{ih} \varphi_i \|_{P_{ih}}$$

наз. погрешностью аппроксимации на этом решении. Говорят, что задача (3), (4) аппроксимирует задачу (1), (2) (или аппроксимирует ее на решении u), если $z(h) \to 0$ (или $\rho(h) \to 0$) при $h \to 0$. Порядок малости величины $z(h)$ (или величины $\rho(h)$) наз. порядком аппроксимации (или порядком аппроксимации на решении u).

Пусть, напр., аппроксимируется уравнение теплопроводности. В квадранте $D(x \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$ решается уравнение (1), где

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

при начальном условии $l_1 u = \varphi_1(x)$ на полуоси $\Gamma_1(t = 0,\ x \geqslant 0)$ и граничном условии $l_2 u = \varphi_2(t)$ на полуоси $\Gamma_2(x = 0,\ t \geqslant 0)$, где $l_1 u = u$, $l_2 u = \partial u / \partial x$, причем $\varphi_1'(0) = \varphi_2(0)$. В качестве F берется пространство непрерывных функций $f(t, x)$ с нормой

$$\| f \|_F = \sup_D | f(t, x) |,$$

а в качестве Φ_1 и Φ_2 — пространства непрерывных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ с нормами

$$\| \varphi_1 \|_{\Phi_1} = \sup_{\Gamma_1} | \varphi_1(x) | \quad \text{и} \quad \| \varphi_2 \|_{\Phi_2} = \sup_{\Gamma_2} | \varphi_2(t) |$$

соответственно. Пространство U можно считать совпадающим с F, а в качестве W берется подмножество функций $u \in U$, имеющих непрерывные частные производные $\partial u / \partial t$, $\partial u / \partial x$, $\partial^2 u / \partial x^2$ в области D. Пусть D_h — множество точек $(n\tau, mh)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = -1, 0, 1, \ldots$, где шаги сетки связаны функциональной зависимостью вида $\tau = \tau(h)$ такой, что $\tau \to 0$ при $h \to 0$. Множество D_h^0 будет состоять из точек $((n + 1/2)\tau, mh)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots$. В качестве F_h и U_h выбираются пространства сеточных функций $f_h(t, x)$ и $u_h(t, x)$ с согласованными нормами

$$\| f_h \|_{F_h} = \sup_{D_h^0} | f_h(t, x) | \quad \text{и} \quad \| u_h \|_{U_h} = \sup_{D_h} | u_h(t, x) |.$$

Оператор L_h может быть определен соотношением

$$L_h u_h(t, x) = \frac{1}{\tau}\left[u_h\left(t + \frac{\tau}{2}, x\right) - u_h\left(t - \frac{\tau}{2}, x\right)\right] - \frac{1}{2h^2}\left[u_h\left(t + \frac{\tau}{2}, x + h\right) - 2u_h\left(t + \frac{\tau}{2}, x\right) + u_h\left(t + \frac{\tau}{2}, x - h\right)\right] - \frac{1}{2h^2}\left[u_h\left(t - \frac{\tau}{2}, x + h\right) - 2u_h\left(t - \frac{\tau}{2}, x\right) + u_h\left(t - \frac{\tau}{2}, x - h\right)\right],$$

и пусть

$$P_h f = \{f\}_h$$

$$\left(\text{или } P_h f(t, x) = \int_{x-h}^{x+h} f(t, \xi)\, d\xi\right).$$

Для аппроксимации начального условия берется сетка Γ_{1h}, состоящая из точек $(0, mh)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; пространство Φ_{1h} сеточных функций $\varphi_{1h}(x)$ с согласованной нормой

$$\| \varphi_{1h} \|_{\Phi_{1h}} = \sup_{\Gamma_{1h}} | \varphi_{1h}(x) |$$

и

$$l_{1h} u_h(x) = u_h(0, x), \quad p_{1h} \varphi_1 = \{\varphi_1\}_{1h}.$$

Для аппроксимации граничного условия берется сетка Γ_{2h}, состоящая из точек $(n\tau, 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; пространство Φ_{2h} сеточных функций $\varphi_{2h}(t)$ с согласованной нормой

$$\| \varphi_{2h} \|_{\Phi_{2h}} = \sup_{\Gamma_{2h}} | \varphi_{2h}(t) |,$$

оператор l_{2h}, определяемый равенством

$$l_{2h}u_h(t) = \frac{1}{2h}[u_h(t,\ h) - u_h(t,\ -h)],$$

и оператор $p_{2h}\varphi_2 - \{\varphi_2\}_{2h}$. Тогда

$$z(h) = \| L_h[u]_h - \{Lu\}_h \|_{F_h} + \| l_{2h}[u]_h - \{l_2 u\} \|$$

и $z(h) \to 0$ при $h \to 0$. Если в качестве W взять более узкое множество функций $u \in U$, имеющих, кроме указанных ранее, ограниченные частные производные $\partial^2 u/\partial t^2$ и $\partial^4 u/\partial x^4$ в области D, то при $\tau = h$ получают аппроксимацию второго порядка.

Сеточную задачу

$$L_h u_h = f_h, \tag{3'}$$

$$l_{ih}u_h = \varphi_{ih} \text{ на } \Gamma_{ih} \tag{4'}$$

наз. корректной, если при достаточно малом h выполняются следующие условия: эта задача разрешима при любых данных функциях $f_h \in F_h$, $\varphi_{ih} \in \Phi_{ih}$; существует функция $\psi(\lambda)$, не зависящая от h, стремящаяся к нулю вместе с λ и такая, что

$$\| u_h \|_{U_h} \leqslant \psi\left(\| L_h u_h \|_{F_h} + \sum_{i=1}^{s} \| l_{ih} u_h \|_{\Phi_{ih}} \right) \tag{5}$$

для любой функции $u_h \in U_h$. Решение корректной сеточной задачи равномерно по h непрерывно зависит от данных функций. Корректность сеточной задачи является необходимым условием малой чувствительности ее решения к округлениям в процессе его вычисления. Если u — решение задачи (1), (2) и задача (3'), (4') корректна, то

$$\| u_h - [u]_h \|_{U_h} \leqslant \psi(\rho(h)). \tag{6}$$

Если, кроме того, задача (3), (4) аппроксимирует задачу (1), (2) на решении u, то

$$\| u_h - [u]_h \|_{U_h} \longrightarrow 0$$

при $h \to 0$. Если выполняются условия согласования норм, условие $z(h) \to 0$ и условие (5), то, полагая $u_h = [u]_h$ и переходя к пределу в неравенстве (5) при $h \to 0$, получают неравенство

$$\| u \|_U \leqslant \psi\left(\| Lu \|_F + \sum_{i=1}^{s} \| l_i u \|_{\Phi_i} \right), \tag{7}$$

справедливое для любой функции $u \in W$. Таким образом, для исследования корректности краевых задач вида (1), (2) можно использовать такой путь: сначала получить оценку (5), а из нее оценку (7). С помощью оценок типа (5) часто удается доказать существование решения u задачи (1), (2) как предела сеточной аппроксимации u_h при $h \to 0$.

Для полного решения проблемы нахождения приближенного решения задачи (1), (2) необходимо построить точный или приближенный метод нахождения решения аппроксимации (3), (4), обладающий свойством устойчивости к округлениям. При исследовании устойчивости полезно использовать понятие *замыкания вычислительного алгоритма*. В приведенном примере уравнение целесообразно решать *прогонки методом* по переменной x.

Оценка (6) погрешности сеточного метода обладает тем недостатком, что в выражение функции $\psi(\lambda)$ обычно входят производные от точного решения u. В нек-рых случаях удается априори (т. е. еще до решения задачи) оценить эти производные, однако такие оценки обычно оказываются грубыми. Несколько более точными являются оценки, в к-рых производные заменяются разностными отношениями приближенного решения u_h. В основном же практич. оценка погрешности сеточных методов производится при помощи повторного решения

задачи (3), (4) с различными h и последующего выделения главной части погрешности вида $h^\gamma [z]_h$, где γ — известный порядок малости погрешности. Так, если справедливо асимптотич. соотношение

$$\| [u]_h - u_h - h^\gamma [z]_h \|_{U_h} = o(h^\gamma),$$

то

$$[z]_h \sim (u_h - u_H)/(H^\gamma - h^\gamma).$$

Иногда удается получить уравнения для функции z, содержащие производные от точного решения u. Тогда можно решать их численно на более грубой сетке после решения исходной задачи и по получении главной части погрешности добавить ее к приближенному решению u_h и тем самым уточнить его.

В некоторых случаях при специальном выборе координатных функций вариационного или проекционного метода решения задачи (1), (2) получаются уравнения вида (3), (4), обеспечивающие сходимость не только к классическому, но и к обобщенному решению. Этот способ построения аппроксимаций, наз. иногда методом конечных элементов, предоставляет большую свободу в выборе сетки. Возможность целесообразно располагать узлы позволяет достигать требуемой точности при меньшем числе узлов сетки.

Лит.: [1] Бабушка И., Витасек Э., Прагер М., Численные процессы решения дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1969; [2] Бахвалов Н. С., Конспекты по курсу «Основы вычислительной математики», ч. 4, М., 1968; [3] его же, Численные методы, 2 изд., М., 1975; [4] Варга Р., Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе, пер. с англ., М., 1974; [5] Гавурин М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971; [6] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [7] Дьяконов Е. Г., Разностные методы решения краевых задач, в. 1—2, М., 1971—72; [8] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [9] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; [10] Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., 1965; [11] Рихтмайер Р. Д., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач, [пер. с англ.], М., 1972; [12] Рябенький В. С., Филиппов А. Ф., Об устойчивости разностных уравнений, М., 1956; [13] Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977; [14] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. Ф. Шапкин.

ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ — одно из основных понятий линейной алгебры. Пусть V — векторное пространство над полем k; векторы $a_1, \ldots, a_n$ наз. линейно независимыми, если

$$k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n \neq 0$$

для любого набора $k_i \in K$, кроме $k_1 = \ldots = k_n = 0$. В противном случае векторы $a_1, \ldots, a_n$ наз. линейно зависимыми. Векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимы в том и только в том случае, когда по крайней мере один из них является линейной комбинацией остальных. Бесконечное подмножество векторов из V наз. линейно зависимым, если линейно зависимо его нек-рое конечное подмножество, и линейно независимым, если любое его конечное подмножество линейно независимо. Число элементов (мощность) максимального линейно независимого подмножества пространства не зависит от выбора этого подмножества и наз. рангом, или размерностью, пространства, а само это подмножество — базисом (базой).

В частном случае, когда векторы $a_1, \ldots, a_n$ — элементы нек-рого числового поля K, а k — подполе в K, возникает понятие линейной независимости чисел. Л. н. чисел над полем рациональных чисел Q можно рассматривать также, как обобщение понятия иррациональности. Так, числа α и 1 линейно независимы тогда и только тогда, когда α иррационально.

Понятие линейной зависимости и независимости элементов вводится также в абелевых группах и модулях.

Линейная зависимость — частный случай более широкого понятия — абстрактного отношения зависимости на множестве. *О. А. Иванова.*

ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА — пересечение M всех подпространств, содержащих множество A векторного пространства E. При этом M наз. также подпространством, порожденным A. *М. И. Войцеховский.*

ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА — линейная функция от наблюдаемых случайных величин, используемая (при подстановке в нее конкретных значений наблюденных величин) в качестве приближенного значения (оценки) неизвестного параметра анализируемой стохастич. схемы (см. *Оценка статистическая*). Специальное выделение класса Л. о. оправдано следующими обстоятельствами. Л. о. легче поддаются статистич. анализу, в частности исследованию на состоятельность, несмещенность, эффективность, построению соответствующих доверительных интервалов и т. п. В то же время в достаточно широком диапазоне случаев поиск «наилучших» (в определенном смысле) оценок не выводит за пределы класса Л. о. Так, напр., статистич. анализ линейной регрессионной модели (см. *Линейная регрессия*) вида

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X\Theta}+\varepsilon$$

дает в качестве наилучшей (в смысле метода наименьших квадратов) оценки параметров $\boldsymbol{\Theta}$ оценку

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y},$$

к-рая является линейной относительно наблюденных значений исследуемой случайной величины $\boldsymbol{Y}$. Здесь Y есть n-мерный вектор-столбец наблюденных значений y_i, $i=1, \ldots, n$, исследуемого результирующего признака (случайной величины), $\boldsymbol{X}$ — матрица размера $n\times p$ (ранга p) наблюденных значений $x_i^{(k)}$, $i=1, \ldots, n$, $k=1, \ldots, p$, p неслучайных факторов-аргументов, от к-рых зависит результирующий признак $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{\Theta}$ есть p-мерный вектор-столбец неизвестных параметров Q_k, $k=1, \ldots, p$, и ε есть n-мерный случайный вектор-столбец остаточных компонент, удовлетворяющий условия $\mathsf{E}\varepsilon=0$, $\mathsf{E}(\varepsilon\varepsilon')=\sigma^2 I$ (I — единичная матрица).

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [3] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [4] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963. *С. А. Айвазян.*

ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ одной случайной переменной $\boldsymbol{Y}=(Y^{(1)}, \ldots, Y^{(m)})'$ по другой $\boldsymbol{X}=(X^{(1)}, \ldots, X^{(p)})'$ — линейная по $\boldsymbol{x}$ m-мерная векторная форма, описывающая зависимость условного математич. ожидания (при условии $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$) случайного вектора $\boldsymbol{Y}$ от значений $\boldsymbol{x}=(x^{(1)}, \ldots, x^{(p)})'$. Соответствующие уравнения

$$y^{(k)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})=\mathsf{E}(Y^{(k)} \mid \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})=\sum_{j=0}^{p} b_{kj}x^{(j)}, \qquad (*)$$

$$x^{(0)}\equiv 1, \quad k=1, 2, \ldots, m,$$

наз. уравнениями линейной регрессии $\boldsymbol{Y}$ по $\boldsymbol{X}$, а параметры b_{kj} — коэффициентами регрессии (см. также *Регрессия*).

В приложениях допускается интерпретация переменной $\boldsymbol{X}$ как наблюдаемого параметра (не обязательно случайного), от к-рого зависит математич. ожидание исследуемого результирующего показателя $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X})$. Кроме того, часто под Л. р. $Y^{(k)}$ по $\boldsymbol{X}$ понимают «наилучшую» (в определенном смысле) линейную аппроксимацию $Y^{(k)}$ посредством величин $\boldsymbol{X}$ или результат наилучшего

(в определенном смысле) выравнивания имеющейся системы экспериментальных точек («наблюдений») $(Y_i^{(k)}, X_i)$, $i = 1, \ldots, n$, с помощью гиперплоскости в пространстве $(Y^{(k)}, X)$ в ситуациях, когда интерпретация совокупности этих точек как выборки из соответствующей генеральной совокупности может и не быть правомочной. При таком определении приходится различать разные варианты Л. р. в зависимости от выбора способа вычисления ошибки линейной аппроксимации $Y^{(k)}$ посредством величин X (или в зависимости от конкретного выбора критерия качества выравнивания). Наиболее распространенными критериями качества аппроксимации $Y^{(k)}$ с помощью линейных комбинаций X (линейного выравнивания точек $(Y_i^{(k)}, X_i)$) являются:

$$Q_1(b) = \mathsf{E}\left\{\omega^2(X)\cdot\left(Y^{(k)}(X) - \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X^{(j)}\right)^2\right\},$$

$$\tilde{Q}_1(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2\left(Y_i^{(k)} - \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X_i^{(j)}\right)^2,$$

$$Q_2(b) = \mathsf{E}\left\{\omega(X)\left|Y^{(k)}(X) - \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X^{(j)}\right|\right\},$$

$$\tilde{Q}_2(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\left|Y_i^{(k)} - \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X_i^{(j)}\right|,$$

$$Q_3(b) = \mathsf{E}\left\{\omega^2(X)\cdot\rho^2\left(Y^{(k)}(X), \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X^{(j)}\right)\right\},$$

$$\tilde{Q}_3(b) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2\cdot\rho^2\left(Y_i^{(k)}, \sum_{j=0}^{p} b_{kj}X_i^{(j)}\right).$$

В этих соотношениях выбор «весов» $\omega(X)$ или ω_i зависит от природы конкретной исследуемой схемы. Так, напр., если $Y^{(k)}(X)$ интерпретируются как случайные величины, дисперсия к-рых $\mathsf{D}Y^{(k)}(X)$ (или их оценки) известны, то $\omega^2(X) = [\mathsf{D}Y^{(k)}(X)]^{-1}$. В последних двух критериях «невязки» аппроксимации или выравнивания измеряются расстояниями $\rho(\cdot, \cdot)$ от $Y^{(k)}(X)$ или $Y_i^{(k)}$ до искомой гиперплоскости регрессии. Если коэффициенты b_{kj} определяются из условия минимизации величин $Q_1(b)$ или $\tilde{Q}_1(b)$, то Л. р. наз. *средней квадратической*; при использовании критериев $Q_2(b)$ и $\tilde{Q}_2(b)$ Л. р. наз. *средней модульной* (или *средней абсолютной*); при использовании критериев $Q_3(b)$ и $\tilde{Q}_3(b)$ — *ортогональной*.

В нек-рых случаях Л. р. в классич. смысле (*) совпадает с Л. р., определенной с использованием функционалов типа Q_i. Так, напр., если вектор $(X', Y^{(k)})$ подчиняется многомерному нормальному закону, то регрессия $Y^{(k)}$ по X в смысле (*) совпадает со средней квадратической Л. р. (при $\omega(X) = 1$).

Лит.: [1] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [4] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968.

С. А. Айвазян.

ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ — 1) Л. с. на дифференцируемом многообразии M — дифференциально-геометрич. структура на M, связанная с *аффинной связностью* на M. В каждой аффинной связности определяется параллельное перенесение вектора, позволяющее для каждой кривой $L(x_0, x_1)$ в M определить линейное отображение касательных векторных пространств $T_{x_1}(M) \to T_{x_0}(M)$. В этом смысле аффинная связность определяет нек-рую Л. с. на M, к к-рой относятся все понятия и конструкции, связанные только с перенесением векторов и вообще тензоров. Л. с. на M является связностью в главном расслоении $B(M)$ базисов в касательных векторных пространствах

$T_x(M)$, $x \in M$, и определяется одним из следующих трех эквивалентных между собой способов:

1) объектом связности Γ^i_{jk}, преобразующимся на пересечениях областей локальных карт по формулам

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x_{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i};$$

2) матрицей 1-форм ω^i_j на главном расслоенном пространстве $B(M)$, состоящем из всех базисов во всех касательных пространствах $T_x(M)$, $x \in M$, такой, что 2-формы

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \Omega^i_j$$

в каждой локальной координатной системе выражаются в виде

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} dx^k \wedge dx^l;$$

3) билинейным оператором ∇ ковариантного дифференцирования, к-рый двум векторным полям X, Y на M ставит в соответствие третье $\nabla_Y X$ и обладает свойствами:

$$\nabla_Y (fX) = (Yf) X + f \nabla_Y X,$$
$$\nabla_{fY} X = f \nabla_Y X,$$

где f — гладкая функция на M.

Каждая Л. с. на M определяет однозначно нек-рую аффинную связность на M, канонически присоединенную к ней, к-рая определяется путем развертки любой кривой $L(x_0, x_1)$ в M. Для получения этой развертки следует сначала определить $n = \dim M$ линейно независимых параллельных векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ вдоль L, затем разложить по ним касательное к L векторное поле:

$$\dot{x}(t) = \mu^i(t) X_i(t)$$

и, наконец, найти в $T_{x_0}(M)$ решение $x(t)$ дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = \mu^i(t) X_i(0)$$

при начальном значении $x(t) = 0$. В произвольной точке x_t кривой L аффинное отображение касательных аффинных пространств

$$(A_n)_{x_t} \longrightarrow (A_n)_{x_0}$$

определяется теперь отображением реперов

$$\{x_t, X_i(t)\} \longrightarrow \{y_t, X_i(0)\},$$

где $x_0 \overset{\frown}{y_t} = x(t)$.

Л. с. часто отождествляется с аффинной связностью, канонически к ней присоединенной, используя взаимно однозначное соответствие между ними.

2) Л. с. в векторном расслоении — дифференциально-геометрич. структура на дифференцируемом векторном расслоении π: $X \to B$, к-рая каждой кусочно гладкой кривой L в B с началом x_0 и концом x_1 сопоставляет линейный изоморфизм слоев $\pi^{-1}(x_0)$ и $\pi^{-1}(x_1)$ как векторных пространств — параллельное перенесение вдоль L. Л. с. определяется горизонтальным распределением на главном расслоенном пространстве P базисов в слоях, к к-рому присоединено данное векторное расслоение. Аналитически Л. с. задается такой матрицей 1-форм ω^β_α на P, где $\alpha, \beta, \ldots$ пробегают множество значений, мощность к-рого равна размерности слоев, что 2-формы

$$d\omega^\beta_\alpha + \omega^\nu_\alpha \wedge \omega^\beta_\nu = \Omega^\beta_\alpha$$

полубазовы, т. е. над каждой локальной координатной

системой (x^i) на B выражаются в виде

$$\Omega_\alpha^\beta = \tfrac{1}{2} R_{\alpha ij}^\beta dx^i \wedge dx^j.$$

Горизонтальное распределение определяется при этом дифференциальной системой $\omega_\alpha^\beta = 0$ на P. 2-формы Ω_α^β наз. формами кривизны. Согласно теореме о голономии они определяют группу голономии Л. с.

3) Л. с. в расслоенном пространстве — связность, при к-рой касательные векторы горизонтальных кривых с началом в данной точке y расслоенного пространства E образуют векторное подпространство Δ_y в $T_y(E)$; Л. с. определяется горизонтальным распределением Δ: $y \mapsto \Delta y$.

Лит.: [1] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономии, пер. с франц., М., 1960; [2] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, v. 1, N. Y.— L., 1963.

Ю. Г. Лумисте.

ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА — семейство эффективных линейно эквивалентных *дивизоров* на алгебраич. многообразии, параметризованное проективным пространством.

Пусть X — неособое алгебраич. многообразие над полем k, $\mathscr{L}$ — обратимый пучок на X, $\Gamma(X, \mathscr{L})$ — пространство глобальных сечений пучка $\mathscr{L}$, а $L \subset \Gamma(X, \mathscr{L})$ — некоторое конечномерное подпространство. Если $\dim L > 0$, то дивизоры, определяемые нулями сечений из L, линейно эквивалентны и эффективны. Линейной системой наз. проективное пространство $|L| = P(L)$ одномерных подпространств в L, параметризующее эти дивизоры. Если $\dim \Gamma(X, \mathscr{L}) < \infty$, то Л. с. $|\Gamma(X, \mathscr{L})|$ наз. полной; она обозначается также $|L|$.

Пусть $s_0, \ldots, s_n$ — базис в L. Он определяет рациональное отображение $\varphi_L : X \to P^n$ по формуле

$$x \mapsto (s_0(x), \ldots, s_n(x)), \quad x \in X.$$

Обычно говорят, что φ_L задано Л. с. $|L|$. Образ $\varphi_L(X)$ не лежит ни в какой гиперплоскости в P^n (см. [2]). Обратно, каждое рациональное отображение $\psi: X \to P^m$, обладающее этим свойством, задается нек-рой Л. с.

Неподвижной компонентой Л. с. $|L|$ наз. такой эффективный дивизор D^* на X, что $D = D' + D^*$ для любого $D \in |L|$, где D' — эффективный дивизор. Когда D пробегает Л. с. $|L|$, дивизоры D' образуют нек-рую Л. с. $|L'|$ той же размерности, что и Л. с. $|L|$. Отображение $\varphi_{L'}$ совпадает с φ_L. Поэтому при рассмотрении отображения φ_L можно предполагать, что Л. с. $|L|$ не имеет неподвижных компонент. В этом случае φ_L не определено в точности на *базисном множестве* Л. с. $|L|$.

Примеры. 1) Пусть $X = P^2$ и $\mathscr{L} = \mathcal{O}_{P^2}(d)$, $d \geqslant 1$, тогда сечения $\Gamma(P^2, \mathcal{O}_{P^2}(d))$ отождествляются с формами степени d на P^2, а полная Л. с. $|\mathcal{O}_{P^2}(d)|$ — с множеством всех кривых степени d.

2) Стандартное квадратичное преобразование $\tau: P^2 \to P^2$ (см. *Кремоново преобразование*) задается Л. с. коник, проходящих через точки (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0).

3) Инволюция Гейзера $\alpha: P^2 \to P^2$ задается Л. с. кривых степени 8, проходящих с кратностью 3 через 7 точек в общем положении.

4) Инволюция Бертини $\beta: P^2 \to P^2$ задается Л. с. кривых степени 17, проходящих с кратностью 6 через 8 точек в общем положении.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Мамфорд Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [3] Zariski O., Algebraic surfaces, 2 ed., B.— Hdlb.— N. Y., 1971.

В. А. Исковских.

ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ — система n линейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \alpha_{11}(t)\, x_1 + \ldots + \alpha_{1n}(t)\, x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \alpha_{n1}(t)\, x_1 + \ldots + \alpha_{nn}(t)\, x_n, \end{aligned} \tag{1}$$

где t — действительная переменная, $\alpha_{jh}(t)$, $x_h = x_h(t)$ — комплекснозначные функции, причем

$$\alpha_{jh}(t+T) = \alpha_{jh}(t) \text{ для любых } j,\ h. \tag{2}$$

Число $T>0$ наз. периодом коэффициентов системы (1). Систему (1) удобно записывать в виде одного векторного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x, \tag{3}$$

где

$$x^T = (x_1, \ldots, x_n), \quad A(t) = \| \alpha_{jh}(t) \|, \quad j,\ h = 1, \ldots, n.$$

Предполагается, что функции $\alpha_{jh}(t)$ определены для $t \in \mathbb{R}$, измеримы и интегрируемы по Лебегу на $[0,\ T]$ и почти всюду выполнены равенства (2), т. е. $A(t+T) = A(t)$. Решение уравнения (3) — вектор-функция $x = x(t)$ с абсолютно непрерывными компонентами такая, что (3) выполнено почти всюду. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, a — заданные (произвольно) число и вектор. Существует и определяется единственным образом решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = a$. Матрица $X(t)$ порядка n с абсолютно непрерывными элементами наз. матрицантом (или эволюционной матрицей, или *Коши матрицей*) уравнения (3), если почти всюду на $\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\, X$$

$$X(0) = I,$$

где I — единичная $(n \times n)$-матрица. Матрицант $X(t)$ удовлетворяет соотношению

$$X(t+T) = X(t)\, X(T), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Матрица $X(T)$ наз. матрицей монодромии, а ее собственные значения ρ_j — мультипликаторами уравнения (3). Уравнение

$$\det [X(T) - \rho I] = 0 \tag{4}$$

для мультипликаторов ρ_j наз. характеристическим уравнением уравнения (3) (системы (1)). Каждому собственному вектору $a^{(0)}$ матрицы монодромии с мультипликатором ρ_0 соответствует решение $x^{(0)}(t) = X(t) a^{(0)}$ уравнения (3), удовлетворяющее условию

$$x^{(0)}(t+T) = \rho_0 x^{(0)}(t).$$

Имеет место теорема Флоке — Ляпунова: матрицант уравнения (3) с T-периодической матрицей $A(t)$ представим в виде

$$X(t) = F(t)\, e^{tK}, \tag{5}$$

где K — постоянная матрица, $F(t)$ — периодическая с периодом T, абсолютно непрерывная неособая для всех $t \in \mathbb{R}$ матрица-функция и $F(0) = I$. Обратно: если $F(t)$ и K — матрицы с указанными свойствами, то матрица (5) является матрицантом нек-рого уравнения (3) с T-периодической матрицей $A(t)$. Матрица K, наз. показательной матрицей, и матрица-функция $F(t)$ в представлении (5) определя-

ются неоднозначно. В случае действительных коэффициентов $a_{jh}(t)$ в (5) $X(t)$ — действительная матрица, а $F(t)$ и K, вообще говоря,— комплексные матрицы. Для этого случая справедливо уточнение теоремы Флоке — Ляпунова: матрицант уравнения (3) с T-периодической действительной матрицей $A(t)$ представим в виде (5), где K — постоянная действительная матрица, $F(t)$ — действительная абсолютно непрерывная неособая для всех t матрица-функция, удовлетворяющие соотношениям

$$F(t+T)=F(t)L, \quad F(0)=I, \quad KL=LK,$$

где L — некоторая действительная матрица такая, что

$$L^2=I.$$

В частности, $F(t+2T)=F(t)$. Обратно: если $F(t)$, K, L — произвольные матрицы, обладающие указанными свойствами, то (5) — матрицант нек-рого уравнения (3) с T-периодической действительной матрицей $A(t)$.

Из (5) сразу следует т е о р е м а Ф л о к е, утверждающая, что уравнение (3) обладает фундаментальной системой решений, распадающейся на группы, каждая из к-рых имеет вид

$$x^{(1)}(t)=e^{\lambda t}u_1(t),$$
$$x^{(2)}(t)=e^{\lambda t}[tu_1(t)+u_2(t)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{(m)}(t)=e^{\lambda t}\left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}u_1(t)+\ldots+tu_{m-1}(t)+u_m(t)\right],$$

где $u_j(t)$ — абсолютно непрерывные T-периодические (вообще говоря, комплексные) вектор-функции. (Указанная группа решений соответствует одному $(m\times m)$-ящику жордановой формы матрицы K.) Если все элементарные делители матрицы K простые (в частности, если все корни характеристич. уравнения (4) простые), то имеется фундаментальная система решений вида

$$x^{(j)}(t)=e^{\lambda_j t}u_j(t), \quad u_j(t+T)=u_j(t), \quad j=1, \ldots, n.$$

Формула (5) означает приводимость уравнения (3) (см. *Приводимая линейная система*) к уравнению

$$\frac{dy}{dt}=Ky$$

посредством замены $x=F(t)y$ (т е о р е м а Л я п у н о в а).

Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — мультипликаторы уравнения (3) и K — произвольная показательная матрица, т. е.

$$e^{TK}=X(T). \tag{6}$$

Собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы K наз. х а р а к т е р и с т и ч е с к и м и п о к а з а т е л я м и уравнения (3). Из (6) имеем $e^{T\lambda_j}=\rho_j$, $j=1, \ldots, n$. Характеристич. показатель λ можно определить так же, как комплексное число, для к-рого уравнение (3) имеет решение, представимое в виде

$$x(t)=e^{\lambda t}u(t),$$

где $u(t)$ есть T-периодическая вектор-функция. Основные свойства решений, к-рыми обычно интересуются в приложениях, определяются характеристич. показателями или мультипликаторами заданного уравнения (см. табл.). В приложениях часто коэффициенты системы (1) зависят от параметров; в пространстве параметров нужно выделить области, для точек к-рых решения системы (1) обладают определенными свойствами (обычно это — первые четыре свойства, указанные в таблице, либо справедливость оценки $|x(t)|\leqslant \leqslant \mathrm{const}\cdot e^{-\alpha t}$ с заданным α). Эти задачи сводятся, таким образом, к вычислению или к оценке характеристич. показателей (мультипликаторов) системы (1).

Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t), \tag{7}$$

где $A(t)$, $f(t)$ — измеримые, интегрируемые по Лебегу на $[0, T]$ T-периодические матрица-функция и вектор-функция соответственно $(A(t+T) = A(t)$, $f(t+T) \quad f(t)$

Свойство решений	Характеристические показатели	Мультипликаторы
Устойчивость тривиального решения (ограниченность на $(0, \infty)$ всех решений)	Действительные части неположительны; в случае наличия нулевых или чисто мнимых характеристических показателей им соответствуют простые элементарные делители показательной матрицы	Расположены внутри или на единичной окружности; в последнем случае им соответствуют простые элементарные делители матрицы монодромии
Асимптотическая устойчивость тривиального решения ($\lvert x(t)\rvert \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow \infty$ для любого решения)	Действительные части отрицательны	Расположены внутри единичной окружности
Ограниченность всех решений на $(-\infty, +\infty)$	Чисто мнимые с простыми элементарными делителями показательной матрицы	Расположены на единичной окружности, всем им отвечают простые элементарные делители матрицы монодромии
Неустойчивость тривиального решения (наличие неограниченных на $(0, \infty)$ решений)	Имеется либо характеристический показатель с положительной действительной частью, либо чисто мнимый (в частности, нулевой) с непростым элементарным делителем показательной матрицы	Имеется мультипликатор либо вне единичной окружности, либо на единичной окружности с непростым элементарным делителем матрицы монодромии
Наличие T-периодического решения	Для некоторого характеристического показателя λ_j выполнено $\lambda_j T = 2\pi i m$ (m — целое)	Один из мультипликаторов равен единице
Наличие полупериодического решения, т. е. решения $x(t)$, для которого $x(t+T) = -x(t)$, $\forall t$	Для некоторого характеристического показателя λ_j выполнено $\lambda_j T = (2m+1)\,T$ (m — целое)	Имеется мультипликатор $\rho = -1$

почти всюду), наз. **неоднородным линейным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами**. Если соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y \tag{8}$$

не имеет T-периодических решений, то уравнение (7) имеет и притом единственное T-периодическое решение. Оно определяется формулой

$$x(t) = [I - R(t, 0)]^{-1} \int_0^T R(t, T-\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau,$$

где $R(t, s)=Y(t+T)Y(t+s)^{-1}$, а $Y(t)$ — матрицант однородного уравнения (8), при этом $R(t+T, s)=R(t, s)$, $\det[I-R(t, 0)]\neq 0$.

Пусть уравнение (8) имеет $d\geqslant 1$ линейно независимых T-периодических решений $y_1(t), \ldots, y_d(t)$. Тогда сопряженное уравнение

$$\frac{dz}{dt}=-A(t)^*z$$

имеет также d линейно независимых T-периодических решений: $z_1(t), \ldots, z_d(t)$. Для того чтобы неоднородное уравнение (7) имело T-периодическое решение, необходимо и достаточно выполнения соотношений ортогональности

$$\int_0^T (f(t), z_j(t))\,dt=0, \quad j=1, \ldots, d. \tag{9}$$

При выполнении (9) произвольное T-периодическое решение уравнения (7) имеет вид

$$x(t)=x^{(0)}(t)+\gamma_1 y_1(t)+\ldots+\gamma_d y_d(t),$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ — произвольные числа, а $x^{(0)}(t)$ — нек-рое T-периодическое решение уравнения (7). При дополнительных условиях

$$\int_0^T (x(t), y_j(t))\,dt=0, \quad j=1, \ldots, d,$$

T-периодическое решение $x(t)$ определяется однозначно; при этом существует такая не зависящая от $f(t)$ постоянная $\theta>0$, что

$$|x(t)|\leqslant\theta\left(\int_0^T |f(s)|^2\,ds\right)^{1/2}, \quad t\in[0, T].$$

Пусть задано уравнение

$$\frac{dx}{dt}=A(t, \varepsilon)\,x \tag{10}$$

с матричным коэффициентом, голоморфно зависящим от комплексного «малого» параметра ε:

$$A(t, \varepsilon)=A_0(t)+\varepsilon A_1(t)+\varepsilon^2 A_2(t)+\ldots \tag{11}$$

Пусть при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ сходится числовой ряд

$$\|A_0(\cdot)\|+\varepsilon\|A_1(\cdot)\|+\varepsilon^2\|A_2(\cdot)\|+\ldots,$$

где

$$\|A_j(\cdot)\|=\int_0^T |A_j(t)|\,dt,$$

что гарантирует сходимость (поэлементно) ряда (11) при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ в пространстве $L(0, T)$. Тогда матрицант $X(t, \varepsilon)$ уравнения (10) для фиксированного $t\in[0, T]$ есть аналитич. функция от ε при $|\varepsilon|<\varepsilon_0$. Пусть $A_0(t)=C$ — постоянная матрица с собственными значениями λ_j, $j=1, 2, \ldots, n$. Пусть $\rho_j(\varepsilon)$ — мультипликаторы уравнения (10), $\rho_j(0)=\exp(\lambda_j T)$. Если $\rho_h(0)=\exp(\alpha^{(0)}T)$ — мультипликатор кратности r ($h=h_1, \ldots, h_r$, h_j — некоторые числа из $1, 2, \ldots, n$), то

$$\lambda_h=\alpha^{(0)}+\frac{2\pi i}{T}m_h, \quad h=h_1, \ldots, h_r, \tag{12}$$

где m_h — целые числа. Если этому мультипликатору отвечают простые элементарные делители матрицы монодромии, или, иначе, если каждому λ_h, $h=h_1, \ldots, h_r$, отвечают простые элементарные делители матрицы C (напр., все числа λ_h различны), то $\alpha^{(0)}$ наз. r-кратным характеристическим показателем (уравнения (10) при $\varepsilon=0$) простого типа. Оказывается, что соответствующие r характеристич. показателей уравнения (10) с малым $\varepsilon>0$ в первом приближении вычисляются весьма просто. Именно, пусть a_h, b_h — соответствующие нор-

мированные собственные векторы матриц C и C^*:

$$Ca_h = \lambda_h a_h, \quad C^* b_h = \overline{\lambda}_h b_h,$$
$$(a_j, b_h) = \delta_{jh}, \quad j, h = h_1, \ldots, h_r;$$

пусть

$$A_1(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_1^{(m)} \exp(2\pi i m t / T)$$

— ряд Фурье для $A_1(t)$ и пусть

$$\sigma_{jh} = \left(A_1^{(m_h - m_j)} a_j, b_h\right), \quad j, h = h_1, \ldots, h_r,$$

где m_j — числа из (12). Тогда для соответствующих r характеристич. показателей $\alpha_h(\varepsilon)$, $h = h_1, \ldots, h_r$, уравнения (10), обращающихся в $\alpha^{(0)}$ при $\varepsilon = 0$, справедливы разложения в ряды по дробным степеням ε, начинающиеся с членов первого порядка:

$$\alpha_h(\varepsilon) = \alpha^{(0)} + \beta_h \varepsilon + O\left(\varepsilon^{1+1/q_h}\right), \quad h = h_1, \ldots, h_r, \quad (13)$$

где β_h — корни (написанные столько раз, какова их кратность) уравнения

$$\det \| \sigma_{jh} - \beta \delta_{jh} \| = 0,$$

а q_h — натуральные числа, равные кратностям соответствующих β_h ($\delta_{jj} = 1$, $\delta_{jh} = 0$ при $j \neq h$). Если корень β_h простой, то $q_h = 1$ и соответствующая функция $\alpha_h(\varepsilon)$ аналитична при $\varepsilon = 0$. Из формулы (13) следует, что возможны случаи, когда «невозмущенная» (т. е. с $\varepsilon = 0$) система устойчива (все λ_j чисто мнимы и им соответствуют простые элементарные делители), но «возмущенная» система (малое $\varepsilon \neq 0$) неустойчива ($\mathrm{Re}\,\beta_h > 0$ хотя бы для одного β_h). Это явление потери устойчивости при сколь угодно малом периодич. изменении параметров (во времени) наз. параметрическим резонансом. Аналогичные, но более сложные формулы имеют место для характеристич. показателей непростого типа.

Пусть $\rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(q)}$ — различные мультипликаторы уравнения (3) и $n_1, \ldots, n_q$ — их кратности, $n_1 + \ldots + n_q = n$. Пусть точки $\rho^{(j)}$ на комплексной плоскости ζ окружены непересекающимися кругами $|\zeta - \rho^{(j)}| < R_j$ и из точки $\zeta = 0$ в точку $\zeta = \infty$ проведен непересекающий эти круги разрез. С помощью этого разреза определяются ветви логарифма $(\ln \zeta)_m$. Пусть каждому мультипликатору $\rho^{(j)}$ сопоставлено произвольное целое число m и $U = X(T, \varepsilon)$ — матрицант уравнения (10). Матрица $\ln U$ («матричный логарифм») может быть определена формулой

$$\ln U = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{q} \int_{\Gamma_j} (\zeta I - U)^{-1} (\ln \zeta)_{m_j} d\zeta, \quad (14)$$

где Γ_j — окружность $|\zeta - \rho^{(j)}| = R_j$. Набор чисел $m_1, \ldots, m_q$ определяет ветвь матричного логарифма. При этом $\exp(\ln U) = U$ для малых ε. Формула (14) при всевозможных $m_1, \ldots, m_j$ не охватывает, вообще говоря, всех значений матричного логарифма, т. е. всех решений Z уравнения $\exp Z = U$. Однако решение, даваемое формулой (14), обладает важным свойством голоморфности: элементы матрицы $\ln U$ в (14) суть голоморфные функции элементов матрицы U. Для уравнения (10) формула (5) принимает вид

$$X(t, \varepsilon) = F(t, \varepsilon) \exp[tK(\varepsilon)], \quad (15)$$

где $F(t + T, \varepsilon) = F(t, \varepsilon)$, $K(\varepsilon) = T^{-1} \ln X(T, \varepsilon)$. Если $\ln X(T, \varepsilon)$ определяется согласно (14), то

$$K(\varepsilon) = K_0 + \varepsilon K_1 + \ldots, \quad F(t, \varepsilon) = F_0(t) + \varepsilon F_1(t) + \ldots \quad (16)$$

— ряды, сходящиеся при малых $|\varepsilon|$. Основная информация о поведении решений при $t \to +\infty$, к-рой обычно интересуются в приложениях, заключена в показательной матрице $K(\varepsilon)$. Ниже описан метод асимпто-

тич. интегрирования уравнения (10), т. е. метод последовательного определения коэффициентов K_j, $F_j(t)$ в (16).

Пусть в (11) $A_0(t) \equiv C$. При этом, хотя $X(t, 0) = \exp(tC)$, вообще говоря, не существует ветви матричного логарифма такой, что матрица $K(\varepsilon)$ аналитична при $\varepsilon = 0$ и $K(0) = C$. Указанная ветвь логарифма будет существовать в так наз. нерезонансном случае, когда среди собственных значений λ_j матрицы C нет чисел, для к-рых

$$\lambda_j - \lambda_h = \frac{2\pi m i}{T} \neq 0$$

(m — целое число). В резонансном случае (когда такие собственные значения существуют) уравнение (10) подходящей заменой $x = P(t)y$, где $P(t + T) = P(t)$, сводится к аналогичному уравнению, для к-рого имеет место нерезонансный случай. Матрица $P(t)$ определяется по матрице C.

В нерезонансном случае в (16) $K_0 = C$, $F_0(t) \equiv I$, а матрицы $F_j(t)$, K_j, $j = 1, 2, \ldots$, находятся из уравнения

$$\frac{dF}{dt} = [C + \varepsilon A_1(t) + \varepsilon^2 A_2(t) + \ldots] F(t, \varepsilon) - F(t, \varepsilon) K(\varepsilon)$$

после приравнивания в этом уравнении коэффициентов при одинаковых степенях ε. Для определения $Z(t) = F_j(t)$ и $L = K_j$ получается матричное уравнение вида

$$\frac{dZ}{dt} = CZ - ZC + \Phi(t) - L, \qquad (17)$$

где $\Phi(t + T) = \Phi(t)$. Матрицы $Z(t)$ и L находятся, и притом однозначно (нерезонансный случай), из (17) и условия периодичности $Z(t + T) = Z(t)$.

Относительно специальных случаев системы (1) см. *Гамильтонова система линейная*, *Хилла уравнение*.

Лит.: [1] Штокало И. З., Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, К., 1960; [2] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; [3] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972.

В. А. Якубович.

ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ — система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)\, x + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

где $A(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — почти периодические отображения; в координатной записи:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\, x^j + f^i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $a_j^i(t)$ и $f^i(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, — почти периодич. числовые функции. Такие системы возникли в связи с появлением *Бора почти периодических функций* (см. [1]). Интерес к более узкому классу систем ($A(t)$ и $f(t)$ — квазипериодич. отображения) появился значительно раньше в связи с рассмотрением уравнений в вариациях вдоль условно периодич. решений уравнений небесной механики.

Если однородная система

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (2)$$

есть система с интегральной разделенностью (см. *Интегральной разделенности условие*), то она почти периодическим по t *Ляпунова преобразованием* $x = L(t)y$ приводится к диагональной системе $\dot{y} = B(t)y$ с почти периодич. коэффициентами, т. е. к такой, что существует не зависящий от t базис в $\mathbb{R}^n$, состоящий из векторов, являющихся при каждом $t \in \mathbb{R}$ собственными

векторами оператора $B(t)$; в координатах по этому базису система $\dot{y}=B(t)y$ записывается в диагональном виде:

$$\dot{y}^i = b_i^i(t)\, y^i, \quad i=1, \ldots, n.$$

Множество систем с интегральной разделенностью открыто в пространстве систем (2) с почти периодич. коэффициентами, наделенном метрикой

$$d(A_1, A_2) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| A_1(t) - A_2(t) \|.$$

Имеет место следующая теорема. Пусть $A(t)=C+\varepsilon D(t)$, где $C\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, причем собственные значения C все действительны и различны, $D(\cdot)$ — почти периодич. отображение $\mathbb{R}\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Тогда найдется $\eta>0$ такое, что при всех ε таких, что $|\varepsilon|<\eta$, система (2) почти периодическим по t преобразованием Ляпунова приводится к диагональной системе с почти периодич. коэффициентами.

Для почти периодич. отображения $A(t)$: $\mathbb{R}\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ следующие четыре утверждения эквивалентны друг другу: 1) для всякого почти периодич. отображения $f(\cdot)$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ у системы (1) найдется почти периодич. решение; 2) имеет место экспоненциальная *дихотомия* решений системы (2); 3) ни одна из систем $\dot{x}=\tilde{A}(t)x$, где $\tilde{A}(t)=\lim\limits_{k\to\infty} A(t_k+t)$, не имеет ненулевых ограниченных решений; 4) для всякого ограниченного отображения $f(t)$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ у системы (1) найдется ограниченное решение.

Лит.: [1] Бор Г., Почти периодические функции, пер. с нем., М.— Л., 1934; [2] Favard J., Leçons sur les fonctions presque périodiques, P., 1933; [3] Еругин Н. П., Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; [4] Массера Х.-Л., Шеффер Х.-Х., Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, пер. с англ., М., 1970; [5] Мухамадиев Э., «Докл. АН СССР», 1971, т. 196, № 1, с. 47—49; [6] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ЛИНЕЙНАЯ ТОПОЛОГИЯ на кольце A — кольцевая топология, для к-рой имеется фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из левых идеалов (в этом случае топология наз. линейной слева). Аналогично, топология на левом A-модуле E линейна, если имеется фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из подмодулей. Наибольшее распространение имеет *адическая топология*, базис к-рой задается степенями нек-рого идеала.

Отделимый линейно топологизированный A-модуль E наз. линейно компактным модулем, если любой базис фильтра, состоящий из аффинных линейных подмногообразий в E (т. е. подмножеств вида $x+E'$, где $x\in E$, а E' — подмодуль в E), имеет точку прикосновения. Любой модуль конечного типа над полным локальным нётеровым кольцом линейно компактен.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

В. И. Данилов.

ЛИНЕЙНАЯ ФОРМА — 1) Однородный многочлен первой степени.

2) *Линейная функция* (однородная) на векторном пространстве V над полем k со значениями в поле k

ЛИНЕЙНАЯ ФОРМА ОТ ЛОГАРИФМОВ алгебраических чисел — выражение вида

$$L=\beta_1 \log\alpha_1 + \ldots + \beta_n \log\alpha_n.$$

Эффективные оценки снизу для $|L|$ в предположении, что коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — рациональные или алгебраич. числа, а $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ — фиксированные ветви логарифмов, линейно независимые над полем Q, играют большую роль в теории чисел.

Когда $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — рациональны, выполняется неравенство $|L|>e^{-c_1 B}$, где $B=\max|B_i|$, а $c_1>0$ и зависит

только от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Методы, с помощью к-рых устанавливаются нетривиальные оценки снизу для $|L|$, принадлежат теории трансцендентных чисел. В случае $n=2$ ряд неравенств, справедливых для B, превосходящих нек-рую эффективно вычислимую границу, получен А. О. Гельфондом (1935—49). Лучшее из них имеет вид $|L| > e^{-\ln^{2+\varepsilon} B}$.

В 1948 им же доказано, что при любом n для всех достаточно больших B имеет место неравенство $|L| > e^{-\varepsilon B}$. Последний результат был, однако, лишь теоремой существования, а граница для B, начиная с к-рой выполнялось это неравенство, из доказательства не могла быть определена. Эффективные оценки $|L|$ при любом n были получены в 1966 А. Бейкером (см. [2]) на основании метода Гельфонда.

Пусть $n \geqslant 2$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — ненулевые алгебраич. числа, высоты и степени к-рых не превосходят соответственно A и d, $A \geqslant 4$, $d \geqslant 4$. Пусть, далее, $0 < \varepsilon < 1$ и $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ — главные значения логарифмов. Если существуют целые рациональные $b_1, \ldots, b_n$, $|b_i| \leqslant B$, такие, что

$$0 < |b_1 \log \alpha_1 + \ldots + b_n \log \alpha_n| < e^{-\varepsilon B},$$

то

$$B < (4n^2 \varepsilon^{-1} d^{2n} \log A)^{(2n+1)^2}.$$

В связи с различными задачами получено большое количество эффектных оценок Л. ф. от л. Степенная по порядку величины B оценка для $|L|$ впервые была получена в 1968 Н. И. Фельдманом [3].

Пусть $n \geqslant 2$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — алгебраич. числа, $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ — фиксированные ветви логарифмов, линейно независимые над Q. Существуют эффективные постоянные $c_2 > 0$, $\varkappa_1 > 0$ такие, что для любых алгебраич. чисел $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, высота к-рых не превосходит B, имеет место неравенство

$$|\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \ldots + \beta_n \log \alpha_n| > c_2 B^{-\varkappa_1}$$

(постоянные c_2 и $\varkappa_1$ явно выписываются в зависимости от чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и степеней $\beta_0, \ldots, \beta_n$).

С помощью оценок Л. ф. от л. алгебраич. чисел найдены границы для решений различных классов диофантовых уравнений (уравнений Туэ, гиперэллиптич. уравнений, уравнений, задающих кривые рода I, и др.). Оценки Л. ф. от л. позволили определить границы для дискриминантов мнимых квадратичных полей с числом классов 1 и 2. В теории чисел применяются также p-адические аналоги теорем об оценках Л. ф. от л. алгебраич. чисел.

Лит.: [1] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; [2] Baker A., в кн.: Actes du Congrès International des Mathématiciens, [Nice], 1970, t. 1, P., 1971, p. 19—26; [3] Фельдман Н. И., «Матем. сб.», 1968, т. 77, № 3, с. 423—36; [4] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 5, с. 973—90; [5] Актуальные проблемы аналитической теории чисел, Минск, 1974. *Ю. В. Нестеренко.*

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ — функция вида $y = kx + b$. Основное свойство Л. ф.: приращение функции пропорционально приращению аргумента. Графически Л. ф. изображается прямой линией.

Л. ф. n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — функция вида

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ — некоторые фиксированные числа. Областью определения Л. ф. является все n-мерное пространство переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, действительных или комплексных. При $a=0$ Л. ф. наз. однородной, или линейной, формой.

Если все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n, a$ — действительные числа, то графиком Л. ф. в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ является n-мерная гиперплос-

кость $y=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+a$, в частности при $n=1$ — прямая линия на плоскости.

Термин «Л. ф.», или, точнее, линейная однородная функция, часто применяется для линейного отображения векторного пространства X над некоторым полем K в это поле, т. е. для такого отображения $f\colon X\to K$, что для любых элементов $x'\in X$, $x''\in X$ и любых $\alpha'\in K$, $\alpha''\in K$ справедливо равенство

$$f(\alpha'x'+\alpha''x'')=\alpha'f(x')+\alpha''f(x''),$$

причем в этом случае вместо термина «Л. ф.» используются также термины — линейный функционал и линейная форма. *Л. Д. Кудрявцев.*

ЛИНЕЙНО КОМПАКТНЫЙ МОДУЛЬ — топологический модуль над топологич. кольцом, обладающий базисом окрестностей нуля, состоящим из подмодулей, и в к-ром всякая центрированная система, состоящая из классов вычетов по замкнутым подмодулям, имеет непустое пересечение. Всякий Л. к. м. является полной топологич. группой.

Л. к. м. наз. линейно компактным модулем в узком смысле, если всякий непрерывный гомоморфизм на топологич. модуль, обладающий базисом окрестностей нуля из подмодулей, открыт. Топологич. модуль является в узком смысле Л. к. м. тогда и только тогда, когда он — полная топологич. группа и всякий его фактормодуль по открытому подмодулю — *артинов модуль*. В частности, артинов модуль в дискретной топологии является Л. к. м. в узком смысле. Таким образом, Л. к. м. в узком смысле — топологич. аналоги артиновых модулей.

Прямые произведения, замкнутые подмодули, фактормодули по замкнутым подмодулям и непрерывные гомоморфные образы, обладающие базисом окрестностей нуля из подмодулей, Л. к. м. (Л. к. м. в узком смысле) сами будут Л. к. м. (Л. к. м. в узком смысле).

Лит.: [1] Лефшец С., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1949; [2] Zelinsky D., «Amer. J. Math.», 1953, v. 75, № 1, p. 79—90; [3] Leptin H., «Math. Z.», 1955, Bd 62, S. 241—67; 1957, Bd 66, S. 289—327. *В. И. Арнautов.*

ЛИНЕЙНО РАЗДЕЛЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ поля k — два подрасширения A и B нек-рого расширения Ω поля k такие, что подалгебра, порожденная A и B, в Ω устроена как тензорное произведение $A\otimes B$ над k. Пусть A и B — произвольные подкольца расширения Ω поля k, содержащие k, и C — подкольцо поля Ω, порожденное кольцами A и B. Всегда существует представление φ: $A\otimes B$ на алгебру C, ставящее в соответствие элементу $x\otimes y\in A\otimes B$, $x\in A$, $y\in B$, произведение xy из C. Алгебры A и B наз. линейно разделенными над k, если представление φ является изоморфизмом $A\otimes B$ на C. В этом случае $A\cap B=k$. Для того чтобы A и B были линейно разделены над k, достаточно существования базиса алгебры B над k, к-рый независим над A. Если A конечное расширение поля k, то степень расширения $[B(A):B]$ не превосходит степени расширения $[A:k]$ и равенство имеет место в том и только в том случае, когда A/k и B/k линейно разделены.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965. *О. А. Иванова.*

ЛИНЕЙНО РЕГУЛЯРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$, $-\infty<t<\infty$, для к-рого выполнено следующее условие регулярности:

$$\bigcap_t H_\xi(-\infty,\ t)=0,$$

где $H_\xi(-\infty,\ t)$ — замкнутая в среднем квадратичном линейная оболочка значений $\xi(s)$, $s\leqslant t$ (здесь предполагается, что $\mathsf{E}\xi(t)=0$). Регулярность означает невозможность (линейного) прогнозирования процесса $\xi(t)$ на слишком далекое будущее; точнее, если $\hat{\xi}(t+u)$

есть наилучший линейный прогноз для $\xi(t+u)$ по значениям $\xi(s)$, $s \leqslant t$:

$$\mathsf{E}\,|\xi(t+u)-\hat{\xi}(t+u)|^2 = \min_{\eta \in H_\xi(-\infty,\ t)} \mathsf{E}\,|\xi(t+u)-\eta|^2,$$

то

$$\lim_{u \to \infty} \hat{\xi}(t+u) = 0.$$

Необходимым и достаточным условием регулярности (одномерного) стационарного процесса является наличие спектральной плотности $f(\lambda)$ такой, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2}\, d\lambda > -\infty.$$

Аналитич. условия регулярности многомерных и бесконечномерных стационарных процессов выглядят сложнее. В общем случае, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ представляет собой положительную операторную функцию в нек-ром гильбертовом пространстве, условие регулярности равносильно тому, что $f(\lambda)$ допускает факторизацию вида

$$f(\lambda) = \varphi^*(\lambda)\,\varphi(\lambda),$$

где $\varphi(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$,— граничное значение операторной функции $\varphi(\lambda+i\mu)$, $\mu \to 0$, аналитичной в нижней полуплоскости $z=\lambda+i\mu$, $\mu<0$.

Всякий стационарный в широком смысле процесс $\zeta(t)$ допускает разложение в ортогональную сумму

$$\zeta(t) = \xi(t)+\eta(t),$$

$$\mathsf{E}\xi(t)\,\overline{\eta(t)} = 0,$$

где $\xi(t)$ — линейно регулярный, а $\eta(t)$ — линейно сингулярный процесс, т. е. стационарный в широком смысле случайный процесс, для к-рого

$$\bigcap_t H_\eta(-\infty,\ t) = H_\eta(-\infty,\ \infty);$$

при этом

$$H_\xi(-\infty,\ t) \subset H_\xi(-\infty,\ t) \text{ и } H_\eta(-\infty,\ t) \subset H_\xi(-\infty,\ t)$$

при всех t.

Лит.: [1] Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; [2] его же, Теория обновляющих процессов, М., 1974.

Ю. А. Розанов.

ЛИНЕЙНО СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, в к-ром любые две точки можно соединить непрерывным образом простой дуги, т. е. пространство X, для любых двух точек x_0 и x_1 к-рого существует такое непрерывное отображение $f\colon I \to X$ единичного отрезка $I=[0,\ 1]$, что $f(0)=x_0$ и $f(1)=x_1$. Эквивалентным образом, Л. с. п. – это пространство, в к-ром любые две точки можно соединить простой дугой, или, что то же самое, это пространство, любое отображение нульмерной сферы в к-рое гомотопно постоянному отображению. Всякое Л. с. п. связно. Непрерывный образ Л. с. п. линейно связен.

Л. с. п. играют важную роль в гомотопич. топологии. Если пространство X линейно связно и $x_0,\ x_1 \in X$, то гомотопич. группы $\pi_n(X,\ x_0)$ и $\pi_n(X,\ x_1)$ изоморфны, причем этот изоморфизм определяется однозначно с точностью до действия группы $\pi_1(X,\ x_0)$. Если $p\colon E \to B$ — расслоение с линейно связной базой B, то любые два слоя имеют один и тот же *гомотопический тип*. Если $p\colon E \to B$ — слабое расслоение *(Серра расслоение)* над линейно связной базой B, то любые два слоя имеют один и тот же слабый гомотопич. тип.

Многомерным обобщением линейной связности является k-связность (связность в размерности k). Пространство X наз. связным в размерности k, если любое отображение r-мерной сферы S^r в X, где $r \leqslant k$, гомотопно постоянному отображению.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971.

С. А. Богатый.

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННАЯ ГРУППА — алгебраическая система G, являющаяся группой относительно операции умножения, линейно упорядоченным множеством относительно бинарного отношения порядка $\leqslant$ и удовлетворяющая аксиоме: для любых элементов x, y, $z \in G$ из $x \leqslant y$ следует $xz \leqslant yz$ и $zx \leqslant zy$.

Множество положительных элементов P $\{x \in G,\ x \geqslant e\}$ Л. у. г. G обладает свойствами: 1) $PP \subseteq P$, 2) $P \cap P^{-1} = e$, 3) $g^{-1}Pg \subseteq P$, 4) $P \cup P^{-1} G$. Обратно, если в группе G имеется множество P, удовлетворяющее свойствам 1) — 4), то G может быть превращена в Л. у. г., множество положительных элементов к-рой есть P.

Имеется большое число признаков упорядочиваемости группы. Упорядочиваемые группы являются группами без кручения с однозначным извлечением корня. Упорядочиваемыми являются все абелевы группы без кручения, нильпотентные группы без кручения, свободные группы и свободные разрешимые группы. Существуют простые и нехопфовы Л. у. г. Факторгруппа упорядочиваемой группы по ее центру упорядочиваема.

Прямое, полное прямое и свободное произведения, а также сплетение Л. у. г. могут быть линейно упорядочены с продолжением порядков сомножителей. Группа, аппроксимируемая упорядочиваемыми группами, сама упорядочиваема. Для упорядочиваемых групп справедлива локальная теорема (см. *Мальцева локальные теоремы*). Л. у. г. вкладывается в мультипликативную группу линейно упорядоченного тела и в простую Л. у. г. Класс упорядочиваемых групп — аксиоматизируемый. Л. у. г. является *топологической группой* с интервальной топологией. Л. у. г. является *архимедовой группой* тогда и только тогда, когда она не имеет нетривиальных выпуклых подгрупп. Любая архимедова Л. у. г. изоморфна нек-рой подгруппе аддитивной группы действительных чисел с естественным порядком. Множество всех выпуклых подгрупп Л. у. г. образует полную инфраинвариантную систему, факторы к-рой архимедовы, и, значит, Л. у. г. обладают разрешимыми нормальными системами (см. *Подгрупп система*).

Специфическими для теории Л. у. г. являются вопросы, связанные с продолжением частичных порядков (см. *Доупорядочиваемая группа*). Имеется ряд обобщений понятия Л. у. г.

Лит.: [1] Кокорин А. И., Копытов В. М., Линейно упорядоченные группы, М., 1972; [2] Фукс Л., Частично упорядоченные алгебраические системы, пер. с англ., М., 1965; [3] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965.

А. И. Кокорин, В. М. Копытов.

ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО, цепь, - частично упорядоченное множество, в к-ром для любых двух элементов a и b имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Подмножество Л. у. м. само является Л. у. м. Всякий максимальный (минимальный) элемент Л. у. м. оказывается наибольшим (наименьшим). Важнейший частный случай Л. у. м. — *вполне упорядоченные множества*. Среди подмножеств частично упорядоченного множества, являющихся Л. у. м., особенно важную роль играет *композиционный ряд*. Сечением Л.у.м. P наз. разбиение его на два подмножества A и B так, что $A \cup B = P$, $A \cap B$ — пусто, $A \subseteq B^{\nabla}$ и $B \subseteq A^{\Delta}$, где

$$B^{\nabla} = \{x \in P,\ x \leqslant b,\ \forall b \in B\},$$

$$A^{\Delta} = \{x \in P,\ x \geqslant a,\ \forall a \in A\}.$$

Классы A и B наз. нижним и верхним классами сечения. Различаются следующие типы сечений: скачок — в нижнем классе имеется наибольший элемент, а в верхнем — наименьший; дедекиндово сечение — в нижнем (верхнем) классе имеется наибольший (наименьший) элемент, но в верхнем

(нижнем) классе нет наименьшего (наибольшего); щ е л ь — в нижнем классе нет наибольшего элемента, а в верхнем — наименьшего. Л. у. м. наз. н е п р е р ы в н ы м, если все его сечения дедекиндовы. Подмножество D Л. у. м. P наз. п л о т н ы м, если каждый неодноэлементный интервал множества P содержит элементы, принадлежащие D. Л. у. м. действительных чисел может быть охарактеризовано как непрерывное Л. у. м. в к-ром нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, но содержится счетное плотное подмножество. Всякое счетное Л. у. м. изоморфно некоторому подмножеству Л. у. м. всех двоичных дробей отрезка $[0, 1]$. Решетка L изоморфна подмножеству Л. у. м. целых чисел тогда и только тогда, когда каждая ее подрешетка является ретрактом.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] е г о ж е, Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [3] Б у р б а к и Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965.

Л. А. Скорняков.

ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТ — вектор $\xi \neq 0$ в пространстве E представления π группы G такой, что $\pi(g)\xi = \xi$ для всех $g \in G$. Л. п. и. алгебры Ли X — вектор $\xi \neq 0$ в пространстве E представления π такой, что $\pi(x)\xi = 0$ для всех $x \in X$. В частности, если π — представление линейной группы в пространстве полилинейных функций, данное определение Л. п. и. совпадает с классическим. Л. п. и., связанные с ограничениями неприводимых представлений группы на подгруппу, играют существенную роль в теории представлений групп и алгебр Ли.

Лит.: [1] В е й л ь Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [2] Ж е л о б е н к о Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970.

А. И. Штерн.

ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ЗАДАЧА, з а д а ч а Р и м а н а, з а д а ч а Г и л ь б е р т а, з а д а ч а Г и л ь б е р т а — П р и в а л о в а, з а д а ч а Р и м а н а — П р и в а л о в а,— одна из основных *граничных задач теории аналитических функций*, формулируемая в простейшем случае следующим образом. Пусть L — простой гладкий замкнутый контур, делящий плоскость на внутреннюю область D^+ и дополнительную к ней область D^-, содержащую бесконечно удаленную точку. Пусть на L заданы две функции $G(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условию Гёльдера (условию H), причем $G(t) \neq 0$ всюду на L. Требуется найти две функции $\Phi^{\pm}(z)$, аналитические соответственно в $D^{\pm}$, непрерывные вплоть до контура, за исключением конечного числа точек t_k, где для них допустимы разрывы при соблюдении условия

$$|\Phi(z)| < \frac{A}{|z - t_k|^{\alpha_k}},$$

удовлетворяющие на контуре L краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \qquad (*)$$

при этом функция $G(t)$ наз. к о э ф ф и ц и е н т о м з а д а ч и. Целое число

$$\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_L d \arg G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int d \ln G(t)$$

наз. и н д е к с о м к о э ф ф и ц и е н т а $G(t)$ и одновременно и н д е к с о м Л. с. з. Пусть отыскивается решение, удовлетворяющее условию $\Phi^-(\infty) = 0$. Тогда при $\varkappa > 0$ однородная Л. с. з. (т. е. когда $g(t) \equiv 0$) и неоднородная Л. с. з. безусловно разрешимы; решения зависят линейно от $\varkappa$ произвольных постоянных и выражаются линейно через многочлен степени $\varkappa - 1$ с произвольными коэффициентами. При $\varkappa = 0$ однородная Л. с. з. имеет лишь тривиальное нулевое решение, а неоднородная задача разрешима безусловно и однозначно. При $\varkappa < 0$ однородная задача имеет лишь

нулевое решение, неоднородная задача — единственное решение лишь при выполнении $|\varkappa|$ условий разрешимости, к-рые могут быть выражены линейно через многочлен с произвольными коэффициентами.

Решение Л. с. з. во всех случаях представляется в замкнутой форме — в квадратурах через интегралы типа Коши. Предельные значения искомых функций на контуре необходимо удовлетворяют условию H. Перечисленные выше результаты без изменения переносятся на случай многосвязной области D^+, ограниченной конечным числом простых взаимно непересекающихся замкнутых кривых. Случай контура, составленного из разомкнутых кривых, представляет ту особенность, что на концах кривых контура решения Л. с. з., в зависимости от выбираемого класса решений, могут обращаться в бесконечность или оставаться ограниченными. Индекс зависит от выбираемого класса решений. Индекс в классе решений с допустимой на конце бесконечностью порядка меньше единицы (интегрируемая бесконечность) на единицу больше, чем индекс в классе ограниченных на этом конце решений. Соответственно этому на единицу увеличивается число линейно независимых решений или уменьшается число условий разрешимости. Аналогичное положение имеет место в случае, когда коэффициент $G(t)$ имеет разрывы 1-го рода; решение в точках разрыва ведет себя так же, как на концах контура.

В общем случае, когда контур состоит из конечного числа расположенных как угодно замкнутых и разомкнутых кривых, Л. с. з. решается теми же методами, что и упомянутые выше простые случаи; при этом получаются аналогичные результаты. Нек-рые трудности представляет исследование решения в точках, где встречается несколько кривых контура.

В случае, когда $G(t)$, $g(t)$ только непрерывны, но не удовлетворяют условию H, сформулированные выше результаты остаются в силе, за исключением того, что здесь предельные значения решений существуют лишь при стремлении к контуру по некасательным путям, при этом они не непрерывны, а $\Phi^{\pm}(t)\in L_p$ с любым $p>0$; если функция $G(t)$ непрерывна, $g(t)\in L_p$, то и $\Phi^{\pm}(t)\in L_p$. Наиболее общим предположением для коэффициента $G(t)$, при к-ром решена Л. с. з., является класс измеримых функций с нек-рым дополнительным условием на величину скачка аргумента; при этом $g(t)\in L_p$.

Рассматривались Л. с. з. с бесконечным индексом, в к-рых в качестве контуров брались простые гладкие кривые с одним или обоими концами, уходящими в бесконечность. Исследованы случаи: 1) степенного порядка роста, когда при $|t|\to\infty$ выполняются асимптотич. равенства

$$\operatorname{Ind} G(t)\sim\pm|t|^{\rho}$$

($0<\rho<\infty$ для случая одного бесконечного конца, $0<\rho<1$ для обоих бесконечных концов); 2) логарифмического порядка, когда при $|t|\to\infty$

$$\operatorname{Ind} G(t)\sim\pm|\ln^{\alpha}t|,\ 0<\alpha<\infty.$$

В обоих случаях при положительном бесконечном индексе число линейно независимых решений бесконечно и выражается через целую функцию, вид к-рой зависит от порядка индексов. При отрицательном бесконечном индексе однородная задача не имеет нетривиальных решений, а неоднородная разрешима лишь при выполнении бесконечного множества условий разрешимости. Главную трудность представляет выделение конечных решений.

Исследовалось решение Л. с. з. на римановой поверхности и равносильной ей задачи на фундаментальной области автоморфной функции, принадлежащей

нек-рой группе подстановок, в автоморфных функциях этого класса. Число решений или условий разрешимости зависит от индекса, а в нек-рых (особых) случаях также от рода поверхности или фундаментальной области.

Если в условии (*) считать G матрицей, а $\Phi^{\pm}$, g векторами (n-мерными), то возникает Л. с. з. для кусочно аналитического вектора. Этот случай значительно сложнее, чем рассмотренный выше скалярный случай ($n=1$). Исследование производится сведением к системе интегральных уравнений. Число линейно независимых решений или условий разрешимости зависит от n независимых величин, наз. частными индексами, зависимость к-рых от матрицы коэффициентов в явном виде не установлена. Важную роль играет индекс определителя матрицы G, наз. суммарным индексом задачи.

Впервые Л. с. з. (для кусочно аналитич. вектора) встречается у Б. Римана (B. Riemann, см. [1]) в связи с решением задачи о построении линейного дифференциального уравнения по заданной группе подстановок (группе монодромии). Однако в том примерно виде, как она сформулирована выше, Л. с. з. была впервые рассмотрена Д. Гильбертом (1905, см. [2]) при менее общих условиях; первые результаты (альтернативного характера) были получены им путем сведения к интегральному уравнению. И. Племель (1908, см. [3]), использовав впервые интегралы типа Коши, свел векторную Л. с. з. к интегральному уравнению и полностью решил поставленную Риманом задачу дифференциальных уравнений. Неоднородную Л. с. з. (в несколько иной постановке) впервые рассмотрел И. И. Привалов [4]; его результаты относятся главным образом к теоретико-функциональным обобщениям.

Л. с. з. имеет большое число приложений. Главные из них — в теории сингулярных интегральных уравнений. Даны обобщения в различных направлениях — т. н. Л. с. з. со сдвигом, сопряжением, дифференциальная, для обобщенных аналитич. функций и другие. Теория Л. с. з., ее обобщений и приложений наиболее полно отражена в [5], [6].

Лит.: [1] Риман Б., Сочинения, пер. с нем., М.— Л., 1948, с. 176—82; [2] Hilbert D., Grundzüge einer allgmeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 2 Aufl., Lpz.,— B., 1924; [3] Plemelj J., «Monatsh. Math.», 1908, Bd 19, S. 211—45; [4] Привалов И. И., «Матем. сб.», 1934, т. 41, № 4, с. 519—526; [5] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968, гл. 2; [6] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977. *Ф. Д. Гахов.*

ЛИНЕЙНОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И СИСТЕМА — дифференциальное уравнение (и система) с частными производными вида

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\, D^\alpha u = f, \qquad (1)$$

у к-рого в любой точке $x=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ области его задания Ω среди действительных переменных $y_0, y_1, \ldots, y_n$ можно выделить (в случае надобности — после надлежащего аффинного преобразования независимых переменных) одно переменное, напр. $y_0=\lambda$, таким образом, чтобы для всех точек $Y=(y_1, \ldots, y_n)$ из n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ характеристическое уравнение (относительно λ)

$$\det \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\, y^\alpha\big|_{y_0=\lambda}, \quad y^\alpha=\left(y_0^{\alpha_0}, \ldots, y_n^{\alpha_n}\right) \qquad (2)$$

имело ровно Nm действительных корней. Здесь $\alpha=(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $|\alpha|=\sum_{j=0}^n \alpha_j$ — порядок дифференциального оператора $D^\alpha=D_0^{\alpha_0}\ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j=\partial/\partial x_j$, $j=0, 1, \ldots, n$, m — порядок системы (1), $a_\alpha(x)$ — заданная в области Ω квадратная действительная матрица порядка N, $u(x)=\|u_j(x)\|$, $j=1, \ldots,$

N — искомый вектор-столбец, $f(x)$ — заданный в Ω вектор с N компонентами.

Типичным примером является *волновое уравнение*

$$u_{x_0x_0} = \sum_{j=1}^{n} u_{x_jx_j}. \qquad (3)$$

К Л. г. у. и с. приводят многие задачи математич. физики.

Поверхность S: $\varphi(x)=0$ наз. характеристической в точке x, если $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$ и $Q(x, \operatorname{grad}\varphi) = 0$, где

$$Q(x, y) \equiv Q(x, y_0, Y) = \det \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, y^\alpha$$

— характеристич. форма системы (1). Если $Q(x, y)=0$, то говорят, что вектор y задает в точке x характеристическое направление. Поверхность S наз. характеристической поверхностью (или характеристикой) для системы (1), если

$$Q(x, \operatorname{grad}\varphi) = 0 \text{ для всех } x \in S.$$

Поверхность, не имеющая характеристич. направления нормали ни в одной точке, наз. свободной поверхностью. На свободной поверхности ранг характеристической матрицы

$$A(x, y) \equiv A(x, y_0, Y) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, y^\alpha, \quad y = \operatorname{grad}\varphi,$$

равен N, в то время как на характеристич. поверхности S он меньше N. Характеристика S наз. простой, если для нек-рого j и для всех $x \in S$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) Q(x, \operatorname{grad}\varphi) \neq 0.$$

В противном случае характеристику наз. кратной. Иногда характеристику наз. простой, если ранг матрицы $A(x, \operatorname{grad}\varphi)$ равен $N-1$.

Система (1) наз. гиперболической в точке x относительно гиперплоскости S_0: $x_0=0$, если матрица $A(x, 1, y)$ $a_{m,0}$, . . ., $_0$ невырожденная (т. е. поверхность S свободная) и все корни $\lambda=\lambda_k$, $k=1, \ldots, mN$, характеристич. уравнения $Q(x, \lambda, Y)=0$ действительные для всех точек $Y \in \mathbb{R}^n$. Система (1) наз. гиперболической в области Ω относительно S_0, если она гиперболична относительно S_0 в каждой точке $x \in \Omega$.

Важным классом гиперболич. уравнений и систем являются строго гиперболич. уравнения и системы, к-рые иногда наз. вполне гиперболическими системами, или гиперболическими в узком смысле. Система (1) наз. строго гиперболической системой, когда все корни λ λ_k характеристич. уравнения различны для любого ненулевого вектора $Y \in \mathbb{R}^n$. Характеристики строго гиперболич. уравнения (или системы) являются простыми. Строго гиперболические (относительно S_0) системы примечательны тем, что для них корректно поставлена задача Коши

$$D_0^k u\,|_{x_0=0} = \psi_k(x), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad (4)$$

при одних только предположениях достаточной гладкости коэффициентов $a_\alpha(x)$, $f(x)$ системы (1) и начальных данных (начальных функций) $\psi_k(x)$, $x=(x_0, \ldots, x_n)$. Существуют примеры гиперболических, но не строго гиперболич. уравнений вида (1) (даже с постоянными коэффициентами при производных порядка m), для к-рых задача Коши поставлена некорректно.

Решение $u(x)$ задачи Коши (4) для волнового уравнения (3) выписывается в явном виде, и оно в случае, когда $n \equiv 0 \pmod 2$ и только тогда, обладает свойством:

значение $u(x)$ в вершине x^* характеристического конуса $|X-X^*|=x_0^*-x_0$, $X-(x_1, \ldots, x_n)$, зависит только от значения начальных данных $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ и их производных на основании $|X-X^*|=x_0^*$, $x_0=0$, этого конуса (т. н. *Гюйгенса принцип*).

Для строго гиперболических относительно S_0 уравнений и систем исследован вопрос о диффузии волн и о лакунах. Исчерпывающий ответ дан в случае уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u = 0, \quad a_\alpha = \text{const}.$$

Для одного (скалярного) уравнения с постоянными коэффициентами $a_\alpha(x)$ $a_\alpha=\text{const}$ определение строгой гиперболичности обобщено следующим образом. Уравнение (1) наз. гиперболическим относительно ненулевого вектора $y\in\mathbb{R}^{n+1}$, если

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha y^\alpha \neq 0$$

и существует такое действительное число λ_0, что для всех $\xi=(\xi_0, \ldots, \xi_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ и $\lambda>\lambda_0$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha (\lambda y+i\xi)^\alpha \neq 0.$$

Из всех линейных уравнений с постоянными коэффициентами только для уравнений, гиперболических в этом смысле, задача Коши поставлена корректно при произвольных достаточно гладких начальных функциях, заданных на гиперплоскости

$$\sum_{j=0}^n x_j y_j = 0.$$

В частности, волновое уравнение (3) является гиперболическим в указанном смысле относительно любого вектора, для к-рого

$$y_0^2 > \sum_{j=1}^n y_j^2.$$

Существуют различные обобщения определения строго гиперболич. уравнений и систем. В основном это такие уравнения и системы, к-рые полностью характеризуются тем, что для них однозначно разрешима задача Коши с данными на свободной поверхности при любых достаточно гладких начальных функциях без всяких ограничений роста на бесконечности.

Другим важным классом линейных гиперболич. систем 1-го порядка является класс симметрических гиперболич. систем. Система

$$\sum_{j=0}^n a_j(x)\, u_{x_j} + b(x)\, u = f(x), \qquad (5)$$

где $a_j(x)$, $b(x)$ — заданные в области Ω квадратные матрицы порядка N, а $u(x)$ — искомый вектор из N компонент, наз. симметрической гиперболической системой в области Ω, если матрицы $a_j(x)$ симметрические (или симметризуемые одновременно одним и тем же преобразованием) и в каждой точке существует пространственно ориентированная гиперплоскость, т. е. гиперплоскость, нормаль к-рой $y=(y_0, \ldots, y_n)$ обладает тем свойством, что матрица $\sum_{j=0}^n y_j a_j(x)$ положительно определена. Если для симметрической гиперболич. системы (5) с достаточно гладкими коэффициентами заданные начальные функции и правая часть имеют интегрируемые с квадратом обобщенные частные производные порядка p, то существует единственное обобщенное решение задачи Коши с тем же числом интегрируемых с квадратом частных производных. К симметрическим гиперболич. системам сводится любое строго гиперболич. уравнение 2-го порядка.

Уравнение (1) 2-го порядка в классе регулярных в области Ω решений можно записать в виде

$$\sum_{k,\ j=0}^{n} a_{kj}(x)\, u_{x_k} u_{x_j} + \sum_{j=0}^{n} b_j(x)\, u_{x_j} + c(x)\, u = f(x), \qquad (6)$$

где $a_{kj}(x) = a_{jk}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ — заданные в Ω действительные функции. Уравнение (6) гиперболично в области Ω, если в каждой точке этой области все характеристич. числа матрицы $a(x) = \|a_{jk}(x)\|$, $k, j = 0, \ldots, n$, старших коэффициентов $a_{kj}(x)$ отличны от нуля, причем одно из этих чисел отличается по знаку от всех остальных. По отношению к уравнению (6), наряду с характеристич. поверхностью, выделяют два типа гладких поверхностей: пространственно ориентированные поверхности и временным образом ориентированные поверхности. Если поверхности заданы уравнением вида $\varphi(x) = 0$, то на поверхности первого типа $Q(x, \operatorname{grad}\varphi) > 0$, а на поверхности второго типа $Q(x, \operatorname{grad}\varphi) < 0$, где

$$Q(x, y) = \sum_{k,\ j=0}^{n} a_{kj}(x)\, y_k y_j.$$

Задача Коши для гиперболич. уравнений с начальными данными на временным образом ориентированных поверхностях, вообще говоря, не является корректно поставленной.

Гиперболич. уравнение

$$u_{x_0 x_0} - \sum_{k,\ j=1}^{n} a_{kj}(x)\, u_{x_k x_j} + \sum_{j=0}^{n} b_j(x)\, u_{x_j} + c(x)\, u = f(x)$$

наз. равномерно (или регулярно) гиперболическим в области Ω, если существует такое положительное число ε, что

$$\sum_{k,\ j=1}^{n} a_{kj}(x)\, \xi_k \xi_j > \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2$$

для всех x из $\overline{\Omega}$ и любого ненулевого вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. При $n = 1$ неравенство

$$a_{01}^2 - a_{00} a_{11} > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\Omega}$$

представляет собой необходимое и достаточное условие равномерной гиперболичности уравнения (6) в области Ω. Уравнение колебания струны

$$u_{x_0 x_0} - u_{x_1 x_1} = 0$$

является типичным представителем линейных равномерно гиперболич. уравнений 2-го порядка с двумя независимыми переменными. Общее решение этого уравнения в любой выпуклой области Ω плоскости $\mathbb{R}^2$ дается *Д'Аламбера формулой*:

$$u(x) = f(x_0 + x_1) + g(x_0 - x_1),$$

где f и g — произвольные функции.

Гиперболич. уравнение (6) при $n = 1$ после неособой действительной замены переменных x_0 и x_1 приводится к нормальному (каноническому) виду

$$u_{y_0 y_0} - u_{y_1 y_1} + A(y)\, u_{y_0} + B(y)\, u_{y_1} + C(y)\, u = F(y), \qquad (7)$$

$$y = (y_0, y_1).$$

Для гиперболич. систем, записанных в виде (7), где $A(y)$, $B(y)$ и $C(y)$ — заданные действительные квадратные матрицы порядка N, $F(y)$ — заданный, а u — искомый векторы с N компонентами, *Римана методом* полностью исследован вопрос о корректности задачи Коши с начальными данными на нехарактеристической (свободной) кривой и *Гурса задача* с данными на двух пересекающихся характеристиках.

Основными задачами для гиперболич. уравнений являются: *Коши задача*, *Коши характеристическая задача* и *смешанная задача* (см. также *Смешанная задача для гиперболического уравнения и системы*).

При исследовании основных задач важную роль играют фундаментальные решения, к-рые позволяют получать различные (интегральные) представления регулярных и обобщенных решений и установить их структурные и качественные свойства, в частности изучить вопрос о фронте волны и распространении разрывов.

Уравнение (6) наз. ультрагиперболическим уравнением в области Ω, если в каждой точке $x\in\Omega$ все характеристич. числа матрицы $a(x)$ отличны от нуля, причем по крайней мере два из них отличаются по знаку от всех остальных, число к-рых не ниже двух. Примером ультрагиперболич. уравнения является уравнение вида

$$\sum_{j=0}^{n}\left(u_{x_jx_j}-u_{y_jy_j}\right)=0,\ n\geqslant 1, \tag{8}$$

к-рое обладает следующим свойством: если $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (8) в области Ω евклидова пространства переменных $x=(x_0, \ldots, x_n)$, $y=(y_0, \ldots, y_n)$ и (x^*, y^*) — произвольная точка Ω, то среднее значение функции $u(x^*, y^*)$, вычисленное по сфере $\sum_{j=0}^{n}(x_j-x_j^*)^2=r^2$ с центром в точке $x^*=(x_0^*, \ldots, x_n^*)$ и радиуса r, равно среднему значению функции $u(x^*, y)$, вычисленному по сфере $\sum_{j=0}^{n}(y_j-y_j^*)^2=r^2$ с центром в точке $y^*=(y_0^*, \ldots, y_n^*)$ и того же радиуса r. Эта теорема широко применяется в теории линейных гиперболич. уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Лит.: [1] Hadamard J., Le problème de Cauchy, P., 1932; [2] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966; [3] Бицадзе А. В., Уравнения смешанного типа, М., 1959; [4] его же, Уравнения математической физики, М., 1976; [5] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971; [6] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, 2 изд., М., 1959; [7] Гординг Л., Задачи Коши для гиперболических уравнений, пер. с англ., М., 1961; [8] Дезин А. А., «Матем. сб.», 1959, т. 49, № 4, с. 459—84; [9] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., т. 2, М., 1964; [10] Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953; [11] Лере Ж., Гординг Л., Котаке Т., Задача Коши, пер. с франц., М., 1967; [12] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; [13] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 20 изд., т. 2, М., 1967; [14] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [15] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965.

А. М. Нахушев.

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ — уравнение вида

$$A_0(t)\dot{u}-A_1(t)u+g(t), \tag{1}$$

где $A_0(t)$, $A_1(t)$ при каждом t — линейные операторы в банаховом пространстве E, $g(t)$ — заданная, а $u(t)$ — искомая функции со значениями в E; производная $\dot{u}$ понимается как предел по норме E разностного отношения.

1. Линейное дифференциальное уравнение с ограниченным оператором. Пусть $A_0(t)$ и $A_1(t)$ при каждом t — ограниченные операторы, действующие в E. Если оператор $A_0(t)$ имеет при каждом t ограниченный обратный, то уравнение (1) разрешается относительно производной и принимает вид

$$\dot{u}=A(t)u+f(t), \tag{2}$$

где $A(t)$ — ограниченный оператор в пространстве E, $f(t)$ и $u(t)$ — функции со значениями в E. Если функции $A(t)$ и $f(t)$ непрерывны (или, более общо, изме-

римы и интегрируемы на каждом конечном промежутке), то решение задачи Коши:

$$\dot{u} = A(t)u, \quad u(s) = u_0, \tag{3}$$

существует при любом $u_0 \in E$ и задается формулой

$$u(t) = U(t, s)\, u_0,$$

где

$$U(t, s) = I + \int_s^t A(t_1)\, dt_1 + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \int_s^t \int_s^{t_n} \dots \int_s^{t_2} A(t_n) \dots A(t_1)\, dt_1 \dots dt_n \tag{4}$$

— *эволюционный оператор* уравнения $\dot{u} = A(t)u$. Решение задачи Коши для уравнения (2) определяется по формуле:

$$u(t) = U(t, s)\, u_0 + \int_s^t U(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau.$$

Из (4) вытекает оценка

$$\| U(t, s) \| \leqslant \exp \left\{ \int_s^t \| A(\tau) \|\, d\tau \right\}; \tag{5}$$

ее уточнение

$$\| U(t, s) \| \leqslant \exp \left\{ \int_s^t r_A(\tau)\, d\tau \right\}, \tag{5'}$$

где $r_A(\tau)$ — *спектральный радиус* оператора $A(\tau)$. Эволюционный оператор обладает свойствами

$$U(s, s) = I, \quad U(t, \tau)\, U(\tau, s) = U(t, s), \\ U(t, \tau) = [U(\tau, t)]^{-1}.$$

Основное внимание при изучении уравнения (2) уделяется поведению его решений на бесконечности в зависимости от поведения $A(t)$ и $f(t)$. При этом важной характеристикой уравнения является г е н е р а л ь н ы й (или о с о б ы й) п о к а з а т е л ь

$$\varkappa = \overline{\lim_{\tau,\, s \to \infty}} \frac{1}{\tau} \ln \| U(\tau + s, s) \|.$$

Детально изучены уравнения с периодическими и почти периодическими коэффициентами (см. *Качественная теория дифференциальных уравнений* в банаховом пространстве).

Уравнение (2) можно рассматривать и в комплексной плоскости. Если функции $A(t)$ и $f(t)$ голоморфны в односвязной области, содержащей точку s, то формулы (3), (4), (5), (5') остаются в силе, если под интегралами понимать интегралы по спрямляемому пути, соединяющему s и t.

Ряд других вопросов возникает в случае, когда исходное линейное уравнение неразрешимо относительно производной. Если оператор $A_0(t)$ ограниченно обратим всюду, за исключением одной точки, напр. $t=0$, то уравнение в пространстве E приводится к виду

$$a(t)\dot{u} = A(t)u + f(t), \tag{6}$$

где $a(t)$ — скалярная функция и $a(0)=0$. Здесь основное внимание уделяется изучению поведения решений в окрестности нуля, при этом различаются аналитический и неаналитический случаи.

А н а л и т и ч е с к и й с л у ч а й. Для простейшего уравнения

$$t\dot{u} = Au$$

с постоянным оператором A эволюционный оператор $U(t) = U(t, 0)$ имеет вид

$$U(t) = e^{A \ln t},$$

решения неоднозначны: при обходе вокруг нуля в положительном направлении они умножаются на оператор $e^{2\pi i A}$.

Если для уравнения с регулярной особенностью

$$t\dot{u} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} t^{(k)}\right) u, \qquad (7)$$

где ряд справа сходится в окрестности нуля, оператор $U(t)$ искать в виде ряда

$$U(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} U^{(k)} t^{(k)}\right) e^{A^{(0)} \ln t},$$

то для определения коэффициентов $U^{(k)}$ получается система уравнений

$$A^{(0)} U^{(0)} - U^{(0)} A^{(0)} = 0,$$

$$(A^{(0)} - kI)\, U^{(k)} - U^{(k)} A^{(0)} = -\sum_{j=1}^{k} A^{(j)} u^{(k-j)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для разрешимости этой системы, т. е. формальной разрешимости уравнения (7), достаточно, чтобы спектры операторов $A^{(0)}$ и $A^{(0)} - kI$ не пересекались или, что то же, чтобы в спектре оператора $A^{(0)}$ не было точек, отличающихся на целое число. При этом условии ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} U^{(k)} t^k$$

сходится в той же окрестности нуля, что и ряд для $A(t)$. Если теперь имеется конечное число целых чисел, представимых в виде разностей точек спектра оператора $A^{(0)}$, и каждое из них является изолированной точкой спектра трансформатора

$$\mathfrak{A} X = A^{(0)} X - X A^{(0)},$$

то существует решение вида

$$U(t) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} U_k (\ln t)\, t^k\right) e^{A^{(0)} \ln t}, \quad 0 < |t| < \rho,$$

где U_k — целые функции аргумента $\ln t$, удовлетворяющие при каждом $\varepsilon > 0$ условию

$$\| U_k (\ln t) \| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon |\ln t|}.$$

Если целые точки спектра трансформатора $\mathfrak{A}$ являются полюсами его резольвенты, то функции U_k — многочлены.

В случае иррегулярной особенности рассмотрено дифференциальное уравнение

$$t^m \dot{u} = \left(\sum_{k=0}^{m-1} A^{(k)} t^k\right) u$$

в банаховой алгебре $\mathfrak{B}$ (напр., в алгебре ограниченных операторов в банаховом пространстве E). При нек-рых ограничениях на оператор $A^{(0)}$ оно с помощью интегралов Лапласа сводится к уравнению с регулярной особенностью $(m-1)$ в алгебре матриц с элементами из алгебры $\mathfrak{B}$.

Неаналитический случай. Пусть в уравнении

$$t^n \dot{u} = A(t)\, u + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

функции $A(t)$ и $f(t)$ бесконечно дифференцируемы. В конечномерном случае получен исчерпывающий результат; если уравнение имеет формальное решение в виде степенного ряда, то оно имеет бесконечно дифференцируемое на $[0, T]$ решение, для к-рого формальный ряд является рядом Тейлора в точке $t = 0$. В бесконечномерном случае имеется лишь ряд достаточных условий для существования бесконечно дифференцируемых решений.

Пусть $m > 1$. Если спектр оператора $A(0)$ не пересекается с мнимой осью, то существует семейство бесконечно дифференцируемых решений, зависящее от произвольного элемента g^-, принадлежащего инвариантному подпространству оператора $A(0)$, отвечающему

части спектра $A(0)$, лежащей в левой полуплоскости. Любое непрерывное на $[0, T]$ решение входит в это семейство. Если весь спектр $A(0)$ лежит в левой полуплоскости, то существует только одно бесконечно дифференцируемое решение.

Пусть $m = -1$. Если отрицательные целые числа не принадлежат спектру оператора $A(0)$, то существует единственное бесконечно дифференцируемое решение. В аналогичных предположениях относительно оператора $A(0)$ рассмотрены уравнения вида (6), в к-рых $a(t)$ и $f(t)$ имеют конечную гладкость и такой же гладкостью обладают решения.

Своеобразная картина возникает, когда дифференциальное уравнение неразрешимо относительно производной при всех t, напр. когда A — постоянный необратимый оператор. Пусть в уравнении

$$A\dot{u} = Bu \tag{8}$$

операторы A и B — ограниченные в пространстве E, оператор A необратим и фредгольмов. Предполагается, что оператор $A + \varepsilon B$ непрерывно обратим при достаточно малых ε. Тогда существуют такие разложения в прямые суммы $E = N^{(1)} + M^{(1)}$ и $E = N^{(2)} + M^{(2)}$, что операторы A и B отображают $N^{(1)}$ в $N^{(2)}$ и $M^{(1)}$ в $M^{(2)}$. Оператор A обратим на $M^{(1)}$ и отображает на $M^{(2)}$. Подпространство $N^{(1)}$ конечномерно. Все решения уравнения (8) лежат в подпространстве $M^{(1)}$ и имеют вид $\exp(\tilde{A}^{-1}Bt)u_0$, где $\tilde{A}$ — сужение A на $M^{(1)}$, $u_0 \in M^{(1)}$. Для неоднородного уравнения $A\dot{u} = Bu + f(t)$ решение существует только при определенной гладкости $f(t)$ и нек-рых условиях согласования значений $f(t)$ и ее производных с начальными данными. Количество производных, к-рые должны иметь нек-рые компоненты $f(t)$, и количество условий согласования равны максимальной длине B-присоединенных цепочек оператора A. При выполнении указанных условий решение задачи Коши единственно.

Если оператор $A + \varepsilon B$ необратим при всех ε, то все решения уравнения (8) лежат в подпространстве, имеющем, вообще говоря, бесконечный дефект. Решение задачи Коши для него будет неединственным. От функции $f(t)$ в неоднородном уравнении требуется бесконечное число условий дифференцируемости и условий согласования.

2. Линейное дифференциальное уравнение с неограниченным оператором. Пусть $A_0(t)$ обратим при каждом t, так что уравнение (1) разрешается относительно производной и принимает вид

$$\dot{u} = A(t)u + f(t), \tag{9}$$

и пусть здесь $A(t)$ — неограниченный оператор в пространстве E с плотной в E областью определения $D(A(t))$, имеющий непустое *резольвентное множество*, $f(t)$ — заданная, а $u(t)$ — искомая функции со значениями в E.

Даже для простейшего уравнения $\dot{u} = Au$ с неограниченным оператором решения задачи Коши $u(0) = u_0$ могут не существовать, могут быть неединственными, могут быть непродолжимыми на всю полуось, поэтому основные исследования посвящены вопросам существования и единственности решений. Под решением уравнения $\dot{u} = Au$ на отрезке $[0, T]$ понимается функция, принимающая значения в $D(A)$, дифференцируемая на $[0, T]$ и удовлетворяющая уравнению. Иногда это определение является слишком жестким и вводится понятие о с л а б л е н н о г о р е ш е н и я, как функции, обладающей теми же свойствами на $(0, T]$, а в точке 0 лишь непрерывной.

Пусть оператор A имеет резольвенту

$$R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

при всех достаточно больших положительных λ и

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}}\ \lambda^{-1}\ln\|R(\lambda, A)\| = h < T.$$

Тогда ослабленное решение задачи

$$\dot{u} = Au,\ u(0) = u_0 \tag{10}$$

единственно на отрезке $[0, T-h]$ и может разветвляться при $t = T-h$. Если $h=0$, то решение единственно на всей полуоси. В смысле поведения $R(\lambda, A)$ при $\lambda\to\infty$ это утверждение является точным.

Если при каждом $u_0\in D(A)$ существует единственное непрерывно дифференцируемое на $[0, T]$ решение задачи (10), то это решение продолжается на всю полуось и представимо в виде $u(t) = U(t)u_0$, где $U(t)$ — сильно непрерывная на $[0, \infty)$ полугруппа ограниченных операторов, $U(0) = I$, для к-рой справедлива оценка $\|U(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$. Для того чтобы уравнение обладало таким свойством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\|(\lambda-\omega)^m R^m(\lambda, A)\| \leqslant M \tag{11}$$

при всех $\lambda > \omega$ и $m = 1, 2, \ldots$, где M не зависит от λ и m. Эти условия трудно проверяемы. Они выполнены, если $\|(\lambda-\omega)R(\lambda, A)\|\leqslant 1$ и тогда $\|U(t)\|\leqslant e^{\omega t}$. Если еще $\omega = 0$, то $U(t)$ — полугруппа сжатий. Это будет тогда и только тогда, когда A — максимальный *диссипативный оператор*. При $u_0\notin D(A)$ функция $U(t)u_0$ не будет дифференцируемой (во всяком случае при $t=0$), ее часто наз. о б о б щ е н н ы м р е ш е н и е м уравнения (10). Решения уравнения $\dot{u} = Au$ можно строить как предел при $n\to\infty$ решений уравнений $\dot{u} = A_n u$ с ограниченными операторами при тех же начальных условиях. Для этого достаточно, чтобы операторы A_n коммутировали, сильно сходились к A на $D(A)$ и

$$\left\| e^{tA_n}\right\| \leqslant Me^{\omega t}.$$

При выполнении условий (11) этими свойствами обладают операторы $A_n = -nI - n^2R(\lambda, A)$ (о п е р а т о р ы И о с и д ы).

Другой метод построения решений уравнения $\dot{u} = Au$ основан на преобразовании Лапласа. Если резольвента оператора A определена на нек-ром контуре Γ, то функция

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}R(\lambda, A)u_0\,d\lambda \tag{12}$$

формально удовлетворяет уравнению

$$\dot{u} = Au + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}d\lambda u_0.$$

Если обеспечить сходимость интегралов, законность дифференцирования под знаком интеграла и обращения в нуль последнего интеграла, то $u(t)$ будет удовлетворять уравнению. Трудность состоит в том, что норма резольвенты не может на бесконечности убывать быстрее, чем $|\lambda|^{-1}$. Однако на нек-рых элементах она убывает быстрее. Напр., если $R(\lambda, A)$ определена при $\mathrm{Re}\lambda\geqslant\alpha$ и

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant M|\lambda|^k,\quad k\geqslant -1,$$

при достаточно больших $|\lambda|$, то для $\Gamma = (-i\infty, i\infty)$ формула (12) дает решение для любого $u_0\in D(A^{[k]+3})$. В более «плохом» случае, когда предыдущее неравенство выполнено лишь в области

$$\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant\alpha|\mathrm{Im}\,\lambda|^a,\ 0 < a < 1$$

(слабо гиперболич. уравнение), и Γ — граница этой области, получается решение лишь для u_0, принадле-

жащих пересечению областей определения всех степеней оператора A, с определенным поведением $\|A^n u_0\|$ при $n \to \infty$.

Значительно больше ослабленных решений получается в том случае, когда Г уходит в левую полуплоскость и можно использовать убывание на нем функции $|e^{\lambda t}|$. При этом, как правило, решения обладают повышенной гладкостью при $t>0$. Если резольвента ограничена на контуре Г: $\mathrm{Re}\lambda = \psi(|\mathrm{Im}\lambda|)$, где $\psi(\tau)$ — гладкая неубывающая вогнутая функция, растущая на ∞ как $\ln\tau$, то функция (12) при любом $u_0 \in E$ становится дифференцируемой и удовлетворяет уравнению, начиная с нек-рого t_0, с дальнейшим увеличением t ее гладкость повышается. Если $\psi(\tau)$ растет как степень τ с показателем, меньшим единицы, то функция (12) бесконечно дифференцируема при $t>0$; если $\psi(\tau)$ растет как $\tau \cdot \ln\tau$, то $u(t)$ принадлежит квазианалитич. классу функций; если растет как линейная функция, то $u(t)$ — аналитична. Во всех этих случаях она удовлетворяет уравнению $\dot{u} = Au$.

Существование резольвенты на контурах, уходящих в левую полуплоскость, можно, пользуясь разложением в ряд, получить из соответствующих оценок на вертикальных прямых. Если при $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \gamma$

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant M(1+|\mathrm{Im}\lambda|)^{-\beta}, \quad 0<\beta<1, \qquad (13)$$

то для каждого $u_0 \in D(A)$ существует решение задачи (10). Все эти решения бесконечно дифференцируемы при $t>0$. Они представляются в виде $u(t) = U(t)u_0$, где $U(t)$ — бесконечно дифференцируемая полугруппа при $t>0$, имеющая, вообще говоря, особенность при $t=0$. Для ее производных справедливы оценки

$$\|U^{(k)}(t)\| \leqslant M_k t^{1-(k+1)/\beta} e^{\omega t}.$$

Если оценка (13) выполнена при $\beta=1$, то все обобщенные решения уравнения $\dot{u} = Au$ аналитичны в нек-ром секторе, содержащем положительную полуось.

Уравнение $\dot{u} = Au$ наз. абстрактным параболическим, если существует единственное ослабленное решение на $[0, \infty]$, удовлетворяющее начальному условию $u(0) = u_0$ при любом $u_0 \in E$. Если

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant M|\lambda - \omega|^{-1} \text{ при } \mathrm{Re}\,\lambda > \omega, \qquad (14)$$

то уравнение является абстрактным параболическим. Все его обобщенные решения аналитичны в нек-ром секторе, содержащем положительную полуось, и справедливо неравенство

$$\|u(t)\| \leqslant t^{-1} C e^{\omega t} \|u_0\|,$$

где C не зависит от u_0. Обратно, если уравнение обладает перечисленными свойствами, то для оператора A выполнено (14).

Если задача (10) имеет единственное ослабленное решение при любом $u_0 \in D(A)$, производная к-рого суммируема на каждом конечном интервале, то эти решения представимы в виде $u(t) = U(t)u_0$, где $U(t)$ — сильно непрерывная полугруппа на $(0, \infty)$, а всякое ослабленное решение неоднородного уравнения $\dot{v} = Av + f(t)$ с нулевым начальным условием $u(0) = u_0$ представимо в виде

$$v(t) = \int_0^t U(t-s) f(s)\, ds. \qquad (15)$$

Функция $v(t)$ определена при любой непрерывной $f(t)$, поэтому она наз. обобщенным решением неоднородного уравнения. Для того чтобы обеспечить ее дифференцируемость, на функцию $f(t)$ налагаются условия гладкости, и тем «больше», чем «хуже» полугруппа $U(t)$. Так, в предыдущих условиях (15) будет ослабленным решением неоднородного уравнения, если

$f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема; если выполнено (11), то (15) будет решением, если $f(t)$ непрерывно дифференцируема; если выполнено (13) при $\beta > 2/3$, то $v(t)$ будет ослабленным решением, если $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\gamma > 2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)$. Вместо гладкости $f(t)$ по t можно требовать принадлежность значений $f(t)$ области определения соответствующей степени оператора A.

Для уравнения с переменным оператором

$$\dot{u} = A(t)u, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{16}$$

имеется несколько основных теорем существования и единственности решений (ослабленных решений) задачи Коши $u(s) = u_0$ на отрезке $s \leqslant t \leqslant T$. Если область определения $A(t)$ не зависит от t:

$$D(A(t)) \quad D(A),$$

оператор $A(t)$ сильно непрерывен по t на $D(A)$ и

$$\| \lambda R(\lambda, A(t)) \| \leqslant 1$$

при $\lambda > 0$, то решение задачи Коши единственно. Если, кроме того, $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $D(A)$, то при всяком $u_0 \in D(A)$ решение существует и представимо в виде

$$u(t) = U(t, s)u_0,$$

где $U(t, s)$ — *эволюционный оператор* со свойствами:
1) $U(t, s)$ сильно непрерывен в треугольнике T_Δ: $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$;
2) $U(t, s) = U(t, \tau)U(\tau, s)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, $U(s, s) = I$;
3) $U(t, s)$ отображает $D(A)$ в себя и оператор

$$A(t)U(t, s)A^{-1}(s)$$

ограничен и сильно непрерывен в T_Δ;
4) на $D(A)$ оператор $U(t, s)$ сильно дифференцируем по t и s и

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A(t)U, \quad \frac{\partial U}{\partial s} = -UA(s).$$

Конструирование оператора $U(t, s)$ проводится путем аппроксимации оператора $A(t)$ ограниченными операторами $A_n(t)$ и заменой последних кусочно постоянными операторами.

Предыдущие условия на оператор $A(t)$ во многих важных задачах не выполняются. Пусть для оператора $A(t)$ существуют такие константы M и ω, что

$$\| R(\lambda, A(t_k)) R(\lambda, A(t_{k-1})) \ldots R(\lambda, A(t_1)) \| \leqslant M(\lambda - \omega)^k$$

для всех $\lambda > \omega$, $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant T$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть в пространстве E плотно вложено банахово пространство F, содержащееся во всех $D(A(t))$, и обладающее свойствами: а) оператор $A(t)$ ограниченно действует из F в E и непрерывен по t по норме ограниченных операторов из F в E; б) существует изоморфизм S пространства F на пространство E такой, что

$$SA(t)S^{-1} = A(t) + B(t),$$

где $B(t)$ — ограниченная в E сильно измеримая операторная функция, для к-рой $\|B(t)\|$ интегрируема на $[0, T]$. Тогда существует эволюционный оператор $U(t, s)$, обладающий свойствами 1), 2), 3') $U(t, s)F \subset F$ и $U(t, s)$ сильно непрерывен в F на T_Δ, 4') на F оператор $U(t, s)$ сильно дифференцируем в смысле нормы E и $\frac{\partial U}{\partial t} = A(t)U$, $\frac{\partial U}{\partial s} = -UA(s)$. Сформулированное утверждение позволило получить теоремы существования для основных квазилинейных уравнений математич. физики гиперболич. типа.

В теории параболич. уравнений применяется метод замороженных коэффициентов. Предполагается, что при каждом $t_0 \in [0, T]$ уравнению

$\dot{u}=A(t_0)u$ отвечает полугрупповой оператор $U_{A(t_0)}t$. Искомый эволюционный оператор формально удовлетворяет интегральным уравнениям

$$U(t,\ s)=U_{A(t)}(t-s)+$$

$$+\int_s^t U_{A(t)}(t-s)\,[A(\tau)-A(t)]\,U(\tau,\ s)\,d\tau,$$

$$U(t,\ s)=U_{A(s)}\ t-s)+$$

$$+\int_s^t U(t,\ \tau)\,[A(\tau)-A(s)]\,U_{A(s)}(\tau-s)\,d\tau.$$

В условиях, когда ядра этих уравнений имеют слабые особенности, доказывается существование их решения и то, что $U(t, s)$ является эволюционным оператором. Наибольшие приложения нашло утверждение: если

$$D(A(t))\equiv D(A),\quad \|R(\lambda,\ A(t))\|<M(1+|\lambda|)^{-1}$$

при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ и

$$\|[A(t)-A(s)]\,A^{-1}(0)\|\leqslant C\,|t-s|^{\rho}$$

(условие Гёльдера), то существует эволюционный оператор $U(t, s)$, дающий при каждом $u_0\in E$ ослабленное решение $U(t, s)u_0$ задачи Коши. Единственность решения имеется при условии лишь непрерывности оператора $A(t)A^{-1}(0)$ (в гильбертовом пространстве). Теорема существования, аналогичная приведенной выше, справедлива для оператора $A(t)$ с условием типа (13) при определенном соотношении между β и ρ.

Предположение о постоянстве $D(A(t))$ не позволяет в приложениях рассматривать краевые задачи с граничными условиями, зависящими от t. Пусть выполнено

$$\|R(\lambda,\ A(t))\|\leqslant M(1+|\lambda|)^{-1},\ \operatorname{Re}\lambda>0;$$

$$\left\|\frac{dA^{-1}(t}{dt}-\frac{dA^{-1}(s)}{ds}\right\|\leqslant K\,|t-s|^{\alpha},\ 0<\alpha\leqslant 1;$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}R(\lambda,\ A(t))\right\|\leqslant N|\lambda|^{\rho-1},\ 0\leqslant\rho<1,$$

в секторе $|\arg\lambda|\leqslant\pi-\varphi$, $\varphi<\pi/2$, тогда существует эволюционный оператор $U(t, s)$. Здесь постоянство $D(A(t))$ не предполагается. Имеется вариант последнего утверждения, приспособленный к рассмотрению параболич. задач в нецилиндрич. областях, в к-ром $D(A(t))$ при каждом t лежит в нек-ром подпространстве $E(t)$ пространства E.

Оператор $U(t, s)$ для уравнения (16) формально удовлетворяет интегральному уравнению

$$U(t,\ s)=I+\int_s^t A(\tau)\,U(\tau, s)\,d\tau. \tag{17}$$

В силу неограниченности оператора $A(t)$ это уравнение нельзя решить методом последовательных приближений. Пусть имеется семейство банаховых пространств E_α, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, обладающее свойством: $E_\beta\subset E_\alpha$ и $\|x\|_\alpha\leqslant\|x\|_\beta$ при $\alpha<\beta$. Предполагается, что оператор $A(t)$ ограничен как оператор из E_β в E_α:

$$\|A(t)\|_{E_\beta\to E_\alpha}\leqslant C(\beta-\alpha)^{-1}$$

и $A(t)$ непрерывен по t по норме пространства ограниченных операторов из E_β в E_α. Тогда в этом пространстве метод последовательных приближений для уравнения (17) будет сходиться при $|t-s|\leqslant(\beta-\alpha)(Ce)^{-1}$. Таким образом локально строится оператор $U(t, s)$ как ограниченный оператор из E_β в E_α. В приложениях этот подход дает теоремы типа Коши — Ковалевской.

Для неоднородного уравнения (9) при известном эволюционном операторе для уравнения $\dot{u}=A(t)u$ решение задачи Коши формально записывается в виде

$$u(t)=U(t,\ s)\,u_0+\int_s^t U(t,\ \tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

В различных случаях при той или иной гладкости $f(t)$ эта формула допускает обоснование.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967; [3] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962; [4] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972; [5] Глушко В. П., Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения, Воронеж, 1972; [6] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [7] Зубова С. П., Чернышов К. И., в кн.: «Дифференциальные уравнения и их применения», Вильнюс, 1976, в. 14, с. 21—39; [8] Кузнецов А. Н., «Функциональный анализ и его прилож.», 1972, т. 6, № 2, с. 41—51; [9] Крейн С. Г., Лаптев Г. И., «Дифференциальные уравнения», 1969, т. 5, № 8, с. 1458—69; [10] Любич Ю. И., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 3, с. 3—51; [11] Овсянников Л. В., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, № 4, с. 819—822; [12] Соболевский П. Е., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1961, т. 10, с. 297—350; [13] Beals R., в кн.: Proc. NATO Adv. Study Inst., Liège, 1976, p. 1—26; [14] Friedman A., «Arch. Rat. Mech. and Anal.», 1964, v. 17, № 5, p. 353—57; [15] Kato T., «J. Math. Soc. Japan», 1973, v. 25, № 4, p. 648—66; [16] Treves F., Basic linear partial differential equations, N. Y., 1975; [17] Miller J., «Acta math.», 1963, v. 110, № 3—4, p. 209—31.

С. Г. Крейн.

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА обыкновенное — уравнение вида

$$x''+p(t)\,x'+q(t)\,x=r(t), \qquad (1)$$

где $x(t)$ — искомая функция, а $p(t)$, $q(t)$ и $r(t)$ — заданные функции, непрерывные на нек-ром промежутке (a, b). Для любых действительных чисел x_0, x_0' и $t_0\in(a, b)$ существует единственное решение $x(t)$ уравнения (1) с начальными условиями $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=x'_0$, причем $x(t)$ определено для всех $t\in(a, b)$.

Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения

$$x''+p(t)x'+q(t)x=0, \qquad (2)$$

а $x_0(t)$ — частное решение неоднородного уравнения (1), то общее решение уравнения (1) дается формулой

$$x(t)=x_0(t)+C_1x_1(t)+C_2x_2(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Если известно одно ненулевое решение $x_1(t)$ уравнения (2), то второе его решение $x_2(t)$, линейно независимое с $x_1(t)$, дается формулой

$$x_2(t)=x_1(t)\int\frac{e^{-\int p(t)\,dt}}{x_1^2(t)}\,dt.$$

Если известны линейно независимые решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ уравнения (2), то частное решение $x_0(t)$ уравнения (1) можно найти методом *произвольных постоянных вариации*.

При изучении уравнения (2) большую роль играют его преобразования в уравнения других типов. Так, напр., заменой $x=x_1$, $x'=x_2$ уравнение (2) приводится к нормальной системе линейных уравнений 2-го порядка; заменой искомой функции

$$x=y\exp\left(-\frac{1}{2}\int p(t)\,dt\right)$$

уравнение (2) приводится к уравнению $y''+R(t)y=0$, где

$$R(t)=-\frac{1}{2}p'(t)-\frac{1}{4}p^2(t)+q(t)$$

наз. инвариантом уравнения (2); заменой $x'=yx$ уравнение (2) сводится к *Риккати уравнению*

$$y'+y^2+p(t)y+q(t)=0.$$

После умножения на

$$P(t)=\exp\left(\int p(t)\,dt\right)$$

уравнение (2) принимает самосопряженный вид

$$(P(t)x')' + P(t)q(t)x = 0.$$

Уравнение (2) интегрируется в квадратурах лишь в отдельных случаях. Решения наиболее важных частных типов неинтегрируемых уравнений (2) входят в число специальных функций.

Справедлива теорема Штурма о разделении нулей: если $x_1(t)$, $x_2(t)$ — линейно независимые решения уравнения (2) и $t_1 < t_2$ — соседние нули решения $x_1(t)$, то на интервале (t_1, t_2) имеется в точности один нуль решения $x_2(t)$.

Пусть в уравнениях

$$x'' + q_1(t)x = 0, \quad x'' + q_2(t)x = 0 \tag{3}$$

функции q_1 и q_2 непрерывны и $q_2(t) > q_1(t)$ на промежутке (a, b). Справедлива теорема сравнения: если $t_1 < t_2$ — последовательные нули ненулевого решения первого уравнения (3), то на интервале (t_1, t_2) имеется хотя бы один нуль любого решения второго уравнения (3).

Линейная краевая задача для уравнения (1) ставится следующим образом: найти решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\alpha_1 x(a) + \beta_1 x'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 x(b) + \beta_2 x'(b) = \gamma_2,$$

где α_i, β_i, γ_i — заданные постоянные и

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Штурма — Лиувилля задача для уравнения

$$x'' + \lambda q(t)x = 0,$$

где $q(t) > 0$ и непрерывна на $[a, b]$, ставится следующим образом: найти те значения параметра λ, при к-рых это уравнение имеет ненулевое решение $x(t)$, удовлетворяющее краевым условиям $x(a) = x(b) = 0$. Эти значения λ наз. собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями.

Если в уравнении (2) t и x комплексны, а функции $p(t)$ и $q(t)$ голоморфны в точке t_0, то для любых чисел x_0 и x'_0 существует единственное голоморфное в точке t_0 комплексное решение $x(t)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$. Если в уравнении

$$x'' + \frac{p(t)}{t - t_0} x' + \frac{q(t)}{(t - t_0)^2} x = 0 \tag{4}$$

функции $p(t)$ и $q(t)$ голоморфны в точке t_0, причем хотя бы одно из чисел $p(t_0)$, $q(t_0)$, $q'(t_0)$ отлично от нуля, то точка t_0 наз. регулярной особой точкой для уравнения (4). В окрестности такой точки решение уравнения (4) отыскивается в виде обобщенного степенного ряда

$$x(t) = (t - t_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \quad c_0 \neq 0; \tag{5}$$

здесь ρ находится из определяющего уравнения

$$\rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0 = 0,$$

где $p_0 = p(t_0)$ и $q_0 = q(t_0)$. Пусть корни $\rho_1 \leqslant \rho_2$ этого уравнения действительны. Если $\rho_2 - \rho_1$ не является целым, то существуют два линейно независимых решения вида (5): при $\rho = \rho_1$ и при $\rho = \rho_2$. Если $\rho_2 - \rho_1$ — целое, то, вообще говоря, существует лишь одно решение в виде (5) при $\rho = \rho_2$; второе решение имеет более сложный вид (см. [3]—[6]).

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [2] Камке Э., Справоч-

ник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1—2, М., 1953—1954; [4] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [5] Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1962; [6] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950. *Н. Н. Ладис.*

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЕ — дифференциальное уравнение, линейное относительно искомой функции одного независимого переменного и ее производных, т. е. уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\, x' + a_n(t)\, x = f(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ — искомая, а $a_i(t)$, $f(t)$ — заданные функции; число n наз. порядком уравнения (1) (ниже излагается общая теория Л. д. у. о.; об уравнениях 2-го порядка см. также ст. *Линейное дифференциальное уравнение второго порядка*).

1) Если в уравнении (1) функции $a_1, \ldots, a_n, f$ непрерывны на промежутке (a, b), то для любых чисел x_0, $x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}$ и $t_0 \in (a, b)$ существует единственное решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0', \ \ldots, \ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)},$$

причем это решение определено на всем промежутке (a, b).

Уравнение

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\, x' + a_n(t)\, x = 0 \quad (2)$$

наз. однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (1). Если $x(t)$ — решение уравнения (2) и

$$x(t_0) = x'(t_0) = \ldots = x^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

то $x(t) \equiv 0$. Если $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ — решения уравнения (2), то и любая их линейная комбинация

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_m x_m(t)$$

является решением уравнения (2). Если n функций

$$x_1(t), \ \ldots, \ x_n(t) \quad (3)$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (2), то для всякого решения $x(t)$ уравнения (2) найдутся такие постоянные $C_1, \ldots, C_n$, что

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t). \quad (4)$$

Таким образом, если (3) — *фундаментальная система решений* уравнения (2), то его общее решение задается формулой (4), где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Для всякой невырожденной $n \times n$-матрицы B $\|b_{ij}\|$ и всякого $t_0 \in (a, b)$ существует такая фундаментальная система решений (3) уравнения (2), что

$$x_i^{(n-j)}(t_0) = b_{ij}, \quad i, j = 1, \ \ldots, \ n.$$

Для функций (3) определитель

$$W(t) = \det \begin{Vmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{Vmatrix}$$

наз. определителем Вроньского, или *вронскианом*. Если (3) — фундаментальная система решений уравнения (2), то $W(t) \neq 0$ при всех $t \in (a, b)$. Если $W(t_0) = 0$ хотя бы в одной точке t_0, то $W(t) \equiv 0$ и решения (3) уравнения (2) в этом случае линейно зависимы. Для определителя Вроньского решений (3)

уравнения (2) справедлива *Лиувилля — Остроградского формула*:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\, d\tau\right).$$

Общее решение уравнения (1) является суммой общего решения однородного уравнения (2) и частного решения $x_0(t)$ неоднородного уравнения (1) и задается формулой

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t) + x_0(t),$$

где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (2), а $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Если известна фундаментальная система решений (3) уравнения (2), то частное решение неоднородного уравнения (1) можно найти методом *произвольных постоянных вариации*.

2) Нормальной линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка наз. система

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_i + b_i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

или в векторной форме

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{5}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор-столбец, $A(t)$ — квадратная матрица порядка n, $b(t)$ — заданная вектор-функция. Далее предполагается, что $A(t)$ и $b(t)$ непрерывны на нек-ром промежутке (a, b). В этом случае для любых $t_0 \in (a, b)$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $x(t)$ системы (5), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, причем это решение определено на всем промежутке (a, b).

Линейная система

$$\dot{x} = A(t)x \tag{6}$$

наз. **однородной**, соответствующей неоднородной системе (5). Если $x(t)$ — решение системы (6) и $x(t_0) = 0$, то $x(t) \equiv 0$; если $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ — решения, то и любая их линейная комбинация

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_m x_m(t)$$

является решением системы (6); если $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ — линейно независимые решения системы (6), то векторы $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ линейно независимы при любом $t \in (a, b)$. Если n вектор-функций

$$x_1(t), \ldots, x_n(t) \tag{7}$$

являются фундаментальной системой решений системы (6), то для всякого решения $x(t)$ системы (6) найдутся такие постоянные $C_1, \ldots, C_n$, что

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t). \tag{8}$$

Таким образом, формулой (8) задается общее решение системы (6). Для любых $t_0 \in (a, b)$ и линейно независимых векторов $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ существует такая фундаментальная система решений (7) системы (6), что

$$x_1(t_0) = a_1, \ldots, x_n(t_0) = a_n.$$

Для вектор-функций (7), являющихся решениями системы (6), определитель $W(t)$ матрицы

$$X(t) = \begin{Vmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{n1}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

где первый индекс — номер решения, а второй — номер компоненты, наз. определителем Вронского, или вронскианом. Если (7) — фундаментальная система решений системы (6), то $W(t) \neq 0$ при всех $t \in (a, b)$, а матрица (9) наз. фундаментальной матрицей. Если решения (7) сис-

темы (6) линейно зависимы хотя бы в одной точке t_0, то они линейно зависимы при любом $t \in (a, b)$ и в этом случае $W(t) \equiv 0$. Для определителя Вроньского решений (7) системы (6) справедлива формула Лиувилля:

$$W = W(t_0) \exp\left(\int_t^t \operatorname{Sp}(A(\tau))\, d\tau\right),$$

где $\operatorname{Sp}(A(\tau)) = a_{11}(\tau) + \ldots + a_{nn}(\tau)$ — след матрицы $A(\tau)$. Матрица (9) удовлетворяет матричному уравнению $\dot{X} = A(t)\,X(t)$. Если $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (6), то для всякой другой фундаментальной матрицы $Y(t)$ этой же системы существует такая постоянная невырожденная $n \times n$-матрица C, что $Y(t) = X(t)C$. Если $X(t_0) = E$, где E — единичная матрица, то фундаментальная матрица $X(t)$ наз. нормированной в точке t_0 и формулой $x(t) = X(t)x_0$ задается решение системы (6), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Если матрица $A(t)$ перестановочна со своим интегралом, то фундаментальная матрица системы (6), нормированная в точке $t_0 \in (a, b)$, задается формулой

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau)\, d\tau\right).$$

В частности, для постоянной матрицы A фундаментальная матрица, нормированная в точке t_0, задается формулой $X(t) = \exp(A(t - t_0))$.

Общее решение системы (5) является суммой общего решения однородной системы (6) и частного решения $x_0(t)$ неоднородной системы (5) и задается формулой

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t) + x_0(t),$$

где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — фундаментальная система решений системы (6), а $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Если известна фундаментальная система решений (7) системы (6), то частное решение неоднородной системы (5) можно найти методом вариации произвольных постоянных. Если $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (6), то формулой

$$x(t) = X(t)\,X^{-1}(t_0)\,x_0 + \int_{t_0}^t X(t)\,X^{-1}(\tau)\,b(\tau)\,d\tau$$

задается решение системы (5), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

3) Пусть в системах (5) и (6) $A(t)$ и $b(t)$ непрерывны на полуоси $[a, +\infty)$. Все решения системы (5) одновременно либо устойчивы, либо неустойчивы, поэтому система (5) наз. устойчивой (равномерно устойчивой асимптотически устойчивой), если все ее решения устойчивы (соответственно, равномерно, асимптотически устойчивы). Система (5) устойчива (равномерно, асимптотически устойчива) тогда и только тогда, когда устойчива (соответственно равномерно, асимптотически устойчива) система (6). Поэтому при исследовании вопросов устойчивости линейных дифференциальных систем достаточно ограничиться рассмотрением однородных систем.

Система (6) устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения ограничены на полуоси $[a, +\infty)$. Система (6) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \qquad (10)$$

для всех ее решений $x(t)$. Последнее равносильно выполнению соотношения (10) для n ее решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, образующих фундаментальную систему решений. Асимптотически устойчивая система (6) асимптотически устойчива в целом.

Линейная система с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax \tag{11}$$

устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A имеют неположительные действительные части (т. е. $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$; причем собственные значения с нулевой действительной частью имеют лишь простые элементарные делители. Система (11) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части.

4) Система

$$\dot{y} = -A^{\top}(t)\, y, \tag{12}$$

где $A^{\top}(t)$ — транспонированная матрица $A(t)$, наз. сопряженной системой для системы (6). Если $x(t)$ и $y(t)$ — произвольные решения систем (6) и (12) соответственно, то скалярное произведение

$$(x(t),\ y(t)) \equiv \text{const}.$$

Если $X(t)$ и $Y(t)$ — фундаментальные матрицы решений систем (6) и (12) соответственно, то

$$Y^{\top}(t)\, X(t) = C,$$

где C — нек-рая невырожденная постоянная матрица.

5) Исследование различных специальных свойств линейных систем и, в частности, вопросов устойчивости связано с понятием *Ляпунова характеристического показателя* решения и развитым А. М. Ляпуновым первым методом в теории устойчивости (см. *Правильная линейная система*, *Приводимая линейная система*).

6) Две системы вида (6) наз. асимптотически эквивалентными, если между их решениями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что

$$\lim_{t \to \infty} (x_1(t) - x_2(t)) = 0.$$

Если система (11) с постоянной матрицей A устойчива, то она асимптотически эквивалентна системе $\dot{x} = (A + B(t))x$, где матрица $B(t)$ непрерывна на $[a, +\infty)$, и

$$\int_0^{\infty} \| B(t) \|\, dt < \infty. \tag{13}$$

При выполнении условия (13) система $\dot{x} = B(t)x$ асимптотически эквивалентна системе $\dot{x} = 0$.

Две системы вида (11) с постоянными коэффициентами наз. топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм h: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящий ориентированные траектории одной системы на ориентированные траектории другой. Если квадратные матрицы A и B порядка n имеют одинаковое количество собственных значений с отрицательной действительной частью и не имеют собственных значений с нулевой действительной частью, то системы $\dot{x} = Ax$ и $\dot{x} = Bx$ топологически эквивалентны.

7) Пусть в системе (6) матрица $A(t)$ непрерывна и ограничена на всей действительной оси. Система (6) наз. обладающей свойством экспоненциальной дихотомии, если пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, так, что для всякого решения $x(t)$ при $x(0) \in \mathbb{R}^{n_1}$ выполняется неравенство

$$\| x(t) \| \geqslant c e^{k(t - t_0)},$$

а при $x(0) \in \mathbb{R}^{n_2}$ неравенство

$$\| x(t) \| \leqslant c^{-1} e^{-k(t - t_0)}$$

для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и $t \geqslant t_0$, где $0 < c \leqslant 1$ и $k > 0$ — постоян-

ные. Свойством экспоненциальной дихотомии обладает, напр., система (11) с постоянной матрицей A, если A не имеет собственных значений с нулевой действительной частью (такая система наз. г и п е р б о л и ч е с к о й). Если вектор-функция $b(t)$ ограниченна на всей действительной оси, то система (5) со свойством экспоненциальной дихотомии имеет единственное решение, ограниченное на всей прямой $\mathbb{R}$.

Лит.: [1] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд., М., 1970; [2] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [3] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [4] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М. — Л., 1950; [5] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [6] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова..., М., 1966; [7] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970.

Н. Н. Гадиц.

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ о б ы к н о в е н н о е - уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \qquad (1)$$

где $x(t)$ — искомая функция, $a_1, \ldots, a_n$ — заданные действительные числа, $f(t)$ — заданная действительная функция.

Соответствующее (1) о д н о р о д н о е уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = 0 \qquad (2)$$

интегрируется следующим образом. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все различные корни характеристич. уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (3)$$

кратностей $l_1, \ldots, l_k$ соответственно, $l_1 + \ldots + l_k = n$. Тогда функции

$$e^{\lambda_j t}, \quad te^{\lambda_j t}, \quad \ldots, \quad t^{l_j - 1} e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \ldots, k, \qquad (4)$$

являются линейно независимыми (вообще говоря, комплексными) решениями уравнения (2), т. е. образуют фундаментальную систему решений. Общее решение уравнения (2) является линейной комбинацией с произвольными постоянными коэффициентами фундаментальной системы решений. Если $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j i$ — комплексное число, то для всякого целого m, $0 \leqslant m \leqslant l_j - 1$, действительная часть $t^m e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t$ и мнимая часть $t^m e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t$ комплексного решения $t^m e^{\lambda_j t}$ являются линейно независимыми действительными решениями уравнения (2), а паре комплексно сопряженных корней $\alpha_j \pm \beta_j i$ кратности l_j соответствует $2l_j$ линейно независимых действительных решений

$$t^m e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t \quad \text{и} \quad t^m e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, \quad m = 0, 1, \ldots, l_j - 1.$$

Неоднородное уравнение (1) интегрируется методом *произвольных постоянных вариации*. В случае, когда f — к в а з и м н о г о ч л е н, т. е.

$$f(t) = e^{at} (p_m(t) \cos bt + q_m(t) \sin bt),$$

где p_m и q_m — многочлены степеней $\leqslant m$, а число $a + bi$ не является корнем уравнения (3), частное решение уравнения (1) ищется в виде

$$x_0(t) = e^{at} (P_m(t) \cos bt + Q_m(t) \sin bt). \qquad (5)$$

Здесь P_m и Q_m — многочлены степени m с неопределенными коэффициентами, к-рые находятся подстановкой (5) в (1). Если $a + bi$ — корень уравнения (3) кратности k, то частное решение уравнения (1) ищется в виде

$$x_0 = t^k e^{at} (P_m(t) \cos bt + Q_m(t) \sin bt)$$

методом неопределенных коэффициентов. Если $x_0(t)$ — частное решение неоднородного уравнения (1), а $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (2), то общее решение уравнения (1) задается формулой

$$x(t) = x_0(t) + C_1 x_1(t) + \ldots + C_n x_n(t),$$

где C_1, ..., C_n — произвольные постоянные.

Однородная система линейных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\dot{x} = Ax, \tag{6}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — искомый вектор, а A — постоянная действительная $n \times n$-матрица, интегрируется следующим образом. Если λ — действительное собственное значение кратности k матрицы A, то решения $x = (x_1, \ldots, x_n)$, соответствующие собственному значению λ, ищутся в виде

$$x_1 = P_1(t)\, e^{\lambda t}, \ \ldots, \ x_n = P_n(t)\, e^{\lambda t}. \tag{7}$$

Здесь $P_1(t)$, ..., $P_n(t)$ — многочлены степени $k-1$ с неопределенными коэффициентами, к-рые находятся подстановкой (7) в (6); при этом существует в точности k линейно независимых решений вида (7). Если λ — комплексное собственное значение кратности k, то действительные и мнимые части комплексных решений вида (7) образуют $2k$ линейно независимых действительных решений системы (6), а пара комплексно сопряженных собственных значений λ и $\bar{\lambda}$ кратности k матрицы A порождает $2k$ линейно независимых действительных решения системы (6). Перебирая все собственные значения матрицы A, находят $2n$ линейно независимых решений, т. е. фундаментальную систему решений. Общее решение системы (6) является линейной комбинацией с произвольными постоянными коэффициентами решений, образующих фундаментальную систему.

Матрица $X(t) = e^{At}$ является фундаментальной матрицей системы (7), **нормированной в нуле**, т. к. $X(0) = E$ — единичная матрица. Здесь

$$e^{At} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!},$$

причем этот матричный ряд абсолютно сходится для любой матрицы A и всех действительных t. Всякая другая фундаментальная матрица системы (6) имеет вид $e^{At}C$, где C — постоянная невырожденная матрица порядка n.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1970; [2] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967.

Н. Н. Ладис.

ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ — уравнение вида

$$F(x, \ \ldots, \ p_{i_1 \ldots i_n}, \ \ldots) = 0,$$

где F — линейная функция действительных переменных,

$$p_{i_1 \ldots i_n} = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{i_1} \ldots dx_k^{i_n}},$$

i_1, ..., i_n — неотрицательные целочисленные индексы, $\sum_{j=1}^{n} i_j = k$, $k = 0, \ldots, m$, $m \geqslant 1$, и по крайней мере одна из производных

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}}, \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = m,$$

отлична от нуля.

Подробнее см. *Дифференциальное уравнение с частными производными.*

А. Б. Иванов.

ЛИНЕЙНОЕ ЗАМЫКАНИЕ — замыкание *линейной оболочки.*

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение, в к-рое неизвестная функция $\varphi(s)$ входит в первой степени:

$$A(x)\varphi(x) + \int_D K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x),\ x \in D,$$

где A, K, f — заданные функции, D — область евклидова пространства, k, s — точки этого пространства, ds — элемент объема. Подробнее см. *Интегральное уравнение.*

А. Б. Иванов.

ЛИНЕЙНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, аффинное подпространство, — подмножество M (линейного) *векторного пространства* E, являющееся сдвигом какого-либо его линейного подпространства L, т. е. множество M вида x_0+L при нек-ром $x_0 \subset M$. Множество M определяет L однозначно, тогда как x_0 определяется только по mod L:

$$x_0+L=x_1+N$$

в том и только в том случае, когда $L=N$ и $x_1-x_0 \in L$. Размерность M — это размерность подпространства L. Л. м., к-рому соответствует подпространство коразмерности 1, наз. гиперплоскостью.

М. И. Войцеховский.

ЛИНЕЙНОЕ НЕРАВЕНСТВО — неравенство вида

$$l(x)-a \equiv a_1x_1+\ldots+a_nx_n-a \leqslant 0 \qquad (1)$$

или вида

$$l(x)-a \equiv a_1x_1+\ldots+a_nx_n-a < 0, \qquad (2)$$

где $a_1, \ldots, a_n$, a — любые действительные числа, $x=(x_1, \ldots, x_n)$.

В более широком смысле — это неравенство вида

$$f(x)-a \leqslant 0 \qquad (3)$$

или вида

$$f(x)-a<0, \qquad (4)$$

где $f(x)$ — линейная (т. е. аддитивная и однородная) функция на действительном векторном пространстве $L(\mathbb{R})$ со значениями из поля $\mathbb{R}$ действительных чисел и $a \in \mathbb{R}$. Дальнейшее обобщение понятия Л. н. получается, если вместо поля $\mathbb{R}$ взять произвольное упорядоченное поле P. На основе именно такого обобщения построена современная теория Л. н. (см. [1]).

К исследованию систем Л. н. сводится ряд важных вопросов аналитич. механики, геометрии чисел, приближения функций. Весьма важные приложения находят результаты, относящиеся к системам Л. н., в экономич. исследованиях. В таких приложениях возникло, в частности, *линейное программирование.* К решению конкретных систем Л. н. сводятся многие практич. задачи технико-экономич. и планово-экономич. характера, что в значительной мере определило современное направление исследований в области Л. н.

На этом пути возник, в частности, основной принцип теории Л. н.— принцип граничных решений, установленный сначала (см. [4]) для конечных систем Л. н. в модульной форме, т. е. для систем вида

$$|l_j(x)-a_j| \equiv |a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n-a_j| \leqslant d_j, \qquad (5)$$

$j=1, 2, \ldots, m$, где все $a_{j1}, \ldots, a_{jn}, a_j$ — в самом общем случае элементы поля комплексных чисел, а все d_j — неотрицательные действительные числа, $j=1, 2, \ldots, m$.

Принцип граничных решений заключается в следующем. В любой совместной системе вида (5) ранга $r>0$ можно выделить такую подсистему ранга r из r неравенств, что хотя бы одно решение последней, обращающее в равенства все ее неравенства,

удовлетворяет всем неравенствам системы (5), иначе говоря, является решением системы (5).

Принцип граничных решений был распространен (см. [5]) на системы вида

$$l_j(x) - a_j = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j \leqslant 0, \qquad (6)$$

$j = 1, 2, \ldots, m$, над полем $\mathbb{R}$ (т. е. на системы с действительными $a_{j1}, \ldots, a_{jn}, a_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$) в виде следующего более сильного утверждения. В совместной системе (6) ранга $r > 0$ можно выделить такую подсистему ранга r из r неравенств, что любое решение этой подсистемы, обращающее в равенства все ее неравенства, удовлетворяет всем неравенствам (6) (для систем вида (6) это утверждение оказывается эквивалентным предыдущему утверждению). Рангом системы линейных неравенств наз. наибольшее число линейно независимых форм $l_j(x)$, входящих в ее неравенства.

Принцип граничных решений был распространен также на системы вида (6) над произвольным упорядоченным полем P и даже на более общие системы, составленные из конечного числа Л. н. вида (3) над полем P (см. [6]). Из этого принципа вытекает следующее условие совместности систем вида (6) над произвольным упорядоченным полем. Система (6) ранга $r > 0$ тогда и только тогда совместна, когда в матрице ее коэффициентов существует такой отличный от нуля минор Δ порядка r, что для определителей Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, получаемых при окаймлении его с помощью j-й строки этой матрицы и столбца элементов a_j, все отношения Δ_j/Δ неотрицательны. В случае совместной системы *линейных уравнений* $a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n - a_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, такие отношения равны нулю для любого отличного от нуля минора Δ порядка r матрицы ее коэффициентов.

Разработка теории Л. н. началась в конце 19 в. Одно из первых предложений общего характера, установленное в исследованиях [3] и [9], — теорема Минковского — Фаркаша является и теперь одной из ключевых теорем теории Л. н.: если все решения совместной системы (6) над полем $\mathbb{R}$ удовлетворяют нек-рому неравенству

$$l(x) - b = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n - b \leqslant 0,$$

$b, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то существуют такие неотрицательные числа $p_0, p_1, \ldots, p_m$, что имеет место тождественное относительно x $(x_1, \ldots, x_n)$ соотношение

$$l(x) - b = \sum_{j=1}^{m} p_j (l_j(x) - a_j) - p_0.$$

В начале 20 в. в исследованиях Г. Ф. Вороного, посвященных квадратичным формам целочисленных переменных, возникла одна из основных задач теории Л. н. — задача изучения свойств выпуклого многогранника, определяемого в пространстве $\mathbb{R}^n$ решениями совместной конечной системы Л. н. отличного от нуля ранга. Основная теорема Вороного (см. [1]) выражает условия невырожденности такого многогранника или, иначе говоря, условия совместности конечной системы, составленной из неравенств вида (2). Задачей изучения многогранника решений систем вида (6) и результатами Г. Минковского [3] и Ж. Фаркаша [9] на долгое время определилось основное направление исследований по линейным неравенствам (см. [10]).

В дальнейшем выяснилось, что все результаты теории Л. н., относящиеся к конечным системам неравенств вида (6) и, в частности, упоминавшиеся выше результаты Минковского, Фаркаша и Вороного, могут быть выведены из принципа граничных решений дискретными методами, т. е. без использования топологич.

свойств поля $\mathbb{R}$ действительных чисел (или каких бы то ни было следствий этих свойств), причем дискретными методами был доказан и сам принцип граничных решений (см. [1] и [6]). Поэтому в качестве основного поля при построении теории конечных систем Л. н. оказалось возможным вместо поля $\mathbb{R}$ взять произвольное упорядоченное поле P. Таким образом, было подготовлено построение чисто алгебраич. теории Л. н., пользующейся только дискретными методами.

Продолжительное время теория Л. н. не имела эффективных методов для нахождения решения конечных систем Л. н. Метод, состоящий в непосредственном использовании принципа граничных решений, мало эффективен. Эффективные методы для нахождения отдельных решений конечной системы Л. н. (в частности, *симплексный метод*) появились с возникновением линейного программирования.

В 1960—65 был разработан т. н. метод свертывания систем линейных неравенств, позволяющий по любой конечной системе, составленной в общем случае из неравенств вида (3) и (4), в частности из неравенств вида (1) и (2), и по заданному подпространству связанного с ней пространства находить нек-рую новую конечную систему Л. н., множество решений к-рой совпадает с той или иной проекцией множества решений рассматриваемой системы на взятое подпространство (см. [1]). Разработанный на этой основе алгоритм фундаментального свертывания (особый алгоритм для последовательного исключения неизвестных из системы (6)) позволяет получать общие формулы, определяющие все множество решений совместной системы вида (6). Метод свертывания может быть использован в задачах линейного программирования для уменьшения числа неизвестных, а также для получения общих формул, определяющих все множество оптимальных решений (см. [1]). Показано также [7], что с помощью метода свертывания можно выделять максимальные совместные подсистемы в несовместной конечной системе Л. н., составленной в общем случае из неравенств вида (3) и (4), в частности из неравенств вида (1) и (2), что позволяет использовать его при одном из подходов к решению задач распознавания образов (см. [8]).

Среди бесконечных систем Л. н. выделен и изучен особый класс — полиэдрально замкнутые системы (см. [1]). В случае действительного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ полиэдрально замкнутые системы определяются как бесконечные системы вида $a_{\alpha 1}x_1+\ldots+a_{\alpha n}x_n-a_\alpha\leqslant 0$, $\alpha\in M$, с топологически замкнутым в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ сопряженным конусом, т. е. конусом, порожденным элементами

$$(a_{\alpha 1},\ \ldots,\ a_{\alpha n},\ -a_\alpha),\quad \alpha\in M,\ \text{и}\ (0,\ -1),$$

где 0 — нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$. Бесконечные полиэдрально замкнутые системы Л. н. сохраняют ряд свойств конечных систем Л. н. и, в частности, для таких систем справедлива теорема Минковского — Фаркаша. Полиэдрально замкнутые системы Л. н. используются в теории приближения функций, в выпуклом программировании, в теории управления (см. [8]).

Лит.: [1] Черников С. Н., Линейные неравенства, М., 1968; [2] Линейные неравенства и смежные вопросы, пер. с англ., М., 1959; [3] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz., 1896; [4] Черников С. Н., «Матем. сб.», 1944, т. 15, № 3, с. 437—48; [5] его же, «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, № 2, с. 7—73; [6] его же, «Укр. матем. ж.», 1967, т. 19, № 1, с. 36—80; [7] его же, «Доповіді АН УРСР. Сер. А», 1969, № 1, с. 32—35; [8] Красовский Н. Н., Еремин И. И., «Укр. матем. ж.», 1973, т. 25, № 4, с. 465—78; [9] Farkas J., «J. reine und angew. Math.», 1902, v. 124, S. 1—27; [10] Dines L. L., McCoy N. H., «Trans. Roy. Soc. Canada. Sec. 3», 1933, v. 27, p. 37—70.

С. Н. Черников.

ЛИНЕЙНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И СИСТЕМА — дифференциальное уравнение (и система) с частными производными вида

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{ps_0+|s|\leqslant ph_j} A^{ij}_{s_0 s}(x,\ t)\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}\frac{\partial^{s}}{\partial x^{s}} u_j + f_i(x,t), \tag{1}$$

где $1\leqslant i\leqslant N$, $k_0, \ldots, k_N$ — натуральные, p — целое, $s=(s_1, \ldots, s_n)$, $|s|=s_1+\ldots+s_n$, рассматриваемое в области D переменных $(x,\ t)=(x_1, \ldots, x_n,\ t)$. Система (1) наз. параболической (по Петровскому) в точке $(x^0,\ t^0)\in D$, если корни $\lambda_m(\xi,\ x,\ t)$, $1\leqslant m\leqslant k_1+\ldots+k_N$, многочлена по λ

$$\det\left(\sum_{ps_0+|s|=ph_j} A^{ij}_{s_0 s}\lambda^{s_0}(i\xi)^s - \delta_{ij}\lambda^{k_i}\right)$$

удовлетворяют неравенству

$$\sup_{m,\ |\xi|=1} \operatorname{Re}\lambda_m(\xi,\ x^0,\ t^0) < 0. \tag{2}$$

Здесь $(i\xi)^s$ $(i\xi_1)^{s_1}\ldots(i\xi_n)^{s_n}$ с мнимой единицей i и δ_{ij} — символ Кронекера.

Система (1) параболическая в D, если неравенство (2) выполняется для всех $(x,\ t)\in D$, равномерно параболическая в D, если

$$\sup_{m,\ |\xi|=1,\ (x,\ t)\in D} \operatorname{Re}\lambda_m(\xi,\ x,\ t) < -\delta$$

с нек-рой постоянной $\delta>0$.

Для случая уравнения 2-го порядка

$$\sum_{i,\ j=0}^{n} c_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=0}^{n} c_i u_{x_i} + cu = h \tag{3}$$

можно дать другое определение параболичности. Для заданной точки $x^0=(x^0_0, \ldots, x^0_n)$ существует аффинное преобразование, приводящее (3) к виду

$$\sum_{i,\ j=0}^{n} b_{ij}v_{x_i x_j} + \sum_{i=0}^{n} b_i v_{x_i} + bv = g,$$

где $b_{ij}(x^0)=0$ при $i\neq j$. Уравнение (3) параболическое в точке x^0, если одно из $b_{ii}(x^0)$ (пусть $b_{00}(x^0)=0$) равно нулю, остальные $b_{ii}(x^0)\neq 0$, $i>0$, и имеют одинаковые знаки и $b_0(x^0)\neq 0$. Уравнение (3) параболическое в области D, если оно параболическое в каждой ее точке. Если коэффициенты параболического в D уравнения (3) достаточно гладкие, то в окрестности каждой точки $x^0\in D$ невырожденной заменой переменных его можно привести к виду

$$u_t - \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f \tag{4}$$

с положительно определенной формой $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$.

Типичным представителем параболич. уравнения является *теплопроводности уравнение*

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0, \tag{5}$$

основные свойства к-рого сохраняются и для общих параболич. уравнений.

Для уравнения (4) основными являются следующие задачи.

Задача Коши — Дирихле: найти функцию $u(x,\ t)$, к-рая при $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$ удовлетворяет уравнению (4), а при $t=0$ — начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Первая краевая задача, в к-рой уравнение (4) задано в цилиндре

$$\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0,\ T],$$

где Ω — нек-рая область пространства $\mathbb{R}^n$. Требуется найти функцию u, удовлетворяющую уравнению (4), начальному условию

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega,$$

и краевому условию

$$u\,|_{x \in \partial\Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T} = \psi(x,\ t). \tag{6}$$

Вторая и третья краевые задачи отличаются от первой лишь условием (6), к-рое заменяется вторым краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{x \in \partial\Omega,\ \ 0 < t \leqslant T} \equiv \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_i = \psi(x,\ t)$$

или соответственно третьим

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right)_{x \in \partial\Omega,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T} = \psi(x,\ t),$$

где ν_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, — компоненты внешней нормали.

Классич. постановка указанных задач требует от решения непрерывности в замкнутой области, непрерывности вторых производных внутри и в случае второй и третьей краевых задач непрерывности первых производных вплоть до боковой поверхности цилиндра Ω. Кроме того, для задачи Коши — Дирихле, а в случае неограниченности Ω и для краевых задач требуется ограниченность решения u при $|x| \to \infty$ (или, более общо, надлежащим образом заданный рост $|u|$).

Пусть уравнение (4) равномерно параболическое, коэффициенты уравнения, начальных и краевых условий и граница области достаточно гладки. Тогда решения задачи Коши — Дирихле и первой краевой задачи существуют и единственны. Если $a \leqslant 0$, $\sigma > 0$ и выполнены необходимые условия согласования, то аналогичный результат справедлив и для второй и третьей краевых задач.

Единственность указанных задач следует из принципа максимума. Пусть коэффициенты уравнения (4) непрерывны в $\overline{Q}_T$, область Ω ограничена,

$$\Gamma = \partial Q_T \setminus \{(x,\ t) \mid x \in \Omega,\ t = T\}$$

и

$$M = \max_{\overline{Q}_T} a, \quad N = \max_{\overline{Q}_T} |f|.$$

Тогда для любого решения

$$u \in C(\overline{Q}_T) \cap C^2(\overline{Q}_T \setminus \Gamma)$$

уравнения (4) справедлива оценка

$$|u(x,\ t)| \leqslant e^{Mt}(Nt + \max_{\Gamma} |u|), \quad (x,\ t) \in Q_T.$$

Принцип максимума допускает распространение и на случай неограниченных областей. Кроме того, для параболич. уравнений имеет место аналог принципа Заремба — Жиро о знаке наклонной производной в точке экстремума, известного в теории эллиптич. уравнений.

В теории параболич. уравнений важную роль играют фундаментальные решения. В случае уравнения теплопроводности (5) им является функция

$$w(x,\ t,\ \xi,\ \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}},$$

при $t > \tau$ удовлетворяющая уравнению (5), причем для

любой ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^n$ функции $\varphi(x)$

$$\lim_{t \to \tau + 0} \int_{\mathbb{R}^n} w(x, t, \xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x)$$

равномерно на компактных подмножествах точек $x \in \mathbb{R}^n$. В частности, при $\tau = 0$ получается решение

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x, t, \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi \qquad (7)$$

задачи Коши — Дирихле. На значение решения u в точке (x, t), $t > 0$, влияют все значения функции. Это служит выражением того факта, что возмущения задачи Коши — Дирихле распространяются с бесконечной скоростью. В этом существенное отличие параболич. уравнений от гиперболических, где скорость распространения возмущений конечна.

Фундаментальные решения могут быть построены и для общих параболич. уравнений и систем при весьма широких предположениях относительно гладкости коэффициентов.

Лит.: [1] Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; [2] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967; [3] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [4] Эйдельман С. Д., Параболические системы, М., 1964; [5] Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 3, с. 3—46. *А. П. Солдатов.*

ЛИНЕЙНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО, векторное подпространство, — непустое подмножество L (линейного) *векторного пространства* E над полем K такое, что L само является векторным пространством по отношению к определенным в E действиям сложения и умножения на скаляр. Множество $L + x_0$, где $x_0 \in E$, наз. *линейным многообразием.* *М. И. Войцеховский.*

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — гомоморфизм π группы (соответственно алгебры, кольца, полугруппы) X в группу всех обратимых линейных операторов в векторном пространстве E (соответственно в алгебру, кольцо, мультипликативную полугруппу всех линейных операторов в E). Если E — топологич. векторное пространство, то Л. п. X в E наз. такое, образ к-рого содержит только непрерывные линейные операторы в E. Пространство E наз. пространством представления π, а операторы $\pi(x)$, $x \in X$, — операторами представления π.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978. *А. И. Штерн.*

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — отображение векторного пространства в себя, при к-ром образом суммы двух векторов является сумма их образов, а образом произведения вектора на число — произведение образа вектора на это число. Если V — векторное пространство, f — заданное в нем Л. п. и x, y — любые векторы пространства, λ — любое число (элемент поля), то

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Если векторное пространство V имеет конечную размерность n; $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — его базис; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты произвольного вектора x в этом базисе и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — координаты его образа $y = f(x)$, то координаты вектора y выражаются через координаты вектора x линейными однородными функциями

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

наз. матрицей Л. п. f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. В ее столбцах стоят координаты образов базисных векторов. Если

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{Vmatrix}$$

— матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n, \\ e'_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n, \end{aligned}$$

то в базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ матрица B Л. п. f будет $B = C^{-1}AC$.

Суммой двух Л. п. f и g наз. такое преобразование h, при к-ром для всякого вектора $x \in V$

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

Произведением Л. п. f на число λ наз. преобразование k, при к-ром $k(x) = \lambda f(x)$ для всякого вектора $x \in V$.

Произведением Л. п. f на Л. п. g наз. преобразование

$$l(x) = g(f(x)).$$

Сумма двух Л. п., произведение Л. п. на число, произведение двух Л. п. являются линейными преобразованиями. Л. п. образуют алгебру. В случае, когда конечномерное пространство имеет размерность n, алгебра его Л. п. изоморфна алгебре квадратных матриц порядка n, элементами к-рых являются элементы того поля, над к-рым построено векторное пространство.

Л. п. f, при к-ром векторное пространство отображается на себя, наз. обратимым, если существует такое преобразование f^{-1}, что

$$ff^{-1} = f^{-1}f = E,$$

где E — тождественное преобразование. Преобразование f^{-1} является Л. п. и наз. обратным преобразованием к преобразованию f. Л. п., заданное в конечномерном векторном пространстве, обратимо тогда и только тогда, когда определитель его матрицы в каком-нибудь (и тогда во всяком) базисе отличен от нуля. Если A — матрица обратимого Л. п., то матрица обратного ему Л. п. f^{-1} равна A^{-1}. Обратимые Л. п. образуют группу по отношению к операции умножения. В случае векторных пространств конечной размерности n эта группа изоморфна группе невырожденных квадратных матриц порядка n.

Подпространство V' векторного пространства V наз. инвариантным подпространством относительно Л. п. f, если $f(x) \in V'$ для всякого вектора $x \in V'$. Ненулевой вектор $x \in V$ наз. собственным вектором Л. п. f, соответствующим собственному значению λ, если $f(x) = \lambda x$. В случае пространства конечной размерности над полем комплексных чисел всякое Л. п. имеет собственный вектор (обладает одномерным инвариантным подпространством). В случае конечномерного пространства над полем действительных чисел у всякого Л. п. имеется одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Л. п. f, заданное в конечномерном векторном пространстве, наз. диагонализируемым Л. п., если в пространстве V существует такой базис, в к-ром матрица этого преобразования имеет диагональную форму. Другими словами, Л. п. диагонализируемо, если пространство обладает базисом, состоящим из

собственных векторов этого Л. п. Однако не всякое Л. п. даже в пространстве над полем комплексных чисел обладает базисом из собственных векторов этого Л. п., напр. Л. п. двумерного пространства, заданное матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

у к-рой имеется единственное одномерное инвариантное подпространство с базисом $\{1, 0\}$.

В конечномерном векторном пространстве над полем комплексных чисел для всякого Л. п. существует такой базис, в к-ром матрица этого преобразования имеет клеточный вид, где по главной диагонали стоят жордановы клетки, а в остальных местах — нули. Жорданова клетка 1-го порядка состоит из одного числа λ; жорданова клетка порядка k есть квадратная матрица порядка k вида

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{Vmatrix}.$$

Числа λ являются собственными значениями матрицы Л. п. Одному и тому же λ могут соответствовать как несколько клеток одного и того же порядка, так и клетки различных порядков. Матрица, состоящая из жордановых клеток, наз. нормальной жордановой формой матрицы.

Л. п. f, заданное в евклидовом (унитарном) пространстве, наз. самосопряженным (соответственно эрмитовым), если для всяких двух векторов $x, y \in V$ имеет место равенство $(x, f(y)) = (y, f(x))$ (соответственно $(x, f(y)) = \overline{(y, f(x))}$).

Л. п., заданное в конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве, будет самосопряженным (эрмитовым) тогда и только тогда, когда его матрица A в каком-нибудь (а тогда и во всяком) ортонормированном базисе является симметрической (соответственно эрмитовой). Самосопряженное (эрмитово) Л. п., заданное в конечномерном евклидовом (соответственно унитарном) пространстве, обладает ортонормированным базисом, в к-ром его матрица имеет диагональную форму. По главной диагонали стоят (всегда действительные) собственные значения матрицы A Л. п.

Л. п. f, заданное в евклидовом (унитарном) пространстве V, наз. изометрическим (соответственно унитарным), если для всякого вектора $x \in V$

$$\|f(x)\| = \|x\|.$$

Л. п., заданное в конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве, изометрично (соответственно унитарно) тогда и только тогда, когда его матрица A в каком-нибудь (а тогда и во всяком) ортонормированном базисе была ортогональной (соответственно унитарной). Для всякого изометрич. Л. п., заданного в конечномерном евклидовом пространстве, существует ортонормированный базис, в к-ром матрица преобразования состоит из клеток 1-го и 2-го порядка, стоящих на ее главной диагонали. Клетки 1-го порядка суть действительные собственные значения матрицы A преобразования, равные $+1$ и -1, а клетки 2-го порядка имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix},$$

где $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ — действительная часть и коэффициент при i комплексного собственного значения, $\lambda = \cos\varphi + i\sin\varphi$ матрицы A, на остальных местах матрицы A стоят нули. Для всякого унитарного пре-

образования, заданного в унитарном пространстве, существует ортонормированный базис, в к-ром матрица этого преобразования является диагональной, причем на главной диагонали стоят числа, по модулю равные 1.

Всякое Л. п., заданное в конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве, является произведением самосопряженного и изометрич. Л. п. (соответственно эрмитова и унитарного).

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; [2] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; [3] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*, М., 1970; [4] Халмош П., Конечномерные векторные пространства, пер. с англ., М., 1963. *А. С. Пархоменко.*

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения задач об экстремумах линейных функций на множествах n-мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных неравенств и равенств; Л. п.— один из разделов *математического программирования*. Типичной задачей Л. п. является следующая: найти максимум линейной функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, m; \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где c_j, a_{ij} и b_i — заданные числа.

Задачи Л. п. являются математич. моделями многочисленных задач технико-экономич. содержания. Примером может служить следующая задача планирования работы предприятия. Для производства однородных изделий необходимо использовать различные производственные факторы: сырье, рабочую силу, станочный парк, топливо, транспорт и т. д. Обычно имеется несколько отработанных технологич. способов производства, причем в этих способах затраты производственных факторов в единицу времени для выпуска изделий различны. Количество израсходованных производственных факторов и количество изготовленных изделий зависит от того, сколько времени предприятие будет работать по тому или иному технологич. способу. Ставится задача рационального распределения времени работы предприятия по различным технологич. способам, т. е. такого, при к-ром будет произведено максимальное количество изделий при заданных ограниченных затратах каждого производственного фактора. Формализуем задачу. Пусть имеется n технологич. способов производства изделий и m производственных факторов. Пусть c_j — количество изделий, выпускаемых в единицу времени при работе по j-му технологич. способу; a_{ij} — расход i-го производственного фактора в единицу времени при работе по j-му технологич. способу; b_i — имеющиеся ресурсы i-го производственного фактора и x_j — планируемое время работы по j-му технологич. способу. Величина

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

означает общий расход i-го производственного фактора при плане $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. И поскольку ресурсы ограничены величинами b_i, то возникают естественные условия (2) и (3). Ставится задача отыскания такого распределения времени (оптимального плана) $x^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ работы по каждому технологич. способу, при к-ром общий объем продукции $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ был бы максимальным, т. е. задача (1) — (3). Другим характерным примером прикладных задач Л. п. является *транспортная задача*.

Задачи Л. п. являются вспомогательными во многих методах решения нелинейных задач математич. программирования. Так, в методе возможных направлений (см. *Математическое программирование*) для отыскания направления спуска на каждой итерации необходимо решить соответствующую задачу Л. п.

Смысл термина «Л. п.» в том, что в Л. п. решаются задачи составления оптимальной программы (плана) действий. В связи с этим Л. п. можно рассматривать как один из математич. методов в *исследовании операций*.

В задачах Л. п. более общего вида по сравнению с (1) — (3) нек-рые (или все) из условий (2) могут быть равенствами, а на нек-рые (либо на все) переменные x_j не накладываются условия неотрицательности. Любая задача Л. п. может быть приведена к эквивалентной задаче вида (1) — (3).

Основу изучения свойств задач Л. п. составляет теория двойственности. Двойственной задачей Л. п. к задаче (1) — (3) наз. задача минимизации функции

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{4}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{5}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Задачи (1) — (3) и (4) — (6) либо обе имеют решения, либо обе неразрешимы. Значения целевых функций (1) и (4) на решениях совпадают.

Одним из основных методов решения задач Л. п. является *симплексный метод*. Геометрически его идея состоит в следующем. Допустимое множество (2) и (3) представляет собой выпуклое многогранное множество (если оно ограничено, то — многомерный выпуклый многогранник). Если задача Л. п. имеет решение, то существует вершина x^* многогранного множества, являющаяся оптимальным планом. Симплексный метод состоит в таком направленном переборе вершин, при к-ром значение целевой функции возрастает от вершины к вершине. Каждой вершине соответствует система уравнений, выбираемая специальным образом из системы неравенств (2), (3), поэтому вычислительная процедура симплексного метода состоит в последовательном решении систем линейных алгебраич. уравнений. Простота алгоритма делает этот метод удобным для его реализации на ЭВМ. В Л. п. разработан целый ряд других конечных методов, напр. двойственный симплексный метод, когда решение прямой задачи (1) — (3) получают в результате применения симплексного метода к двойственной задаче (4) — (6). Наряду с терминами «симплексный метод» и «двойственный симплексный метод» приняты термины «метод последовательного улучшения плана» и «метод последовательного уточнения оценок».

При моделировании реальных явлений часто возникают задачи Л. п. больших размерностей. Содержание этого термина зависит от возможностей вычислительных алгоритмов и характеристик, используемых ЭВМ, таких, как объем оперативной памяти, скорость и др. Для решения задач больших размерностей создаются методы, учитывающие специфич. структуру матриц условий. В основе многих из них лежит идея декомпозиции — разложения системы ограничений на подсистемы, для каждой из к-рых необходимо решать подзадачу Л. п. меньшей размерности по сравнению с исходной задачей.

Для решения задачи Л. п. наряду с конечными методами применяются также итерационные методы построения последовательности приближений, пределом

к-рой является оптимальный план. К ним относятся методы, основанные на применении штрафных функций (см. *Штрафных функций метод*), итерационные методы теории игр, применение к-рых основано на эквивалентности любой матричной игры соответствующей паре двойственных задач Л. п., и ряд других методов.

Существенное место в Л. п. занимает проблема устойчивости. В реальных задачах (в особенности задачах технико-экономич. содержания) исходная информация обычно известна лишь с определенной степенью точности, и даже малые возмущения (погрешности) в исходных данных могут вызывать существенные отклонения возмущенного решения от истинного. При численной реализации того или иного конечного метода возникают ошибки округления, накопление к-рых, особенно в задачах большой размерности, может привести к значительным отклонениям полученного приближенного решения от истинного. Обе эти ситуации характеризуют свойство неустойчивости и присущи некорректно поставленным задачам. В Л. п. разработаны методы решения некорректных задач. Так, в методе регуляризации, используя нек-рую дополнительную информацию о решении, аппроксимируют исходную задачу параметрич. последовательностью устойчивых задач таким образом, чтобы последовательность их решений сходилась к решению исходной задачи.

Наряду с конечномерными задачами Л. п. рассматриваются также задачи Л. п. в бесконечномерных пространствах. К этим задачам относятся, напр., линейные задачи оптимального управления со смешанными ограничениями.

Лит.: [1] Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование, М., 1969; [2] Данциг Дж., Линейное программирование, его применения и обобщения, М., 1966; [3] Еремин И. И., Астафьев Н. Н., Введение в теорию линейного и выпуклого программирования, М., 1976; [4] Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1975; [5] Тер-Крикоров А. М., Оптимальное управление и математическая экономика, М., 1977.

В. Г. Карманов.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО — то же, что *векторное пространство*.

ЛИНЕЙНОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — векторное (линейное) пространство L, являющееся топологич. пространством, в к-ром действия сложения и умножения на скаляр в L непрерывны относительно заданной в L топологии. См. *Топологическое векторное пространство.*

М. И. Войцеховский.

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$Ax = b, \qquad (1)$$

где A — *линейный оператор*, действующий из векторного пространства X в векторное пространство B, x — неизвестный элемент из X, b — заданный элемент из B (свободный член). Если $b = 0$, то Л. у. наз. о д н о р о д н ы м. Р е ш е н и е м Л. у. наз. элемент x_0, обращающий (1) в тождество:

$$Ax_0 = b.$$

Простейший пример доставляет линейный оператор $A : x \to ax$ (*линейная функция*) и определяемое им *линейное уравнение* (алгебраическое):

$$ax = b, \qquad (2)$$

a, $b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (или произвольному полю k); его решение существует тогда и только тогда, когда либо $a \neq 0$ (и тогда $x_0 = b/a$), либо $a = b = 0$ (и тогда x_0 — любое). Обобщением уравнения (2) является Л. у. вида

$$Ax \equiv f(x) = b, \qquad (3)$$

где $f(x)$ — *линейный функционал*, определенный на векторном пространстве X над полем k, $b \in k$. В частности, если размерность X конечна и равна n (так что

X изоморфно k^n), f имеет вид линейной формы нескольких переменных $x_1, \ldots, x_n \in k$ и уравнение (3) может быть записано в виде

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b, \quad a_i,\ b \in k. \tag{4}$$

Если a_i одновременно не обращаются в нуль, то множество решений уравнения (4) заполняет $(n-1)$-мерное линейное многообразие (в однородном случае — линейное подпространство) в X. Если X бесконечномерно, то множество решений уравнения (3) — линейное многообразие коразмерности 1.

Несколько уравнений вида (4) образуют с и с т е м у Л. у.:

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j,\ j = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

При этом систему (5) можно интерпретировать как одно Л. у. вида (1), если принять в качестве X пространство k^n, в качестве B — пространство k^m, а оператор A задать матрицей $\|a_{ij}\|$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Вопрос о совместности системы Л. у. (5), т. е. вопрос о существовании решения системы Л. у., решается сравнением ранга матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|a_{ij},\ b_j\|$.

Более сложно обстоит дело в случае, когда X и B являются бесконечномерными векторными пространствами. При этом играют существенную роль топологии пространств X и B и обусловливаемые ими те или иные свойства ограниченности, непрерывности и пр. оператора A. В общем случае существование и единственность решения Л. у. обусловлены обратимостью A (см. *Обратное отображение*). Однако эффективно обратить A удается далеко не всегда, и потому для исследования Л. у. приобретают важную роль качественные методы, позволяющие без решения Л. у. указать полезные в том или ином отношении свойства совокупности решений (в предположении, что они существуют), напр. единственность, априорные оценки и т. д. С другой стороны, оператор A может быть определен не на всем пространстве X, и уравнение (1) может не иметь решения ни при каких b. В этой ситуации разрешимость уравнения (1) устанавливается (во многих практически важных случаях) выбором надлежащего *расширения* оператора A.

Для конкретных типов Л. у., напр. для линейных дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными, для линейных интегральных уравнений, разработаны специфические, в том числе и численные, методы решения и исследования. Наконец, в ряде случаев (напр., в задачах линейной регрессии) оказываются полезными значения $\tilde{x}_0$, в определенном смысле наиболее подходящие для роли решения Л. у.

М. И. Войцеховский.

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ а л г е б р а и ч е с к о е — алгебраическое уравнение 1-й степени по совокупности неизвестных, т. е. уравнение вида

$$a_1x_1 - a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

Всякая система Л. у. может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где m и n — натуральные числа; a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$) наз. к о э ф ф и ц и е н т а м и при неизвестных и являются заданными; b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) наз. с в о б о д н ы м и ч л е н а м и и также являются заданными; x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) наз. н е и з в е с т н ы м и и являются искомыми. Р е ш е н и е м с и с т е м ы Л. у. (1) наз. такой набор значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что каждое из уравнений системы обращается в тождество при подстановке c_i вместо соот-

ветствующих неизвестных. Для приложений наиболее важен тот случай, когда коэффициенты при неизвестных, свободные члены и значения неизвестных являются числами (комплексными, действительными или целыми), но можно рассматривать также случай, когда они лежат в произвольном поле P.

По числу решений системы Л. у. делятся на следующие типы:

совместная система — система Л. у., имеющая хотя бы одно решение;

несовместная система (или противоречивая) - система, не имеющая ни одного решения;

определенная система — система, имеющая единственное решение;

неопределенная система — система, имеющая более одного решения.

Если рассматриваются решения системы со значениями неизвестных в данном числовом (или любом бесконечном) поле, то каждая неопределенная система Л. у. имеет бесконечно много решений. В отличие от уравнений степени выше первой, тип системы Л. у. не меняется при расширении данного поля P. Так, при расширении поля несовместная система не может стать совместной, а определенная — неопределенной. Однако совокупность решений неопределенной системы при этом расширяется.

Простейший путь определения типа системы (1) и вычисления ее решений дает *Гаусса метод* исключения неизвестных. В случае $n=m$ система (1) тогда и только тогда является определенной, когда определитель, составленный из ее коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля. В этом случае единственное решение системы находится по формулам Крамера (см. *Крамера правило*).

Для решения системы Л. у., коэффициенты к-рой содержат буквенные параметры, более удобным, чем метод Гаусса, является применение общей теории Л. у., связанной с понятием ранга матрицы. Ранг матрицы можно определить как максимальное число линейно независимых строк или столбцов. По теореме о ранге матрицы ранг системы строк матрицы равен рангу системы столбцов и равен наибольшему порядку отличных от нуля миноров этой матрицы. С системой Л. у. (1) связаны две матрицы: матрица

$$A=\|a_{ij}\|,$$

составленная из коэффициентов при неизвестных, и расширенная матрица

$$B=\|a_{ij},\ b_i\|,$$

получаемая из матрицы A добавлением столбца свободных членов. Критерий совместности системы (1) дает теорема Кронекера — Капелли: система Л. у. (1) тогда и только тогда совместна, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы B.

Система Л. у. (1) тогда и только тогда имеет единственное решение, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы B и равен n.

Неизвестные совместной системы Л. у. подразделяются на главные и свободные. При любых значениях свободных неизвестных существуют однозначно определенные значения главных неизвестных, дающие в совокупности решение данной системы. Выбор главных и свободных неизвестных не всегда однозначен. Именно, если ранг A равен рангу B и равен r, то любые r неизвестных, из коэффициентов при к-рых можно составить определитель $D\neq 0$, можно считать главными, а остальные — свободными. Определитель D в этом случае наз. главным (или базисным) минором системы. Его можно искать методом окаймления, начиная с миноров низших порядков. Он также не всегда определен однозначно. При вычисле-

нии решений надо взять лишь r уравнений, содержащих главный минор D, и выразить в общем виде (напр., используя формулы Крамера) главные неизвестные через свободные. Эти выражения наз. общим решением. Свободные неизвестные играют в нем роль свободных параметров. Придавая им любые значения, находят значения главных неизвестных, дающие вместе с выбранными значениями свободных неизвестных решение системы. Любое решение совместной системы может быть получено указанным путем при подходящих значениях свободных неизвестных. Если все коэффициенты при неизвестных и свободные члены лежат в поле P, то при выборе для свободных неизвестных значений из того же поля P получается решение со значениями всех неизвестных из того же поля P. При $r=n$ все неизвестные являются главными и общего решения не существует.

Система Л. у.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

полученная из системы (1) заменой свободных членов нулями, наз. однородной системой Л. у., соответствующей системе (1). Система (2) всегда совместна (т. к. ей удовлетворяет нулевое решение). Для того чтобы она имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был меньше числа неизвестных n. В частности, при $m=n$ квадратная однородная система Л. у. тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда ее определитель равен нулю.

Решения совместной системы Л. у. (1) и соответствующей однородной системы (2) связаны следующим образом: сумма решения системы (1) и решения системы (2) является решением системы (1); разность двух решений системы (1) — решением системы (2). Все решения системы (1) можно получить, прибавляя к каждому решению системы (2) одно и то же частное решение системы (1).

Геометрическая интерпретация решений системы Л. у. Любую строку из n элементов поля P можно рассматривать как строку координат вектора x n-мерного векторного пространства V над полем P в нек-ром фиксированном базисе. Для краткости формулировок вектор x отождествляется со строкой его координат. Все решения однородной системы (2) составляют подпространство U пространства V. Его размерность равна $n-r$, где n — число неизвестных, а r — ранг матрицы A системы. При $r<n$ подпространство U отлично от нулевого и его базис наз. также фундаментальной системой решений системы Л. у. (2). Обратно, для каждого подпространства U пространства V существует однородная система Л. у., решения к-рой составляют подпространство U. Множество векторов $Z=U+x_0$, получаемое прибавлением к каждому вектору подпространства U одного и того же вектора x_0, наз. линейным многообразием (или плоскостью, иногда гиперплоскостью) пространства V. Все решения совместной системы Л. у. (1) составляют нек-рое линейное многообразие Z; обратно, для любого линейного многообразия Z существует совместная система, решения к-рой составляют данное многообразие (см. [3]).

Решение систем линейных уравнений в целых числах. Пусть дана система уравнений (1), где все a_{ij} и b_i — целые числа. И пусть через d_k, $k=1, 2, \ldots, \min(m, n)$, обозначен наибольший общий делитель всех миноров порядка k матрицы A из коэффициентов при неизвестных, а через d'_k, $k=1, 2, \ldots, \min(m, n+1)$, — аналогич-

ное число для расширенной матрицы B. Если все миноры порядка k в матрице A (или B) равны нулю, то считают $d_k=0$ (соответственно $d'_k=0$). Для того чтобы целочисленная система Л. у. (1) имела целочисленное решение, необходимо и достаточно, чтобы d'_k нацело делилось на d_k, $k=1, 2, \ldots, \min(m, n)$, и при $m>n$ выполнялось равенство $d'_{n+1}=0$.

Для формулировки метода вычисления всех целочисленных решений систем Л. у. вводятся т. н. элементарные преобразования целочисленных матриц: 1) прибавление к i-й строке j-й строки ($i\neq j$), умноженной на целое число c; 2) умножение i-й строки на -1; 3) перестановка i-й и j-й строк и аналогичные преобразования столбцов. При элементарных преобразованиях строк система (1) переходит в эквивалентную систему и, значит, совокупность целочисленных решений не меняется. При элементарных преобразованиях столбцов матрицы A из коэффициентов при неизвестных происходят следующие преобразования неизвестных: если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — новые неизвестные, то

при преобразовании 1)

$$x_k=y_k\ (k\neq j),\quad x_j=y_j+cy_i;$$

при преобразовании 2)

$$x_k=y_k\ (k\neq i),\quad x_i=-y_i;$$

при преобразовании 3)

$$x_k=y_k\ (k\neq i,\ j),\ x_i=y_j,\ x_j=y_i.$$

При таких преобразованиях неизвестных целочисленные решения и только они переходят в целочисленные.

Систему (1), для к-рой ранг A равен рангу B и равен r, при помощи элементарных преобразований строк матрицы B и столбцов матрицы A, а также отбрасыванием нулевых уравнений можно привести к следующему канонич. виду

$$e_1y_1=b'_1,\ \ldots,\ e_ry_r=b'_r. \tag{3}$$

Числа e_i удовлетворяют дополнительным условиям:

$$e_i>0,\ i=1, 2, \ldots, r,$$

и

$$e_i \text{ делит } e_{i+1},\ i=1, 2, \ldots, r-1.$$

Для задачи решения системы в целых числах эти дополнительные условия несущественны.

Для существования целочисленных решений системы (3) необходимо и достаточно, чтобы числа

$$c_i=b'_i/e_i,\quad i=1, 2, \ldots, r,$$

были целыми. Неизвестные $y_1, y_2, \ldots, y_r$ определены однозначно, а при $r<n$ неизвестные $y_{r+1}, \ldots, y_n$ могут принимать любые целые значения.

Для вычисления решений исходной системы (1) надо все преобразования столбцов матрицы A применить в том же порядке к единичной матрице E порядка n. Полученная целочисленная матрица Q дает связь старых и новых неизвестных:

$$X=QY,$$

где

$$X=\begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{Vmatrix},\qquad Y=\begin{Vmatrix} y_1\\ y_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n\end{Vmatrix}.$$

Затем надо положить $y_i=c_i$, $i=1, 2, \ldots, r$, а при $r<n$ неизвестным $y_{r+1}, \ldots, y_n$, играющим роль параметров, можно придавать любые целые значения.

Указанный метод решения системы (1) над кольцом целых чисел обобщается на любые евклидовы кольца и кольца главных идеалов.

Разыскание целочисленных решений уравнений и систем в общем случае — предмет теории *диофантовых уравнений*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [2] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [3] Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра, 2 изд., М., 1965.

И. В. Проскуряков.

ЛИНЕЙНОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И СИСТЕМА — дифференциальное уравнение (и система) с частными производными вида

$$Lu=f,$$

где L — линейный эллиптич. оператор

$$Lu=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\,D^\alpha u(x). \qquad (1)$$

Оператор (1) с действительными коэффициентами $a_\alpha(x)$ эллиптичен в точке x, если характеристич. форма

$$\omega(x,\ \xi)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha$$

является определенной в этой точке. Здесь $x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс (набор целых неотрицательных чисел), $|\alpha|=\Sigma\alpha_i$, $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in\mathbb{R}^n$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$ и $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$. В частности, порядок m оператора L должен быть четным $m=2m'$. С точностью до знака условие определенности форм записывается в виде

$$(-1)^{m'}\omega(x,\ \xi)\geqslant\delta|\xi|^m,\quad \delta>0. \qquad (2)$$

Оператор L эллиптичен в области D, если он эллиптичен в каждой точке $x\in D$, и равномерно эллиптичен в этой области, если $\delta>0$ в (2) не зависит от x.

В случае уравнения 2-го порядка

$$\sum_{i,\ j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x)u=f(x) \qquad (3)$$

это определение может быть переформулировано следующим образом. Уравнение (3) эллиптично в области D, если в каждой точке этой области путем замены независимых переменных оно допускает приведение к канонич. виду

$$\Delta u+\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+a(x)u=f(x)$$

с оператором Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

в главной части. В случае эллиптич. уравнения на плоскости при весьма широких предположениях относительно коэффициентов a_{ij} такое преобразование возможно не только в точке, но и во всей области (см. [1]).

Простейшим эллиптич. уравнением является *Лапласа уравнение*, его решения наз. *гармоническими функциями*. Решения линейного эллиптич. уравнения (л. э. у.) можно охарактеризовать тем, что они имеют много общих свойств с гармонич. функциями. В плоском случае все гармонич. функции описываются как реальные части аналитич. функций, они являются действительными аналитич. функциями двух переменных. Аналогичным свойством обладают решения общего л. э. у. $Lu=f$. Если коэффициенты $a_\alpha(x)$, $|\alpha|\leqslant m$, и правая часть $f(x)$ аналитичны по $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в об-

ласти D, то и любое решение этого уравнения также аналитично.

Существуют и другие утверждения подобного типа. Напр., если коэффициенты и правая часть уравнения $Lu=f$ непрерывно дифференцируемы до порядка k и их k-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, $0<\alpha<1$, то любое решение обладает производными до порядка $k+m$, удовлетворяющими условию Гёльдера с тем же показателем α. Принадлежность к классу Гёльдера здесь существенна. Если коэффициенты и правая часть просто непрерывны, то решения могут не иметь непрерывных производных порядка, равного порядку уравнения. Это верно даже для самого простого л. э. у.— *Пуассона уравнения*

$$\Delta u = f.$$

Вышесказанное относится к классич. решениям, т. е. решениям, имеющим непрерывные производные до порядка, равного порядку уравнения. Существуют различные обобщения понятия решения.

Напр., если коэффициенты $a_\alpha(x)$ достаточно гладки, то для оператора (1) можно определить сопряженный по Лагранжу оператор

$$L^*u = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha u).$$

Локально интегрируемая функция $u(x)$ наз. с л а б ы м р е ш е н и е м уравнения $Lu=f$, если для всех $\varphi \in C_0^\infty$ (бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем) выполнено тождество

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx = \int u(x) L^*\varphi(x)\,dx.$$

Тогда, если коэффициенты и правая часть уравнения $Lu=f$ непрерывны по Гёльдеру, то всякое слабое решение является классическим.

Для уравнения Лапласа простейшей корректно поставленной задачей является *Дирихле задача*. В общем случае уравнения с оператором (1) краевая задача состоит в отыскании в области D решения $u(x)$ уравнения $Lu=f$, удовлетворяющего $m'=m/2$ граничным условиям вида

$$(B_j u)(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} b_{\alpha j}(x) D^\alpha u(x) = \varphi_j(x),$$
$$x\in\partial D, \quad 1\leqslant j\leqslant m'.$$

Задаче Дирихле отвечают граничные операторы $b_j = \left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^j$, где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали.

Для того чтобы краевая задача была нётеровой, граничные операторы B_j должны удовлетворять у с л о в и ю д о п о л н и т е л ь н о с т и Ш а п и р о — Л о п а т и н с к о г о (см. [2]) — алгебраич. условию, связывающему многочлены

$$\sum_{|\alpha|=m_j} b_{\alpha j}(x)\xi^\alpha, \quad 1\leqslant j\leqslant m', \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

в точках границы $x\in\partial D$. Граничные операторы задачи Дирихле удовлетворяют этому условию по отношению к любому эллиптич. оператору L.

Если коэффициенты дифференциального оператора и решение рассматривать в классе комплексных функций, то эллиптичность оператора L в (1) определяется условием $\omega(x,\xi)\neq 0$, $\xi\neq 0$. Это определение допускает эллиптич. операторы нечетного порядка, как показывает пример о п е р а т о р а К о ш и — Р и м а н а: $\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}$. Кроме того, меняются свойства операторов чет-

ного порядка. Напр., для *Бицадзе уравнения* (см. [3]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2i\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

задача Дирихле не является корректно поставленной: если D — единичный круг, то функции вида $u = f(z)(1-|z|^2)$ являются решениями однородной задачи Дирихле в области D для любой аналитич. функции $f(z)$.

Этот пример привел к необходимости выделять классы эллиптич. операторов, для к-рых сохраняется нётеровость задачи Дирихле. На этом пути возникло понятие сильно эллиптич. оператора (см. [4]). Оператор (1) — с и л ь н о э л л и п т и ч е с к и й о п е р а т о р, если для нек-рой комплексной функции $\gamma(x) \neq 0$ выполнено условие

$$\operatorname{Re}\gamma(x)\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \geqslant \delta|\xi|^m,\ \delta > 0.$$

В частности, порядок m — необходимо четное число.

Следующим более широким понятием явилось понятие собственной (правильной) эллиптичности. Оператор (1) — с о б с т в е н н о э л л и п т и ч е с к и й о п е р а т о р, если его порядок четен и для любой пары линейно независимых векторов ξ и ξ' многочлен по τ

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,(\xi+\tau\xi')^\alpha$$

имеет ровно $m' = m/2$ корней с отрицательной мнимой частью и столько же — с положительной. Любой эллиптич. оператор при $n \geqslant 3$ собственно эллиптичен, так что определение по существу относится только к случаю $n = 2$.

В теории л. э. у. значительную роль играют априорные оценки норм решений через нормы правых частей уравнения и граничных условий. Эти оценки начали систематически использоваться С. Н. Бернштейном (см. [6]) и свое дальнейшее развитие получили у Ю. Шаудера (см. [7]). Шаудеровские оценки относятся к решениям л. э. у. 2-го порядка в области D с непрерывными по Гёльдеру коэффициентами и бывают двух видов. Оценки первого вида (оценки «внутри») состоят в том, что на любом компакте $K \in D$ производные до 2-го порядка включительно и их гёльдеровские константы оцениваются через $\sup|u|$ и через модуль и гёльдеровскую константу правой части уравнения. Оценки второго вида (оценки «вплоть до границы») относятся к краевым задачам. Здесь оценивают те же величины, но уже в замыкании рассматриваемой области, и в оценке фигурируют нормы правых частей граничных условий.

Шаудеровские оценки получили дальнейшее распространение для общих л. э. у. и краевых задач (см. [7]). Вывод этих оценок основан на теории потенциала. С помощью разбиения единицы им придается локальный характер, и дело сводится к оценке норм сингулярных интегральных операторов, к-рые представляют собой свертку с функциями, связанными с фундаментальными решениями (оценки «внутри») или с функциями Грина соответствующей краевой задачи в нек-рой стандартной области (оценки «вплоть до границы»). Эти оценки, полученные первоначально в метрике пространств Гёльдера C^α, распространены на пространства Соболева W_p^l (L_p-оценки) и относятся к обобщенным решениям.

Для сильно эллиптич. операторов существует априорная оценка, наз. неравенством Гёрдинга, к-рая получена другими методами. Она лежит в основе функционального подхода к исследованию краевых задач (методы гильбертовых пространств).

В теории л. э. у. важное место занимают фундаментальные решения. Для оператора (1) с достаточно гладкими коэффициентами фундаментальное решение определяется как функция $J(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$\int L^*\varphi(x)\, J(x, y)\, dx = \varphi(y)$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty$. С точки зрения теории обобщенных функций это означает равенство

$$LJ(x) = \delta(x-y),$$

где справа стоит дельта-функция Дирака.

Фундаментальные решения л. э. у. существуют для уравнений с аналитич. коэффициентами (и сами тогда аналитичны), для уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами (и также принадлежащие классу C^∞) и для ряда других уравнений с более слабыми ограничениями на коэффициенты. Для эллиптич. оператора L_0 с постоянными коэффициентами, состоящего из членов старшего порядка $m=2m'$, фундаментальное решение зависит только от разности аргументов и имеет вид ($y=0$):

$$J(x) = |x|^{m-n}\psi\left(\frac{x}{|x|}\right) + q(x)\ln|x|,$$

где $q(x)$ — многочлен степени $m-n$ при четном n и $m-n \geqslant 0$, в остальных случаях $q(x) \equiv 0$, $\psi(x)$ аналитична на сфере $|x|=1$ (см. [8]).

В частности, для оператора Лапласа ($m=2$) $q=0$, $\psi=\text{const}$ для $n>2$ и $q=\text{const}$, $\psi=0$ для $n=2$.

Фундаментальные решения позволяют строить различные явные представления для решений л. э. у. Они являются необходимым аппаратом при изучении краевых задач с помощью интегральных уравнений. Для уравнения 2-го порядка этот метод является классическим и дает наиболее точные результаты (см. [9]).

Многообразные применения в теории л. э. у. 2-го порядка получил принцип максимума. Функции a_{ij}, a_i, a предполагаются непрерывными, оператор (3) равномерно эллиптичным в нек-рой области D. Функция $u(x)$ непрерывна в замыкании $\bar{D}$ и принадлежит классу $C^2(D)$.

Принцип максимума в его сильной форме заключается в следующем. Пусть M — оператор L в (3), в котором $a \equiv 0$.

а) Если $Mu \geqslant 0$ и функция $u(x)$ достигает своего максимума во внутренней точке, то u постоянна.

б) Если $Mu \geqslant 0$ и максимум u достигается в нек-рой граничной точке x_0, к-рая расположена на поверхности нек-рого шара, целиком содержащегося в $\bar{D}$, то $u(x)$ либо постоянна, либо производная в точке x_0 по направлению внешней нормали $\partial u/\partial \nu$ положительна.

Аналогичные утверждения справедливы для оператора L с $a(x) \leqslant 0$, если в а) и б) под максимумом понимать положительный максимум. Принцип максимума является существенным элементом в доказательствах теорем единственности для решений ряда краевых задач. Он также имеет нек-рые аналоги в случае уравнений высшего порядка.

Лит.: [1] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [2] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; [3] Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, пер. с англ., М., 1962; [4] Йон Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, пер. с англ., М., 1958; [5] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [6] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 3, М., 1960; [7] Schauder J., «Math. Z.», 1934, Bd 38, S. 257—82; [8] Лопатинский Я. Б., «Укр. матем. ж.», 1953, т. 5, № 2, с. 123—51; [9] Вишик М. И., «Матем. сб.», 1951, т. 29, № 3, с. 615—76.

А. П. Солдатов.

ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ МЕРА чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — функция

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n \mid H) = L(H) = \min |a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n|,$$

где минимум берется по всевозможным наборам целых чисел $(a_1, \ldots, a_n)$, удовлетворяющим условиям:

$$|a_i| \leqslant H, \quad |a_1| + \ldots + |a_n| > 0.$$

Известно, что

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n \mid H) < (|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|)\, H^{-\tau(n-1)},$$

где $\tau = 1$, если все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ действительные, и $\tau = \frac{1}{2}$ — в противном случае. Получение оценок снизу $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n|H)$ по параметру H для конкретных наборов чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ является одной из задач теории *диофантовых приближений*. *Ю. В. Нестеренко.*

ЛИНЕЙНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР в узком смысле — оператор, действующий на функции, заданные на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, и принимающий значения в поле $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$ по формуле

$$Au = v = \sum_{i_1 + \ldots + i_n \leqslant m} a_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_n} u}{dx_1^{i_1} \ldots dx_n^{i_n}}, \quad (1)$$

где $a_{i_1 \ldots i_n}$ — функции со значениями в том же поле, наз. коэффициентами A. Если коэффициенты принимают значения во множестве матриц размера $t \times s$ над полем k, то Л. д. о. A определен на вектор-функциях $u = (u_1, \ldots, u_s)$ и преобразует их в вектор-функции $v = (v_1, \ldots, v_t)$. В случае $n = 1$ он наз. обыкновенным линейным дифференциальным оператором, а в случае $n > 1$ — линейным дифференциальным оператором с частными производными.

Пусть X — дифференцируемое многообразие, E и F — конечномерные векторные расслоения на X (все из класса C^∞). Пусть $\tilde{E}$, $\tilde{F}$ — пучки ростков сечений этих расслоений соответствующей гладкости. Л. д. о. в широком смысле $A : E \to F$ есть отображение пучков $\tilde{E} \to \tilde{F}$, удовлетворяющее условию: всякая точка $x \in X$ имеет координатную окрестность U, в пределах к-рой расслоения тривиальны, а отображение

$$A : \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, F),$$

где $\Gamma(U, E)$ — пространство сечений над U расслоения E, действует по формуле (1), в к-рой использованы локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ и тривиализации

$$E|_U \simeq U \times k^s, \quad F|_U \cong U \times k^t.$$

Минимальное число m, пригодное для формулы (1) во всех точках $x \in X$, наз. порядком Л. д. о. A. Напр., всякая ненулевая связность в расслоении E есть нек-рый Л. д. о. $E \to E \otimes \Omega^1(X)$ первого порядка. Другое, эквивалентное определение Л. д. о. $A : E \to F$ таково: это — линейный оператор $A : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, F)$, удовлетворяющий условию $\operatorname{supp} Au \subset \operatorname{supp} u$, где $\operatorname{supp} u$ — носитель u.

Л. д. о. может быть задан на более широких функциональных пространствах. Напр., если на X задана положительная мера, а на расслоениях E и F нек-рое скалярное произведение, то определены пространства квадратично суммируемых сечений этих расслоений. Л. д. о., заданный локальными выражениями (1), определяет линейный неограниченный оператор $A : L_2(E) \to L_2(F)$. При нек-рых слабых предположениях последний может быть замкнут как оператор в гильбертовых пространствах. Это замыкание также носит название Л. д. о. Подобным же образом может быть построен оператор, действующий в пространствах Соболева или в пространствах более общих шкал.

Л. д. о. класса C^∞ может быть расширен до оператора в пространствах обобщенных сечений. Такое расширение может быть построено с помощью формально сопряженного оператора. Пусть E' — расслоение, сопряженное с E (т. е. E' $\mathrm{Hom}(E, I)$, I — одномерное тривиальное расслоение), а Ω — расслоение нечетных дифференциальных форм на X максимальной степени. Определено билинейное отображение

$$(\cdot,\ \cdot)_E\colon\ \Gamma(X,\ E)\times\Gamma_0(X,\ E'\otimes\Omega)\longrightarrow k,$$

включающее интегрирование по X. Здесь $\Gamma_0(\ldots)$ — пространство сечений с компактными носителями. Формула

$$({}^tAv,\ u)_E=(v,\ Au)_F$$

однозначно определяет нек-рый линейный оператор

$${}^tA\colon\Gamma_0(X,\ F'\otimes\Omega)\longrightarrow\Gamma_0(X,\ E'\otimes\Omega).$$

Он порождается Л. д. о. ${}^tA : F'\otimes\Omega\to E'\otimes\Omega$, к-рый в пределах координатной окрестности U имеет выражение

$${}^tAu=\sum(-1)^{i_1+\ldots+i_n}\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n}({}^ta_{i_1\ldots i_n}u)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},$$

если расслоение Ω тривиализовано выбором сечения $dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$. Л. д. о. ${}^tA$ наз. формально сопряженным по отношению к A.

В пространстве $\Gamma_0(X,\ E'\otimes\Omega)$ задается сходимость по следующему правилу: $f_k\to f$, если объединение носителей сечений f_k принадлежит компакту, и в любой координатной окрестности $U\subset X$, над к-рой имеется тривиализация E, вектор-функции f_k равномерно сходятся к f вместе со всеми частными производными по локальным координатам. Пространство всех линейных функционалов над $\Gamma_0(X,\ E'\otimes\Omega)$, непрерывных относительно указанной сходимости, наз. пространством обобщенных сечений E и обозначается $D'(E)$. Оператор ${}^tA$ переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся и потому порождает сопряженный оператор $D'(E)\to D'(F)$. Последний совпадает с A на подпространстве $\Gamma(X,\ E)$ и наз. продолжением данного Л. д. о. на пространство обобщенных сечений. Рассматриваются также и другие расширения Л. д. о.: на пространства обобщенных сечений бесконечного порядка, на различные пространства гиперфункций и т. д.

Под Л. д. о. бесконечного порядка понимается оператор, действующий в том или ином пространстве аналитич. функций (сечений), заданный формулой (1), в к-рой суммирование производится по бесконечному множеству индексов $i_1,\ \ldots,\ i_n$.

Следующее свойство характеризует Л. д. о. Последовательность $\{f_k\}\subset\Gamma(X,\ E)$ объявляется сходящейся к сечению f, если f_k равномерно стремится к f вместе со всеми частными производными в любой координатной окрестности, имеющей компактное замыкание. Линейный оператор $A : \Gamma_0(X,\ E)\to\Gamma(X,\ F)$, переводящий сходящиеся последовательности в сходящиеся, является Л. д. о. порядка не выше m тогда и только тогда, когда для любых $f,\ g\in C^\infty(X)$ функция

$$\exp(-i\lambda g)\,A\,(f\exp(i\lambda g)) \qquad (2)$$

является полиномом по параметру λ степени не выше m. Если это условие заменить предположением, что (2) представляется асимптотич. степенным рядом, то получается определение линейного *псевдодифференциального оператора*.

Пусть многообразие X, а также расслоения E и F снабжены G-структурой, где G — нек-рая группа. Тогда

определено действие этой группы на любой Л. д. о. $A : E \to F$ по формуле

$$g^*(A)(u) = g(A(g^{-1}(u))).$$

Л. д. о. A наз. инвариантным относительно G, если $g^*(A) = A$ для всех $g \in G$.

Расслоение струй (джетов) есть объект, двойственный пространству Л. д. о. Пусть снова E — векторное расслоение на многообразии X класса C^∞. Расслоение m-струй сечений E есть векторное расслоение $J_m(E)$ на X, слой к-рого над точкой x равен $\tilde{E}_x/\tilde{E}_x(m)$, где $\tilde{E}_x$ — слой пучка $\tilde{E}$, а $\tilde{E}_x(m)$ — подпространство этого слоя, состоящее из ростков сечений, у к-рых в точке x обращаются в нуль все дифференциалы до порядка m включительно. Л. д. о. $d_m : E \to J_m(E)$, действующий по правилу: значение сечения $d_m(u)$ в точке x равно образу сечения u в факторпространстве $\tilde{E}_x/\tilde{E}_x(m)$, наз. универсальным. Пусть, далее, F - расслоение на X, а $a : J_m(E) \to F$ гомоморфизм расслоений, т. е. Л. д. о. нулевого порядка. Композиция

$$E \xrightarrow{d_m} J_m(E) \xrightarrow{a} F \tag{3}$$

есть Л. д. о. порядка не выше m. Обратно, всякий Л. д. о. порядка не выше m может быть представлен единственным способом в виде композиции (3).

Символ (главный символ) Л. д. о. $A : E \to F$ есть семейство линейных отображений

$$\sigma_A(x, \xi) : E_x \to F_x,$$

зависящее от точки (x, ξ) кокасательного расслоения $T^*(X)$. Они действуют по формуле $e \to \frac{1}{m!} a(\xi^m e)$, где a гомоморфизм, участвующий в факторизации (3), $e \in \tilde{E}_x$, а $\xi^m e$ — элемент $J_m(E)_x$, равный образу $f^m e$, где f - росток функции класса C^∞ такой, что $f(x) = 0$, $df(x) = \xi$. Если A имеет вид (1), то

$$\sigma_A(x, \xi) = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = m} a_{i_1 \ldots i_n}(x)\, \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n},$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты слоя расслоения $T^*(U) \simeq U \times k^n$; таким образом, символ является однородной по ξ формой степени m. В соответствии с этой конструкцией символа вводится понятие характеристики. Характеристикой Л. д. о. A наз. точка $(x, \xi) \in T^*(X)$, в к-рой символ σ_A имеет ненулевое ядро.

Принятая в теории Л. д. о. классификация относится главным образом к Л. д. о., действующим в расслоениях одинаковой размерности, фактически к операторам вида (1), где коэффициенты суть квадратные матрицы. Л. д. о. наз. эллиптическим, если он не имеет действительных характеристик (x, ξ), $\xi \neq 0$. Этот класс характеризуется наилучшими локальными свойствами решений уравнения $Au = w$, а также корректностью краевых задач в ограниченных областях. Класс гиперболических Л. д. о. также выделяется условием, наложенным лишь на характеристики. Свойство гиперболичности тесно связано с корректностью задачи Коши с неаналитич. начальными данными. Класс Л. д. о. главного типа задается условием, наложенным лишь на символ. Для таких операторов развита теория локальной разрешимости и гладкости решений. Класс параболических Л. д. о. выделяется условием, касающимся не только символа, но и нек-рых младших членов. Для параболич. Л. д. о. характерна смешанная задача и задача Коши с условиями на бесконечности. Класс гипоэллиптических Л. д. о. задается следующим неформальным условием: всякое априори обобщенное решение уравнения $Au = w$ с правой частью из C^∞ само принадлежит C^∞. Известен ряд формальных условий

на выражение (1), обеспечивающих гипоэллиптичность оператора.

Помимо указанных основных типов Л. д. о., иногда говорят о Л. д. о. смешанного или переменного типа, о Л. д. о. составного типа и др. Рассматриваются также задачи в неограниченных областях с условиями на бесконечности, краевые задачи со свободной границей, задачи спектральной теории, задачи оптимального управления и др.

К о м п л е к с Л. д. о. есть последовательность Л. д. о.

$$E^*\dots \longrightarrow E_k \xrightarrow{A_k} E_{k+1} \xrightarrow{A_{k+1}} E_{k+2} \longrightarrow \dots,$$

в к-рой $A_{k+1}A_k=0$ для всех k. Когомология комплекса Л. д. о. E^* есть когомология комплекса векторных пространств $\Gamma(X, E^*)$. Пусть H^k — когомология этого комплекса в k-м члене. Сумма $\Sigma(-1)^k\dim H^k$ наз. и н д е к с о м данного к о м п л е к с а Л. д. о. Так, индекс эллиптич. комплекса Л. д. о. (т. е. такого, что лишь конечное число E_k отлично от нулевого, и комплекс, образованный символами Л. д. о. A_k, точен во всех точках $(x, \xi)\in T^*(X)$, $\xi\neq 0$) конечен в случае компактного X, и отыскание формул, выражающих индекс такого комплекса через его символ, является содержанием ряда исследований, объединяющих теорию Л. д. о. с алгебраич. геометрией и алгебраич. топологией (см. *Индекса формулы*).

Описанное определение символа не является вполне удовлетворительным для Л. д. о., действующих в расслоениях размерности, большей 1. Одной из причин этого является тот факт, что равенство $\sigma_{AB}=\sigma_A\circ\sigma_B$ может нарушаться. Следующая усложненная конструкция, заменяющая понятие символа, является более адекватной. Для всякого расслоения E на многообразии X класса C^∞ рассматривается пучок $D(E)$ ростков Л. д. о. $E\to I$, где I — одномерное тривиальное расслоение. По определению, значение этого пучка на открытом множестве $U\subset X$ есть совокупность всех Л. д. о. $E|_U\to I|_U$. Пусть $D_k(E)$ — его подпучок, образованный операторами порядка не выше k. В $D=D(I)$ имеется структура пучка (некоммутативных) алгебр, а в $D(E)$ — структура левого модуля над D, причем действие $a\in D$ на $b\in D(E)$ равно композиции ab. Данный Л. д. о. $A: E\to F$ определяет морфизм левых D-модулей $A': D(F)\to D(E)$ по закону композиции $a\to aA$. Пусть $M(A)$ — коядро этого морфизма. Имеется точная последовательность левых D-модулей

$$D(F)\xrightarrow{A'} D(E)\xrightarrow{P} M(A)\longrightarrow 0, \tag{4}$$

$O(X)$-подмодули $M_k=p(D_k(E))$, $k=0, 1, \dots$, образуют возрастающую фильтрацию в $M(A)$. Градуированный $O(X)$-модуль

$$\operatorname{gr} M(A)=\otimes_0^\infty M_k/M_{k-1},\ M_{-1}=0,$$

наз. с и м в о л и ч е с к и м м о д у л е м Л. д. о. A. Поскольку при любых k и l действие D_k на $M(A)$ переводит M_l в M_{l+k}, то в $\operatorname{gr}M(A)$ имеется структура градуированного модуля над градуированной алгеброй $\operatorname{gr} D=\otimes_0^\infty D_k/D_{k-1}$. Аннулятор этого модуля есть однородный идеал в $\operatorname{gr} D$. Х а р а к т е р и с т и ч е с к о е м н о г о о б р а з и е оператора A есть множество корней этого идеала. Так как алгебра $\operatorname{gr} D$ изоморфна симметрич. алгебре касательного расслоения $T(X)$, то характеристич. многообразие канонически вкладывается в $T^*(X)$, причем его пересечение с каждым слоем есть алгебраич. конус.

Если многообразие X, а также данные расслоения имеют вещественно или комплексно аналитич. структуру, то характеристич. многообразие совпадает с множеством корней идеала $\operatorname{gr}(\operatorname{ann} M(A))$. В этом случае

оно является замкнутым аналитич. подмножеством в $T^*(X)$, причем если оно не пусто, то его размерность не меньше $\dim X$. В случае, когда эта размерность равна $\dim X$, Л. д. о. A наз. максимально переопределенным, или голономным.

Формальная теория общих Л. д. о. имеет дело с понятиями формальной интегрируемости и резольвенты. Свойство формальной интегрируемости, формулируемое в двойственных терминах струй, эквивалентно условию: $O(X)$-модуль $\mathrm{gr}\, M(A)$ локально свободен. Под резольвентой Л. д. о. A понимается последовательность, продолжающая (4)

$$\dots \longrightarrow D(F_1) \xrightarrow{A_1'} D(F) \xrightarrow{A'} D(E) \longrightarrow M(A),$$

в к-рой все A_k, $k=1, 2, \dots$, суть Л. д. о. В частности, A_1 наз. оператором совместности для A. Формальная интегрируемость обеспечивает локальное существование резольвенты.

В литературе используются термины «переопределенная» и «недоопределенная» система дифференциальных уравнений, однако удовлетворительное общее определение отсутствует. Нек-рым приближением к такому определению может служить следующее: существует ненулевой Л. д. о. B такой, что $BA \to 0$ (переопределенность), $AB = 0$ (недоопределенность). Напр., Л. д. о. d, равный ограничению оператора внешнего дифференцирования на формах степени k на многообразии X размерности n, является недоопределенным при $k>0$, переопределенным при $k<n$ и голономным при $k=0$.

Основные задачи, изучаемые для общих Л. д. о.: разрешимость уравнения с правой частью $Au=w$ при выполнении условия совместности $A_1 u=0$, возможность продолжения решений уравнения $Au=0$ в большую область (эффект, связанный с переопределенностью), представление общего решения через решения специального вида. Последняя задача может быть сформулирована более конкретно для инвариантных операторов, напр. для Л. д. о. в $\mathbb{R}^n$ с постоянными или периодич. коэффициентами: записать представление группы G в пространстве решений в виде интеграла (в том или ином смысле) по всем неразложимым подпредставлениям. Для определения операторов с постоянными коэффициентами такое представление задается интегралом по экспонентам (экспоненциальное представление), для операторов с периодич. коэффициентами — интегралом по обобщенным решениям Флоке.

Определяются Л. д. о. и на произвольных алгебраич. структурах. Пусть R — коммутативное кольцо, E и F суть R-модули. Отображение множеств $A : E \to F$ наз. Л. д. о. порядка не выше m, если оно аддитивно и для любого элемента $a \in R$ отображение $aA - Aa$ является Л. д. о. порядка не выше $m-1$. При этом под Л. д. о. порядка не выше -1 понимается лишь нулевое отображение. В частности, Л. д. о. нулевого порядка есть гомоморфизм R-модулей и обратно. Всякое дифференцирование $v : R \to F$ является Л. д. о. 1-го порядка (или равно нулю). Если R есть алгебра над нек-рым полем k, то под Л. д. о. над R понимается Л. д. о. над кольцом R, к-рый является k-линейным отображением. Такой Л. д. о. обладает рядом формальных свойств обычных Л. д. о. Если R есть алгебра всех формальных степенных рядов над k или алгебра сходящихся степенных рядов над k, а E и F — свободные R-модули конечного типа, то всякий Л. д. о. $A : E \to F$ порядка не выше m имеет однозначную запись (1).

Пусть (X, O) — кольцованное пространство, E и F суть O-модули. Под Л. д. о. $A : E \to F$ понимается всякий морфизм пучков, к-рый в слоях над каждой точ-

кой $x \in X$ действует как Л. д. о. над кольцом (алгеброй) Ox. Л. д. о., действующие в модулях или пучках модулей, используются в ряде вопросов алгебраич. геометрии.

Лит.: [1] Peetre J., «Math. Scand.», 1960, v. 8, p. 116—120; [2] Хёрмандер Л., в кн.: Псевдодифференциальные операторы, пер. с англ., М., 1967, с. 63—87, 166—296, 297—367; [3] Бернштейн И. Н., «Функц. анализ и его прилож.», 1972, т. 6, в. 4, с. 26—40; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [6] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [7] Паламодов В. П., Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, М., 1967; [8] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [9] Пале Р., Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе, пер. с англ., М., 1970; [10] Паламодов В. П., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1968, М., 1969, с. 5—37; [11] Спенсер Д., «Математика», 1970, т. 14, № 2, с. 66—90; № 3, с. 99—126; [12] Sato M., Kawai T., Kashiwara M., Microfunctions and pseudodifferential equations, Kyoto, 1972. *В. П. Паламодов.*

ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — метод суммирования, обладающий свойствами линейности:

1) если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ суммируем Л. м. с. к сумме A, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} ca_k$ суммируем этим методом к сумме cA;

2) если ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ суммируемы Л. м. с. соответственно к A и B, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ суммируем тем же методом к сумме $A + B$. Все наиболее распространенные методы суммирования линейны. В частности, линейными являются *матричный метод суммирования* и *полунепрерывный метод суммирования*. Существуют нелинейные методы суммирования. Напр., метод, в к-ром суммируемость ряда к сумме S определяется наличием предела S у последовательности $\{T_n\}$, где

$$T_n = \frac{s_{n+1}s_{n-1} - s_n^2}{s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n}$$

(s_n — частичные суммы ряда), не является линейным.

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Кангро Г. Ф., в сб.: *Итоги науки и техники. Математический анализ*, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Барон С. А., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Тал., 1977. *И. И. Волков.*

ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР, линейное преобразование, – отображение между двумя векторными пространствами, согласованное с их линейными структурами. Точнее, отображение $A : E \to F$, где E и F — векторные пространства над полем k, наз. линейным оператором из E в F, если

$$A(x+y) = Ax + Ay, \quad A(\lambda x) = \lambda Ax$$

при всех $x, y \in E$, $\lambda \in k$. Простейшие примеры — нулевой Л. о. $\mathbf{0}$, переводящий все векторы в $O \in F$, и (в случае $E = F$) тождественный Л. о. $\mathbf{1}$, оставляющий векторы на месте.

Понятие Л. о., будучи наряду с понятием векторного пространства главным в линейной алгебре, играет роль в самых разнообразных областях математики и физики, прежде всего — в анализе и его приложениях.

Современное определение Л. о. впервые дал Дж. Пеано [1] (для $k = \mathbb{R}$). Оно было, однако, подготовлено предшествующим развитием математики, накопившей (начиная с линейной функции $y = ax$) огромное число примеров. В алгебре их неполный перечень включает линейные подстановки в системах линейных уравнений, умножение кватернионов и элементов грассмановой алгебры; в аналитич. геометрии — преобразования координат; в анализе — дифференциальные и интегральные преобразования и интеграл Фурье.

Вплоть до начала 20 в. систематически изучались лишь Л. о. между конечномерными пространствами над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Первые «бесконечномерные» на-

блюдения, к тому же касающиеся общих полей, были сделаны О. Тёплицем [3]. Л. о. между бесконечномерными пространствами E и F изучаются, как правило, в предположении их непрерывности относительно нек-рых топологий. Непрерывные Л. о., действующие в различных классах топологич. векторных пространств, в первую очередь банаховых и гильбертовых,— это основной объект изучения линейного функционального анализа.

В теории Л. о. два специальных случая F k и $F=E$ наиболее важны. В первом случае Л. о. наз. функционалом (см. *Линейный функционал*), во втором — линейным оператором, действующим в E, или эндоморфизмом.

Все Л. о. из E в F образуют векторное пространство $\mathscr{L}(E, F)$ (вместо $\mathscr{L}(E, E)$ пишется $\mathscr{L}(E)$) над k относительно сложения и умножения на скаляр, задаваемыми формулами.

$$(A+B)\,x=Ax+Bx \text{ и } (\lambda A)\,x=A(\lambda x),\ A,\ B\in\mathscr{L}(E,\ F),$$

$x\in E$, $\lambda\in k$; нулем является $\mathbf{0}$. Умножение (композиция) AB Л. о. $A : E_1\to F_1$ и $B : E_2\to F_2$ определено лишь при $F_2=E_1$ как последовательное применение B и A. Относительно трех указанных операций $\mathscr{L}(E)$ — пример ассоциативной алгебры над k с единицей $\mathbf{1}$. Это «больше чем пример»: всякая ассоциативная алгебра над k вкладывается в $\mathscr{L}(E)$ для нек-рого E.

Векторные пространства над фиксированным полем (объекты) и Л. о. (морфизмы) образуют, вместе с законом композиции, категорию $\mathscr{L}in$. Следующие понятия суть специальные случаи (применительно к $\mathscr{L}in$) общекатегорных. Для Л. о. $A : E\to F$ его ядром наз. подпространство $\operatorname{Ker} A=\{x\in E : Ax=0\}$, образом — подпространство $\operatorname{Im} A=\{y\in F : y=Ax$ для нек-рого $x\in E\}$, коядром — факторпространство $\operatorname{Coker} A=F/\operatorname{Im} A$. Л. о. A наз. мономорфизмом, если $\operatorname{Ker} A=(0)$, и эпиморфизмом, если $\operatorname{Im} A=F$. Л. о. $B : F\to E$ наз. левым (соответственно правым) обратным к A, если BA тождественен в E (соответственно AB — в F). Л. о. A^{-1}, одновременно левый и правый обратный к A, наз. обратным к A. Л. о. (соответственно эндоморфизм), обладающий обратным, наз. изоморфизмом (соответственно автоморфизмом).

Категория $\mathscr{L}in$ является абелевой категорией относительно сложения Л. о.; в частности, Л. о. являющийся сразу моно- и эпиморфизмом, есть изоморфизм. Более того, в $\mathscr{L}in$ каждый мономорфизм обладает левым, а эпиморфизм — правым обратным. По аналогии с $\mathscr{L}in$ вводятся категории $\mathscr{B}an$ и $\mathscr{H}ilb$; объекты первой суть банаховы, а второй — гильбертовы пространства; морфизмами в обеих являются непрерывные Л. о. Обе категории аддитивны, но не абелевы. Изоморфизмы в них наз. топологическими изоморфизмами; это Л. о., имеющие непрерывные обратные.

Одной из важнейших типовых проблем «внутренней» теории Л. о. является проблема классификации эндоморфизмов (или хотя бы их нек-рых классов) по отношению к той или иной эквивалентности. Для Л. о. чистой алгебры рассматривается, как правило, общекатегорная эквивалентность эндоморфизмов в $\mathscr{L}in$; она наз. подобием. Иными словами, Л. о. A и B, действующие соответственно в E и F, подобны, если для нек-рого изоморфизма U диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & E \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U} \\ F & \xrightarrow{B} & F \end{array} \qquad \text{(D)}$$

коммутативна. Эквивалентность непрерывных Л. о.

в (общих) банаховых пространствах, наз. топологической эквивалентностью, также понимается в общекатегорном смысле — на этот раз в $\mathcal{B}an$; это означает коммутативность (D) для нек-рого топологич. изоморфизма U. Для Л. о. в гильбертовых пространствах за основу берется т. н. унитарная эквивалентность A и B, соответствующая требованию коммутативности диаграммы (D) для нек-рого унитарного (см. ниже) оператора U.

Помимо этого в теории Л. о. между пространствами с топологией важны задачи об аппроксимации различных классов Л. о. операторами сравнительно простого строения. Значительную роль играют задачи о нахождении общего вида Л. о. в конкретных, чаще всего функциональных, пространствах.

Среди инвариантов подобия наиболее важны спектр и количество инвариантных подпространств данной размерности. Пусть A — Л. о. в E. Его спектром наз. подмножество $\sigma(A)$ в k, состоящее из тех λ, для к-рых $\lambda 1 - A$ не имеет обратного. Подпространство E_0 в E наз. инвариантным относительно A, если из $x \in E_0$ следует $Ax \in E_0$. Помимо ядра и образа Л. о. примерами служат одномерные подпространства, содержащие т. н. собственные векторы оператора, т. е. те $x \in E$, $x \neq 0$, для к-рых $Ax = \lambda x$, $\lambda \in k$. При этом элемент λ, наз. собственным значением Л. о. A, заведомо принадлежит его спектру.

Понятие Л. о. является специальным случаем понятия морфизма модулей, к-рое получается при замене поля на произвольное кольцо. Морфизмы модулей во многом не похожи по свойствам на Л. о., однако именно результаты о последних явились одним из стимулов к их изучению.

Линейные операторы в конечномерных пространствах (без дополнительной структуры). Основным аналитич. аппаратом таких Л. о. является матричная запись. Пусть E и F — пространства с фиксированными базисами e_j; $1 \leqslant j \leqslant m$, и f_i; $1 \leqslant i \leqslant n$, $A : E \to F$ — Л. о., $a_{ij} \in k$ есть i-й коэффициент разложения Ae_j по второму базису. Тогда $(m \times n)$-матрица $M_A = \|a_{ij}\|$ наз. матрицей Л. о. A в базисах e_j и f_i. При $E = F$ обычно употребляется матричная запись в совпадающих базисах (т. е. e_i f_i; $1 \leqslant i \leqslant m = n$). При переходе к другим базисам матрица Л. о. изменяется по простым формулам.

Различным характеристикам Л. о. отвечают, как правило, эффективно вычисляемые характеристики их матриц. Напр., $\dim \operatorname{Im} A = r(M_A)$ и $\dim \operatorname{Ker} A = \dim E - r(M_A)$, где r — ранг матрицы; в частности, A — изоморфизм, если и только если $\dim E = \dim F = r(M_A)$; последнее условие эквивалентно отличию от нуля определителя матрицы M_A. Алгебраич. операциям над Л. о. соответствуют одноименные операции над их матрицами, взятыми в фиксированных базисах.

Л. о. подобны тогда и только тогда, когда они могут быть записаны (каждый в «своем» базисе) одной и той же матрицей. Собственные значения Л. о. суть корни характеристич. многочлена его матрицы. Отсюда следует, что всякий Л. о. в конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем (напр., $\mathbb{C}$) обладает хотя бы одним собственным вектором. Спектр Л. о. в конечномерном пространстве над любым полем есть множество его собственных значений.

Проблема классификации эндоморфизмов конечномерных пространств над алгебраич. замкнутым полем полностью решена, и классы подобия описаны в терминах спектров и инвариантных подпространств. Основным шагом здесь является следующая классич. теорема, открытая К. Жорданом (C. Jordan) (рассматривавшим поле $\mathbb{C}$). Матрица с фиксированным $\lambda \in k$ на главной диагонали, единицами непосредственно над

ней и нулями на остальных местах наз. жордановой клеткой, а блок-матрица с жордановыми клетками (разных размеров и с разными λ) на главной диагонали и нулями на остальных местах — жордановой матрицей. Тогда каждый эндоморфизм может быть записан в нек-ром базисе жордановой матрицей. Отыскание такого базиса наз. приведением Л. о. к жордановой форме. Поскольку Л. о., записанные жордановыми матрицами, подобны в том и только в том случае, когда эти матрицы совпадают с точностью до перестановки жордановых клеток, теорема означает, что жордановы матрицы доставляют, после соответствующего отождествления, полный набор инвариантов подобия.

Непрерывные линейные операторы в банаховых пространствах. Основы их теории заложены С. Банахом (см. [4]).

Примеры. 1) В l_p (здесь и далее $1 \leqslant p < \infty$): Л. о. умножения на ограниченную числовую последовательность; Л. о. левого (соответственно правого) сдвига, переводящий $\xi = \{\xi_i\} \in l_p$ в $\eta = \{\eta_i = \xi_{i+1}\}$ (соответственно в $\eta = \{\eta_i : \eta_0 = 0;\ \eta_i = \xi_{i-1},\ i > 0\}$).

2) В $L_p[a, b]$ или $C[a, b]$: Л. о. умножения на непрерывную функцию $\varphi(x)$, $x \in [a, b]$; Л. о. неопределенного интегрирования, переводящий $f(x)$ в

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

3) В $L_p(\mathbb{R})$: Л. о. сдвига на $t \in \mathbb{R}$, переводящий $f(x)$ в $g(x) = f(x + t)$.

4). Из $L_1(\mathbb{R})$ в $C_0(\mathbb{R})$: «классический» оператор Фурье, переводящий $f(x)$ в

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt.$$

Л. о. $A : E \to F$ между банаховыми пространствами непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т. е. образ каждого ограниченного множества в E ограничен в F, или, что эквивалентно, существует (конечное) число $\|A\| = \sup\{\|Ax\|,\ \|x\| \leqslant 1\}$, наз. операторной нормой (аналогичное утверждение верно и для любых нормированных пространств). Непрерывные Л. о. из E в F образуют в $L(E, F)$ подпространство $B(E, F)$, являющееся банаховым относительно нормы $\|A\|$. Подпространство $B(E, E)$, чаще обозначаемое $B(E)$, является и банаховой алгеброй относительно операторного умножения. Класс указанных алгебр универсален в том смысле, что всякая банахова алгебра топологически изоморфна подалгебре в $B(E)$ для нек-рого E. Подмножество в $B(E, F)$, состоящее из топологич. изоморфизмов, открыто и при $E = F$ содержит шар единичного радиуса с центром в **1**.

Фундаментальную роль в «банаховой» теории Л. о играют две теоремы, к-рые вместе с *Хана — Банаха теоремой* (см. также *Линейный функционал*) наз. тремя основными принципами линейного анализа. Простейшая форма «принципа равномерной ограниченности» — это теорема Банаха — Штейнхауза: если для непрерывных Л. о. $A_n : E \to F$, $n = 1, 2, \ldots$, при каждом $x \in E$ $\sup\limits_n \|A_n x\| < \infty$, то и $\sup\limits_n \|A_n\| < \infty$. Простейшая форма «принципа открытости отображения» — это теорема Банаха: если непрерывный Л. о. обладает обратным, то этот обратный оператор заведомо непрерывен. Требование «банаховости» (полноты) пространств существенно в обеих теоремах.

Спектр непрерывного Л. о. $A : E \to E$, рассматриваемый, как правило, для комплексных пространств, является непустым компактом в $\mathbb{C}$. В случае беско-

нечномерного пространства множество собственных значений Л. о., называемое точечным спектром, вообще говоря, составляет лишь часть $\sigma(A)$. Для остальных $\lambda\in\sigma(A)$ всегда $\operatorname{Im}(\lambda\mathbf{1}-A)\neq E$; эти числа распадаются на два множества — так наз. непрерывный спектр и остаточный спектр, смотря по тому, плотен $\operatorname{Im}(\lambda\mathbf{1}-A)$ в E или нет. Напр., спектром Л. о. умножения на $\varphi(x)=x$ является отрезок $[a, b]$, однако все его точки в случае пространств $L_p[a, b]$ принадлежат непрерывному, а в случае $C[a, b]$ — остаточному спектру.

Заданная на $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ операторнозначная функция $R(\lambda)=(\lambda\mathbf{1}-A)^{-1}$ наз. резольвентой Л. о. A. Она полезна, в частности, тем, что позволяет для каждой функции w, голоморфной в нек-рой окрестности U спектра, рассмотреть обозначаемый $w(A)$ Л. о.

$$\int_\Gamma w(\lambda)\,R(\lambda)\,d\lambda,$$

где Γ — гладкий контур в U, ограничивающий спектр. Так строится «голоморфное операторное исчисление»; что же касается «голоморфного мультиоператорного исчисления», т. е., говоря нестрого, придания разумного смысла понятию голоморфной функции от нескольких «операторных» переменных, то задача его построения оказалась намного труднее. Результаты, в нек-ром смысле близкие к окончательным, были получены с помощью методов гомологич. алгебры [5].

В теории Л. о. между банаховыми пространствами важна операция перехода от $A: E\to F$ к его т. н. сопряженному Л. о. $A^*: F^*\to E^*$, к-рый определяется формулой

$$A^*f(x)=f(Ax).$$

Эта операция обладает свойствами

$$(A+B)^*=A^*+B^*,\quad (\lambda A)^*=\lambda A^*,\quad (AB)^*=B^*A^*,$$
$$\|A^*\|=\|A\|$$

(в предположении, что левые части равенств имеют смысл). Если E и F рефлексивны, то $(A^*)^*=A$.

Некоторые важнейшие классы Л. о. в банаховых пространствах таковы.

1) $A: E\to F$ наз. компактным оператором, или вполне непрерывным, если он отображает любое ограниченное множество в E во вполне ограниченное (т. е. предкомпактное) множество в F. Всякий Л. о., аппроксимируемый в операторной норме конечномерными (имеющими конечномерный образ) Л. о., компактен. Для подавляющего большинства классич. банаховых пространств F верно и обратное: всякий компактный Л. о. из любого E в F аппроксимируется конечномерными. Так наз. проблема аппроксимации (верно ли это для всех F?) решена отрицательно [6].

Тождественный Л. о. в E компактен в том и только в том случае, когда E конечномерно (теорема Рисса). Спектр компактного Л. о.— не более чем счетное множество, содержащее O. Если спектр бесконечен, то O — его единственная предельная точка. Каждое $\lambda\in\sigma(A)$, $\lambda\neq 0$,— собственное значение, и соответствующие ему собственные векторы образуют конечномерное пространство.

2) $A: E\to F$ наз. ядерным оператором, если он представим в виде абсолютно сходящегося ряда в $B(E, F)$, состоящего из одномерных Л. о.; такой оператор необходимо компактен. С помощью ядерных Л. о. определяется важный для анализа класс топологич. векторных пространств — ядерные пространства.

3) $A: E\to F$ наз. фредгольмовым оператором, если его ядро и коядро конечномерны; образ такого Л. о. необходимо замкнут. Главная характеристика фредгольмова Л. о.— его индекс $\dim\operatorname{Ker}A-$

dim Coker A. Множество фредгольмовых Л. о. открыто в $B(E, F)$, а индекс на нем (в отличие от отдельно взятых размерностей ядра и коядра)—локально постоянная функция. Предтечей теории фредгольмовых Л. о. явилась теория интегральных уравнений Э. Фредгольма (E. Fredholm), к-рый по существу доказал (и эту «геометрическую» подоплеку увидел Д. Гильберт, D. Hilbert), что Л. о. вида $\mathbf{1}+A$ с компактным A — фредгольмов и притом индекса нуль (см. *Фредгольма альтернатива*). Важные конкретные классы фредгольмовых Л. о. возникают при рассмотрении эллиптич. дифференциальных выражений на многообразиях. Задача о вычислении их индекса потребовала привлечения аппарата алгебраич. топологии [8].

Проблему классификации эндоморфизмов банаховых пространств, ввиду теоремы Жордана, дающей конечномерный образец ее решения, можно «в первом приближении» трактовать как проблему построения содержательного бесконечномерного аналога жордановой формы Л. о. Она, однако, далека от решения: не говоря о «достаточном» наборе инвариантных подпространств, до сих пор (1982) неизвестно, всякий ли оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, обладает хотя бы одним нетривиальным (отличным от (0) и H) инвариантным подпространством. Если Л. о. A, действующий в произвольном банаховом пространстве, не пропорционален $\mathbf{1}$ и перестановочен с нек-рым компактным Л. о., то у всех Л. о., перестановочных с A, есть нетривиальное инвариантное подпространство (см. [9]).

Помимо топологии нормированного пространства, в $B(E, F)$ есть и другие топологии, задающие в нем структуру локально выпуклого пространства. Наиболее важны сильная и слабая операторные топологии, задаваемые системами полунорм соответственно

$$\{p_x : p_x(A) = \|Ax\|,\ x \in E\}$$

и

$$\{p_{x,f} : p_{x,f}(A) = |f(Ax)|;\ x \in E,\ f \in F^*\}.$$

Теория непрерывных Л. о. в топологич. векторных пространствах (пример такого Л. о.— преобразование Фурье обобщенных функций) развилась на основе «банаховой» теории. Значительное место в ней занимает исследование возможностей обобщения классич. теорем Банаха и др.; оно привело к введению ряда важных классов пространств. Напр., теорема об эквивалентности непрерывности и ограниченности, теорема Банаха — Штейнхауза и теорема Банаха об обратном операторе не верны для произвольных, хотя бы и локально выпуклых, отделимых и полных пространств. В то же время первая из теорем верна, если E — борнологич. пространство, вторая — если E — бочечное пространство, а третья — если E совершенно полно, а F бочечно.

Непрерывные линейные операторы в гильбертовых пространствах (конечномерных и бесконечномерных). Их теория начала формироваться в работах Д. Гильберта [10] об интегральных уравнениях и бесконечных квадратичных формах.

Примеры. 1) Все примеры Л. о. в l_p, $L_p[a, b]$, $L_p(\mathbb{R})$, рассмотренные выше, при $p=2$.

2) Интегральный оператор в $L_2[a, b]$, переводящий $f(x)$ в

$$y(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy,$$

где K — интегрируемая с квадратом функция на множестве $a \leqslant x,\ y \leqslant b$. Такой Л. о. всегда компактен.

3) Оператор Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, однозначно определенный тем, что он совпадает с классич. оператором Фурье (см. выше) на $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

Понятия и факты приведены ниже в той форме, какую они имеют для пространств над $\mathbb{C}$: именно в комплексных пространствах теория оказалась наиболее важной и содержательной.

Особое положение «гильбертовой» теории Л. о. на фоне «банаховой» определяется резко возрастающей ролью понятия *сопряженного оператора*. Поскольку гильбертово пространство H и его сопряженное H^* антиизоморфны, Л. о. $A^*: H_2^* \to H_1^*$ естественно отождествляется с Л. о. из H_2 в H_1, однозначно определенным равенством $(Ax, y) = (x, A^*y)$; $x \in H_1$, $y \in H_2$; при таком отождествлении Л. о., сопряженный к эндоморфизму в H, снова действует в H. В $B(H)$ возникает важная дополнительная структура — операция перехода от A к A^*, обладающая свойствами инволюции, относительно к-рой $B(H)$ является C^*-алгеброй. На самом деле всякая C^*-алгебра изометрически $*$-изоморфна C^*-подалгебре в $B(H)$ для нек-рого H (теорема Гельфанда — Наймарка).

Для гильбертовых пространств характерны следующие классы Л. о.

Л. о. $A: H \to H$ наз. самосопряженным оператором, или эрмитовым оператором, если $A^* = A$. Самосопряженный Л. о., равный своему квадрату, наз. проектором; такой Л. о. реализуется как оператор ортогонального проектирования на замкнутое подпространство в H. Л. о. $A: H_1 \to H_2$ наз. унитарным оператором (в случае поля $\mathbb{R}$ — ортогональным оператором), если $A^* = A^{-1}$ или, что эквивалентно, $(Ax, Ay) = (x, y)$, $x, y \in H_1$ и $\operatorname{Im} A = H_2$. Л. о. унитарен тогда и только тогда, когда он является изоморфизмом, сохраняющим нормы. Самосопряженный и унитарный эндоморфизмы суть специальные случаи нормального оператора: т. н. Л. о. $A: H \to H$ такой, что $A^*A = AA^*$.

Л. о. умножения на последовательность (соответственно функцию) в l_2 (соответственно $L_2[a, b]$) самосопряжен в том и только в том случае, если эта последовательность (функция) действительнозначна. Интегральный Л. о. самосопряжен, если и только если $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ почти всюду. В $L_2(\mathbb{R})$ операторы сдвига и оператор Фурье унитарны. В l_2 Л. о. левого и правого сдвига сопряжены друг другу и не нормальны. Спектр самосопряженного Л. о. лежит в $\mathbb{R}$, а спектр унитарного — на единичной окружности в $\mathbb{C}$. Спектр проектора $P \neq \mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ состоит из точек 0 и 1. Спектр нормального Л. о. может быть любым компактом в $\mathbb{C}$. Собственные векторы самосопряженного Л. о., соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Описанные классы Л. о. используются в целом ряде разделов математики и физики, в том числе в квантовой механике (где самосопряженные Л. о. интерпретируются как наблюдаемые), в теории представлений и гармонич. анализе, в теории дифференциальных уравнений и в теории динамич. систем.

Всю информацию о Л. о., действующем в конечномерном гильбертовом пространстве, доставляет его матричная запись в ортонормированном базисе. В такой записи переходу к сопряженному Л. о. соответствует взятие матрицы, комплексно сопряженной к транспонированной; как следствие, для матрицы $\|a_{ij}\|$ самосопряженного Л. о. $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$. Классич. теорема «о приведении к диагональному виду» утверждает, что каждый нормальный (в случае поля $\mathbb{R}$ — каждый самосопряженный) Л. о. может быть записан в нек-ром ортонормированном базисе диагональной матрицей. Вместе с тем фактом, что Л. о. унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они могут быть записаны (каждый в своем ортонормированном базисе) одинако-

выми матрицами, эта теорема означает, что наборы собственных значений с учетом их кратности образуют полную систему инвариантов унитарной эквивалентности для нормальных Л. о.

Теорема о приведении к диагональному виду оказалась «счастливее» теоремы Жордана в том отношении, что для нее найден содержательный бесконечномерный аналог: спектральная теорема для нормальных Л. о., открытая в 1912 (для самосопряженных Л. о.) Д. Гильбертом. Одна из ее формулировок: нормальный Л. о. однозначно представим в виде операторнозначного интеграла Стилтьеса $A=\int_{\sigma(A)}\lambda P(d\lambda)$, где $P(d\lambda)$ — счетно аддитивная и регулярная (в смысле, напр., сильной операторной топологии) функция на борелевских подмножествах в $\sigma(A)$, принимающая значения среди проекторов и такая, что $P(\sigma(A))=\mathbf{1}$ (см. *Спектральная мера*). Следствие: всякий нормальный Л. о. аппроксимируется линейными комбинациями проекторов.

На основе теоремы Гильберта получена полная классификация нормальных линейных операторов (в пространстве любой размерности) с точностью до унитарной эквивалентности [11]; в частности, оказывается, что каждый нормальный Л. о. унитарно эквивалентен оператору умножения на ограниченную измеримую функцию в $L_2(\Sigma)$, где Σ — нек-рое измеримое пространство с конечной мерой. Для компактных нормальных Л. о. в сепарабельном пространстве картина упрощается: такой Л. о. обладает ортонормированным базисом из своих собственных векторов и тем самым унитарно эквивалентен действующему в l_2 оператору умножения на последовательность (необходимо сходящуюся к нулю).

В случае нормального A спектральная теорема позволяет придать смысл выражению функции $f(A)$ для более широкого класса функций на спектре, чем голоморфные функции, напр. для непрерывной f Л. о. $f(A)$ определяется как $\int_{\sigma(A)}f(\lambda)P(d\lambda)$. При этом, если A самосопряжен, то Л. о. $\exp(iA)$ унитарен.

Основные усилия сосредоточены на изучении различных классов не нормальных Л. о., в первую очередь абстрактных вольтерровых операторов, сжимающих операторов и спектральных операторов (см. [11] — [13]). Хотя закономерностей, сравнимых по законченности со спектральной теоремой, пока (1982) не обнаружено, все же в этом направлении получены глубокие результаты.

Развитие анализа и его приложений, в первую очередь дифференциальных уравнений и квантовой механики, заставило выйти за рамки класса ограниченных (т. е. непрерывных) Л. о. Строго говоря, неограниченный оператор A в H не есть Л. о. в принятом здесь смысле, т. к. он задан не на всем H, а лишь на его, как правило, плотном подпространстве. Типичные примеры — Л. о. умножения на x и дифференцирования в $L^1(\mathbb{R})$. Для неограниченных Л. о. определены аналоги спектра, сопряженного Л. о. и рассмотренных выше классов Л. о. Хотя их теория сложнее теории ограниченных Л. о., ряд глубоких результатов последней нашел содержательные обобщения. Важнейшим среди них является аналог спектральной теоремы, найденный Дж. Нейманом (J. Neumann) для неограниченных самосопряженных операторов.

Лит.: [1] Peano G., Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, Torino, 1888; [2] Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; [3] Toeplitz O., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 28, p. 88—96; [4] Банах С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948; [5] Taylor J., «Adwances Math.», 1972, v. 9, № 2, p. 183—252; [6] Энфло П., «Математика», 1974, т. 18, № 1, с. 146—55; [7] Шефер Х., Топологические век-

торные пространства, пер. с англ., М., 1971; [8] Функциональный анализ, 2 изд., М., 1972 (Справоч. матем. б-ка); [9] Ломоносов В. И., «Функц. анализ и его прилож.», 1973, т. 7, № 3, с. 55—56; [10] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Lpz.— B., 1912; N. Y., 1953; [11] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [12] их же, Линейные операторы, пер. с англ., т. 2, М., 1966; [13] их же, Линейные операторы. Спектральные операторы, пер. с англ., М., 1974; [14] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., 1967; [15] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [16] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962.

А. Я. Хелемский.

ЛИНЕЙНЫЙ УГОЛ двугранного угла — угол между перпендикулярами к ребру двугранного угла, восстановленными в обеих гранях из одной точки.

ЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ, линейная форма, на векторном пространстве L над полем k — отображение $f: L \to k$ такое, что

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

для всех $x, y \in L$, $\lambda \in k$. Понятие Л. ф., будучи важным специальным случаем понятия *линейного оператора*, является одним из основных в линейной алгебре и играет значительную роль в анализе.

На множестве $L^{\#}$ Л. ф. на L определены операции сложения и умножения на скаляр по формулам

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (\lambda f)(x)=\lambda f(x),\ f, g \in L^{\#},$$
$$x \in L,\ \lambda \in k.$$

Они задают в $L^{\#}$ структуру векторного пространства над k.

Ядром Л. ф. наз. подпространство $\operatorname{Ker} f=\{x \in L: f(x)=0\}$. Если $f \neq 0 \in L^{\#}$ (т. е. $f(x) \not\equiv 0 \in k$), то $\operatorname{Ker} f$ — гиперплоскость в L. Л. ф. с совпадающими ядрами пропорциональны.

Если $\{e_\nu;\ \nu \in \Lambda\}$ — базис в L, то для

$$x=\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\nu_i} e_{\nu_i},\ \lambda_{\nu_i} \in k,\ f(x)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\nu_i} f(e_{\nu_i}).$$

Сопоставление $f \to \{f(x_\nu);\ \nu \in \Lambda\}$ есть изоморфизм $L^{\#}$ на k^{Λ}. Следствие: L изоморфно $L^{\#}$ тогда и только тогда, когда оно конечномерно. При переходе к новому базису в L элементы $f(e_\nu) \in k$ преобразуются по тем же формулам, что и векторы базиса.

Оператор $Q_L: L \to (L^{\#})^{\#}$, определенный равенством $Q_L x(f)=f(x)$, инъективен. Он является изоморфизмом тогда и только тогда, когда L конечномерно. Этот изоморфизм, в отличие от изоморфизма между L и $L^{\#}$, естествен.

Л. ф. на локально выпуклых пространствах, в частности нормированных пространствах,— важный объект изучения функционального анализа. Каждый непрерывный (как отображение топологич. пространств) Л. ф. f на локально выпуклом пространстве E ограничен, т. е.

$$\sup_{x \in M} |f(x)| < \infty$$

для всех ограниченных $M \subset E$. Если E — нормированное пространство, то верно и обратное; при этом оба свойства эквивалентны конечности числа

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|: \|x\| \leqslant 1\}.$$

Непрерывные Л. ф. на локально выпуклом пространстве E образуют подпространство E^* в $E^{\#}$, к-рое наз. сопряженным к E. В E^* рассматриваются различные топологии, в том числе слабая и сильная, к-рые отвечают соответственно за поточечную и за равномерную сходимость на ограниченных множествах. Если E — нормированное пространство, то E^* — банахово пространство относительно нормы $\|f\|$, а соот-

ветствующая топология совпадает с сильной. Единичный шар $\{f : \|f\| \leqslant 1\}$, рассматриваемый в слабой топологии, компактен.

Важные приложения к анализу имеет теорема Хана — Банаха, одна из формулировок к-рой такова: если $\|\cdot\|$ — преднорма на векторном пространстве E, f_0 — Л. ф., заданный на подпространстве E_0 в E и такой, что $|f_0(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in E_0$, то f_0 может быть распространен на все E с сохранением линейности и указанной оценки. Следствие: любой непрерывный Л. ф., заданный на подпространстве E_0 в локально выпуклом пространстве E, может быть продолжен до непрерывного Л. ф. на E, а если E — нормированное пространство, то и с сохранением нормы. Отсюда для каждого $x \in E$, $x \neq 0$, найдется $f \in E$ с $f(x) \neq 0$.

Пусть E — нормированное пространство, а E^* и затем $(E^*)^*$ взяты с соответствующими нормами. Тогда оператор

$$R_E : E \longrightarrow (E^*)^*, \quad R_E x(f) = f(x)$$

— изометрическое вложение. Если при этом вложении E совпадает с $(E^*)^*$, то такое нормированное пространство, необходимо полное, наз. рефлексивным. Напр., $L_p[a, b]$ и l_p, $1 \leqslant p < \infty$, рефлексивны тогда и только тогда, когда $p > 1$. Аналогичное понятие рефлексивности есть и для общих локально выпуклых пространств.

Для многих конкретных локально выпуклых пространств описаны все Л. ф.: напр., сопряженное к гильбертову пространству H есть $\{f : f(x) = (x, x_0)\}$ для фиксированного $x_0 \in H$. Сопряженное к $C[a, b]$ есть $\{f : f(x) = \int_a^b x(t)\, d\mu(t)$ для фиксированной функции ограниченной вариации $\mu(t)\}$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981.

А. Я. Хелемский.

ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ — теория, изучающая арифметич. свойства *линейных алгебраических групп*, определенных, как правило, над *глобальным полем*.

Одним из главных объектов изучения Л. а. г. а. т. являются арифметич. подгруппы алгебраич. группы G (см. *Арифметическая группа*), а одним из основных технич. инструментов — группа *аделей* G_A. На G_A можно определить нек-рым естественным образом меру, наз. *Тамагавы мерой*. Один из первых возникающих здесь вопросов: когда объем факторпространства группы G_A по подгруппе главных аделей G_A конечен? Полный ответ на него был получен А. Борелем (A. Borel). Оказалось, напр., что объем G_A/G_k всегда конечен для полупростой группы. Решению этого вопроса предшествовало построение теории приведения для арифметич. групп (см. [5], [6]).

Используя теорию приведения для подгрупп главных аделей, удалось во многих случаях вычислить объем G_A/G_k, к-рый наз. числом Тамагавы группы G. Напр., для ортогональной группы G число Тамагавы $F(G) = 2$, и это фактически эквивалентно основному результату аналитич. теории квадратичных форм (см. [1]). Изучение структуры арифметич. групп (начатое в [6]) было продолжено затем в разных направлениях. Прежде всего следует отметить исследования по *конгруэнц-проблеме*, по проблеме максимальности арифметич. подгрупп и проблеме рода в арифметич. группах.

Во всех основных вопросах Л. а. г. а. т. существенную роль играют теоремы аппроксимации, редуцирующие исследование арифметич. свойств алгебраич. групп, определенных над глобальными полями к иссле-

дованию арифметич. свойств алгебраич. групп, определенных над локальными полями. Наибольшее значение имеет проблема сильной аппроксимации (п. с. а.) в алгебраич. группах, к-рая состоит в следующем. Пусть $V=\{v\}$ — множество всех неэквивалентных нормирований поля k; k_v - пополнение k относительно v; O_v — кольцо целых элементов k_v; $\mathfrak{p}_v$— максимальный идеал O_v. Для произвольного конечного подмножества $S\subset V$ через G_S обозначается подгруппа в G_A, у к-рой все v-компоненты при $v\notin S$ равны единице. Спрашивается: когда $\overline{G_S G_k}\ G_A$? (Здесь черта означает замыкание в топологии G_A.) Если $S-\infty$ (∞ — множество всех архимедовых нормирований k), то эквивалентная формулировка этой проблемы: когда для любых $v_i\notin S$, $i=1, 2, \ldots, n$, любых $a_{v_i}\in G_{k_{v_i}}$ и положительных целых m_{v_i} имеет решение в группе G_k система сравнений

$$x\equiv a_{v_i}\left(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}_{v_i}^{m_{v_i}}\right),$$

где $x\in G_{O_v}$ для $v\in S\cup\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

М. Эйхлер [13] решил проблему сильной аппроксимации для групп $\mathrm{SL}(n, D)$, где D — тело конечного k-ранга. Позднее различные частные случаи этой проблемы исследовали М. Кнезер (M. Kneser), Г. Шимура (G. Shimura), А. Вейль (A. Weil, см. [4]). Проблема сильной аппроксимации была решена (см. [9], [10]) для классич. групп над числовыми полями и найдены необходимые условия для ее положительного решения в общем случае; а именно: а) группа G должна быть односвязной как алгебраич. группа и б) если F — любая простая компонента полупростой части G, то группа F_S должна быть некомпактной. Необходимость этих условий доказана [14] для функционального поля. Наконец, была доказана [7] (см. также [16]) достаточность условий а) и б) как над числовыми, так и над функциональными полями, что дало полное решение п. с. а. В основе метода доказательства лежит редукция п. с. а. к доказательству *Кнезера — Титса гипотезы* о строении односвязных групп над локальными полями: если G есть k_v-простая односвязная k_v-изотропная группа, то G_{k_v} порождается унипотентными элементами или, эквивалентно, факторгруппа группы G_{k_v} по ее центру проста в абстрактном смысле. В качестве простейшего применения сильной аппроксимационной теоремы получается следующий факт: пусть G обладает свойством сильной аппроксимации относительно $S-\infty$; если O — кольцо целых элементов k, то

$$\overline{G}_O=\prod\nolimits_{v\notin S} G_{O_v};$$

это показывает, что арифметика G_O в значительной степени определяется арифметикой локальных компонент G_{O_v}.

Наряду с сильной аппроксимацией существенную роль в Л. а. г. а. т. играет свойство слабой аппроксимации (с. с. а.) алгебраич. группы G относительно S, к-рое состоит в том, что образ G_k при канонич. проекции $G_k\to G_S$ плотен в G_S. Все односвязные группы обладают с. с. а. С другой стороны, имеются примеры полупростых групп и алгебраич. торов, не обладающих с. с. а. (см. [11], [2]). Тем не менее для широкого класса неодносвязных полупростых групп, в частности для присоединенных групп, выполнено с. с. а. [12]. Если G — алгебраич. тор и для всякого $v\in S$ тор G разложим над циклич. расширением поля k_v, то G обладает с. с. а. относительно S. В нек рых случаях с. с. а. выполнено для алгебраич. групп над произвольным полем (см. [11]). Существовала гипотеза (см. [11]), что с. с. а. выполнено для

группы $SL(n, D)$, где D — тело конечного k ранга над произвольным бесконечным полем k. Однако развитие приведенной K-теории привело к отрицательному ответу (см. [15]): для группы $SL(n, D)$ отклонение от слабой аппроксимации может быть сколь угодно большим.

Важную роль в Л. а. г. а. т. играют когомологич. методы, в частности принцип Хассе (см. *Галуа когомологии*).

Лит.: [1] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972; [4] его же, «Математика», 1969, т. 13, № 6, с. 18—98; [5] Борель А., «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 3—17; [6] Борель А., Харниш-Чандра, «Математика», 1964, т. 8, № 2, с. 19—71; [7] Платонов В. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1969, т. 33, № 6, с. 1211—19; 1970, т. 34, № 4, с. 775—77; [8] его же, «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 132, с. 162—68; [9] Kneser M., «J. reine und angew. Math.», 1965, Bd 218, S. 190—203; [10] его же, «Proc. Symp. Pure Math.», 1966, v. 9, p. 187—96; [11] его же, «Colloq. groupes algébriqus. Bruxelles», 1962, p. 41—52; [12] Harder G., «Inventiones Math.», 1967, v. 4, № 3, p. 165—91; [13] Eichler M., «J. reine und angew. Math.», 1938, Bd 179, S. 227—51; [14] Behr H., «J. reine und angew. Math.», 1968, Bd 229, S. 107—16; [15] Платонов В. П., «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 142, с. 198—207; [16] Prasad G., «Ann. Math.», 1977, v. 105, p. 553—72.

В. П. Платонов.

ЛИНЕЙЧАТАЯ ПОВЕРХНОСТЬ в дифференциальной геометрии — поверхность, образованная движением прямой линии. Прямые, принадлежащие этой поверхности, называются прямолинейными образующими, а каждая кривая, пересекающая все прямолинейные образующие,— направляющей кривой. Если ρ $\rho(v)$ — радиус-вектор направляющей, а $m=m(v)$ — единичный вектор образующей, проходящей через $\rho(v)$, то радиус-вектор Л. п. есть

$$r=\rho(v)+um(v),$$

где u — координата точки на образующей. Линейный элемент Л. п.:

$$ds^2=du^2+2\,(m\rho')\,du\,dv+(\rho'^2+2\,(m'\rho')\;u+m'^2u^2)\,dv^2.$$

Л. п. характеризуется тем, что ее асимптотич. сеть — полугеодезическая. Л. п. всегда можно и притом единственным образом изогнуть так, что произвольная линия на ней станет асимптотической (теорема Бельтрами). Кроме того, если Л. п. F, не являющаяся развертывающейся, изгибается в Л. п. F^*, то либо их образующие соответствуют друг другу, либо обе они изгибаются в квадрику, на к-рой сеть, соответствующая семействам образующих, – асимптотическая (теорема Бонне).

Множество точек Л. п., в к-рых обращается в нуль геодезич. кривизна ортогональных траекторий образующих, наз. стрикционной линией Л. п. (или линией сжатия, т. к. через каждую точку ее — стрикционную точку — в пределе проходит общий перпендикуляр двух бесконечно сближающихся образующих). Координата стрикционной точки $u=-(\rho' m')/m'^2$; на *цилиндре* стрикционная линия не определена, на других *развертывающихся поверхностях* она является ребром возврата. Предел p отношения кратчайшего расстояния между двумя бесконечно сближающимися образующими Л. п. к углу между ними наз. параметром распределения Л. п.: p $(mm'\rho)\,m'^2$; развертывающаяся поверхность характеризуется тем, что для нее $p=0$. Гауссова кривизна Л. п.:

$$K=-\frac{p^2\,(m')^2}{\gamma},$$

где

$$\gamma=\rho'^2+2u\,(\rho' m')+u^2m'^2-(\rho' m)^2.$$

Единственная минимальная Л. п.— *геликоид*. Л. п. вращения — однополостный гиперболоид, быть может вырождающийся в цилиндр, конус или плоскость. Если

все прямолинейные образующие Л. п. параллельны одной плоскости, то она представляет собой *Каталана поверхность*.

Лит.: [1] Каган В. Ф., *Основы теории поверхностей в тензорном изложении*, ч. 1, М.— Л., 1947; [2] Шуликовский В. И., *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении*, М., 1963. *И. Х. Сабитов.*

Л. п. в алгебраической геометрии — гладкая проективная поверхность F над алгебраически замкнутым полем k, бирационально эквивалентная поверхности $P^1\times C$, где P^1— проективная прямая, а C — нек-рая гладкая проективная кривая рода $g\geqslant 0$. Примером Л. п. служит проективизация $P_C(\mathscr{E})$ локально свободного в топологии Зариского пучка $\mathscr{E}$ ранга 2 на C.

Если существует гладкий морфизм $p: F\to C$, каждый слой к-рого изоморфен P^1, то F наз. геометрически линейчатой поверхностью с базой C. В случае, когда C — кривая рода 0, геометрически Л. п. наз. рациональной линейчатой поверхностью; в случае, когда род кривой C равен $g\geqslant 1$, — геометрически линейчатой поверхностью рода g. По теореме Нётера — Энрикеса морфизм p всегда имеет сечение s: $C\to F$ (см. [1], [2], [5]).

Свойства Л. п. (см. [1], [2], [6]):

1) Каждая геометрически Л. п. F с базой C имеет вид $P_C(\mathscr{E})$, где $\mathscr{E}$ — нек-рый *локально свободный пучок* ранга 2 на C, причем

$$P_C(\mathscr{E})\cong P_C(\mathscr{E}')$$

над C тогда и только тогда, когда существует обратимый пучок $\mathscr{L}$ на C, что $\mathscr{E}\cong\mathscr{E}'\otimes\mathscr{L}$.

2) Все рациональные геометрически Л. п. с точностью до изоморфизма исчерпываются счетной серией поверхностей

$$F_n=P_{P^1}(\mathscr{O}_{P^1}\oplus\mathscr{O}_{P^1}(n)),$$

$n\geqslant 0$ — целое число, $\mathscr{O}_{P^1}(n)$ — обратимый пучок на P^1 степени n; причем, кроме поверхности Веронезе $V_4\subset P^5$, все поверхности степени n в P^{n+1} являются рациональными геометрически Л. п. или конусами над нормальными рациональными кривыми.

3) Если F — минимальная гладкая проективная поверхность над k, бирационально эквивалентная $P^1\times C$, где C — кривая рода $g\geqslant 1$, то F — геометрически Л. п. с базой C, причем кривая C определяется поверхностью F однозначно с точностью до изоморфизма.

4) Если F — геометрически Л. п. с базой C и $p: F\to C$ — соответствующий морфизм, то

а) $\mathrm{Pic}\,(F)\cong p^*\,\mathrm{Pic}\,(C)\oplus\mathbb{Z}S$,

где S — класс нек-рого сечения,

б) $q(F)=g$, $p_g(F)=0$, $P_n(F)=0$

для любого $n\geqslant 2$, и

$$K_F^2=8(1-g),$$

где g — род C, $q(F)=\dim H^1(F,\mathscr{O}_F)$ — иррегулярность, $P_g(F)=\dim H^2(F,\mathscr{O}_F)$ — геометрич. род, $P_n(F)=\dim H^0(F,\mathscr{O}_F(nK_F))$ есть n-кратный род, K_F — канонич. дивизор поверхности F.

5) Если F — геометрически Л. п. с базой C, S — класс нек-рого сечения морфизма $p: F\to C$, то существует такой обратимый пучок $\mathscr{L}$ на C, что обратимый пучок $\mathscr{M}=\mathscr{O}_F(S)\otimes p^*\mathscr{L}$ определяет изоморфное вложение $\varphi_{\mathscr{M}}: F\to P^N$, при к-ром слои морфизма p отображаются на прямые, лежащие на $F'=\varphi_{\mathscr{M}}(F)$ и заметающие F', т. е. F' является Л. п. в обычном смысле.

Л. п. составляют отдельный класс в классификации Энрикеса алгебраич. поверхностей (см. [1], [2], [3]). Они характеризуются любым из следующих эквивалентных критериев линейчатости (см. [1], [3], [4], [5], [7]):

1) кодаиры размерность $\varkappa(F) = -\infty$;

2) n-кратный род $P_n(F) = 0$ для $n = 12$;

3) для нек-рой (равносильно для любой) *минимальной модели* F^* поверхности F выполняется условие обрыва присоединения, т. е. для любого дивизора $D \in \mathrm{Div}(F^*)$ существует такое целое число n_0, что линейная система $|D + nK_F|$ пуста для всех $n \geqslant n_0$, где K_F — канонич. дивизор;

4) на нек-рой (равносильно на *любой*) минимальной модели F^* существует кривая E на F^* с $(E \cdot K_{F^*}) < 0$.

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Beauville A., «Astérisque», 1978, № 54; [3] Bombieri E., Husemoller D., «Proc. Symp. Pure Math.», 1975, v. 29, p. 329—420; [4] Bombieri E., Mumford D., в кн.: Complex analysis and algebraic geometry, Camb., 1977, p. 23—42; [5] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949; [6] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y. — Hdlb. — B., 1977; [7] Kodaira K., «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, № 4, p. 1048—66.

В. А. Исковских.

ЛИНЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО — многообразие нечетной размерности, возникающее как пространство орбит изометричных свободных действий циклич. групп $\mathbb{Z}_h$ на сфере S^{2n-1}. Удобно взять в качестве S^{2n-1} единичную сферу в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, в к-ром фиксирован базис.

Пусть $\mathbb{Z}_h$ действует на каждой координате z_k умножением на $\zeta_k = e^{\frac{2\pi i}{h} m_k}$, где m_k обратимо по модулю h, т. е. существуют числа l_k такие, что $m_k l_k \equiv 1 (h)$. Это задает изометричное и свободное (благодаря условию обратимости $m_i \bmod h$) действие $\mathbb{Z}_h$ на S^{2n-1}, причем любое такое действие имеет описанный вид в подходящей системе координат. *Рейдемейстера кручение*, отвечающее корню ζ h-й степени из единицы, определяется для Л. п. $L = S^{2n-1}/\mathbb{Z}_h$, построенного этим способом, формулой $\pm\zeta^q \prod_{k=1}^{h} (\zeta^{l_k} - 1)$. Любое кусочно линейное гомеоморфное ему Л. п. $\overline{L}$ должно иметь равное (с точностью до $\pm\zeta^q$) кручение и оказывается, что наборы чисел $\{l_k\}$ и $\{\overline{l}_k\}$ должны совпадать. Таким образом, эти наборы характеризуют Л. п. однозначно с точностью до кусочно линейного гомеоморфизма и даже до изометрии, а с другой стороны, благодаря топологич. инвариантности кручения — и с точностью до гомеоморфизма. Л. п. асферично до размерности $2n-2$ (т. е. $\pi_i L = 0$, $2 \leqslant i \leqslant 2n-2$), а фундаментальная группа равна $\mathbb{Z}_h$ ввиду того факта, что универсальным накрывающим для $\overline{L}$ служит сфера S^{2n-1}. Гомологии L совпадают до размерности $2n-2$ с гомологиями группы $\mathbb{Z}_h$, т. е. равны $\mathbb{Z}_h$ во всех размерностях от 2 до $2n-2$ и $H_0(L) = H_{2n-1}(L) = \mathbb{Z}$. Прямой предел пространств L дает *Эйленберга — Маклейна пространство* типа $K(\mathbb{Z}_h, n)$. Два Л. п. гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают *зацепления коэффициенты* $l(a^i, a^{n-i}) \in Q/\mathbb{Z}$, где a — образующая группы двумерных когомологий. С помощью этих инвариантов устанавливается существование среди Л. п. асимметричных многообразий.

В трехмерном случае Л. п. совпадают с многообразиями, имеющими *Хегора диаграмму* рода 1, и поэтому они являются *Зейферта многообразиями*. Фундаментальную область действия $\mathbb{Z}_h$ на S^3 удобно представлять себе в виде «линзы» — объединения шарового сегмента с его зеркальным образом — откуда и возникло название Л. п.

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избранные труды, т. 2, 1972, с. 728; [2] де Рам Ж., «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 737—43; [3] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.—Л., 1938; [4] Milnor J., Burlet O., в кн.: Essays on Topology and Related topics, B., 1970, p. 12—17.

А. В. Черкавский.

ЛИНИЯ, к р и в а я,— геометрическое понятие, точное и в то же время достаточно общее определение

к-рого представляет значит. трудности и осуществляется в разных разделах геометрии различно.

В рамках элементарной геометрии понятие Л. не получает отчетливой формулировки и иногда определяется как «длина без ширины» или как «граница поверхности». По существу в элементарной геометрии изучение Л. сводится к рассмотрению примеров (прямая, отрезок, ломаная, окружность и др.). Не располагая общими методами, элементарная геометрия довольно глубоко проникла в изучение свойств конкретных Л. (конич. сечения, нек-рые алгебраич. Л. высших порядков и трансцендентные Л.), применяя в каждом случае специальные приемы.

В аналитич. геометрии Л. на плоскости определяется как множество точек, координаты к-рых удовлетворяют уравнению $F(x, y)=0$. При этом на функцию F должны быть наложены ограничения так, чтобы, с одной стороны, уравнение это имело бесконечное множество решений и, с другой стороны, чтобы это множество решений не заполняло «куска плоскости».

Важный класс Л. составляют те, для к-рых функция $F(x, y)$ есть многочлен от двух переменных; в этом случае Л., определяемая уравнением $F(x, y)=0$, наз. а л г е б р а и ч е с к о й. Алгебраич. Л., задаваемые уравнением 1-й степени, суть п р я м ы е. Уравнение 2-й степени, имеющее бесконечное множество решений, определяет э л л и п с, г и п е р б о л у, п а р а б о л у или Л., распадающуюся на две прямые. Алгебраич. Л., определяемые уравнениями высших степеней, рассматриваются в алгебраич. геометрии. При этом большую стройность приобретает их теория, если рассмотрение ведется на комплексной проективной плоскости. В этом случае алгебраич. Л. определяется уравнением вида

$$F(x^1, x^2, x^3)=0,$$

где F — однородный многочлен трех переменных, являющихся проективными координатами точек.

Для тех разделов математики, в к-рых господствуют методы теории функций (анализ, дифференциальная геометрия и др.), естественное определение Л.— задание ее п а р а м е т р и ч е с к и м и у р а в н е н и я м и. Так, в случае плоскости, Л., заданная параметрич. уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции, определенные на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$, есть множество точек (x, y), соответствующих всевозможным значениям параметра t при условии, что эти точки рассматриваются в определенном порядке: если точка M_1 соответствует значению параметра t_1, а точка M_2 — значению t_2, то M_1 считается предшествующей M_2 при $t_1<t_2$; точки, отвечающие различным значениям параметра, считаются различными. Уравнения $x=\varphi_1(t_1)$, $y=\psi_1(t_1)$, $t_1\in[a_1, b_1]$, задают ту же Л., что и уравнения (1), если существует такой гомеоморфизм $\lambda(t_1)=t$ отрезка $[a_1, b_1]$ на отрезок $[a, b]$, $\lambda(a_1)=a$, $\lambda(b_1)=b$, что $\varphi(\lambda(t_1))=\varphi_1(t_1)$ и $\psi(\lambda(t_1))$ $\psi_1(t_1)$. Аналогично Л. в произвольном топологич. пространстве X определяется параметрич. уравнением вида $x=\varphi(t)$, где φ — функция действительного переменного t, непрерывная на отрезке $[a, b]$, значения к-рой суть точки x пространства X.

Кроме такого подхода существует и другая точка зрения (К. Жордан, C. Jordan, 1882) на определение Л. параметрич. уравнениями: Л. наз. множество точек плоскости, координаты к-рых суть непрерывные функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ параметра t, заданные на отрезке $[a, b]$; теперь точки, соответствующие различным значениям параметра, но имеющие одни и те же координаты, уже не считаются различными, и множество, составляющее Л., уже не рассматривается как упоря-

доченное значениями t. Это определение обобщается на любое топологич. пространство: множество точек топологич. пространства, являющееся непрерывным образом отрезка, наз. жордановой кривой.

Однако построены такие непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что множество точек, координаты к-рых определяются этими функциями, заполняют квадрат $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ (см. *Пеано кривая*). Более общо, всякий локально связный континуум (т. е. континуум, каждая точка к-рого обладает сколь угодно малой связной окрестностью) является непрерывным образом отрезка (теорема Мазуркевича). Таким образом, не только квадрат, но и куб любого числа измерений и даже бесконечномерный гильбертов кирпич являются непрерывными образами отрезка.

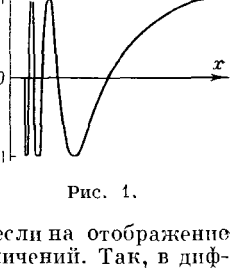


Рис. 1.

Вышеизложенное показывает, что Л. не может быть определена как непрерывный образ отрезка, если на отображение не наложить дополнительных ограничений. Так, в дифференциальной геометрии эти ограничения выражаются в том, что на функции, фигурирующие в параметрическом задании Л., налагаются условия существования производных различных порядков. С другой стороны, существуют континуумы, которые естественно рассматривать как Л., но к-рые, не будучи локально связными, не являются непрерывными образами отрезка. Таков, напр., континуум, определяемый условиями: $y = \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant 1$, $x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ (рис. 1).

Общее определение Л. для случая плоскости было дано (Г. Кантор, G. Cantor, 1870-е гг.) в связи с созданием теории точечных множеств. Плоский континуум, в любой окрестности каждой точки к-рого имеются точки плоскости, не принадлежащие континууму, наз. канторовой кривой. Важный пример канторовой кривой доставляет ковер Серпиньского, строящийся следующим образом. Квадрат Q со стороной 1 делят на девять равных квадратов прямыми, параллельными его сторонам, и удаляют все

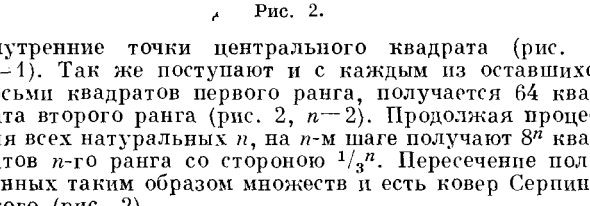


Рис. 2.

внутренние точки центрального квадрата (рис. 2, $n-1$). Так же поступают и с каждым из оставшихся восьми квадратов первого ранга, получается 64 квадрата второго ранга (рис. 2, $n-2$). Продолжая процесс для всех натуральных n, на n-м шаге получают 8^n квадратов n-го ранга со стороной $1/3^n$. Пересечение полученных таким образом множеств и есть ковер Серпиньского (рис. 2).

Какова бы ни была канторова кривая L, она может быть топологически вложена в ковер Серпиньского S, т. е. в S содержится континуум L', гомеоморфный Л. L. Ковер Серпиньского является локально связным континуумом и потому может быть получен как непрерывный образ отрезка.

В топологии пользуются понятием Л., введенным в 1921 П. С. Урысоном и являющимся наиболее общим (но не чрезмерно). Определение Л. формулируется следующим образом: линией наз. одномерный кон-

тинуум, т. е. связное компактное метрич. пространство C, каждая точка к-рого обладает сколь угодно малой окрестностью с границей размерности нуль. Другими словами, при любом $\varepsilon>0$ пространство C может быть представлено в виде суммы конечного числа замкнутых множеств диаметра, меньшего ε, обладающих тем свойством, что никакие три из этих множеств не имеют общей точки. Ковер Серпиньского удовлетворяет этому определению Л., так что всякая канторова кривая является также и Л. в смысле П. С. Урысона. Обратно, если плоский континуум является Л. в смысле П. С. Урысона, то он будет канторовой кривой. Определение Л., данное П. С. Урысоном, является внутренним: оно характеризуется лишь свойствами самого пространства C и не зависит от того, рассматривается ли это пространство само по себе или как подмножество другого топологич. пространства.

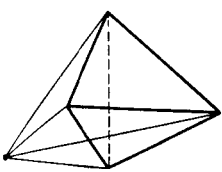


Рис. 3.

Существуют Л., к-рые не гомеоморфны никакому подмножеству плоскости. Такова, напр., Л., лежащая в трехмерном пространстве и состоящая из шести ребер тетраэдра и четырех отрезков, соединяющих какую-либо точку пространства, не лежащую ни на одной из его граней, с его вершинами (рис. 3). Но всякая Л. (в смысле П. С. Урысона) гомеоморфна нек-рому подмножеству трехмерного евклидова пространства (теорема Менгера). Континуум M, обладающий тем свойством, что какова бы ни была Л. C, в M найдется подконтинуум C', гомеоморфный континууму C, строится следующим образом. Куб K с ребром 1 делится плоскостями, параллельными его граням, на 27 равных кубов. Из куба K удаляются центральный куб и все прилежащие к нему по двумерным граням кубы этого подразделения. Получается множество K_1, состоящее из 20 оставшихся замкнутых кубов первого ранга. Поступая точно так же с каждым из кубов первого ранга, получим множество K_2, состоящее из 400 кубов второго ранга (рис. 4). Продолжая этот процесс бесконечно, получим последовательность континуумов $K_1\supset K_2\supset K_3\supset\ldots$, пересечение к-рых есть одномерный континуум M, наз. универсальной кривой Менгера.

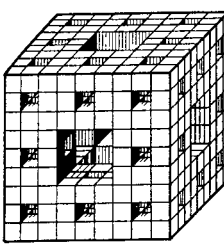


Рис. 4.

В исследовании Л. важную роль играет понятие индекса ветвления. Л. C в точке x имеет индекс ветвления $\mathfrak{m}$, если каково бы ни было число $\varepsilon>0$, существует открытое множество U диаметра, меньшего, чем ε, содержащее точку x, граница к-рого есть множество мощности, не превосходящей $\mathfrak{m}$, но для достаточно малого $\varepsilon'>0$ граница всякого открытого множества, содержащего точку x, диаметр к-рого меньше ε', имеет мощность, не меньшую, чем $\mathfrak{m}$. Точки Л. относительно их индекса ветвления классифицируются следующим образом.

1) Точки с индексом ветвления n, n — натуральное.

2) Точки неограниченного индекса ветвления ω. (Точка x Л. C имеет индекс ветвления ω, если каково бы ни было число $\varepsilon>0$, существует открытое множество, содержащее точку x, с диаметром, меньшим, чем ε, граница к-рого состоит из конечного множества точек; но каково бы ни было натуральное n, найдется такое $\varepsilon_n>0$, что граница всякого открытого множества,

содержащего x и имеющего диаметр меньший, чем ε_n, состоит не менее, чем из n точек.)

3) Точки счетного индекса ветвления $\aleph_0$.

4) Точки континуального индекса ветвления $\mathfrak{c}$.

Точка Л. C, индекс ветвления к-рой больше двух, наз. точкой ветвления; точка, индекс ветвления к-рой равен единице, наз. концевой точкой.

Примеры. а) Отрезок во всех своих внутренних точках имеет индекс ветвления, равный двум; индекс ветвления концов отрезка равен единице. б) Окружность в каждой своей точке имеет индекс ветвления два. в) Л., состоящая из n прямолинейных отрезков,

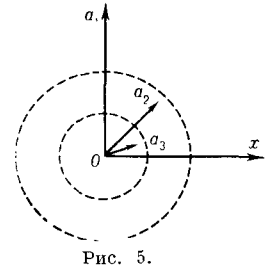


Рис. 5.

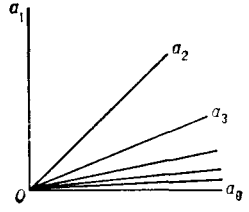


Рис. 6.

исходящих из одной точки O, имеет в точке O индекс ветвления n. г) Л., состоящая из отрезков Oa_1, Oa_2, ..., Oa_n, ..., выходящих из начала координат O, имеющих длины $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, ..., $\frac{1}{2^n}$, ... и образующих с осью Ox углы, соответственно равные $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2^2}$, ..., $\frac{\pi}{2^n}$, ..., имеет в точке O неограниченно возрастающий индекс ветвления ω (рис. 5). д) Л., состоящая из отрезка Oa_0 длины 1 и отрезков Oa_1, Oa_2, ..., Oa_n, ... длины 1, выходящих из точки O и образующих с отрезком Oa_0 углы, соответственно равные $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2^2}$, ..., $\frac{\pi}{2^n}$, ..., имеет в каждой точке отрезка Oa_0 счетный индекс ветвления $\aleph_0$ (рис. 6). е) Л., состоящая из отрезков, соединяющих точку O со всеми точками *канторова множества*, лежащего на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$,

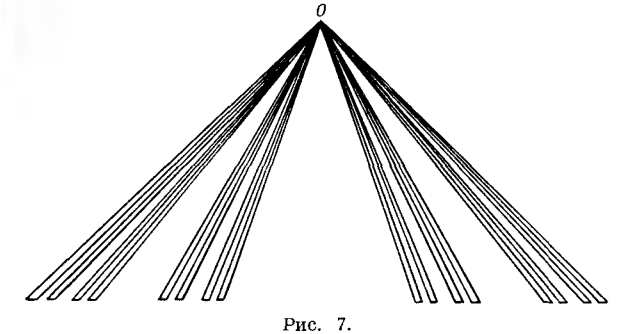


Рис. 7.

$y=0$, имеет во всех своих точках континуальный индекс ветвления $\mathfrak{c}$ (рис. 7). ж) Ковер Серпиньского также имеет во всех своих точках континуальный индекс ветвления.

Если у Л. совсем нет точек ветвления, т. е. если в каждой точке Л. индекс ветвления равен 1 или 2, то эта Л. есть либо простая дуга — топологич. образ отрезка, либо простая замкнутая линия — топологич. образ окружности. При этом, если индекс ветвления Л. во всех точках равен 2, то это — простая замкнутая Л., если же у Л., не имеющей

точек ветвления, есть концевые точки (при этом оказывается, что их непременно две), то она будет простой дугой. Если Л. имеет лишь конечное число точек ветвления, причем индекс ветвления каждой из них также конечен, то такая Л. может быть разбита на конечное число простых дуг, не имеющих попарно никаких других общих точек, кроме своих концов.

Окружность является единственной Л., все точки к-рой имеют один и тот же конечный индекс ветвления 2; других Л., имеющих во всех точках один и тот же конечный индекс ветвления, нет, более того, если все точки Л. L имеют индекс ветвления больший или равный n, то на Л. L найдется точка, индекс ветвления к-рой больше или равен $2n-2$, и при всяком натуральном n существует Л., состоящая только из точек, имеющих индекс ветвления n и $2n-2$ (теорема Урысона). Пример Л., состоящий только из точек с индексом ветвления 3 и 4, строится следующим образом.

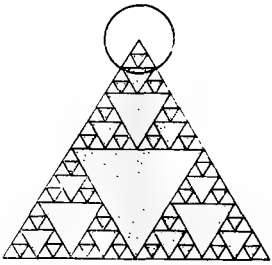


Рис. 8.

В равностороннем треугольнике со стороной 1 проводятся три средние линии, и из него выбрасываются внутренние точки треугольника, ограниченного средними Л. С каждым из оставшихся трех треугольников первого ранга проделывается аналогичная операция, в результате к-рой получается девять треугольников второго ранга. Поступая с ними так же, получим 27 треугольников третьего ранга и так далее для всякого натурального n. Пересечение полученных в результате выполнения этих операций множеств есть линия C (рис. 8). Л., состоящая из точек с индексом ветвления 3 и 4,— это два континуума C_1 и C_2, каждый из к-рых гомеоморфен Л. C и к-рые не имеют никаких других общих точек, кроме точек, соответствующих вершинам основного треугольника континуума C.

Существуют также Л., имеющие во всех своих точках неограниченный индекс ветвления, счетный индекс ветвления и континуальный индекс ветвления.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 2, М., 1969; [3] Menger K., Kurventheorie, Lpz.— B., 1932; [4] Пархоменко А. С., Что такое линия, М., 1954; [5] Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 2, М.— Л., 1951; [6] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937.

А. С. Пархоменко.

ЛИНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА — плоская линия, декартовы прямоугольные координаты к-рой удовлетворяют алгебраич. уравнению 2-й степени

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \quad (*)$$

Уравнение (*) может и не определять действительного геометрич. образа, но для сохранения общности в таких случаях говорят, что оно определяет мнимую Л. в. п. В зависимости от значений коэффициентов уравнения (*) оно может быть преобразовано с помощью параллельного переноса и поворота системы координат на некоторый угол к одному из 9 приведенных ниже канонич. видов, каждому из к-рых соответствует определенный класс линий. Именно,

нераспадающиеся линии:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *эллипсы*,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *гиперболы*,

$y^2=2px$ *параболы*,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ мнимые эллипсы;

распадающиеся линии:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ пары мнимых пересекающихся прямых,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ пары действительных пересекающихся прямых,

$x^2-a^2=0$ пары действительных параллельных прямых,

$x^2+a^2=0$ пары мнимых параллельных прямых,

$x^2=0$ пары совпадающих действительных прямых.

Л. в. п., имеющие единственный центр симметрии (центр Л. в. п.), наз. центральной линией. Координаты центра Л. в. п. определяются решением системы:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}&=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}&=0.\end{aligned}\right\}$$

Л. в. п. без центра симметрии или с неопределенным центром наз. нецентральной линией.

Исследование вида Л. в. п. может быть проведено без приведения общего уравнения к канонич. виду. Это достигается совместным рассмотрением значений т. н. основных инвариантов Л. в. п.— выражений, составленных из коэффициентов уравнения (*), значения к-рых не меняются при параллельном переносе и повороте системы координат ($a_{ij}=a_{ji}$):

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{vmatrix},\quad S=a_{11}+a_{22}$$

и семиинварианта (полуинварианта):

$$A=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}\\ a_{32}a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}a_{13}\\ a_{31}a_{33}\end{vmatrix},$$

к-рый является инвариантом относительно поворота системы координат (см. табл.).

Многие важные свойства Л. в. п. могут быть изучены при помощи характеристической квадратичной формы

$$\Phi(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2,$$

соответствующей уравнению (*). В частности, нераспадающаяся Л. в. п. оказывается эллипсом, мнимым эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, будет ли $\Phi(x,\ y)$ положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной или полуопределенной квадратичной формой, что устанавливается по корням ее характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0 \text{ или } \lambda^2-S\lambda+\delta=0.$$

Три основных инварианта Δ, δ и S определяют Л. в. п. (кроме случая параллельных прямых) с точностью до движения евклидовой плоскости: если соответствующие инварианты Δ, δ и S двух линий равны, то такие линии могут быть совмещены движением. Иными словами, эти линии эквивалентны по отношению к группе движений плоскости (метрически эквивалентны).

Существует классификация Л. в. п. с точки зрения других групп преобразований. Так, относительно более общей (чем группа движений) группы аффинных преобразований эквивалентными являются любые две линии, определяемые уравнениями одного канонич. вида. Напр., две подобные Л. в. п. считаются эквивалентными. Связи между различными аффинными классами Л. в. п. позволяет установить классификация с точки зрения проективной геометрии, в к-рой беско-

нечно удаленные элементы не играют особой роли. Действительные нераспадающиеся Л. в. п.: эллипсы, гиперболы и параболы образуют один проективный класс — класс действительных овальных линий (овалов). Действительная овальная линия является эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, как она расположена относительно бесконечно удаленной прямой: эллипс пересекает несобственную прямую в двух мнимых точках, гипербола — в двух различных действительных точках, парабола касается несобственной прямой; существуют проективные преобразования, переводящие эти линии одна в другую. Существует 5 классов проективной эквивалентности Л. в. п. Именно,

невырождающиеся линии (x_1, x_2, x_3 — однородные координаты):

$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ действительный овал,

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ мнимый овал;

вырождающиеся линии:

$x_1^2-x_2^2=0$ пара действительных прямых,

$x_1^2+x_2^2=0$ пара мнимых прямых,

$x_1^2=0$ пара совпадающих прямых.

Кроме аналитич. способа определения Л. в. п. (заданием уравнения) существуют и другие способы. Напр., эллипс, гипербола и парабола могут быть получены как сечения конич. поверхности плоскостью (см. *Конические сечения*).

Исследование вида линий второго порядка с помощью инвариантов

Центральные линии $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	Нераспадающиеся линии $\Delta \neq 0$	$\frac{\Delta}{S} < 0$	Действительные эллипсы	Распадающиеся линии $\Delta = 0$: Пары мнимых пересекающихся прямых (действительная точка)
			$\frac{\Delta}{S} > 0$	Мнимые эллипсы	
	$\delta < 0$	Гиперболы			Пары действительных пересекающихся прямых
Нецентральные линии $\delta = 0$	$\delta = 0$	Параболы	$A > 0$		Пары мнимых параллельных прямых
			$A < 0$		Пары действительных параллельных прямых
			$A = 0$		Пары совпадающих параллельных прямых

Лит.: [1] Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, М., 1968; [2] Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 11 изд., М., 1972. *А. Б. Иванов.*

ЛИННИКА ДИСКРЕТНЫЙ ЭРГОДИЧЕСКИЙ МЕТОД — специальный метод аналитич. теории чисел, использующий некоммутативную арифметику и сводящий вопросы равномерности распределения целых точек многообразия к рассмотрению «потоков» целых точек на этом многообразии и операторов, к-рые создают эти «потоки». Основы метода заложены Ю. В. Линником [1]. Л. д. э. м. получил существенное развитие и приобрел «эргодические» черты по характеру своих результатов [2], [3]. Дискретный эргодич. метод применялся к вопросам представления чисел тернарными

квадратичными формами и к вопросам асимптотич. распределения целых точек по поверхности соответствующего эллипсоида или гиперболоида. Наиболее известный результат — теорема Линника об асимптотич. равномерности распределения целых точек по поверхности сферы растущего радиуса (см. [2] гл. IV).

Лит.: [1] Линник Ю. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1940, т. 4, № 4—5, с. 363—402; [2] его же, Эргодические свойства алгебраических полей, Л., 1967; [3] Малышев А. В., О представлении целых чисел положительными квадратичными формами, М. —Л., 1962 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 65); [4] его же, «Зап. науч. семинаров ЛОМИ», 1975, т. 50, с. 179—86; [5] его же, «Acta arithm.», 1975, v. 27, p. 555—98; [6] Peters M., там же, 1977, v. 34, p. 57—80. *А. В. Малышев.*

ЛИПШИЦА КОНСТАНТА для заданной в промежутке (a, b) функции $f(x)$ — нижняя грань постоянных $M>0$ в *Липшица условии*

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|^{\alpha},\ 0<\alpha\leqslant 1,\ x,\ y\in(a,\ b).$$

А. В. Ефимов.

ЛИПШИЦА УСЛОВИЕ — ограничение на поведение приращения функции. Если для любых точек x и x', принадлежащих отрезку $[a, b]$, приращение функции f удовлетворяет неравенству

$$|f(x)-f(x')|\leqslant M|x-x'|^{\alpha}, \qquad (*)$$

где $0<\alpha\leqslant 1$ и M — нек-рая постоянная, то говорят, что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, и пишут: $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, или $f\in \mathrm{Lip}_M\alpha$, или $f\in H^{\alpha}(M)$. Каждая функция, удовлетворяющая при каком-либо $\alpha>0$ Л. у. на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на $[a, b]$, а функции, удовлетворяющие Л. у. степени $\alpha=1$,— абсолютно непрерывны. Функция, имеющая на $[a, b]$ ограниченную производную, удовлетворяет на $[a, b]$ Л. у. с любым $\alpha\leqslant 1$.

Л. у. (*) эквивалентно условию

$$\omega(\delta,\ f)\leqslant M\delta^{\alpha},$$

где $\omega(\delta,\ f)$ — *непрерывности модуль* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Л. у. впервые рассматривалось Р. Липшицем [1] в качестве достаточного условия для сходимости ряда Фурье функции $f(x)$. Условие (*) в случае $0<\alpha<1$ наз. также *Гёльдера условием* степени α.

Лит.: [1] Lipschitz R., «J. reine und angew. Math.», 1864, Bd 63, S. 296—308; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1965; [3] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949. *А. В. Ефимов.*

ЛИПШИЦА УСЛОВИЕ интегральное — ограничение на поведение приращения функции в интегральной метрике. Функция $f(x)$ из пространства $L^p(a, b)$ с $p\geqslant 1$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ интегральному Липшица условию порядка $\alpha>0$ с постоянной $M>0$, если

$$\left\{\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}\leqslant Mh^{\alpha} \qquad (*)$$

при всех $h\in(0, b-a)$. В этом случае пишут $f\in \mathrm{Lip}_M(\alpha, p)$, или $f\in H_p^{\alpha}(M)$, или $f\in \mathrm{Lip}\,(\alpha, p)$, или $f\in H_p^{\alpha}$. Для случая периодич. функций (с периодом $b-a$) интегральное Л. у. определяется аналогично, только в неравенстве (*) верхний предел интегрирования $b-h$ следует заменить на b.

Лит.: [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1965; [2] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [3] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральное представление функций и теоремы вложения, М., 1975. *А. В. Ефимов.*

ЛИСП — *алгоритмический язык*, разработанный в 1959—62 Дж. Маккарти [1]. Характеризуется весьма однородным синтаксисом, в к-ром как программа, так и ее объекты выглядят одинаково в виде т. н. списочной структуры — *графа*, в частности *дерева*, висячими вершинами к-рого являются атомы (см. ниже),

а остальными вершинами — с п и с к и, т. е. последовательности (возможно, пустые) элементов (списков или атомов), разделенных пробелами и взятых в скобки, напр.

$$(A\ X\ (35\ B)\ 44Z).$$

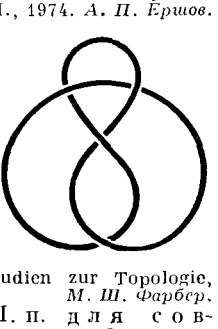
А т о м ы — это непустые слова в алфавите языка, не содержащие скобок, пробелов и обозначающие переменные, константы, функции или самих себя. Списки и атомы, для к-рых имеет смысл говорить об их значениях, наз. в ы р а ж е н и я м и. Первым элементом списка — выражения E — является атом, обозначающий функцию, или список, изображающий функцию. Остальные элементы списка E — это выражения, к-рые берутся в качестве аргументов функции, а значением E является результат взятия функции от ее аргументов. Значения переменных и константы понимаются обычным образом. Изображение функции имеет вид списка (lambda ($x1$, . . ., xn) exp), где lambda — фиксированный атом, ($x1$, . . ., xn) — список связанных переменных, обозначающих аргументы функции, а exp — выражение, вычисляющее значение функции и содержащее в себе $x1$, . . ., xn как свободные переменные.

Среди фундаментальных функций Л. имеются: car (l) и cdr (l), выдающие соответственно первый элемент списка l и его «хвост»; quote (l), выдающая l в качестве своего значения; cons (l m), «продолжающая» список l списком m; cond ((p1 e1) (p2 e2)), выбирающая в качестве своего значения значение выражений $e1$ или $e2$ в зависимости от того, какое по порядку из предикатных выражений $p1$ и $p2$ оказывается истинным. Фундаментальными предикатами являются: atom (l), проверяющий, является ли l атомом; eq ($l1$ $l2$), истинный, если $l1$ и $l2$ — равные друг другу атомы; null (l), истинный, если l оказывается пустым списком. Фундаментальные функции и предикаты образуют набор средств, достаточный, чтобы реализовать в Л. и другие конструкции алгоритмич. языков, напр. конструкцию присваивания переменной значения выражения или связывания с атомом обозначаемого им изображения функции. Программой в Л. является произвольный список, образованный выражениями.

Способность Л. легко образовывать произвольные списочные структуры, в частности с помощью рекурсивных определений, а также формировать выражения в ходе вычислений обусловила широкое распространение Л. как средства экспериментального программирования сложных логич. задач.

Лит.: [1] McCarthy J., Recursive functions of symbolic expressions and their computation by machine, Pt. 1, CACM, 3 (Apr. 1960), p. 184; [2] Лавров С. С., Силагадзе Г. С., Автоматическая обработка данных. Язык лисп и его реализация, М., 1978; [3] Хигман Б., Сравнительное изучение языков программирования, пер. с англ., М., 1974. *А. П. Ершов.*

ЛИСТИНГА УЗЕЛ — один из простейших петривиальных узлов (рис.). Л. у. обозначается символом 4_1 (см. *Узлов таблица*) и наз. иногда восьмеркой или четырехкратным узлом. Группа Л. у. имеет следующее копредставление $\langle x, y : yx^{-1}\ yxy^{-1} = x^{-1}yxy^{-1}x\rangle$, а полином Александера равен $\Delta_1 = t^2 - 3t + 1$. Рассмотрен И. Листингом [1].



Лит.: [1] Listing I. B., Vorstudien zur Topologie, Gött., 1847. *М. Ш. Фарбер.*

ЛИТЛВУДА ПРОБЛЕМА — 1) Л. п. для совместных диофантовых приближений — вопрос о существовании для любых действительных чисел α, β, $\varepsilon > 0$ натурального числа n такого, что $n\|\alpha n\|\|\beta n\| < \varepsilon$, где $\|\alpha\|$ – расстояние от α до ближайшего целого числа. В нек-рых случаях, напр. при рациональных α и β, для чисел α и β, одно из к-рых

представимо цепной дробью с неограниченными элементами, Л. п. имеет положительное решение.

2) Л. п. для интегралов — утверждение о том, что для произвольной возрастающей последовательности M натуральных чисел m_k, $k=1, 2, \ldots$, выполняется неравенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} \exp(2\pi i m_k x) \right| dx > f(n), \qquad (*)$$

где $f(n)=C \ln n$, $C>0$ — абсолютная константа, $n>n_0$. Получены либо более слабые по сравнению с (*) оценки для произвольных последовательностей M, либо оценки, близкие к (*) или даже совпадающие с этой оценкой, но для специальных последовательностей M.

Л. п. сформулированы Дж. Литлвудом (см. [1]); в общих случаях обе Л. п. не решены (1982).

Лит.: [1] Hardy G. H., Littlewood J. E., «J. London Math. Soc.», 1948, v. 23, p. 163—68; [2] Касселс Дж.- В.- С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965.

Б. М. Бредихин.

ЛИУВИЛЛЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — запись обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + (q(x)+\lambda r(x))\, y = 0 \qquad (1)$$

в виде

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + (\lambda + \varphi(\xi))\,\eta = 0, \qquad (2)$$

где λ — параметр. Если $p(x)\in C^1$, $q(x)\in C$, $r(x)\in C^2$ и $r(x)>0$, то уравнение (1) приводится к Л. н. ф. (2) с помощью подстановки

$$\eta(\xi) = \Phi(x)\, y(x), \quad \xi = \int_a^x \sqrt{r(t)}\, dt,$$

$$\Phi(x) = \sqrt[4]{r(x)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^x p(t)\, dt\right),$$

к-рая наз. преобразованием Лиувилля (введена в [1]). Л. н. ф. играет важную роль при исследовании асимптотич. поведения решений уравнения (1) для больших значений параметра λ или аргумента, при исследовании асимптотики собственных функций и собственных значений задачи Штурма — Лиувилля (см. [3]).

Лит.: [1] Liouville J., «J. math. pures et appl.», 1837, t. 2, p. 16—35; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, пер. с англ., т. 1-2, М., 1960-61.

М. В. Федорюк.

ЛИУВИЛЛЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, уравнения геодезических к-рой допускают квадратичный интеграл $a_{ij}du^i du^j$, причем тензор a_{ij} отличен от метрич. тензора g_{ij} поверхности. Напр., поверхность постоянной гауссовой кривизны — Л. п. Для того чтобы поверхность допускала *геодезическое отображение* на плоскость, необходимо и достаточно, чтобы она являлась Л. п. (Дини теорема). См. также *Лиувилля сеть*.

И. Х. Сабитов.

ЛИУВИЛЛЯ СЕТЬ — сеть линий на поверхности, в параметрах к-рой линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = (U+V)(du^2+dv^2),$$

где $U=U(u)$, $V=V(v)$. В каждом четырехугольнике, образованном двумя парами линий из различных семейств, две геодезич. диагонали имеют равную длину. Поверхности, несущие Л. с., являются *Лиувилля поверхностями*. К ним относятся, напр., центральные поверхности второго порядка. Л. с. введена Ж. Лиувиллем (J. Liouville, 1846, см. [1] приложение 3).

Лит.: [1] Monge G., Application de l'analyse à la géométrie, 5 éd., P., 1850; [2] Шуликовский В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963.

В. Т. Базылев.

ЛИУВИЛЛЯ ТЕОРЕМА — 1) Л. т. об ограниченных целых аналитических функциях: если целая функция $f(z)$ комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$ ограничена, т. е.

$$|f(z)| \leqslant M < +\infty, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

то $f(z)$ есть константа. Это предложение, одно из основных в теории аналитич. функций, впервые, по-видимому, опубликовано в 1844 О. Коши [1] для случая $n=1$; Ж. Лиувилль (J. Liouville) излагал его на лекциях в 1847, откуда и произошло название.

Л. т. допускает обобщения в различных направлениях. Напр., если $f(z)$ — целая функция в $\mathbb{C}^n$ и

$$|f(z)| \leqslant M(1+|z|^m), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

для нек-рого целого $m \geqslant 0$, то $f(z)$ есть многочлен по переменным $(z_1, \ldots, z_n)$ степени не выше m. Далее, если $u(x)$ — действительная гармонич. функция во всем числовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$, причем

$$u(x) \leqslant M(1+|x|^m) \ (\text{или } -u(x) \leqslant M(1+|x|^m)),$$

$x \in \mathbb{R}^n$, то $u(x)$ есть гармонич. многочлен по переменным $(x_1, \ldots, x_n)$ степени не выше m (см. также [4]).

2) Л. т. о конформных отображениях: всякое конформное отображение области евклидова пространства E^n при $n \geqslant 3$ можно представить в виде конечного числа суперпозиций простейших отображений четырех видов — переноса, подобия, ортогонального преобразования и инверсии. Доказана Ж. Лиувиллем в 1850 (см. [2] добавление 6).

Эта Л. т. выявляет бедность класса конформных отображений в пространстве, и с этой точки зрения она весьма важна в теории аналитич. функций многих комплексных переменных и в теории *квазиконформных отображений*.

Лит.: [1] Cauchy A., «C. r. Acad. sci.», 1844, t. 19, p. 1377—84; [2] Monge G., Application de l'analyse à la géométrie, 5 éd., P., 1850, p. 609—16; [3] Бицадзе А. В., *Основы теории аналитических функций комплексного переменного*, 2 изд., М., 1972; [4] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

3) Л. т. о приближении алгебраических чисел — теорема, устанавливающая, что алгебраич. иррациональности не могут слишком хорошо приближаться рациональными числами. Именно, если α — алгебраич. число степени $n \geqslant 2$, а p и $q>0$ — любые целые рациональные числа, то имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n},$$

где C — положительная константа, зависящая только от α и выражаемая в явном виде через сопряженные с α величины.

С помощью этой теоремы Ж. Лиувилль [1] впервые построил неалгебраические (трансцендентные) числа. Таким числом является, напр., число

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}},$$

представляемое рядом с быстро убывающими членами.

При $n=2$ Л. т. дает неулучшаемый результат. Для $n \geqslant 3$ Л. т. неоднократно усиливалась. В 1909 А. Туэ [2] установил, что для алгебраич. чисел α степени $n \geqslant 3$ и $\nu > \frac{n}{2}+1$ справедливо неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^{\nu}}. \qquad (*)$$

К. Зигель [3] улучшил результат А. Туэ, показав, что неравенство (*) выполняется при (s — целое)

$$\nu > \min_{1 \leqslant s \leqslant n-1} \left(\frac{n}{s+1} + s\right),$$

в частности при $\nu > 2\sqrt{n}$. Позже Ф. Дайсон [4] доказал справедливость неравенства (*) при $\nu > \sqrt{2n}$. Наконец, К. Рот [5] установил, что неравенство (*) справедливо при любом $\nu > 2$. Результат К. Рота является наилучшим в своем роде, т. к. любое иррациональное число ξ, алгебраическое или нет, имеет бесконечно много рациональных приближений p/q, удовлетворяющих неравенству

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Все указанные выше усиления Л. т. имеют один существенный недостаток — они неэффективны, а именно: методы их доказательства не позволяют установить, каким образом постоянная $C = C(\alpha, \nu)$ в неравенстве (*) зависит от величин α и ν. Получены (см. [6], [7], [8]) эффективные усиления Л. т., но лишь для значений показателя ν, мало отличающихся от n.

Лит.: [1] Liouville J., «C. r. Acad. sci.», 1844, t. 18, p. 883—85, 910—11; [2] Thue A., «J. reine und angew. Math.», 1909, Bd 135, S. 284—305; [3] Siegel C., «Math. Z.», 1921, Bd 10, S. 173—213; [4] Dyson F. J., «Acta math.», 1947, t. 79, p. 225—40; [5] Roth K. F., «Mathematika», 1955, v. 2, p. 1—20; [6] Baker A., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A», 1968, v. 263, p. 173—91; [7] Спринджук В. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, с. 991—1007; [8] Фельдман Н. И., там же, с. 973—90. *С. А. Степанов.*

4) Л. т. о сохранении фазового объема: объем V любой области G $6N$-мерного фазового пространства (p, q) (пространства компонент импульсов $p = (p_1, \ldots, p_N)$ и координат $q = (r_1, \ldots, r_N)$ каждой из N частиц классич. системы с потенциальными силами взаимодействия) не изменяется с течением времени

$$V = \int_{(G)} dp\, dq = \text{const},$$

если все точки этой области двигаются согласно уравнениям классич. механики. Утверждение является следствием того, что якобиан перехода от переменных (p, q) (в момент времени t) к переменным (p', q') (в момент времени $t' > t$) согласно уравнениям движения (напр., в форме уравнений Гамильтона) равен единице. Величина V является одним из интегральных инвариантов Пуанкаре, а Л. т.— одним из следствий их существования. Л. т. используется в статистич. механике классич. систем (см. *Лиувилля уравнение*). Л. т. доказана Ж. Лиувиллем (J. Liouville, 1851).

И. А. Квасников.

ЛИУВИЛЛЯ УРАВНЕНИЕ — уравнение движения для функции распределения $w_N(p, q; t)$ по импульсам $p = (p_1, \ldots, p_N)$ и координатам $q = (r_1, \ldots, r_N)$ N-частичной классич. системы

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} = \{H, w_N\}_{\text{кл.}} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial r_i} \frac{\partial w_N}{\partial p_i} - \frac{\partial w_N}{\partial r_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right),$$

где H — гамильтониан системы, а фигурными скобками обозначены классич. скобки Пуассона.

Если в фазовом пространстве (p, q) распределению $w_N(p, q; t)$ сопоставить плотность фазовых точек (каждая из к-рых соответствует определенному механич. состоянию данной системы N материальных точек), то в силу того, что траектории движения этих точек не пересекаются вследствие единственности решений уравнений движения механики, и того, что фазовый объем согласно *Лиувилля теореме* сохраняется, ансамбль этих точек образует в фазовом пространстве своеобразную несжимаемую жидкость, полная производная плотности к-рой w_N по времени равна нулю:

$$\frac{dw_N}{dt} = \frac{\partial w_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial w_N}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt} + \frac{\partial w_N}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0.$$

Это приводит к Л. у., если только выразить согласно *Гамильтона уравнениям* производные от координат и

импульсов через соответствующие частные производные от гамильтониана.

Л. у. используется не только при рассмотрении общих вопросов статистич. механики, связанных с выяснением микроскопической и макроскопической структур состояния системы многих тел, процессов стремления к равновесию, проблем «перемешивания» в фазовом пространстве, эргодичности и т. д., но и в конкретных исследованиях, т. к. Л. у. является исходным уравнением при построении *Боголюбова цепочки уравнений*, а следовательно, и для различного типа кинетич. уравнений, с помощью к-рых решаются уже прикладные физич. задачи.

В случае квантовых систем роль Л. у. играет уравнение движения для статистич. оператора $\rho(t)$ (*плотности матрица*), к-рое в шрёдингеровском временном представлении имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\}_{\text{кв.}} = \frac{1}{i\hbar}[H\rho - \rho H],$$

где H — оператор Гамильтона, а фигурными скобками обозначены квантовые скобки Пуассона. Это квантовое Л. у. является следствием структуры смешанного состояния (описываемой данным статистич. оператором), в к-ром каждое из составляющих его чистых квантовомеханич. состояний эволюционирует согласно *Шрёдингера уравнению*.

Лит.: [1] Голдстейн Г., Классическая механика, пер. с англ., М., 1957; [2] Уленбек Д., Форд Дж., Лекции по статистической механике, пер. с англ., М., 1965; [3] Боголюбов Н. Н., Избр. труды, т. 2, К., 1970.

И. А. Квасников.

ЛИУВИЛЛЯ ФУНКЦИЯ — арифметическая функция $\lambda(n)$, определяемая равенством

$$\lambda(n) = (-1)^{\nu(n)},$$

где $\nu(n)$ — число всех простых сомножителей n. Л. ф. тесно связана с *Мёбиуса функцией* $\mu(n)$:

$$\lambda(n) = \sum_{d^2 \mid n} \mu\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

В теории чисел важна оценка суммы

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \lambda(n)$$

при $x \to \infty$. Существует гипотеза, что

$$S(x) \ll \sqrt{x} \ln x.$$

Последний результат, полученный методом И. М. Виноградова, имеет вид

$$S(x) \ll x \exp(-c \ln^{3/5} x \ln^{-1/5} \ln x).$$

Л. ф. введена Ж. Лиувиллем (J. Liouville).

Лит.: [1] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967; [2] Чандрасекхаран К., Арифметические функции, пер. с англ., М., 1975.

А. Ф. Лаврик.

ЛИУВИЛЛЯ ЧИСЛО — действительное число α, для к-рого при любом $\nu \geqslant 1$ неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-\nu}$$

имеет бесконечно много целых решений p и q, удовлетворяющих условиям $q > 0$, $(p, q) = 1$. Трансцендентность Л. ч. вытекает из *Лиувилля теоремы*. Изучались Ж. Лиувиллем [1].

Примеры Л. ч.:

$$\alpha_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n},$$

$$\alpha_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{-3^n},$$

$$\alpha_3 = \sum_{n=1}^{\infty} (10^{n!})^{-1}.$$

Лит.: [1] Liouville J., «C. r. Acad. sci.», 1844, t. 18, p. 883—85; [2] Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952.

С. В. Котов.

ЛИУВИЛЛЯ – ОСТРОГРАДСКОГО ФОРМУЛА, Л и у в и л л я ф о р м у л а, – соотношение, связывающее *вронскиан* системы решений и коэффициенты линейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — произвольная система n решений линейной однородной системы n-го порядка

$$x' = A(t)\,x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с непрерывным на интервале I оператором $A(t)$, а

$$W(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = W(t)$$

— вронскиан этой системы решений. Л. О. ф. имеет вид

$$\frac{d}{dt} W(t) = W(t) \cdot \operatorname{Sp} A(t), \quad t \in I, \tag{2}$$

или, что то же самое,

$$W(x_1(t), \ldots, x_n(t)) =$$

$$= W(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) \cdot \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(s)\, ds, \; t, t_0 \in I; \tag{3}$$

здесь $\operatorname{Sp} A(t)$ — след оператора $A(t)$. Л.–О. ф. можно записать с помощью *Коши оператора* $X(t, t_0)$ системы (1):

$$\det X(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(s)\, ds, \; t, t_0 \in I. \tag{4}$$

Геометрический смысл соотношения (4) (или (3)) состоит в том, что в результате преобразования $X(t, t_0)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ориентированный объем любого тела увеличивается в $\exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(s) ds$ раз.

Если рассматривается линейное однородное уравнение n-го порядка

$$p_0(t)\, y^{(n)} + p_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)\, y' + p_n(t)\, y = 0 \tag{5}$$

с непрерывными на интервале I коэффициентами, причем $p_0(t) \neq 0$ при $t \in I$, то Л.–О. ф. наз. равенство

$$W(y_1(t), \ldots, y_n(t)) =$$

$$= W(y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)) \cdot \exp \left[- \int_{t_0}^{t} \frac{p_1(s)}{p_0(s)}\, ds \right], \; t, \; t_0 \in I, \tag{6}$$

где $W(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ — вронскиан системы n решений $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ уравнения (5). Л.–О. ф. (3), (6) обычно используются в случае, когда рассматриваемая система решений является фундаментальной. Напр., формула (6) позволяет найти в квадратурах общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка, если известно одно его частное нетривиальное решение.

Соотношение (6) для уравнения (5) при $n=2$ найдено Н. Абелем в 1827 (см. [1]), а при произвольном n — в 1838 Ж. Лиувиллем [2] и М. В. Остроградским [3]; равенство (3) получено Ж. Лиувиллем [2] и К. Якоби [4] (вследствие чего равенство (3) иногда наз. ф о р м у л о й Я к о б и).

Л.–О. ф. (2) допускает обобщение на нелинейную систему

$$x' = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

в предположении, что вектор-функция

$$f(t, x) = (f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$$

и матрица $\partial f / \partial x$ непрерывны. Если $\Omega_{t_0} \subset \mathbb{R}^n$ — множество конечной меры $\mu(t_0)$, а образ Ω_t этого множества при линейном отображении $X(t, t_0)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $X(t, t_0)$ — оператор Коши системы (7), имеет меру $\mu(t)$, то

$$\frac{d\mu}{dt} = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}_x f(t, x)\, dx;$$

здесь

$$\operatorname{div}_x f(t, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Отсюда вытекает теорема Лиувилля о сохранении фазового объема, имеющая важные приложения в теории динамических систем и в статистической механике: поток гладкой автономной системы

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

не меняет объем любого тела в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} f(x) = 0$ при всех x; в частности, фазовый объем сохраняется потоком *гамильтоновой системы*.

Лит.: [1] Abel N. H., «J. reine und angew. Math.», 1827, Bd 2, S. 22—30; [2] Liouville J., «J. math. pures et appl.», 1838, t. 3, p. 342—49; [3] Остроградский М. В., Полн. собр. трудов, т. 3, К., 1961, с. 124—26; [4] Jacobi K., Gesammelte Werke, Bd 4, B., 1886; [5] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974; [6] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971.

Н. Х. Розов.

ЛОБАТТО КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — наивысшей алгебраич. степени точности квадратурная формула для промежутка $[a, b]$ — $[-1, 1]$ и веса $p(x)$ 1 с двумя фиксированными узлами — концами промежутка $[-1, 1]$. Л. к. ф. имеет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong A[f(-1) + f(1)] + \sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j).$$

Узлы x_j — корни ортогонального на $[-1, 1]$ с весом $1-x^2$ многочлена $P_n^{(1,1)}(x)$ (многочлена Якоби), $A = 2/(n+1)(n+2)$, $C_j > 0$. Алгебраич. степень точности равна $2n+1$. Таблица узлов и коэффициентов Л. к. ф. для $n = 1(1)15$ (n меняется от 1 до 15 с интервалом 1) приведена в [2] (см. также [3]).

Формула установлена Р. Лобатто (см. [1]).

Лит.: [1] Lobatto R., Lessen over de differential en integral-rekening, v. 1—2, S'Gravenhage, 1851—52; [2] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; [3] Michels H. H., «Math. Comp.», 1963, v. 17, p. 237—44.

И. П. Мысовских.

ЛОБАЧЕВСКОГО ГЕОМЕТРИЯ — геометрия, основанная на тех же основных посылках, что и *евклидова геометрия*, за исключением аксиомы о параллельных (см. *Пятый постулат*). В евклидовой геометрии согласно этой аксиоме на плоскости через точку P, лежащую вне прямой $A'A$, проходит только одна прямая $B'B$, не пересекающая $A'A$. Прямая $B'B$ наз. параллельной к $A'A$. При этом достаточно потребовать, чтобы таких прямых проходило не более одной, так как существование непересекающей прямой может быть доказано путем последовательного проведения прямых $PQ \perp A'A$ и $PB \perp PQ$. В Л. г. аксиома параллельности требует, чтобы через точку P (рис. 1) проходило более

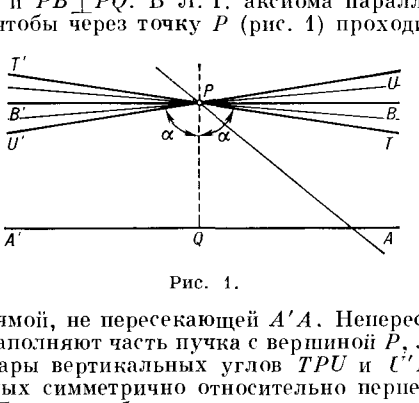


Рис. 1.

одной прямой, не пересекающей $A'A$. Непересекающие прямые заполняют часть пучка с вершиной P, лежащую внутри пары вертикальных углов TPU и $U'PT'$, расположенных симметрично относительно перпендикуляра PQ. Прямые, образующие стороны вертикальных углов, отделяют пересекающие прямые от непересекающих и сами являются тоже непересекающими. Эти граничные прямые наз. параллелями в точке P к прямой $A'A$ соответственно в двух ее направлениях: $T'T$ параллельно $A'A$ в направлении $A'A$, а $U'U$ параллельно $A'A$ в направлении AA'. Остальные непе-

рассекающие прямые наз. расходящимися прямыми с $A'A$ (подробнее см. ниже).

Угол α, $0<\alpha<\pi/2$, к-рый параллель к точке P образует с перпендикуляром PQ, $\angle QPT = \angle QPU' = \alpha$, наз. углом параллельности отрезка $PQ = a$ и обозначается через $\alpha \equiv \Pi(a)$. При $a \to 0$ угол $\alpha \to \pi/2$; при увеличении a угол α уменьшается так, что для каждого заданного α, $0<\alpha<\pi/2$, существует определенное значение a. Эта зависимость наз. *Лобачевского функцией:*

$$\Pi(a) = 2 \operatorname{arc\,tg}(e^{-a/k}),$$

где k — некоторая константа, определяющая фиксированный по величине отрезок. Она получила название радиуса кривизны пространства Лобачевского. Подобно сферич. геометрии существует бесконечное множество пространств Лобачевского, различающихся величиной k.

Евклидова геометрия может быть получена как предельный случай Л. г., когда обе параллели, проходящие через P, сливаются в одну, т. е. когда множество всех прямых, проходящих через точку P и непересекающих данную прямую $A'A$, сводится к единственной прямой. Тогда угол $\alpha = \pi/2$ при любом a. Это условие эквивалентно требованию $k = \infty$. В малых областях пространства, т. е. когда линейные размеры фигур по отношению к k бесконечно малы, все соотношения Л. г. аппроксимируются получающимися в пределе соотношениями евклидовой геометрии.

Две различные прямые по плоскости образуют пару одного из трех типов.

Пересекающиеся прямые. Расстояние от точек одной прямой до другой прямой неограниченно увеличивается при удалении точки от пересечения прямых. Если прямые не перпендикулярны, то каждая проектируется ортогонально на другую в открытый отрезок конечной величины.

Параллельные прямые. На плоскости через данную точку проходит единственная прямая, параллельная данной прямой в заданном на последней направлении. Параллель в точке P сохраняет в каждой своей точке свойство быть параллелью той же прямой в том же направлении. Параллелизм обладает взаимностью (если $a \parallel b$ в определенном направлении, то и $b \parallel a$ в соответствующем направлении) и транзитивностью (если $a \parallel b$ и $c \parallel b$ в одном направлении, то $a \parallel c$ в соответствующем направлении). В направлении параллельности параллельные неограниченно сближаются, в противоположном направлении — неограниченно удаляются (в смысле расстояния от перемещающейся точки одной прямой до другой прямой). Ортогональная проекция одной прямой на другую является открытой полупрямой.

Расходящиеся прямые. Они имеют один общий перпендикуляр, отрезок к-рого дает минимальное расстояние. По обе стороны от перпендикуляра прямые неограниченно расходятся. Каждая прямая проектируется на другую в открытый отрезок конечной величины.

Трем типам прямых соответствуют на плоскости три типа пучков прямых, каждый из к-рых покрывает всю плоскость: пучок 1-го рода — множество всех прямых, проходящих через одну точку (центр пучка); пучок 2-го рода — множество всех прямых, перпендикулярных к одной прямой (базе пучка); пучок 3-го рода — множество всех прямых, параллельных одной прямой в заданном направлении, включающее и эту прямую.

Ортогональные траектории прямых этих пучков образуют аналоги окружности евклидовой плоскости: окружность в собственном смысле; эквидистанта, или линия равных расстоя-

н и й (если не рассматривать базу), к-рая вогнута в сторону базы; п р е д е л ь н а я л и н и я, или о р и ц и к л, ее можно рассматривать как окружность с бесконечно удаленным центром. Предельные линии конгруэнтны. Они не замкнуты и вогнуты в сторону параллельности. Две предельные линии, порожденные *одним* пучком,— концентричны (высекают на прямых пучка равные отрезки). Отношение длин концентрич. дуг, заключенных между двумя прямыми пучка, убывает в сторону параллельности как показательная функция расстояния x между дугами:

$$s'/s = e^{-x/k}.$$

Каждый из аналогов окружности может скользить по самому себе, что порождает три типа однопараметрич. движений плоскости: вращение вокруг собственного центра; вращение вокруг идеального центра (одна траектория — база, остальные — эквидистанты); вращение вокруг бесконечно удаленного центра (все траектории — предельные линии).

Вращение аналогов окружностей вокруг прямой порождающего пучка приводит к аналогам сферы: собственно с ф е р е, п о в е р х н о с т и р а в н ы х р а с с т о я н и й и о р и с ф е р е, или п р е д е л ь н о й п о в е р х н о с т и.

На сфере геометрия больших окружностей — обычная сферическая геометрия; на поверхности равных расстояний — геометрия эквидистант, являющаяся планиметрией Лобачевского, но с бо́льшим значением k; на предельной поверхности — евклидова геометрия предельных линий.

Связь между длинами дуг и хорд предельных линий и евклидовы тригонометрич. соотношения на предельной поверхности позволяют вывести тригонометрич. соотношения на плоскости, то есть тригонометрич. формулы для прямолинейных треугольников. Напр., формулу для площади σ треугольника:

$$\sigma = k^2(\pi - A - B - C);$$

для длины окружности:

$$l = 2\pi k \operatorname{sh}\frac{r}{k}.$$

Тригонометрич. формулы Л. г. могут быть получены из формул сферич. геометрии заменой радиуса R на мнимое число ki.

Доказательство непротиворечивости Л. г. проводится с помощью построения интерпретации (модели). Первой такой интерпретацией явилась *Бельтрами интерпретация*, где установлено, что в евклидовом пространстве внутренняя геометрия поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны локально совпадает с Л. г. (роль прямых играют геодезические линии поверхности). Поверхность такого типа называется п с е в д о с ф е р о й.

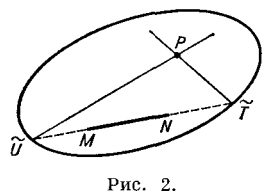


Рис. 2.

Другая интерпретация Бельтрами состоит в геодезическом отображении поверхности постоянной отрицательной кривизны во внутренность круга.

Однако интерпретации Бельтрами моделируют лишь часть плоскости Лобачевского. Первая интерпретация всей плоскости Лобачевского — *Клейна интерпретация*, в к-рой использована *проективная метрика* Кэли. В этой интерпретации (рис. 2) прямые линии пространства Лобачевского реализуются хордами абсолюта (без концевых точек), а расстояния и углы выражаются с помощью двойных отношений четверок точек (концы M, N отрезка и концевые точки $\widetilde{U}$, $\widetilde{T}$ хорды, на к-рой лежит отрезок) и соответствующих четверок прямых

[стороны угла и проходящие через вершину касательные (мнимые) к абсолюту]. Параллели через точку P к прямой MN реализуются прямыми PT и $P\tilde{U}$, пересекающими прямую MN в точках на абсолюте. Точки абсолюта моделируют «бесконечно удаленные точки», не являющиеся точками плоскости Лобачевского.

А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1882) при построении теории автоморфных функций пришел к двум другим моделям — в круге и на полуплоскости (*Пуанкаре интерпретация*). В первой модели (рис. 3) плоскость Лобачевского реализуется внутренностью круга, прямые — внутренними частями дуг окружностей, пересекающих основной круг ортогонально. Метрика вводится с помощью двойных отношений, причем величины углов на модели такие же, как и на плоскости Лобачевского (модель конформная).

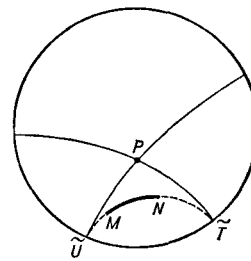


Рис. 3.

Введение тех или иных координат позволяет получать различные аналитич. модели плоскости Лобачевского. А. Пуанкаре была предложена (1887) модель Л. г. как геометрии плоских диаметральных сечений на одной из полостей двуполостного гиперболоида, к-рую можно трактовать и как геометрию сферы чисто мнимого радиуса в *псевдоевклидовом пространстве*. Указанные модели обобщаются на случай n-мерного пространства.

Как риманова геометрия, Л. г. есть геометрия риманова пространства постоянной отрицательной кривизны.

Источником создания Л. г. послужила проблема параллелей, т. е. попытки доказательства пятого постулата Евклида о параллельных. Н. И. Лобачевский (1826, опубл. 1829—30) показал, что допущение постулата, отличного от постулата Евклида, позволяет построить более общую, чем евклидова, Л. г. Независимо от Н. И. Лобачевского к этому открытию пришел Я. Больяй (J. Bolyai, 1832). Не получив открытой поддержки у К. Гаусса (C. Gauss), Я. Больяй не продолжил своих исследований.

К. Гаусс разрабатывал начала новой геометрии в значительно более ранние годы, но он не публиковал этих исследований и никогда не высказывался открыто об этих идеях. Однако в частной переписке он высоко оценил труды Я. Больяй и Н. И. Лобачевского, но открыто в печати все-таки не высказался.

Приложения геометрии Лобачевского. Н. И. Лобачевский уже в первой работе по Л. г. показал, опираясь на впервые измеренные астрономами в те годы годичные параллаксы звезд, что если в физич. пространстве реализуется его геометрия, то в пределах Солнечной системы отклонения от евклидовой геометрии будут на несколько порядков меньше возможных ошибок измерений. Таким образом, первым приложением Л. г. явилось обоснование практич. точности евклидовой геометрии.

Н. И. Лобачевский применял свою геометрию в математич. анализе. Переходя от одной системы координат к другой в своем пространстве, он нашел значения около 200 различных определенных интегралов. Др. математич. приложения были найдены А. Пуанкаре (1882), к-рый успешно применял Л. г. при разработке теории автоморфных функций.

Значение Л. г. для космологии было выявлено А. А. Фридманом. В 1922 он нашел решение уравнения Эйнштейна, из к-рого следовало, что Вселенная расширяется с течением времени. Это заключение впоследствии было подтверждено наблюдениями Э. Хаббла (E. Hubble, 1929), обнаружившего разбегание удаленных туманностей. Метрика, найденная А. А. Фридма-

ном, дает при фиксированном времени пространство Лобачевского. Пространство скоростей специальной теории относительности является пространством Лобачевского.

Л. г. с успехом используется при изучении столкновений элементарных частиц и при разработке др. вопросов ядерных исследований.

Зрительное (перцептивное) восприятие близких областей пространства человеком порождает эффект обратной перспективы, объясняемый тем, что геометрия этих областей перцептивного пространства близка к Л. г. с радиусом кривизны около 15 *м*.

Создание Л. г. явилось важным этапом в развитии учения о возможных свойствах пространства. Особенное значение это имело для оснований математики, т. к. принципы современного аксиоматич. метода вырабатывались в значительной степени благодаря появлению Л. г.

Лит.: [1] Лобачевский Н. И., Полн. собр. соч., т. 1—5, М.— Л., 1946—51; [2] Больяи Я., Appendix, пер. с латин., М.— Л., 1950; [3] Александров А. Д., Абстрактные пространства, в кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. 3, М., 1956; [4] Егоров И. П., Введение в неевклидовы геометрии, Пенза, 1972; [5] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [6] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; [7] Лаптев Б. Л., Николай Иванович Лобачевский, Казань, 1976; [8] Норден А. П., Элементарное введение в геометрию Лобачевского, М., 1953; [9] Нут Ю. Ю., Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении, М., 1961; [10] Раушенбах Б. В., Пространственные построения в древнерусской живописи, М., 1975; [11] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969; [12] Широков П. А., Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, Казань, 1964.

Б. Л. Лаптев.

ЛОБАЧЕВСКОГО МЕТОД, метод Греффе, метод Данделена,— метод для одновременного вычисления всех корней многочлена. Пусть корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ многочлена

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - r_1)(z - r_2) \ldots (z - r_n), \quad a_0 \neq 0, \qquad (1)$$

удовлетворяют неравенствам

$$|r_1| \geqslant |r_2| \geqslant \ldots \geqslant |r_n|. \qquad (2)$$

В качестве приближений к корням могут быть взяты отношения a_i/a_{i-1}, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть теперь корни $f(z)$, хотя и не выполнено (2), все же различны по абсолютной величине. Л. м. заключается в применении к уравнению $f(z) = 0$ процесса квадрирования, к-рый при достаточном числе повторений приводит к уравнению с корнями, удовлетворяющими условиям (2). Квадрирование состоит в переходе от очередного многочлена $f_k(z)$ к многочлену $f_{k+1}(z)$ той же степени, корни к-рого равны квадратам корней $f_k(z)$. Переход выполняется по рекуррентным формулам.

Применение Л. м. возможно и при наличии групп равных по абсолютной величине корней, хотя это приводит к осложнениям в логике и формулах метода. Достоинством метода является то, что не требуется знания начальных приближений к корням многочлена. В случае различных по абсолютной величине корней скорость сходимости процесса асимптотически квадратичная.

Л. м. является, однако, численно неустойчивым, т. к. процесс квадрирования приводит к очень быстрому накоплению вычислительной погрешности. В связи с этим предпринимались попытки придать Л. м. самоисправляющуюся форму. Так, напр., для вычисления корней многочлена (1) строится последовательность многочленов $g_k(z)$ степени $\leqslant n-1$, связанных соотношениями

$$g_{k+1}(z) = z g_k(z) - q_k f(z), \quad k = 0, 1, \ldots; \quad g_0(z) \equiv 1;$$

отсюда

$$g_k(z) = z^k \pmod{f(z)}.$$

При каждом фиксированном k ищутся многочлены $g_{k,\,p}(z)$, определяемые следующим образом:

$$g_{k,\,1}(z) = g_k(z);$$

для $p \geqslant 2$ $g_{k,\,p}(z)$ есть многочлен вида

$$\psi_{p-2}(z)\, f(z) + \varphi_{p-1}(z)\, g_k(z),$$

имеющий степень $\leqslant n-p$. Если корни многочлена $f(z)$ удовлетворяют неравенствам

$$|r_1| \geqslant |r_2| \geqslant \ldots \geqslant |r_p| > |r_{p+1}| \geqslant \ldots \geqslant |r_n|,$$

то

$$\lim_{k \to \infty} g^{*}_{k,\,p} = f^{*}(z)/(z-r_1)(z-r_2)\ldots(z-r_p),$$

где $f^{*}(z)$ — многочлен $f(z)$, нормированный делением на коэффициент при старшем члене. Таким образом, из исходного многочлена выделяются множители, соответствующие группам равных по абсолютной величине корней (см. [3]). Л. м. предложен Н. И. Лобачевским в 1834 (см. [1]).

Лит.: [1] Лобачевский Н. И., Полн. собр. соч., т. 4, М. – Л., 1948; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [3] Sebastião e Silva J., «Portug. Math.», 1941, № 2, p. 271–79; [4] Householder A. S., Stewart G. W., «SIAM Rev.», 1971, v. 13, p. 38–46.

Х. Д. Икрамов.

ЛОБАЧЕВСКОГО ПРИЗНАК сходимости: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно стремящимися к нулю членами сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m},$$

где p_m — наибольший из номеров членов a_n, удовлетворяющих неравенству $a_n \geqslant 2^{-m}$, $n = 1, 2, \ldots, p_m$.

Предложен Н. И. Лобачевским (1834—36).

В. И. Битюцков.

ЛОБАЧЕВСКОГО ПРОСТРАНСТВО — пространство, геометрия к-рого определяется аксиомами *Лобачевского геометрии*. В более широком смысле Л. п. понимается как неевклидово гиперболич. пространство, определение к-рого связано с понятиями геометрии *псевдоевклидова пространства*. Пусть ${}^{n}R_{n+1}$ — псевдоевклидово $(n+1)$-пространство индекса n; на n-сфере этого пространства рассматривается множество пар диаметрально противоположных точек. Множество элементов, изометричное множеству пар указанных выше точек n-сферы пространства ${}^{n}R_{n+1}$, наз. n-пространством Лобачевского и обозначается ${}^{1}S_n$. Такое определение Л. п. позволяет включить это пространство в проективную классификацию неевклидовых пространств. Пространство ${}^{1}S_n$ в проективном пространстве P_n изображается внутренней областью овальной $(n-1)$-квадрики, к-рая является пересечением n-сферы мнимого радиуса с бесконечно удаленной плоскостью пространства ${}^{n}R_{n+1}$, дополняющей это пространство до проективного пространства P_{n+1}. Точки овальной $(n-1)$-квадрики являются бесконечно удаленными точками пространства ${}^{1}S_n$, т. е. квадрика является *абсолютом* этого пространства. Внешняя область квадрики, дополняющая пространство ${}^{1}S_n$ до полного пространства P_n, наз. идеальной областью пространства ${}^{1}S_n$. Указанная интерпретация наз. проективной интерпретацией Кэли — Клейна. Она может быть получена также путем проектирования n-сферы мнимого радиуса пространства ${}^{n}R_{n+1}$ из ее центра на касательную n-плоскость, к-рая является евклидовым n-пространством; при этом пространство ${}^{1}S_n$ изображается внутренней областью n-шара в этой n-плоскости, граница n-шара является абсолютом пространства ${}^{1}S_n$ (иногда последнюю интерпретацию пространства ${}^{1}S_n$ в евклидовом пространстве R_n наз.

интерпретацией Бельтрами — Клейна).

Проективная интерпретация 3-пространства Лобачевского позволяет проверить выполнение аксиом геометрии Лобачевского, дать изображение всех фигур этой геометрии и установить их свойства. В частности, в указанной интерпретации просто устанавливаются геометрич. свойства 2-плоскости Лобачевского, вытекающие из аксиом геометрии Лобачевского.

Присоединением к пространству ${}^1S_n$ точек абсолюта и точек идеальной области определяется расширенное Л. п. m-плоскость, $m<n$, пересекающаяся с абсолютом, наз. собственной m-плоскостью; не пересекающая абсолюта — идеальной m-плоскостью; m-плоскость, касающаяся абсолюта,— изотропной m-плоскостью. Таким же образом классифицируются прямые пространства ${}^1S_n$. Полюсы собственных плоскостей являются идеальными точками, а собственные точки — полюсами идеальных плоскостей. Вообще, полярные $(n-m-1)$-плоскости собственных m-плоскостей Л. п. ${}^1S_n$ суть идеальные $(n-m-1)$-плоскости, и полярные $(n-m-1)$-плоскости идеальных m-плоскостей — собственные $(n-m-1)$-плоскости.

В пространстве ${}^1S_n$ в качестве координат точки X можно рассматривать координаты вектора x этой точки в пространстве ${}^nR_{n+1}$, принадлежащей n-сфере мнимого радиуса. Координаты вектора x *(Вейерштрасса координаты)* при этом должны удовлетворять условию

$$-(x^0)^2+\sum_i (x^i)^2=-1, \quad i>0.$$

Используются также координаты Бельтрами

$$X^i \quad \frac{x^i}{x_0}, \quad i>0,$$

причем $\sum_i (X^i)^2<1$. В пространстве ${}^1S_n$ вводятся декартовы координаты $u^1, u^2, \ldots, u^n$, связанные с координатами x^i соотношениями

$$x^0=\operatorname{ch}\frac{u^1}{\sigma}\operatorname{ch}\frac{u^2}{\sigma}\ldots\operatorname{ch}\frac{u^n}{\sigma},$$

$$x^1=\operatorname{sh}\frac{u^1}{\sigma}\operatorname{ch}\frac{u^2}{\sigma}\ldots\operatorname{ch}\frac{u^n}{\sigma},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^i=\operatorname{sh}\frac{u^i}{\sigma}\operatorname{ch}\frac{u^{i+1}}{\sigma}\ldots\operatorname{ch}\frac{u^n}{\sigma},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^n=\operatorname{sh}\frac{u^n}{\sigma},$$

где $i\sigma$, $i^2=-1$,— радиус кривизны пространства ${}^1S_n$.

Расстояние δ между точками X и Y определяется соотношением

$$\operatorname{ch}\frac{\delta}{\sigma}=\frac{|xEy|}{\sigma^2},$$

где x, y — определенные выше векторы точек X и Y, E — линейный оператор, определяющий скалярное произведение в пространстве этих векторов.

Угол между двумя плоскостями Л. п. ${}^1S_n$ совпадает с углом между n-плоскостями псевдоевклидова пространства ${}^nR_{n+1}$, соответствующим этим плоскостям. Угол φ между плоскостями связан с расстоянием δ между полюсами этих плоскостей соотношением

$$\delta = \varphi\sigma i,$$

когда угол φ — действительный, а δ — чисто мнимое, и

$$\varphi = \frac{\delta}{\sigma} i,$$

когда угол φ — чисто мнимый, а расстояние δ — действительное.

Расстояние между точками и величины углов между плоскостями допускают выражения через двойное отношение точек с помощью точек абсолюта.

В Л. п. ${}^1S_n$ определяются сферы (шары), эквидистантные поверхности, орисферы (орициклы при $n=2$), m-симплексы и т. д.

Классификация движений Л. п. ${}^1S_n$ как коллинеаций, переводящих точки абсолюта (овальной квадрики) в себя, сводится к классификации вращений псевдоевклидова пространства ${}^uR_{n+1}$. Группа движений пространства ${}^1S_n$ изоморфна факторгруппе группы вращений пространства ${}^uR_{n+1}$ по ее подгруппе, состоящей из тождественного преобразования и отражения от точки; состоит из двух связных компонент, является группой Ли. Движения Л. п. ${}^1S_n$ описываются псевдоортогональными операторами индекса n. Для задания движения пространства ${}^1S_n$ достаточно указать, в какие точки переходят $n+1$ точек, не лежащих в одной $(n-1)$-плоскости.

Существует ряд конформных интерпретаций Л. п., одной из к-рых является *Пуанкаре интерпретация*. Возможна также конформная интерпретация пространства на его плоскости. Кроме указанных существуют интерпретации в комплексных пространствах. В частности, для пространства ${}^1S_3$ строятся *Котельникова интерпретации* многообразий прямых.

С помощью проективных интерпретаций наиболее полным образом классифицируются квадрики в пространстве ${}^1S_n$ и, в частности, на 2-плоскости ${}^1S_2$.

Пространство ${}^1S_n$ является римановым n-пространством постоянной отрицательной кривизны $-1/\sigma^2$, где σi — радиус кривизны пространства. Геометрия Л. п. в достаточно малых окрестностях точек близка к геометрии евклидова пространства такой же размерности.

В целом пространство ${}^1S_n$ гомеоморфно пространству R_n, оно бесконечно простирается во всех направлениях. Всякая m-плоскость пространства ${}^1S_n$, $m<n$, является пространством ${}^1S_m$. Кроме того, прямые линии пространства ${}^1S_n$ являются его геодезич. линиями, а m-плоскости — вполне геодезич. m-поверхностями этого пространства.

В проективной классификации метрик неевклидовых пространств Л. п. также классифицируется по метрикам прямых, пучков плоскостей и m-плоскостей. В частности, на 2-плоскости Л. п. проективная метрика на прямой является гиперболической, а в пучках прямых — эллиптической.

Лит.: [1] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; [2] Клейн Ф., Неевклидова геометрия, пер. с нем., М.—Л., 1936; [3] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1–2, М.—Л., 1949–56; [4] Розенфельд Б. А., Неевклидовы пространства, М., 1969.

Л. А. Сидоров.

ЛОБАЧЕВСКОГО ФУНКЦИЯ — 1) Угол параллельности в *Лобачевского геометрии* — функция, выражающая угол α между прямой u_1 (или u_2) (см. рис.) и отрезком OA, перпендикулярным к прямой a, параллельной u_1 (или u_2), через длину l отрезка OA:

$$\alpha=\Pi(l)\quad 2\operatorname{arctg} e^{-l/R},$$

где R — положительная постоянная, к-рая соответствует масштабу измерения расстояний.

Л. ф.— непрерывная монотонно убывающая функция, значения к-рой заключены между $\pi/2$ и 0:

$$\lim_{l\to 0}\Pi(l)=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{l\to\infty}\Pi(l)=0.$$

Л. ф. введена Н. И. Лобачевским в 1826.

Лит.: [1] Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.—Л., 1949; [2] Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

2) Специальная функция, определяемая для действительного x равенством

$$L(x) = -\int_0^x \ln\cos t\, dt.$$

Л. ф. представляется в виде ряда

$$L(x) = x\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin 2kx}{k^2}.$$

Основные соотношения:

$$L(-x) = -L(x), \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2,$$
$$L(\pi - x) = \pi\ln 2 - L(x),$$
$$L(\pi + x) = \pi\ln 2 + L(x).$$

Л.ф. введена Н. И. Лобачевским в 1829.

Лит.: [1] Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 3 изд., М.—Л., 1951. *А. Б. Иванов.*

ЛОГАРИФМ числа N по основанию a — показатель степени m, в к-рую следует возвести число a (основание Л.), чтобы получить N; обозначается $\log_a N$, т. е. $m = \log_a N$, если $a^m = N$. Каждому положительному числу соответствует при данном основании единственный действительный Л. (Л. отрицательных чисел являются комплексными числами). Основные свойства Л.:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N,$$
$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,$$
$$\log_a N^k = k\log_a N,$$
$$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k}\log_a N$$

позволяют сводить умножение и деление чисел к сложению и вычитанию их Л., а возведение в степень и извлечение корня — к умножению и делению Л. на показатель степени или корня.

В соответствии с десятичным характером счета наиболее употребительны десятичные Л. ($a = 10$), обозначаемые $\lg N$. Для рациональных чисел, отличных от 10^k с целым k, десятичные Л. суть трансцендентные числа, к-рые приближенно выражают в конечных десятичных дробях. Целую часть десятичного Л. наз. характеристикой, дробную — мантиссой. Так как $\lg(10^k N) = k + \lg N$, то десятичные Л. чисел, отличающихся множителем 10^k, имеют одинаковые мантиссы и различаются лишь характеристиками. Это свойство лежит в основе построения таблиц Л., к-рые содержат лишь мантиссы Л. целых чисел.

Большое значение имеют также натуральные Л., основанием к-рых служит трансцендентное число $e = 2{,}71828\ldots$; их обозначают $\ln N$. Переход от одного основания Л. к другому совершается по формуле $\log_b N = \log_a N/\log_a b$, множитель $1/\log_a b$ наз. модулем перехода (перевода) от основания a к основанию b. Формулы перехода от натуральных Л. к десятичным или обратно:

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e}, \quad \lg N = \frac{\ln N}{\ln 10},$$

$$\frac{1}{\lg e} = 2{,}3026\ldots, \quad \frac{1}{\ln 10} = 0{,}43429\ldots$$

См. также *Логарифмическая функция.*

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ БУМАГА — специальным образом разграфленная бумага; обычно изготовляется типографским способом (рис. 1): на каждой из осей прямоугольной системы координат откладываются де-

сятичные логарифмы чисел u (на оси абсцисс) и v (на оси ординат); затем через найденные точки (u, v) проводятся прямые, параллельные осям. Наряду с Л. б. применяется полулогарифмическая бумага (рис. 2): на одной из осей прямоугольной системы координат откладываются числа u, а на другой — десятичные логарифмы чисел v. Л. б. и полулогарифмич.

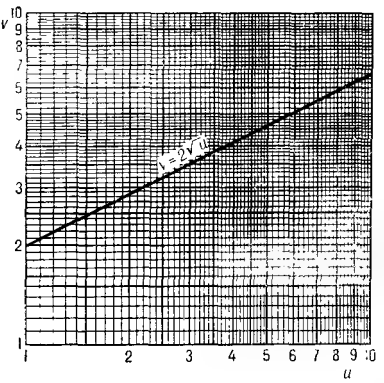


Рис. 1.

бумага служат для вычерчивания на них графиков функций, к-рые могут принимать более простую и наглядную форму и в ряде случаев выпрямляются. На Л. б. прямыми линиями изображаются функции,

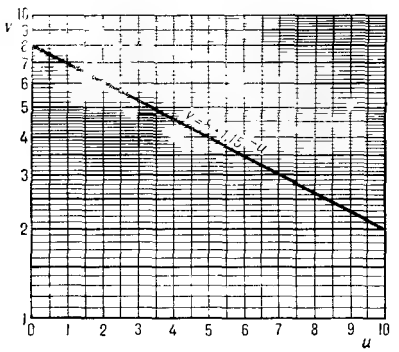


Рис. 2.

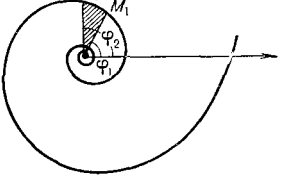
заданные уравнениями вида $v = au^b$, $u>0$, где $a>0$ и b — постоянные коэффициенты; на полулогарифмич. бумаге прямыми линиями изображаются функции, заданные уравнениями вида $v=ab^u$. *БСЭ-3.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ — см. в ст. *Емкость.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — производная от логарифма данной функции.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ — плоская трансцендентная кривая, уравнение к-рой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a^{\varphi}, \quad a > 0.$$



При $a>1$ и $\varphi \to -\infty$ Л. с. развертывается против хода часовой стрелки, при $\varphi \to -\infty$ спираль закручивается по ходу часовой стрелки, стремясь к своей асимптотич. точке O (см. рис.). Если $a<1$, Л. с. закручивается против хода часовой стрелки. Угол, составляемый касательной в произвольной точке Л. с. с радиус-вектором точки касания, зависит лишь от параметра a.

Длина дуги между точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$:

$$l = \rho_2 \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a} - \rho_1 \frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}.$$

Радиус кривизны: $r = \rho\sqrt{1+\ln^2 a}$. Натуральное уравнение: $s = kr$, где $k = 1/\ln a$. Л. с. переходит в себя при линейных преобразованиях плоскости. Л. с. относится к т. н. псевдоспиралям (см. *Спирали*).

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960.

Д. Д. Соколов.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ТОЧКА ВЕТВЛЕНИЯ, точка ветвления бесконечного порядка,— частный вид *ветвления точки a* аналитич. функции $f(z)$ одного комплексного переменного z, когда ни при каком числе последовательных обходов в одном и том же направлении вокруг a аналитич. продолжение нек-рого элемента функции $f(z)$ не приводит к исходному элементу. Точнее, изолированная особая точка a наз. Л. т. в. для $f(z)$, если существуют: 1) кольцо $V = \{z: 0<|z-a|<\rho\}$, в к-ром $f(z)$ аналитически продолжается по любому пути, 2) точка $z_1 \in V$ и какой-либо элемент функции $f(z)$ в виде степенного ряда $\Pi(z_1; r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-z_1)^\nu$ с центром z_1 и радиусом сходимости $r>0$, аналитич. продолжение к-рого вдоль окружности $|z-a| = |z_1-a|$, проходимой сколько угодно раз в одном и том же направлении, никогда не приводит к исходному элементу $\Pi(z_1; r)$. В случае бесконечно удаленной Л. т. в. $a = \infty$ вместо V следует рассматривать окрестность $V' = \{z: |z|>\rho\}$. Л. т. в. относятся к классу *трансцендентных точек ветвления*. Поведение римановой поверхности R функции $f(z)$ при наличии Л. т. в. a характеризуется тем, что над a соединяются вместе бесконечно много листов той ветви R, к-рая определяется в V или V' элементом $\Pi(z_1; r)$.

См. также *Особая точка аналитической функции*.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968, гл. 8.

Е. Д. Соломенцев.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция, обратная к показательной функции. Л. ф. обозначается

$$y = \ln x; \qquad (1)$$

ее значение y, соответствующее значению аргумента x, наз. натуральным логарифмом числа x. В силу определения соотношение (1) равносильно

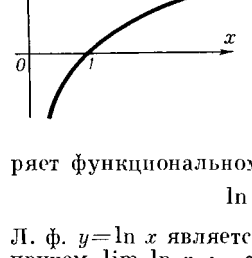
$$x = e^y. \qquad (2)$$

Так как $e^y > 0$ при любом действительном y, то Л. ф. определена только при $x>0$. В более общем смысле Л. ф. наз. функцию

$$y = \log_a x,$$

где $a>0$ ($a \neq 1$) — произвольное основание логарифмов; эта функция выражается через $\ln x$ по формуле:

$$\log_a x = M \ln x,$$



где $M = 1/\ln a$. Л. ф.— одна из основных элементарных функций; ее график (см. рис.) носит название логарифмики. Основные свойства Л. ф. вытекают из соответствующих свойств показательной функции и логарифмов; напр., Л. ф. удовлетворяет функциональному уравнению

$$\ln x + \ln y = \ln xy.$$

Л. ф. $y = \ln x$ является строго возрастающей функцией, причем $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$. В каждой точке $x>0$ Л. ф. имеет производные всех порядков и в достаточно малой ее окрестности раскладывается в степенной ряд, т. е. является *аналитической функцией*.

Для $-1<x\leqslant 1$ справедливо разложение Л. ф. в степенной ряд:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots .$$

Производная Л. ф.:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x},\quad (\log_a x)'=\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x\ln x}.$$

Многие интегралы выражаются через Л. ф.; напр.:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+C.$$

Впервые зависимость между переменными величинами, выражаемая Л. ф., рассматривалась Дж. Непером (J. Napier, 1614).

Л. ф. на комплексной плоскости является многозначной (бесконечнозначной) функцией, определенной при всех значениях аргумента $z\neq 0$, и обозначается $\operatorname{Ln} z$. Однозначная ветвь этой функции, определяемая как

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,$$

где $\arg z$ — главное значение аргумента комплексного числа z, $-\pi<\arg z\leqslant\pi$, носит название г л а в н о г о з н а ч е н и я Л. ф. Имеем

$$\operatorname{Ln} z=\ln z+2k\pi i,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\pm\dots$$

Все значения Л. ф. для отрицательных действительных z являются комплексными числами. Первая удовлетворительная теория Л. ф. в комплексной плоскости была дана Л. Эйлером (L.Euler, 1749), к-рый исходил из определения

$$\operatorname{Ln} z=\lim_{n\to\infty} n\,(z^{1/n}-1).$$

Лит.: [1] Н и к о л ь с к и й С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975; [2] М а р к у ш е в и ч А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967. *БСЭ-3.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — непрерывное, сосредоточенное на $(0,\infty)$ распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\log e}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\,e^{-(\log x-a)^2/2\sigma^2}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad (*)$$

где $-\infty<a<\infty$, $\sigma^2>0$. Случайная величина X подчиняется Л. н. р. с плотностью (*), если ее логарифм $\log X$ имеет *нормальное распределение* с параметрами a и σ^2. Таким образом, $a=\mathsf{E}\log X$ и $\sigma^2=\mathsf{D}\log X$. Л. н. р. является унимодальным распределением и имеет положительную асимметрию. Моменты случайной величины X с Л. н. р. с параметрами a и σ^2 выражаются формулой

$$\mathsf{E}X^k=e^{ka+k^2\sigma^2/2},$$

поэтому математич. ожидание и дисперсия равны соответственно

$$\mathsf{E}X=e^{a+\sigma^2/2}\quad\text{и}\quad \mathsf{D}X=e^{2a+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right).$$

Л. н. р. служит одним из простейших примеров распределения, к-рое не определяется однозначно своими моментами. Свойства Л. н. р. определяются свойствами соответствующего нормального распределения. Важнейшее свойство Л. н. р.: произведение независимых случайных величин с Л. н. р. снова подчиняется Л. н. р. Имеет место аналог центральной предельной теоремы: распределение произведения n независимых положительных случайных величин при нек-рых общих условиях стремится к Л. н. р. при $n\to\infty$. Л. н. р. возникает как предельное распределение и в нек-рых других схемах (напр., в моделях дробления частиц, моделях роста и т. д.).

Лит.: [1] К о л м о г о р о в А. Н., «Докл. АН СССР», 1941, т. 31, № 2, с. 99—101; [2] К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] A i t c h i s o n J., B r o w n J. A. C., The lognormal distribution, Camb., 1957.

А. В. Прохоров.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИ СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — положительная функция $u(x)$ в области евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, логарифм к-рой $\log u(x)$ является *субгармонической функцией*. Напр., модуль $|f(z)|$ аналитич. функции комплексного переменного $f(z)$ является Л. с.ф., но существуют непрерывные Л. с.ф. в плоских областях, к-рые нельзя представить в виде модуля никакой аналитич. функции. Л. с. ф. составляют подкласс сильно субгармонич. функций. При $n=1$ им соответствуют логарифмически выпуклые функции.

Основное свойство Л. с.ф. состоит в том, что не только произведение, но и положительная линейная комбинация нескольких Л. с.ф. также является Л. с.ф.

Лит.: [1] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937, гл. 3.

Е. Д. Соломенцев.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ мероморфной функции $w=f(z)$ в точке a расширенной плоскости комплексного переменного z — вычет

$$\operatorname{res}_a [f'(z), f(z)]$$

логарифмич. производной $f'(z)/f(z)$ в точке a. Представив функцию $\ln f(z)$ в окрестности $V(a)$ точки $a\neq\infty$ в виде $\ln f(z)=A\ln(z-a)+\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — регулярная функция в $V(a)$, получают

$$\operatorname{res}_a [f'(z)/f(z)]=A.$$

Соответствующие формулы для случая $a=\infty$ имеют вид

$$\ln f(z)=A\ln(1/z)+\varphi(z),$$
$$\operatorname{res}_\infty [f'(z)/f(z)]=A.$$

Если a — нуль кратности m функции $f(z)$ или полюс кратности m, то Л. в. $f(z)$ в точке a равен соответственно m или $-m$; во всех остальных точках Л. в. равен нулю.

Если $f(z)$ — мероморфная функция в области D и Γ — спрямляемая жорданова кривая, расположенная в D и не проходящая ни через нули, ни через полюсы $f(z)$, то Л. в. функции $f(z)$ относительно контура Γ наз. интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N-P, \tag{1}$$

к-рый равен разности между числом нулей N функции $f(z)$ и числом полюсов P внутри Γ (с учетом их кратности). Геометрич. смысл формулы (1) состоит в том, что при обходе контура Γ в положительном направлении вектор $w=f(z)$ делает $N-P$ оборотов вокруг начала координат $w=0$ плоскости переменного w (см. *Аргумента принцип*). В частности, если $f(z)$ регулярна в D, т. е. $P=0$, из (1) получается формула для вычисления индекса точки $w=0$ относительно образа $\Gamma^*=f(\Gamma)$ пути Γ при помощи Л. в.:

$$\operatorname{ind}_0\Gamma^*=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \tag{2}$$

Формула (2) приводит к обобщению понятия Л. в. для регулярных функций многих комплексных переменных в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$. Пусть $w=f(z)=(f_1,\ldots,f_n)$: $D\to\mathbb{C}^n$ — голоморфное отображение такое, что якобиан $J_f(z)\not\equiv 0$ и множество нулей $E=f^{-1}(0)$ изолировано в D. Тогда для любой области $G\subset\overline{G}\subset D$, ограниченной простой гладкой замкнутой поверхностью Γ, не проходящей через нули f, имеем формулу для индекса точки $w=0$ относительно образа $\Gamma^*=f(\Gamma)$:

$$\operatorname{ind}_0\Gamma^*=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{df_1\wedge\ldots\wedge df_n}{f_1\ldots f_n}=N, \tag{3}$$

где интегрирование производится по n-мерному остову $\Gamma_\varepsilon=\{z\in G\colon |f_\nu(z)|=\varepsilon,\ \nu=1,\ldots,n\}$ при достаточно ма-

лом $\varepsilon>0$. Интеграл в формуле (3) выражает также сумму кратностей нулей отображения f в G (см. [2]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования числовых рядов. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с частичными суммами s_n суммируем логарифмическим методом к сумме s, если логарифмические средние

$$\sigma_m = \frac{1}{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1}} \left(s_0 + \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{3} + \ldots + \frac{s_m}{m+1} \right)$$

при $m \to \infty$ сходятся к s. Л. м. с. есть *Рисса метод суммирования* (R, p_n) с $p_n = 1/(n+1)$. Он равносилен и совместен с методом суммирования Рисса $(R, \lambda, 1)$ при $\lambda_n = \ln(n+1)$ и сильнее *средних арифметических метода суммирования.*

Лит.: [1] Riesz M., «C. r. Acad. sci.», 1909, t. 149, p. 18—21; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *И. И. Волков.*

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ — потенциал с логарифмическим ядром $\ln \frac{1}{|x-y|}$, где $|x-y|$ — расстояние между точками x и y евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, т. е. потенциал вида

$$u(x) = \int \ln \frac{1}{|x-y|} \, d\mu(y), \qquad (1)$$

где интегрирование производится, вообще говоря, по произвольной борелевской мере μ на $\mathbb{R}^2$ с компактным носителем $S = S(\mu)$. Физически можно представить, что Л. п. возникает из *ньютонова потенциала* сил тяготения, когда распределение притягивающих масс в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ точек $y = (y_1, y_2, y_3)$ не зависит, напр., от координаты y_3. Общая масса при этом, разумеется, бесконечна, но если произвести регуляризацию получающейся силы притяжения F, к-рую можно считать действующей в плоскости $(x_1, x_2, 0)$, состоящую в отбрасывании бесконечного слагаемого, то потенциал конечной части силы F будет иметь как раз вид (1) (см. [2]). В отличие от ньютонова, логарифмич. ядро имеет особенность не только при $|x-y| \to 0$, но и при $|x-y| \to \infty$, что обусловливает нек-рые отличия в поведении Л. п. по сравнению с ньютоновым. Они проявляются главным образом при решении внешних краевых задач (см. *Внешняя и внутренняя краевые задачи*). Основные применения Л. п. находит при решении плоских *краевых задач* теории потенциала (см. также *Краевая задача* для эллиптического уравнения).

Основные свойства Л. п.: 1) вне носителя S меры μ Л. п. является регулярным решением *Лапласа уравнения* $\Delta u = 0$, т. е. $u(x)$ — гармонич. функция на открытом множестве $\mathbb{R}^2 \setminus S$, не регулярная, однако, на бесконечности; 2) если мера μ абсолютно непрерывна, т. е. интеграл (1) принимает вид

$$u(x) = \int_D \ln \frac{1}{|x-y|} f(y) \, d\sigma(y), \qquad (2)$$

где D — конечная область, $d\sigma(y)$ — элемент площади D и плотность $f(y)$ принадлежит классу $C^1(D \cup \partial D)$, то вторые производные $u(x)$ непрерывны в D и удовлетворяют *Пуассона уравнению* $\Delta u = -2\pi f(y)$.

Если интеграл в (2) распространен по замкнутой кривой Ляпунова L (см. *Ляпунова поверхности и кривые*), т. е.

$$u(x) = \int_L f(y) \ln \frac{1}{|x-y|} \, ds(y), \qquad (3)$$

то говорят о логарифмическом потенциале простого слоя, распределенного на L. Если при этом $f(y) \in C^1(L)$, то Л. п. простого слоя (3)

непрерывен всюду в $\mathbb{R}^2$. Его нормальная производная имеет пределы изнутри и извне L соответственно:

$$\lim_{x \to y_0} \frac{du}{dn_0}\Big|_i = \frac{du(y_0)}{dn_0} + \pi f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} \frac{du}{dn_0}\Big|_e = \frac{du(y_0)}{dn_0} - \pi f(y_0),$$

где

$$\frac{du(y_0)}{dn_0} = \int_L f(y) \frac{\cos(y-y_0, n_0)}{|y-y_0|}\, ds(y), \quad y_0 \in L, \qquad (4)$$

— т. н. прямое значение нормальной производной Л. п. простого слоя, $(y-y_0, n_0)$ — угол между вектором $y-y_0$ и внешней нормалью n_0 к L в точке $y_0 \in L$. Интеграл (4) непрерывен на L.

Логарифмический потенциал двойного слоя имеет вид

$$v(x) = \int_L g(y) \frac{\cos(y-x, n)}{|y-x|}\, ds(y), \qquad (5)$$

где n — внешняя нормаль к L в точке $y \in L$. Если $g(y) \in C^1(L)$, то Л. п. двойного слоя (5) является регулярной гармонич. функцией внутри и извне L и имеет пределы по нормали изнутри и извне L соответственно:

$$\lim_{x \to y_0} v(x)|_i = v(y_0) + \pi f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} v(x)|_e = v(y_0) - \pi f(y_0),$$

где

$$v(y_0) = \int_L g(y) \frac{\cos(y-y_0, n)}{|y-y_0|}\, ds(y), \quad y_0 \in L,$$

— прямое значение Л. п. двойного слоя в точке $y_0 \in L$. Нормальная производная Л. п. двойного слоя непрерывна при переходе через L.

Перечисленные граничные свойства Л. п. простого и двойного слоя вполне аналогичны соответствующим свойствам ньютонова потенциала (см. также *Потенциала теория*). Из выражения (5) видно, что Л. п. двойного слоя уже является регулярной на бесконечности гармонич. функцией.

Л. п. также непосредственно связан с *граничными задачами теории аналитических функций*, т. к. интеграл типа Коши выражается через Л. п. простого и двойного слоя (см. [3]).

Лит.: [1] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [2] Вебстер А., Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, пер. с нем., 2 изд., ч. 1—2, М.— Л., 1934; [3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968; [4] La Vallée-Poussin Ch., Le potentiel logarithmique; balayage et représentation conforme, Louvain, 1949; [5] Evans G. C., The logarithmic potential, discontinuous. Dirichlet and Neumann problems, N. Y., 1927.

Е. Д. Соломенцев.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, сходится, если существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0,$$

и расходится, если

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1 \qquad \text{при} \quad n \geqslant n_0.$$

В. И. Битюцков.

ЛОГИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ, прикладные исчисления,— формализации математич. теорий. Л.-м. и. задается своим языком и перечнем постулатов (эти элементы образуют *синтаксис*) и в большинстве случаев снабжается *семантикой*.

Существенными чертами, отличающими Л.-м. и. от аксиоматич. теорий традиционной математики, являются: 1) выявление используемых теорий логич. средств путем формулирования всех аксиом и *вывода правил*, позволяющих выводить одно суждение из другого; 2) переход от разговорного языка к точному *формальному языку*. Обычно Л.-м. и. строится на базе нек-рого *логического исчисления* (б а з и с н о г о л о г и ч е с к о г о и с ч и с л е н и я). Язык Л.-м. и. получается из языка этого логич. исчисления добавлением символов специальных функций и предикатов (и, быть может, удалением предикатных переменных и переменных для функций). Перечень постулатов Л.-м. и. получается путем добавления к перечню постулатов базисного логич. исчисления (понимаемых применительно к новому языку) нек-рых постулатов, описывающих свойства добавленных функций и предикатов. Напр., язык элементарной теории групп получается по этой схеме из языка классич. исчисления предикатов с равенством: добавляются символы $\cdot$ (умножение), inv (обращение) и e (единица), а выбрасываются все предикатные символы, кроме равенства. Дополнительный постулат

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (e\cdot x = x \,\&\, \mathrm{inv}\,(x)\cdot x = e \,\&\, (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z))$$

утверждает, что e — групповая единица, inv (x) - элемент, обратный к x, и умножение ассоциативно.

Л.-м.и., построенные на основе исчисления предикатов с равенством, служат для описания наиболее часто встречающихся математич. структур. Среди них *арифметика формальная*, формализованный анализ (с кванторами 1-го и 2-го порядков), *аксиоматические теории множеств* и т. д. Семантика Л.-м. и. задает интерпретацию переменных, математич. символов (символов предикатов и функций) и логич. операций. Этим определяются м о д е л и Л.-м. и. Из истинности формулы на любой модели, где истинны аксиомы нек-рого Л.-м. и., основанного на классич. исчислении предикатов с равенством, следует, в силу *Гёделя теоремы о полноте*, выводимость этой формулы в рассматриваемом Л.-м. и.

Простейшими по своей структуре являются б е с к в а н т о р н ы е Л.-м. и. Они употребляются чаще всего для описания свойств различных классов вычислимых функций. Язык бескванторного Л.-м. и. строится на основе языка исчисления высказываний с равенством или даже состоит из одних равенств. В первом случае логич. аппаратом Л.-м. и. служит классич. исчисление высказываний, во втором случае Л.-м. и. оформляется в виде исчисления равенств. Постулатами в обоих случаях считаются: 1) определяющие равенства рассматриваемых функций (напр., $x\cdot 0 \quad 0$, $x\cdot y' \quad x\cdot y + x$), 2) основные свойства равенства, 3) рассуждения методом математич. индукции (чаще всего по образцу «из $f(0) = g(0), f(x') \quad h(x, f(x)), g(x') \quad h(x, g(x))$ можно вывести $f(x) = g(x)$»), 4) рассуждение, соответствующее $\forall$-удалению: «из $A(x)$ вывести $A(t)$» (правило подстановки вместо свободной предметной переменной). Пример — с и с т е м а П Р А (п р и м и т и в н о р е к у р с и в н а я а р и ф м е т и к а).

Предметные переменные ПРА (a), (aa), (aaa), . . .; функциональные переменные (f), (ff), (fff), . . .; натуральные числа 0, 0′, 0″, . . . Функциональные символы (функторы) строятся из исходных — ′ («следующий за»), Z (тождественный 0), $[J, n, m]$ (m - местная функция, значение к-рой равно n-му аргументу), где n, m — натуральные числа, $n \leqslant m$, с помощью подстановки S и примитивной рекурсии R: если φ есть n-местный функтор, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ суть m-местные функторы, то $S[\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n]$ (результат подстановки $\psi_1, \ldots, \psi_n$ в φ) есть m-местный функтор; если φ есть n-местный функтор, ψ

есть $(n+2)$-местный функтор, то $R[\varphi, \psi]$ есть $(n+1)$-местный функтор [примитивная рекурсия:

$$R[\varphi, \psi](0, X) = \varphi(X); \quad R[\varphi, \psi](y', X) = \psi(y, X, R[\varphi, \psi](y, X))].$$

Термы ПРА: 0, предметные переменные и выражения вида s', $\varphi(s_1, \ldots, s_n)$, где s, $s_1, \ldots, s_n$ — термы, φ - функтор.

Формулы ПРА: $r = s$, где r, s — термы. Допустимые значения предметных переменных — натуральные числа, допустимые значения функциональных переменных — *примитивно рекурсивные функции* (иногда более широкие классы вычислимых функций).

При описании частичных (не всюду определенных) функций, кроме предиката равенства, появляется предикат !, или ! («определено»); $r = s$ интерпретируется в этом случае как «$!r \leftrightarrow !s$ и из $!r$ следует, что значение r равно значению s». Добавляются также средства для изображения функции, универсальной для рассматриваемого класса: либо символ для этой функции, либо правило: если t — терм, то $\langle t \rangle$ — функтор (номер к-рого в нек-рой заранее фиксированной нумерации рассматриваемого класса равен t). Постулаты $\forall$-удаления и $\exists$-введения модифицируются:

$$A(t) \,\&!\, t \longrightarrow \exists x A(x); \quad \forall x A(x) \,\&!\, t \longrightarrow A(t).$$

Добавляется аксиома $!t$, где t — предметная переменная или константа, а также аксиомы вида

$$!\varphi(t) \longrightarrow !t.$$

Употребляются также Л.-м. и. для описания вычислимых функционалов различных типов: 0 есть тип (объекты типа 0 — натуральные числа); если σ и τ — типы, то $(\sigma \to \tau)$ есть тип (операций, перерабатывающих объекты типа σ в объекты типа τ). Это — конечные типы (см. *Типов теория*). Рассматриваются также трансфинитные типы. Для каждого типа указываются переменные и константы этого типа, в их число обычно входит символ операции, все значения к-рой равны 0, а также объект $'$ типа $(0 \to 0)$. Для каждого σ в число констант типа $(\sigma \longrightarrow ((0 \longrightarrow (\sigma \longrightarrow \sigma)) \to (0 \longrightarrow \sigma)))$ часто включают оператор примитивной рекурсии. Термами типа σ наз. переменные и константы типа σ, выражения вида $r(s)$, где r — терм типа $(\tau \to \sigma)$, s — терм типа τ, а также выражение вида $\lambda x r$, к-рое интерпретируется как обозначение функционала, перерабатывающего x в $r(x)$, где r типа β, x типа α и σ $(\alpha \to \beta)$. Бескванторные Л.-м. и. для функционалов конечных типов используются для математич. изучения кванторных Л.-м. и. В частности, с помощью бескванторной системы примитивно рекурсивных функционалов удается доказать непротиворечивость формальной арифметики; добавление оператора т. н. бар-рекурсии позволяет доказать непротиворечивость формализованного анализа.

Важное свойство Л.-м. и.— д е д у к т и в н а я п о л н о т а: она означает, что каждая формула без свободных переменных выводима или опровержима. Из дедуктивной полноты Л.-м. и. следует разрешимость проблемы выводимости — существование алгоритма, позволяющего по каждой формуле узнать, выводима она или нет. Примером дедуктивно полного Л.-м. и. является теория алгебраически замкнутых полей (с и с т е м а Т а р с к о г о). Согласно *Гёделя теореме о неполноте* дедуктивно полные теории редки: всякое Л.-м. и., содержащее нек-рый весьма узкий фрагмент арифметики, дедуктивно неполно. Для еще более широкого класса Л.-м. и. проблема выводимости алгоритмически неразрешима.

Важная характеристика Л.-м. и.— его выразительная способность. Часто удается ввести выразительные

средства, не фигурирующие явно в языке рассматриваемого Л.-м. и. Так, в бескванторных языках удается ввести логич. связки и ограниченные кванторы:

$$x \quad y \;\&\; u - v \text{ означает } |x-y|+|u-v|=0,$$

$$\forall x_{<a}(f(x)-g(x)) \text{ означает } \sum_{x<a}|f(x)-g(x)|=0.$$

В языке формальной арифметики можно говорить о конечных множествах, частично рекурсивных функциях и т. д. Одни логич. связки выражаются через другие; так, в исчислениях 2-го порядка (в том числе основанных на интуиционистской логике) все связки выражаются через $\forall$ и $\rightarrow$, напр. $\exists x A(x)$ эквивалентно $\forall P(\forall x(A x \rightarrow P) \rightarrow P)$. Принципиальные ограничения выразительной способности языка дает теорема Тарского: при естественной нумерации формул языка, содержащего нек-рый минимум арифметики, невозможно указать формулу $T(x)$ этого языка такую, что $T(n)$ истинно тогда и только тогда, когда n — номер истинной формулы. Для Л.-м. и., основанных на конструктивной (интуиционистской) логике, часто имеет место теорема о «расщеплении» дизъюнкций: из выводимости замкнутой формулы $A \vee B$ следует выводимость одной из формул A, B. Для исследования структуры таких Л.-м. и. применяются различные аналоги понятия *реализуемости*. Вопросы непротиворечивости Л.-м. и., независимости отдельных постулатов, существования отделенных аксиоматик (т. е. таких, что каждая выводимая формула A имеет вывод, использующий постулаты лишь для импликации и символов, входящих в A), существование интерпретаций одних Л.-м. и. в других исследуются в *доказательстве теории*.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [2] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [3] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [4] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [5] Линдон Р., Заметки по логике, пер. с англ., М., 1968.

Г. Е. Минц.

ЛОГИСТИКА — термин, употребляемый для обозначения систем логики, характеризующихся попыткой сведения логич. рассуждений к формальным вычислениям. В древности и в средние века термин «Л.» означал практич. операции арифметич. вычислений. Г. Лейбниц (G. Leibniz, кон. 17 в.) употреблял термин «Л.» для обозначения исчисления умозаключений. В нач. 20 в. под Л. понимали *математическую логику*.

В. Е. Плиско.

ЛОГИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей с функцией распределения $\psi(ax+b)$, где a — параметр масштаба, b — сдвига,

$$\psi(x)=(1+\exp(-x))^{-1}.$$

Функция $\psi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\psi}{dx} \quad \psi(1-\psi).$$

Л. р. близко к *нормальному распределению*:

$$\sup_x|\psi(1{,}7x)-\Phi(x)|<0{,}01,$$

где $\Phi(x)$ — функция нормального распределения с математич. ожиданием 0 и дисперсией 1. При проверке гипотезы о совпадении функций распределения двух выборок из Л. р. с альтернативой сдвига асимптотически оптимальным является *Вилкоксона критерий (Манна — Уитни критерий)*. Л. р. оказывается иногда более удобным, чем нормальное, при обработке данных и интерпретации выводов. В приложениях используется также многомерное Л. р.

Лит.: [1] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [2] Кокс Д. Р., Хинкли Д. В., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978.

А. И. Орлов.

ЛОГИЦИЗМ — одно из направлений в основаниях математики, ставящее целью обосновать математику путем сведения ее исходных понятий к понятиям логики. Мысль о сведении математики к логике высказывалась Г. Лейбницем (G. Leibniz, кон. 17 в.). Практическое осуществление логицистич. тезиса было предпринято в кон. 19 — нач. 20 вв. в работах Г. Фреге и Б. Рассела (см. [1], [2]). Взгляд на математику как на часть логики обусловлен тем, что любую математич. теорему в аксиоматич. системе можно рассматривать как нек-рое утверждение о логич. следовании. Остается только все встречающиеся в таких утверждениях константы определить через логич. термины. К концу 19 в. в математике различные виды чисел, включая комплексные, были определены в терминах натуральных чисел и операций над ними. Попытка сведения натуральных чисел к логич. понятиям была предпринята Г. Фреге. В интерпретации Г. Фреге натуральные числа были кардинальными числами нек-рых понятий. Однако система Фреге не свободна от противоречий. Это выяснилось, когда Б. Рассел обнаружил противоречие в канторовой теории множеств (*антиномия* Рассела), пытаясь свести ее к логике. Обнаруженное противоречие побудило Б. Рассела к пересмотру взглядов на логику, к-рую он сформулировал в виде разветвленной *типов теории*. Однако построение математики на основе теории типов потребовало принятия аксиом, к-рые неестественно считать чисто логическими. К ним относятся, напр., аксиома бесконечности, к-рая утверждает, что существует бесконечно много индивидов, т. е. объектов наинизшего типа. В целом попытка сведения математики к логике не удалась. Как показал К. Гёдель [3], никакая формализованная система логики не может быть адекватной базой математики.

Лит.: [1] Frege G., Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Bd 1—2, Jena, 1893—1903; [2] Whitehead A. N., Russell B., Principia Mathematica, Camb., 1910; [3] Gödel K., «Monatsh. Math. und Phys.», 1931, Bd 38, S. 173—98; [4] Карри Х., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969; [5] Френкель А. А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966.

В. Е. Плиско.

ЛОГИЧЕСКАЯ АКСИОМА — формула логико-математич. языка, принимаемая в качестве аксиомы при построении формальной теории, истинная в любой структуре для данного языка в силу смысла логич. символов. Л. а. выбираются таким образом, чтобы множество *логических следствий* из аксиом в точности совпадало с множеством теорем. Так, при построении формализованной теории в нек-ром языке первого порядка L в качестве логич. аксиом могут быть выбраны все формулы, получающиеся подстановкой произвольных формул языка L вместо предикатных переменных в аксиомы исчисления предикатов.

Лит.: [1] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971; [2] Шёнфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975.

В. Е. Плиско.

ЛОГИЧЕСКАЯ МАТРИЦА — система

$$\mathfrak{M}=\langle M;\ D,\ \&,\ \vee,\ \supset,\ \neg\rangle,$$

где M — непустое множество, $D\subseteq M$; $\&$, $\vee$, $\supset$ — двуместные, а $\neg$ — одноместная операции на M. Любую формулу логики высказываний, построенную из пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$ с помощью логич. связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, можно рассматривать как n-местную функцию на M, если $p_1, \ldots, p_n$ считать переменными с областью значений M, а логич. связки интерпретировать как соответствующие операции Л. м. $\mathfrak{M}$. Формула $\mathfrak{A}$ наз. общезначимой в $\mathfrak{M}$, если при любых значениях переменных в множестве M значение $\mathfrak{A}$ принадлежит D. Л. м. $\mathfrak{M}$ наз. характеристической для исчисления высказываний K, если в $\mathfrak{M}$ общезначимы те и только те формулы, к-рые

выводимы в K. Примером Л. м. может служить система

$$\langle\{0, 1\}; \{1\}, \&, \vee, \supset, \neg\rangle,$$

где

$$x \& y = \min\{x, y\},$$
$$x \vee y = \max\{x, y\},$$
$$x \supset y = \max\{1 - x, y\},$$
$$\neg x = 1 - x.$$

Эта Л. м. является характеристической для классич. исчисления высказываний. Как доказал К. Гёдель (K. Gödel), нельзя построить Л. м. с конечным множеством M, характеристическую для интуиционистского исчисления высказываний. *В. Е. Плиско.*

ЛОГИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ — способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при к-ром *истинностное значение* сложного высказывания полностью определяется истинностными значениями исходных высказываний. Примерами Л. о. являются *конъюнкция*, *дизъюнкция*, *импликация*, *отрицание*. К Л. о. относятся также *кванторы*: они позволяют образовывать высказывания и высказывательные формы из данных высказывательных форм. *В. Е. Плиско.*

ЛОГИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА — выражение в языке формальной логики, являющееся аналогом предложения. Точное определение Л. ф. дается для каждого конкретного логич. языка. Как правило, определение формулы имеет индуктивный характер: выделяется класс выражений, называемых элементарными, или атомарными, формулами, и указываются правила, позволяющие из уже построенных формул строить новые формулы, используя символы *логических операций*. Напр., формулы логики высказываний определяются следующим образом. Всякая пропозициональная переменная есть (элементарная) формула. Если A и B — формулы, то выражения $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ — формулы. Формулы логики предикатов строятся из пропозициональных, предикатных и предметных переменных с использованием логич. связок, кванторов и вспомогательных символов (скобок и запятых). Элементарные формулы — это пропозициональные переменные и выражения вида $P(y_1, \ldots, y_n)$, где P есть n-местная предикатная переменная, $y_1, \ldots, y_n$ — предметные переменные. Формулы исчисления предикатов определяются следующим образом: а) всякая элементарная формула есть формула; б) если A и B — формулы, y — предметная переменная, то выражения $(\neg A)$, $(A\&B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\forall yA)$, $(\exists yA)$ суть формулы. *В. Е. Плиско.*

ЛОГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — n-местная функция, определенная на множестве *истинностных значений* {И, Л} и принимающая значения в этом множестве. С каждой *логической операцией* $\mathfrak{A}$ связана логич. функция $f_{\mathfrak{A}}$: если $V_1, \ldots, V_n$ — нек-рые истинностные значения, то $f_{\mathfrak{A}}(V_1, \ldots, V_n)$ есть истинностное значение высказывания $\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_n)$, где $P_1, \ldots, P_n$ - такие высказывания, что истинностное значение P_i равно V_i, $i = 1, \ldots, n$.

Иногда Л. ф. наз. всякая n-местная функция, определенная на нек-ром множестве M и принимающая значения в множестве {И, Л}. Такие функции используются в математич. логике как аналог понятия предиката. *В. Е. Плиско.*

ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ — формализации содержательных логич. теорий; выводимые объекты Л. и. интерпретируются как суждения, составленные из простейших (имеющих, вообще говоря, субъектно-предикатную структуру) при помощи пропозициональных связок и кванторов. Чаще всего используются связки «не», «и», «или», «если..., то...» и кванторы существования и всеобщности. От произвольных *исчислений*

Л. и. отличаются чисто логич. характером интерпретаций и правил вывода, от *логико-математических исчислений* — отсутствием в языке символов конкретных математич. предикатов и функций (за исключением символа «$=$», добавление к-рого интерпретируется как введение в рассмотрение равенства и не считается обычно нарушающим логич. характер исчисления). Сформулированные отличия носят относительный характер, т. к. Л. и. остаются чисто формальными системами, и любая возможная их интерпретация и семантика должны рассматриваться как нечто внешнее, имеющее эвристическую, а не доказательную ценность при изучении свойств исчисления.

Одно из важнейших Л. и.— к л а с с и ч е с к о е и с ч и с л е н и е п р е д и к а т о в с ф у н к ц и о н а л ь н ы м и з н а к а м и. Язык этого исчисления, помимо круглых скобок и логич. символов $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$, $\exists$, $\forall$, содержит три потенциально бесконечных списка: список предметных переменных, предикатных переменных и функциональных переменных (каждая из предикатных и функциональных переменных снабжена информацией о своей размерности, причем для предикатных переменных наименьшая размерность 1, а для функциональных — 0). Понятие т е р м а: 1) всякая предметная переменная и всякая функциональная переменная размерности 0 есть терм; 2) если $T_1, \ldots, T_l$ термы, а f — функциональная переменная размерности l, то $f(T_1, \ldots, T_l)$ тоже терм. Если $T_1, \ldots, T_k$ — термы, а P — предикатная переменная размерности k, то $P(T_1, \ldots, T_k)$ наз. а т о м а р н о й ф о р м у л о й. Понятие ф о р м у л ы: 1) всякая атомарная формула есть формула; 2) если F и G — формулы, а x — предметная переменная, то выражения

$$\neg F,\ (F \,\&\, G),\ (F \vee G),\ (F \supset G),\ \exists x F \text{ и } \forall x F$$

суть тоже формулы. Говорят, что в последних двух формулах все вхождения переменной x с в я з а н н ы е; вхождения переменных, к-рые в процессе построения формулы не связываются кванторами, наз. с в о б о д н ы м и вхождениями. Терм T наз. с в о б о д н ы м д л я x в F, если для любого свободного вхождения x в F неверно, что оно является вхождением в подформулу вида $\exists y G$ или $\forall y G$, где y — какая-либо из переменных, участвующих в построении T; $[F]^x_T$ означает результат подстановки T в F вместо всех свободных вхождений x.

Пусть x — произвольная предметная переменная, A, B, C и D — произвольные формулы, причем D не содержит x свободно, T — произвольный терм, свободный для x в A. Аксиомами рассматриваемого исчисления являются любые формулы следующих 10 видов (каждый из к-рых наз. с х е м о й а к с и о м):

1. $(A \supset (B \supset A))$,
2. $((A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)))$,
3. $(A \supset (B \supset (A \,\&\, B)))$,

4а. $((A \,\&\, B) \supset A)$, 4б. $((A \,\&\, B) \supset B)$,

5а. $(A \supset (A \vee B))$, 5б. $(B \supset (A \vee B))$,

6. $((A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$,
7. $((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A))$,
8. $(\neg \neg A \supset A)$,
9. $((\forall x A \supset [A]^x_T)$,
10. $([A]^x_T \supset \exists x A)$.

Кроме того, это исчисление имеет три правила вывода: «из A и $(A \supset B)$ можно получить B», «из $(D \supset A)$ можно получить $(D \supset \forall x A)$», «из $(A \supset D)$ можно получить $(\exists x A \supset D)$». Д о к а з у е м ы м и ф о р м у л а м и (или т е о р е м а м и) рассматриваемого исчисления наз. любые формулы, к-рые могут быть получены из аксиом

исчисления в результате применения (возможно, многократного) указанных правил (см. *Вывод* логический).

Основная интерпретация исчисления предикатов. Область значения предметных переменных — непустое множество предметов M, функциональных переменных — функции из M в M, предикатных переменных — функции из M в $\{0, 1\}$ (одно из значений интерпретируется как «истина», второе — как «ложь»); имеются в виду функции, определенные на любом наборе предметов, количество членов к-рого соответствует размерности переменной. Теперь для любой атомарной формулы, зафиксировав значение ее предикатной переменной и значения входящих в нее предметных и функциональных переменных, можно говорить об истинности или ложности этой формулы. Аналогично, используя таблицы истинности для пропозициональных связок и обычную интерпретацию кванторов (как бесконечных конъюнкций и дизъюнкций), можно судить об истинности произвольной формулы рассматриваемого языка при выбранном M и выбранных значениях входящих в нее предикатных, функциональных и свободных предметных переменных. Формула наз. общезначимой, если при любом таком выборе она оказывается истинной. Так, каковы бы ни были значения двуместной предикатной переменной P и одноместной функциональной переменной f, из того, что для нек-рого x формула $P(f(x), f(y))$ истинна при любом y, следует, что найдется z, для к-рого $P(z, f(z))$ истинна. Следовательно, формула

$$(\exists x \forall y P(f(x), f(y)) \supset \exists z P(z, f(z)))$$

общезначима. Можно доказать, что формула выводима в построенном исчислении тогда и только тогда, когда она общезначима. Приведенная интерпретация опирается на достаточно сложные теоретико-множественные абстракции и поэтому неприемлема с точки зрения нек-рых философий математики и метаматематич. теорий (напр., таких как *интуиционизм*, *финитизм*, *конструктивная математика*). В рамках этих теорий приходится вырабатывать другие представления о семантике Л. и.

Многочисленные Л. и. получаются видоизменением построенного выше Л. и. Так, добавление в язык символа «$=$» вместе со схемами аксиом

11. $(T = T)$,

12. $((T_1 = T_2) \supset ([A]^x_{T_1} = [A]^x_{T_2}))$

(здесь A и T произвольны, T_1 и T_2 свободны для x в A) приводит к классическому исчислению предикатов с равенством. Выбрасывание из языка функциональных переменных приводит к чистому (или узкому) исчислению предикатов. Схемы аксиом 1—8 в сочетании с первым правилом вывода дают классическое исчисление высказываний (т. к. субъектно-предикатная структура суждений не анализируется средствами исчислений высказываний, то обычно вместо различных типов переменных в языке этих исчислений употребляется лишь один тип — пропозициональные переменные, каждая из к-рых выступает как атомарная формула). Выбрасывание из всех упомянутых исчислений схемы 8 приводит к минимальным Л. и., а схем 7 и 8 — к позитивным Л. и. Возможны и другие частичные Л. и., напр. получившиеся фиксированием части логич. символов или части переменных языка (в сочетании с возможной перестройкой системы аксиом) с сохранением всех классически выводимых формул, составленных из этих символов и переменных; таковы *импликативное пропозициональное исчисление* (единственный символ $\supset$), чистое одно-

местное (сингулярное) исчисление предикатов (в языке содержатся лишь предметные и одноместные предикатные переменные) и др. Наиболее содержательные примеры частичных Л. и. составляют интуиционистские (конструктивные) исчисления, которые получаются из упомянутых классических заменой схемы 8 на схему 8′. $(A \supset (\neg A \supset B))$.

Названия Л. и. естественно складываются из упоминаемых терминов; так, схемы 1—7,8′, 11,12 определяют интуиционистское исчисление высказываний с равенством.

Рассматриваются также Л. и. с несколькими сортами переменных (и термов), причем не допускаются подстановки термов одного сорта вместо другого. В простых случаях области значения термов разных сортов интерпретируются как разные множества предметов (так, удобные формализации планиметрии могут опираться на Л. и. с предметными переменными двух сортов — «точки» и «прямые»). Но можно последовательно рассматривать сначала исчисление с единственной областью предметов, затем исчисление с дополнительной областью предметов — предикатов над 1-й областью (т. е. во втором исчислении допускаются кванторы по предикатным переменным первого) и т. д. Так возникают Л. и. высших порядков (ранее упоминавшиеся Л. и. имели 1-й порядок). Стремление формализовать логич. теории с более мощным запасом понятий приводит к ряду обобщений Л.и. Рассмотрение наряду с «истиной» и «ложью» различных степеней неопределенности приводит к различным формализациям *многозначных логик* и к исчислениям частичных предикатов. Последние Л. и. примыкают к исчислениям логич. следования и *строгой импликации исчислению*, к-рые возникли в результате попыток формализации реального употребления выражения «из A следует B» путем снятия парадоксов материальной импликации и отказа от табличного ее задания. Для формализации изучаемого в *модальной логике* различения «необходимых», «возможных» и «случайных» утверждений служат модальные Л. и.

Наряду с заданием Л. и. в терминах схем аксиом часто встречаются формулировки с конечным числом конкретных аксиом, но с добавлением различных правил подстановки вместо переменных. Для многих вопросов теории логического вывода удобны переформулировки Л. и. в виде *Генцена формальных систем*.

Исчисление вполне адекватно формализуемой теории, если выводимость в нем формулы эквивалентна ее тождественной истинности в основной интерпретации. Истинность выводимых формул связана с непротиворечивостью (корректностью) исчисления, выводимость всех истинных формул — с его полнотой. Все упомянутые Л. и. корректны, многие из них полны в том или ином смысле (см. *Гёделя теорема о полноте*). Но, по-видимому, лишь для классич. теорий 1-го порядка достигнута бесспорная адекватность формализаций нашим интуитивным представлениям об истинности. Важным свойством Л. и. является разрешимость (см. *Разрешения проблема*): почти все построенные исчисления высказываний разрешимы; напротив, все упомянутые исчисления предикатов (кроме одноместного) неразрешимы. Для неразрешимых Л. и. тем не менее возможны алгоритмы, к-рые для каждой выводимой формулы устанавливают ее выводимость, но могут не кончать работу для нек-рых невыводимых формул.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [4] Чёрч А.,

Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [5] Математическая теория логического вывода. Сб. переводов, М., 1967. *С. Ю. Маслов.*

ЛОГИЧЕСКИЙ ЗАКОН в математической логике — *логическая формула*, к-рая является схемой истинных предложений, т. е. превращается в истинное высказывание при любой интерпретации входящих в нее переменных для высказываний и предикатов. Такие формулы наз. общезначимыми, или тавтологиями. Напр., тавтология $A \vee \neg A$ выражает *исключенного третьего закон.* *В. Е. Плиско.*

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ из данного множества посылок — высказывание, являющееся истинным при любой интерпретации нелогич. символов (т. е. *имен* объектов, функций, предикатов), при к-рой истинны посылки. Если высказывание A является Л. с. из множества высказываний Γ, то говорят, что Γ логически влечет A или что A логически следует из Γ.

Если Γ — множество предложений нек-рого формализованного логико-математич. языка 1-го порядка, A — предложение того же языка, то отношение «A — логич. следствие из Γ» означает, что всякая модель для Γ является моделью для A. Это отношение обозначается $\Gamma \models A$. Из *Гёделя теоремы о полноте* классического исчисления предикатов следует, что отношение $\Gamma \models A$ совпадает с отношением $\Gamma \vdash A$, т. е. $\Gamma \models A$ тогда и только тогда, когда предложение A выводимо из множества предложений Γ средствами классич. исчисления предикатов.

Лит.: [1] Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [2] Gödel K., «Monatsh. Math. und Phys.», 1930, Bd 37, S. 349—60. *В. Е. Плиско.*

ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — см. *Логарифмически нормальное распределение.*

ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИП: для любого тригонометрич. ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю, сходимость или расходимость ряда в нек-рой точке зависит от поведения т. н. функции Римана в окрестности этой точки.

При этом функция Римана $F(x)$ данного тригонометрич. ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

— результат двукратного интегрирования его, т. е.

$$F(x) = \frac{a_0}{4} x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

Имеет место обобщение Л. п. для рядов с коэффициентами, не стремящимися к нулю (см. [2]).

Лит.: [1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1, пер. с англ., М., 1965. *М. И. Войцеховский.*

ЛОКАЛИЗАЦИЯ в категориях — специальная конструкция, связанная со специальными радикальными подкатегориями; она впервые появилась в абелевых категориях для описания т. н. *Гротендика категорий* с помощью категорий модулей над ассоциативными кольцами с единицей. Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева категория. Полная подкатегория $\mathfrak{A}'$ категории $\mathfrak{A}$ наз. плотной, если она содержит все подобъекты и факторобъекты своих объектов и замкнута относительно расширений, т. е. в точной последовательности

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

$B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда A, $C \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}'$. Факторкатегория $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ строится следующим образом. Пусть $(R, \mu]$ — подобъект прямой суммы $A \oplus B (\pi_1, \pi_2)$,

где π_1, π_2— проекции, и пусть квадрат

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\mu\pi_2}{\longrightarrow} & \\ R & & B \\ {\scriptstyle \mu\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ A & \underset{\alpha}{\longrightarrow} & C \end{array}$$

коуниверсален. Подобъект $(R, \mu]$ наз. $\mathfrak{A}'$-подобъектом, если Coker $\mu\pi_1$, Ker $\beta \in \mathrm{Ob}\mathfrak{A}'$. Два $\mathfrak{A}'$-подобъекта эквивалентны, если они содержат нек-рый $\mathfrak{A}'$-подобъект. Множество $H_{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'}(A, B)$ состоит, по определению, из классов эквивалентных $\mathfrak{A}'$-подобъектов прямой суммы $A \oplus B$. Обычное умножение бинарных отношений в абелевой категории согласовано с введенной эквивалентностью, что позволяет определить факторкатегорию $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$. Эта факторкатегория оказывается абелевой категорией. Точный функтор $T : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{A}'$ можно задать, сопоставляя каждому морфизму $\alpha : A \to B$ его график в $A \oplus B$. Подкатегория $\mathfrak{A}'$ наз. подкатегорией локализации, если функтор T обладает полным сопряженным справа функтором $S : \mathfrak{A}/\mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}$. Подкатегория Л. всегда является подкатегорией всех радикальных объектов нек-рого наследственного радикала.

В категории абелевых групп подкатегория всех периодич. групп есть подкатегория Л. Факторкатегория любой категории модулей по подкатегории Л. является категорией Гротендика. Обратно, всякая категория Гротендика эквивалентна нек-рой факторкатегории подходящей категории модулей.

Понятие подкатегории Л. можно определить и для неабелевых категорий [3]. Однако в неабелевом случае таких подкатегорий обычно мало. Напр., в категории всех ассоциативных колец имеется только две тривиальные подкатегории Л.— вся категория и ее полная подкатегория, содержащая только нулевые кольца.

Лит.: [1] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [2] Gabriel P., «Bull. Soc. math. France», 1962, t. 90, p. 323—448; [3] Шульгейфер Е. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1968, т. 19, с. 271—301.

М. Ш. Цаленко.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ в коммутативной алгебре — переход от коммутативного кольца A к *частным кольцу* A $[S^{-1}]$, где S — нек-рое подмножество A. Кольцо $A[S^{-1}]$ можно определить как решение задачи об универсальном отображении A в кольцо, при к-ром все элементы множества S становятся обратимыми. Имеются, однако, и явные конструкции $A[S^{-1}]$:

1) как множества дробей вида a/s, где $a \in A$, а s является произведением элементов из S (при этом две дроби a/s и a'/s' считаются эквивалентными тогда и только тогда, когда найдется s'', являющийся произведением элементов из S и такой, что $s''(sa' - s'a) = 0$; складываются и умножаются дроби по обычным правилам);

2) как факторкольцо кольца многочленов $A[X_s]$, $s \in S$, по идеалу, порожденному многочленами $sX_s - 1$, $s \in S$;

3) как индуктивный предел индуктивной системы A-модулей (A_i, φ_{ij}), где i пробегает естественно упорядоченный свободный коммутативный моноид $N^{(S)}$. При этом все A_i изоморфны A, а гомоморфизмы $\varphi_{ij} : A_i \to A_j$ при $j = i + n_1 s_1 + \ldots + n_k s_k$ совпадают с умножением на $s_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot s_k^{n_k} \in A$.

Кольцо A канонически отображается в $A[S^{-1}]$ и превращает последнее кольцо в A-алгебру. Это отображение $A \to A[S^{-1}]$ инъективно тогда и только тогда, когда S не содержит ни одного делителя нуля в A. Напротив, если S содержит нильпотентный элемент, то $A[S^{-1}] = 0$.

Без потери общности множество S можно считать замкнутым относительно произведения (такое множество наз. мультипликативным, или мультипликативной системой). В этом случае кольцо $A[S^{-1}]$ обозначается также $S^{-1}A$ или A_S. Важнейшие примеры мультипликативных систем:

а) множество $\{s^n\}$ всех степеней элементов $s \in A$;

б) множество $A \setminus \mathfrak{P}$, то есть дополнение к простому идеалу $\mathfrak{P}$. Соответствующее кольцо частных является локальным и обозначается $A_{\mathfrak{P}}$;

в) множество R всех не делителей нуля в A.

Кольцо $R^{-1}A$ наз. полным кольцом частных кольца A. Если A целостно, $R^{-1}A = A_{(0)}$ является полем частных.

Операция локализации без труда переносится на произвольные A-модули M, если положить

$$M[S^{-1}] = M \otimes_A A[S^{-1}].$$

Переход от M к $M[S^{-1}]$ является точным функтором. Иначе говоря, A-модуль $A[S^{-1}]$ является плоским. Л. коммутирует с прямыми суммами и индуктивными пределами.

С геометрич. точки зрения Л. означает переход к открытому подмножеству. Точнее, для $s \in A$ спектр $\operatorname{Spec} A[s^{-1}]$ канонически отожествляется с открытым (в *Зариского топологии*) подмножеством $D(s) \subset \operatorname{Spec} A$, состоящим из простых идеалов $\mathfrak{P}$, не содержащих s. Более того, эта операция позволяет связать с каждым A-модулем M квазикогерентный пучок $\tilde{M}$ на аффинной схеме $\operatorname{Spec} A$, для к-рого

$$\Gamma(D(s), \tilde{M}) = M[s^{-1}].$$

На Л. можно смотреть как на операцию, позволяющую обратить морфизмы умножения на $s \in S$ в категории A-модулей. При таком подходе операция Л. допускает широкое обобщение на произвольные категории (см. *Локализация* в категориях).

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

В. И. Данилов.

ЛОКАЛЬНАЯ ГРУБОСТЬ компактного инвариантного множества F гладкой динамич. системы — сохранение всех топологич. свойств системы в нек-рой окрестности F при любых достаточно малых (в смысле C^1) возмущениях системы. Точнее, Л. г. состоит в следующем: имеются такие окрестности $U \supset V \supset F$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при возмущении исходной системы в U, отстоящем от нее в C^1-метрике не более чем на δ, существует такое гомеоморфное вложение $V \to U$, к-рое сдвигает точки не более чем на ε и переводит отрезки траекторий исходной системы, лежащие в V, в нек-рые отрезки траекторий возмущенной системы. (Таким образом, Л. г., строго говоря, есть свойство не самого множества F, а системы, рассматриваемой в окрестности F.)

Если F — положение равновесия *потока* (или неподвижная точка каскада, т. е. динамич. системы с дискретным временем), то Л. г. F означает сохранение топологич. свойств системы при линеаризации в точке F. Почти очевидно, что необходимым условием Л. г. в этом случае является расположение собственных значений линеаризованной системы вне мнимой оси (соответственно непопадание их на единичную окружность). Это условие является и достаточным (теорема Гробмана — Хартмана, см. [1] гл. IX). Отсюда легко выводится необходимое и достаточное условие Л. г. периодической траектории потока: только один мультипликатор уравнения в вариациях лежит на единичной окружности. Имеются также результаты о Л. г. нек-рых *гиперболических множеств* (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [2] Аносов Д. В.,

в кн.: Тр. 5-й Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 2 — Качественные методы . . . , К., 1970, с. 39—45; [3] Robinson C., «Ann. Math.», 1974, v. 99, № 1, p. 154—75.
Д. В. Аносов.

ЛОКАЛЬНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — часть дифференциальной геометрии, изучающая свойства геометрич. образов, в частности линий и поверхностей, «в малом». Иными словами, строение геометрич. образа изучается в нек-рой малой окрестности произвольной его точки.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве E^3 задана кривая γ своим уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

Изучение этой кривой сводится к нахождению величин, инвариантных относительно группы движений пространства E^3. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M кривой не является инвариантным, но его производные

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}, \quad \frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}, \ \ldots \qquad (*)$$

инвариантны. Дифференциальной окрестностью n-го порядка точки M кривой γ наз. совокупность всех понятий и свойств, связанных с кривой, к-рые выражаются через первые n векторов последовательности (*). Так, дифференциальной окрестности 1-го порядка принадлежат понятия касательной к кривой и ее нормальной плоскости. Дифференциальной окрестности 2-го порядка принадлежат понятия кривизны, соприкасающейся плоскости, трехгранника Френе, соприкасающейся окружности кривой. Понятие кручения кривой принадлежит дифференциальной окрестности 3-го порядка. Кривизна и кручение кривой образуют полную систему ее инвариантов в том смысле, что любой инвариант кривой есть функция кривизны и кручения и их производных любых порядков. Аналогично строится локальная теория поверхностей пространства E^3. Локальная теория кривых и поверхностей пространства E^3 — это наиболее старая часть Л. д. г., созданная в основном в 18—19 вв. Уже в 19 в. начали появляться различные обобщения этой теории. Одно из таких обобщений связано с понятием *однородного пространства*. В произвольном дифференциально-геометрическом однородном пространстве G/H можно строить локальную теорию кривых и поверхностей различных размерностей аналогично тому, как это указано выше для пространства E^3, а именно, как теорию инвариантов основной группы G. В этом направлении наибольшее развитие получили *аффинная дифференциальная геометрия* и *проективная дифференциальная геометрия*.

Обобщение понятия первой квадратичной формы поверхности пространства E^3 привело к теории римановых пространств. Локальная теория римановых пространств возникла еще в сер. 19 в. и продолжает развиваться, находя многочисленные приложения.

Понятие параллельного перенесения вектора вдоль кривой на поверхности пространства привело к теории пространств *аффинной связности*. В свою очередь это явилось началом развития общей теории *связностей*.

Лит.: [1] Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, пер. с франц., М., 1960.
А. С. Феденко.

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ нормального топологического пространства X — топологический инвариант $\operatorname{locdim} X$, определяемый следующим образом. Считается $\operatorname{locdim} X \leqslant n$, $n = -1, 0, 1, \ldots$, если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность Ox, для *Лебега размерности* замыкания к-рой выполняется соотношение $\dim [Ox] \leqslant n$. Если $\operatorname{locdim} X \leqslant n$ для нек-рого n, то Л. р. пространства X конечна, пишется $\operatorname{locdim} X < +\infty$ и полагается

$$\operatorname{locdim} X = \min\{n\colon \operatorname{locdim} X \leqslant n\}.$$

Всегда $\operatorname{locdim} X \leqslant \dim X$; существуют нормальные пространства X с $\operatorname{locdim} X < \dim X$; в классе паракомпактов всегда $\operatorname{locdim} X = \dim X$. Если в определении Л. р. лебегова размерность $\dim [Ox]$ заменить на большую *индуктивную размерность* $\operatorname{Ind} [Ox]$, то получится определение локальной большой индуктивной размерности $\operatorname{locInd} X$.

ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ТРАЕКТОРИЙ квадратичного дифференциала — описание поведения траекторий *квадратичного дифференциала* на ориентированной римановой поверхности в окрестности любой точки этой поверхности. Пусть R — ориентированная риманова поверхность, $Q(z)\,dz^2$ — квадратичный дифференциал на R; пусть C — множество всех нулей и простых полюсов $Q(z)dz^2$, а H — множество всех полюсов $Q(z)dz^2$ порядка $\geqslant 2$. Траектории $Q(z)dz^2$ образуют регулярное семейство кривых на $R \setminus (C \cup H)$. При нек-ром расширении понятия регулярного семейства кривых это остается верным и на $R \setminus H$. Поведение траекторий в окрестностях точек множества H является значительно более сложным. Полное описание Л. с. т. приводится ниже.

1) Для любой точки $P \in R \setminus (C \cup H)$ существуют окрестность N точки P на R и гомеоморфное отображение N на круг $|w| < 1$ $(w = u + iv)$ такие, что максимальная открытая дуга каждой траектории из N переходит в отрезок, на к-ром v постоянно. Следовательно, через каждую точку из $R \setminus (C \cup H)$ проходит траектория дифференциала $Q(z)dz^2$, являющаяся либо открытой дугой, либо жордановой кривой на R.

2) Для любой точки $P \in C$ порядка μ ($\mu > 0$, если P — нуль, и $\mu = -1$, если P — простой полюс) существуют окрестность N точки P на R и гомеоморфное отображение N на круг $|w| < 1$ такие, что максимальная дуга каждой траектории из N переходит в открытую дугу, на к-рой $\operatorname{Im} w^{(\mu+2)/2}$ постоянна. Существуют $\mu + 2$ траекторий с концами в P и с предельными касательными направлениями, составляющими друг с другом равные углы величины $2\pi/(\mu+2)$.

3) Пусть $P \in H$ — полюс порядка $\mu > 2$. Если нек-рая траектория имеет конец в P, то она стремится к P по одному из $\mu - 2$ направлений, расположенных под равными углами $2\pi/(\mu-2)$. Существует окрестность N точки P на R со следующими свойствами: (1) каждая траектория, проходящая через нек-рую точку окрестности N, в каждом из направлений либо стремится к P, либо выходит из N; (2) существует окрестность N^* точки P, содержащаяся в N и такая, что каждая траектория, проходящая через нек-рую точку из N^*, хотя бы в одном направлении стремится к P, оставаясь в N^*; (3) если нек-рая траектория целиком лежит в N и поэтому в обоих направлениях стремится к P, то касательная к этой траектории при приближении к P в соответствующем направлении стремится к одному из двух смежных предельных положений. Жорданова кривая, полученная присоединением к этой траектории точки P, ограничивает область D, содержащую точки угла, образованного двумя соседними предельными касательными. Касательная к любой траектории, имеющей общие точки с D, стремится при приближении к P в двух направлениях соответственно к этим смежным предельным положениям. Область D отображается с помощью надлежащей ветви функции $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\,dz$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > c$ (c — действительное число); (4) для каждой пары смежных предельных положений существует траектория, обладающая свойствами, описанными в (3).

4) Пусть $P \in H$ — полюс 2-го порядка и z — локальный параметр, в терминах к-рого P представляется точкой $z = 0$. Пусть $[Q(z)]^{-1/2}$ имеет (при нек-ром выборе

ветви корня) следующее разложение в окрестности точки $z=0$:

$$[Q(z)]^{-1/2} = (a+ib)\, z\, \{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\},$$

где a, b — действительные, b_1, b_2, ... — комплексные постоянные. Строение образов траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в плоскости z определяется тем, какой из следующих трех случаев имеет место.

Случай I: $a\neq 0$, $b\neq 0$. Для достаточно малого $\alpha>0$ образ каждой траектории, пересекающей круг $|z|<\alpha$, в одном направлении стремится к $z=0$, а в другом — выходит из круга $|z|<\alpha$. И модуль, и аргумент z изменяются монотонно на образе траектории в круге $|z|<\alpha$. Каждый образ траектории закручивается около точки $z=0$ и ведет себя асимптотически, как логарифмич. спираль.

Случай II: $a\neq 0$, $b=0$. Для достаточно малого $\alpha>0$ образ каждой траектории, пересекающей круг $|z|<\alpha$, в одном направлении стремится к $z=0$, а в другом — выходит из круга $|z|<\alpha$. Модуль z изменяется монотонно на образе траектории в круге $|z|<\alpha$. Разные образы траекторий имеют разные предельные направления в точке $z=0$.

Случай III: $a=0$, $b\neq 0$. Для каждого $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\alpha(\varepsilon)>0$, что при $0<\alpha\leqslant\alpha(\varepsilon)$ образ траектории, пересекающей окружность $|z|=\alpha$, представляет собой жорданову кривую, лежащую в круговом кольце $\alpha(1+\varepsilon)^{-1}<|z|<\alpha(1+\varepsilon)$.

Лит.: [1] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962.

Г. В. Кузьмина.

ЛОКАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ГРУППА — топологическая группа, в к-рой групповые операции определены лишь для элементов, достаточно близких к единице. Введение Л. т. г. было инспирировано изучением локальной структуры топологич. групп (т. е. их структуры в сколь угодно малой окрестности единицы) (см. [1]). Точное определение Л. т. г. состоит в следующем.

Пусть G — топологич. пространство, e — нек-рый его элемент, Θ и Ω — нек-рые открытые подмножества в G и $G\times G$ соответственно, $e\in\Theta$ и $i:\Theta\to G$, $m:\Omega\to G$ — нек-рые непрерывные отображения. Тогда система $(G, e, \Theta, \Omega, i, m)$ наз. Л. т. г., если выполнены условия:

1) (e, g) и $(g, e)\in\Omega$ для любого $g\in G$ и $m((e, g)) = m((g, e)) = g$;

2) если $g, h, t\in G$ и (g, h), (h, t), $((g, h), t)$, $(g, (h, t))\in\Omega$, то $m((m((g, h)), t)) = m((g, m((h, t))))$;

3) $(g, i(g))$ и $(i(g), g)\in\Omega$ для любого $g\in\Theta$ и $m((g, i(g))) = m((i(g), g)) = e$.

Обычно Л. т. г. $(G, e, \Theta, \Omega, i, m)$ обозначают просто через G; элемент $m((g, h))$ обозначают через gh и наз. произведением g и h; элемент $i(g)$ обозначают через g^{-1} и наз. обратным к g; элемент e наз. единицей Л. т. г. G. Если $(g, h)\in\Omega$, то говорят, что произведение g и h определено; если $g\in\Theta$, то говорят, что для g определен обратный элемент.

Эти (определенные не для любых элементов) операции на G индуцируют структуру Л. т. г. на любой окрестности единицы e в G. Пусть G_1 и G_2 — две Л. т. г. Локальным гомоморфизмом G_1 в G_2 наз. такое непрерывное отображение f нек-рой окрестности U_1 единицы e_1 Л. т. г. G_1 в нек-рую окрестность U_2 единицы e_2 Л. т. г. G_2, что $f(e_1)=e_2$ и для любых элементов $g, h\in U_1$, произведение к-рых в G_1 определено, произведение элементов $f(g)$ и $f(h)$ в G_2 также определено и $f(gh)=f(g)f(h)$. Два локальных гомоморфизма G_1 в G_2 наз. эквивалентными, если они совпадают в нек-рой окрестности единицы Л. т. г. G_1. Пусть локальный гомоморфизм f является гомеоморфизмом

окрестностей U_1 и U_2, а обратное отображение $f^{-1}: U_2 \to U_1$ является локальным гомоморфизмом Л. т. г. G_2 в Л. т. г. G_1. Тогда f наз. *локальным изоморфизмом* Л. т. г. G_1 и Л. т. г. G_2. Две Л. т. г., между к-рыми существует локальный изоморфизм, наз. *локально изоморфными*. Напр., любая Л. т. г. локально изоморфна любой своей окрестности единицы.

Примером Л. т. г. может служить любая топологич. группа (и, значит, любая ее окрестность единицы). В теории Л. т. г. принципиальным является вопрос о том, насколько общий характер имеет этот пример, т. е. является ли всякая Л. т. г. локально изоморфной некоторой топологич. группе. В общем случае ответ отрицателен (см. [4]), но в важном частном случае конечномерных *Ли локальных групп* — положителен.

Как и в теории топологич. групп, в теории Л. т. г. можно определить понятия (локальных) подгрупп, нормальных делителей, смежных классов, факторгрупп. Напр., пусть $(G, e, \Theta, \Omega, i, m)$ — Л. т. г., и H — такое подмножество в G содержащее e, что в нек-рой окрестности U единицы e в G множество $U \cap H$ замкнуто. Пусть также для любого $g \in H \cap \Theta$ элемент $i(g)$ принадлежит H, а множество

$$\Omega_H = \{(g, h) \in \Omega \cap (H \times H) \mid m((g, h)) \in H\}$$

открыто в $H \times H$ (в предположении, что H снабжено топологией, индуцированной с G). Тогда система

$$(H, e, \Theta \cap H, \Omega_H, i|_H, m|_{\Omega_H})$$

является Л. т. г., к-рая наз. *локальной подгруппой* в Л. т. г. G. Определения нормального делителя, смежных классов по подгруппе, факторгруппы см. в [1].

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [3] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [4] Lie S., Engel F., Theorie der Transformationsgruppen, 2 Aufl., Bd 1—3, Lpz., 1930.

В. Л. Попов.

ЛОКАЛЬНАЯ УНИФОРМИЗАЦИЯ — нахождение для локального кольца бирационально эквивалентного ему регулярного локального кольца. Для неприводимого алгебраич. многообразия V над полем k *разрешающей системой* наз. семейство проективных неприводимых многообразий $\{V_\alpha\}$, бирационально эквивалентных V (т. е. таких, что поля рациональных функций $k(V_\alpha)$ и $k(V)$ изоморфны) и удовлетворяющих следующему условию: для любого нормирования v поля $k(V)$ найдется многообразие $V' \in \{V_\alpha\}$ такое, что центр P' нормирования v на V' является неособой точкой. Существование разрешающей системы (*теорема локальной униформизации*) доказано для любых многообразий над полем нулевой характеристики (см [1]), а также для двумерных многообразий над любым полем и трехмерных многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2,3 и 5 (см. [2]). Существование разрешающей системы для V, состоящей из одного многообразия, означает разрешение особенностей V и может быть получено из теоремы о Л. у. в размерности $\leqslant 3$. В общем случае из теоремы о Л. у. следует существование конечной разрешающей системы (см. [3]).

Лит.: [1] Zariski O., «Ann. Math.», 1940, v. 41, p. 852 96; [2] Abhyankar S., Resolution of singularities of embedden algebraic surfaces, N. Y.— L., 1966; [3] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 3, М., 1955; [4] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963.

В. И. Данилов.

ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, у каждой точки к-рого имеется окрестность с бикомпактным замыканием. Хаусдорфово Л. б. п. X является *вполне регулярным про-*

странством. Частично упорядоченное множество всех его хаусдорфовых *бикомпактных расширений* является полной решеткой. Ее минимальный элемент — *Александрова бикомпактное расширение* αX. Класс хаусдорфовых Л. б. п. совпадает с классом открытых подмножеств бикомпактов. Для хаусдорфова Л. б. п. X его нарост $bX \setminus X$ во всяком хаусдорфовом бикомпактном расширении bX бикомпактен. Всякое связное паракомпактное Л. б. п. является суммой счетного числа бикомпактных подмножеств.

Важнейший пример Л. б. п.— n-мерное евклидово пространство. Хаусдорфово топологическое векторное пространство E (не сводящееся к нулевому элементу) над полным недискретным нормированным телом k локально бикомпактно тогда и только тогда, когда k локально бикомпактно, а E конечномерно над k.

В. В. Федорчук.

ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛАЯ РЕШЕТКА, л о к а л ь н о в ы п у к л а я с т р у к т у р а, – действительное топологическое векторное пространство E, являющееся одновременно векторной решеткой, топология к-рого есть локально выпуклая топология, а отображения пространства $E \times E$ в E, определяемые формулами

$$(x, y) \to \sup(x, y),\ (x, y) \to \inf(x, y),\ (x, y) \in E,$$

непрерывны. Общие вопросы теории Л. в. р.— изучение связей между топологич. свойствами и свойствами порядка, в частности топологич. свойства полос и положительных конусов в Л. в. р. и связей между решеточными и топологич. свойствами полноты в Л. в. р.; изучение свойств Л. в. р., являющейся сильным сопряженным пространством к локально выпуклому пространству и свойств вложения Л. в. р. E в ее второе сопряженное пространство; построение теории продолжения положительных функционалов и линейных отображений Л. в. р.

Важнейший пример Л. в. р.— *банахова решетка*.

Лит.: [1] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [2] Дей М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971.

А. И. Штерн.

ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛАЯ ТОПОЛОГИЯ — такая (не обязательно отделимая) топология τ на действительном или комплексном топологическом векторном пространстве E, обладающая базисом из выпуклых окрестностей точек пространства E, что линейные операции в E непрерывны относительно топологии τ. Л. в. т. τ на векторном пространстве E аналитически определяется произвольным семейством *преднорм* $\{p_\alpha, \alpha \in A\}$ как топология, базис окрестностей нуля к-рой состоит из множеств вида $\{n^{-1}U\}$, где n пробегает натуральный ряд, а U — семейство конечных пересечений множеств вида $\{x \in E : p_\alpha(x) \leqslant 1\}$, $\alpha \in A$; такое семейство преднорм наз. п о р о ж д а ю щ и м д л я τ. Топология, индуцированная данной Л. в. т. на векторном подпространстве, фактортопология на факторпространстве и топология произведения Л. в. т. суть также Л. в. т. Топология τ на топологическом векторном пространстве E тогда и только тогда есть Л. в. т., когда τ есть топология равномерной сходимости на равностепенно непрерывных подмножествах *сопряженного пространства* E^*.

Пусть E и E_α, $\alpha \in A$,— векторные пространства над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, f_α (соответственно g_α) — линейное отображение E в E_α (соответственно E_α в E) и τ_α —Л. в. т. на E_α, $\alpha \in A$. Слабейшая из топологий на E, для к-рой все отображения f_α являются непрерывными отображениями пространства E в (E_α, τ_α), наз. п р о е к т и в н о й т о п о л о г и е й на E относительно семейства $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, f_\alpha), \alpha \in A\}$; проективная топология есть Л. в. т. В частности, верхняя грань семейства Л. в. т. на данном векторном пространстве, индуцированная топология на подпространстве и топология произведения

Л. в. т. суть проективные топологии (и потому — Л. в. т.). Сильнейшая Л. в. т. на E, относительно к-рой все отображения g_α, $\alpha \in A$, являются непрерывными отображениями пространства (E_α, τ_α) в пространство E, наз. индуктивной топологией на E относительно семейства $\{(E_\alpha, \tau_\alpha, g_\alpha),\ \alpha \in A\}$. В частности, фактортопология данной Л. в. т. и топология прямой суммы Л. в. т. являются индуктивной топологией (и потому — Л. в. т.). Понятия проективной и индуктивной Л. в. т. позволяют определить операции проективного и индуктивного пределов в категории локально выпуклых пространств и их линейных отображений.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

А. И. Штерн.

ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОЕ ПРОСТРАНСТВО — отделимое топологическое векторное пространство над полем действительных или комплексных чисел, в к-ром любая окрестность нулевого элемента содержит выпуклую окрестность нулевого элемента; иначе говоря, топологическое векторное пространство E тогда и только тогда есть Л. в. п., когда топология в E есть отделимая *локально выпуклая топология*. Примерами Л. в. п. (и одновременно важными в теории и приложениях классами Л. в. п.) являются *нормированные пространства*, *счетно нормированные пространства*, *Фреше пространства*.

Ряд общих свойств Л. в. п. непосредственно следует из соответствующих свойств локально выпуклых топологий; в частности, подпространства и отделимые факторпространства Л. в. п., а также произведения семейств Л. в. п. суть Л. в. п. Пусть A — направленное вверх множество индексов, $\{E_\alpha,\ \alpha \in A\}$ — семейство Л. в. п. (над одним и тем же полем) с топологиями $\{\tau_\alpha,\ \alpha \in A\}$; пусть для любой пары (α, β), $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in A$, определено непрерывное линейное отображение $g_{\alpha\beta}: E_\beta \to E_\alpha$ и пусть E — подпространство произведения $\Pi_{\alpha \in A} E_\alpha$, элементы к-рого x (x_α) удовлетворяют соотношениям $x_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta)$ для всех $\alpha \leqslant \beta$; пространство E наз. проективным пределом семейства $\{E_\alpha\}$ относительно отображений $\{g_{\alpha\beta}\}$ и обозначается $\lim g_{\alpha\beta} E_\beta$; топология в E есть проективная топология относительно семейства $\{E_\alpha, \tau_\alpha, f_\alpha\}$, где f_α — ограничение на подпространство E проекции $(\Pi_{\beta \in A} E_\beta) \to E_\alpha$. С другой стороны, пусть для любой пары (α, β), $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in A$, определено непрерывное линейное отображение $h_{\alpha\beta}: E_\alpha \to E_\beta$; пусть g_α, $\alpha \in A$, - канонич. вложение пространства E_α в прямую сумму $\oplus_{\alpha \in A} E_\alpha$ и H — подпространство в $\oplus_{\alpha \in A} E_\alpha$, порожденное образами всех пространств E_α при отображениях $g_\alpha - g_\beta \circ h_{\alpha\beta}$, где (α, β) пробегает все пары в $A \times A$, для к-рых $\alpha \leqslant \beta$. Если H замкнуто в $\oplus_{\alpha \in A} E_\alpha$, то Л. в. п. $(\oplus_{\alpha \in A} E_\alpha)/H$ наз. индуктивным пределом семейства Л. в. п. $\{E_\alpha\}$ относительно отображений $\{h_{\alpha\beta}\}$ и обозначается $\lim h_{\alpha\beta} E_\alpha$. Если $\{E_\alpha\}$ есть семейство подпространств векторного пространства E, упорядоченное по включению, и топология τ_β индуцирует τ_α на E_α при $\alpha \leqslant \beta$, то индуктивный предел семейства $\{E_\alpha\}$ наз. строгим. Л. в. п. метризуемо в том и только в том случае, когда его топология порождена последовательностью полунорм; Л. в. п. нормируемо тогда и только тогда, когда в нем существует ограниченное открытое множество (теорема Колмогорова). Всякое конечномерное подпространство в Л. в. п. имеет дополнительное замкнутое подпространство. Пополнение Л. в. п. есть Л. в. п., и всякое полное Л. в. п. изоморфно проективному пределу некоторого семейства банаховых пространств. Пространство $L(F, E)$ непрерывных линейных отображений топологическо-

го векторного пространства F в Л. в. п. E естественно снабжается структурой Л. в. п. (см. также *Операторная топология*) по данному семейству γ ограниченных подмножеств пространства F, линейная оболочка объединения к-рых плотна в F: базис окрестностей нуля соответствующей топологии есть семейство множеств $\{f : f \in L(F, E), f(s) \subset V\}$, где s пробегает семейство γ, а V пробегает базу окрестностей нуля в E.

Центральное место и основное содержание теории не только Л. в. п., но и топологических векторных пространств составляет изучение Л. в. п. в терминах его *сопряженного пространства*. Фундаментом этой теории двойственности для Л.в.п. является *Хана—Банаха теорема*, из к-рой, в частности, следует, что если E — Л. в. п., то его сопряженное пространство E' разделяет точки пространства E.

Существенной частью теории Л. в. п. является теория компактных выпуклых множеств в Л. в. п. Выпуклая оболочка со K и выпуклая закругленная оболочка предкомпактного множества K в Л. в. п. E предкомпактны; если E, кроме того, квазиполно, то замкнутая выпуклая оболочка $\overline{\text{co}}\, K$ множества K и его замкнутая выпуклая закругленная оболочка компактны. Если A, K непересекающиеся непустые выпуклые подмножества в Л. в. п. E, причем A замкнуто, а K компактно, то существует такой непрерывный действительный линейный функционал f на E, что для нек-рого действительного α неравенства $f(x) > \alpha$, $f(y) \leqslant \alpha$ выполняются для всех $x \in A$, $y \in K$ соответственно; в частности, любое непустое замкнутое выпуклое множество A в Л. в. п. есть пересечение всех содержащих его замкнутых полупространств. Непустое замкнутое выпуклое подмножество B замкнутого выпуклого множества A наз. гранью множества A, если любой замкнутый отрезок в A, внутренняя точка к-рого содержится в B, целиком лежит в B; точка $x \in A$ наз. крайней точкой множества A, если множество $\{x\}$ является гранью в A. Если K — компактное выпуклое множество в Л. в. п. E и ∂K — множество его крайних точек, то для множества $X \subset K$ следующие условия эквивалентны: 1) $\overline{\text{co}}\ X = K$; 2) $\overline{X} \subset \partial K$; 3) $\sup f(X) = \sup f(K)$ для любого непрерывного действительного линейного функционала f на E. В частности, $\overline{\text{co}}\, \partial K = K$ (теорема Крейна—Мильмана). Множество ∂K является бэровским пространством в индуцированной топологии (т.е. пересечение любой последовательности плотных в ∂K открытых подмножеств ∂K плотно в ∂K), и для любого $x \in K$ существует такая вероятностная мера μ на K, что $x = \int_K y d\mu(y)$ и мера μ обращается в нуль на всех бэровских подмножествах $X \subset K$, не пересекающихся с ∂K (а если K метризуемо, то $\mu(\partial K) = 1$). Всякое непрерывное отображение компактного выпуклого множества K в Л. в. п. в себя имеет неподвижную точку (теорема Шаудера — Тихонова); коммутативное семейство непрерывных аффинных преобразований множества K в себя (и равностепенная непрерывная группа непрерывных аффинных преобразований K в себя) имеет неподвижную точку.

Еще один важный раздел теории Л. в. п.— теория линейных операторов в Л. в. п.; в частности — теория компактных (наз. также вполне непрерывными), ядерных и фредгольмовых операторов. Теоремы о замкнутом графике и открытом отображении имеют в теории Л. в. п. далеко идущие обобщения. Л. в. п. E наз. обладающим свойством аппроксимации, если тождественное отображение пространства E в себя может быть равномерно аппроксимировано на предкомпактных множествах в E конечномерными непрерывными линейными отображениями про-

странства E в себя; если Л. в. п. обладает свойством аппроксимации, то оно обладает рядом других замечательных свойств и, в частности, в таком пространстве любой ядерный оператор имеет однозначно определенный след. Существуют сепарабельные банаховы пространства, не обладающие свойством аппроксимации, но банаховы пространства с базисом Шаудера и подпространства проективных пределов гильбертовых пространств обладают свойством аппроксимации. Некоторые варианты этого свойства представляют интерес в теории вполне непрерывных операторов и теории операторов Фредгольма.

Заметную роль в теории Л. в. п. играют методы гомологич. алгебры, связанные с изучением категории Л. в. п. и их непрерывных отображений, а также некрых подкатегорий этой категории. В частности, гомологич. методы позволили решить ряд задач, связанных с продолжением линейных отображений, с существованием линейного отображения в данное пространство, накрывающего отображение в факторпространство этого пространства, а также изучить свойства пополнений факторпространств E/F в связи с пополнением пространств E и F.

Другими существенными вопросами теории Л. в. п. являются: теория интегрирования вектор-функций со значениями в Л. в. п. (как правило, бочечном пространстве); теория дифференцирования нелинейных отображений Л. в. п.; теория топологических тензорных произведений Л. в. п. и связанная с ними теория операторов Фредгольма, ядерных операторов и ядерных пространств. Существует содержательная теория ряда специальных классов Л. в. п. таких, как бочечные пространства, борнологич. пространства (на к-рых любая полунорма, ограниченная на ограниченных множествах, непрерывна), рефлексивные и полурефлексивные пространства (канонич. отображение к-рых в сильное второе сопряженное пространство является соответственно топологическим или линейным изоморфизмом), ядерные пространства и т. д.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Studia math.», 1934, t. 5, p. 29—33; [2] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [3] его же, Интегрирование, пер. с франц., М., 1970, гл. 6—8; то же, 1977, гл. 3—5, 9; [4] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971; [5] Дэй М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [6] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [7] Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, пер. с нем., М., 1967; [8] Робертсон А. П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967; [9] Фелпс Р., Лекции о теоремах Шоке, пер. с англ., М., 1968; [10] Энфло П., «Математика», 1974, т. 18, № 1, с. 146 55; [11] Фрёлихер А., Бухер В., Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы, пер. с англ., М., 1970; [12] Паламодов В. П., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 1, с. 3 –65.

А. И. Штерн.

ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ в точке M — функция, интегрируемая в том или ином смысле в нек-рой окрестности точки M. Если действительная функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, есть точная конечная производная функции F, действительной и определенной на том же отрезке, то f локально интегрируема по Лебегу в точках нек-рого открытого всюду плотного на $[a, b]$ множества. В двумерном случае (см. [2]) существует действительная функция f, определенная на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, являющаяся точной конечной повторной производной в любом порядке $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x, y)$, к-рая не будет локально интегрируемой по Лебегу ни в одной точке квадрата.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [2] Толстов Г. П., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1950, т. 35, с. 1—101.

И. А. Виноградова.

ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЕ ТЕЛО — множество K, наделенное алгебраич. структурой тела и локально

компактной топологией. При этом требуется, чтобы алгебраич. операции, т. е. сложение, умножение, переход к противоположному и обратному элементам (последний определен только на множестве ненулевых элементов $K^* = K \setminus 0$), были непрерывны в заданной топологии. Так как любое тело локально компактно относительно дискретной топологии, предполагается, что топология тела K не дискретна.

Изучение Л. к. т. основано на существовании меры Хаара в локально компактной группе K_+ (аддитивной группе тела). Пусть μ — нек-рая мера Хаара на K_+ и $S \subset K$ — нек-рый компакт в K положительной меры. Тогда формула

$$\mathrm{mod}_K(a) = \frac{\mu(aS)}{\mu(S)}$$

определяет гомоморфизм (модуль) мультипликативной группы K^* в мультипликативную группу R_+^* действительных положительных чисел. По определению полагают $\mathrm{mod}_K(0) = 0$.

Функция «модуль» удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{mod}_K(a+b) \leqslant A \sup(\mathrm{mod}_K(a),\ \mathrm{mod}_K(b))$$

с нек-рой константой $A > 0$. Если это неравенство выполняется для $A = 1$, то тело K наз. неархимедовым, или ультраметрическим. В противном случае K наз. архимедовым телом. Тело K архимедово тогда и только тогда, когда оно связно. Любое архимедово тело изоморфно либо полю действительных чисел, либо полю комплексных чисел, либо телу кватернионов.

Ультраметрическое тело K вполне несвязно. Функция «модуль» определяет неархимедову метрику на K. Любое такое тело является расширением конечной степени либо поля Q_p рациональных p-адических чисел для нек-рого простого p (в случае, когда K имеет характеристику 0), либо поля $F_p(X)$ формальных степенных рядов над полем F_p из p элементов (в случае, когда K имеет характеристику p). Поле Q_p (соответственно поле $F_p((X))$) лежит в центре тела K. В каждом из этих случаев тело K наз. p-телом, или p-полем.

Ультраметрическое тело K содержит единственное максимальное подкольцо R, определяемое условием

$$R = \{a \in K \mid \mathrm{mod}_K(a) \leqslant 1\}.$$

Это кольцо локально. Его максимальный идеал P определяется условием

$$P = \{a \in R \mid \mathrm{mod}_K(a) < 1\},$$

а все элементы с модулем 1 являются обратимыми в R. Идеал P — главный, а поле вычетов R/p — конечное поле характеристики p.

В случае, когда p-тело K не коммутативно, оно имеет размерность n^2 над своим центром K_0 и индекс ветвления n над K_0. Далее, существует промежуточное поле K_1 такое, что $K \supset K_1 \supset K_0$, K_1 — неразветвленное расширение K_0 степени n, и все автоморфизмы K_1 над K_0 индуцируются внутренними автоморфизмами тела K.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Вейль А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972; [3] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [4] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973.

Л. В. Кузьмин.

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНАЯ АЛГЕБРА — алгебра, в к-рой всякая подалгебра с конечным числом образующих имеет конечную размерность над основным полем.

Л. к. а. удобно себе представлять как объединение возрастающей цепочки конечномерных подалгебр. Класс Л. к. а. замкнут относительно взятия гомоморфных образов и перехода к подалгебрам. Если ограничиться рас-

смотрением ассоциативных алгебр, то расширение Л. к. а. с помощью Л. к. а. снова будет Л. к. а. Поэтому во всякой алгебре сумма локально конечных идеалов представляет собою наибольший локально конечный идеал, содержащий все локально конечные идеалы и наз. локально конечным радикалом.

В ассоциативном случае всякая Л. к. а. является алгебраической. Обратное неверно (см. [6]). Тем не менее алгебраич. алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству, локально конечна. Неизвестно (1982), будет ли локально конечной алгебраич. алгебра с делением. Существует предположение, что конечно определенная алгебраич. алгебра конечномерна. Радикал Джекобсона локально конечной ассоциативной алгебры совпадает с верхним нильрадикалом. Радикал Джекобсона локально конечной йордановой алгебры также является нильидеалом. Всякая альтернативная или специальная йорданова алгебраич. алгебра ограниченного индекса (степени минимальных аннулирующих полиномов всех элементов ограничены в совокупности) над полем характеристики $\neq 2$ локально конечна. Разрешимая алгебраич. алгебра Ли (внутренние дифференцирования всех элементов алгебраические) локально конечна. Алгебраич. алгебра Ли ограниченного индекса локально конечна.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [3] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1957, т. 41, № 3, с. 381—94; [4] Мс Crimmon K., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1969, v. 62, № 3, p. 671—78; [5] Лю Шаосюэ, «Матем. сб.», 1956, т. 39, № 3, с. 385—96; [6] Голод Е. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 273—76.

В. Н. Латышев.

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНАЯ ГРУППА — группа, в к-рой каждая конечно порожденная подгруппа конечна. Любая Л. к. г.— периодич. группа, но не наоборот (см. *Бёрнсайда проблема*). Расширение Л. к. г. с помощью Л. к. г. будет снова Л. к. г. Всякая Л. к. г. с условием минимальности для подгрупп (и даже для абелевых подгрупп) обладает абелевой подгруппой конечного индекса [3] (см. *Группа с условием конечности*). Л. к. г., все абелевы подгруппы к-рой имеют конечные ранги, сама имеет конечный ранг и содержит локально разрешимую подгруппу конечного индекса.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Черников С. Н., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 5, с. 45—96; [3] Шунков В. П., «Алгебра и логика», 1970, т. 9, № 5, с. 579—615; [4] его же, там же, 1971, т. 10, № 2, с. 199—225.

А. Л. Шмелькин.

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа, в к-рой каждая конечно порожденная подполугруппа конечна. Всякая Л. к. п. будет *периодической полугруппой*. Обратное неверно: существуют даже периодич. группы, не являющиеся локально конечными (см. *Бёрнсайда проблема*). Задолго до решения проблемы Бёрнсайда для групп были построены примеры периодических, но не локально конечных полугрупп в классах полугрупп, далеких от групп, прежде всего — в классе *нильполугрупп*; таковы, напр., свободная полугруппа с двумя образующими в многообразии, заданном тождеством $x^3=0$, и свободная полугруппа с тремя образующими в многообразии, заданном тождеством $x^2=0$. Вместе с тем для ряда классов полугрупп условия периодичности и локальной конечности равносильны. Тривиальный пример доставляют коммутативные полугруппы. Связка Л. к. п. (см. *Связка полугрупп*) сама будет Л. к. п. [1], более того, полугруппа, обладающая разбиением на локально конечные группы, будет Л. к. п., в частности всякая *идемпотентов полугруппа* будет Л. к. п. [7]. Если n таково, что всякая группа с тождеством $x^n=1$ локально конечна, то всякая полугруппа с тождеством $x^{n+1}=x$ локально конечна [6]. Полугруппа, обладающая разбиением на Л. к. п., может не быть Л. к. п. [3], но если ρ — такая конгру-

энция на полугруппе S, что факторполугруппа S/ρ есть Л. к. п. и каждый ρ-класс, являющийся подполугруппой, есть Л. к. п., то и S будет Л. к. п. (см. [4], [5]); в частности, идеальное расширение Л. к. п. при помощи Л. к. п. само будет Л. к. п. Если S — периодич. полугруппа матриц над телом и все подгруппы из S локально конечны, то S локально конечна [8], откуда вытекает, что всякая периодич. полугруппа матриц над произвольным полем будет Л. к. п.

Лит.: [1] Шеврин Л. Н., «Докл. АН СССР», 1965, т. 162, № 4, с. 770—73; [2] Шнейерман Л. Б., «Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук», 1976, № 4, с. 22—28; [3] Браун Т. К., «Укр. матем. ж.», 1968, т. 20, № 6, с. 732—38; [4] Brown T. C., «Pacif. J. Math.», 1967, v. 22, № 1, p. 11—14; [5] его же, там же, 1971, v. 36, № 2, p. 285—89; [6] Green J. A., Rees D., «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1952, v. 48, pt 1, p. 35—40; [7] McLean D., «Amer. Math. Monthly», 1954, v. 61, № 2, p. 110—13; [8] McNaughton R., Zalcstein Y., «J. Algebra», 1975, v. 34, № 2, p. 292—99.

Л. Н. Шеврин.

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНОЕ ПОКРЫТИЕ — покрытие топологич. пространства его подмножествами такое, что у каждой точки есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов этого покрытия. Не из всякого открытого покрытия прямой можно выделить Л. к. п.: достаточно рассмотреть монотонную последовательность интервалов неограниченно растущих по длине. Оказывается, возможность выделить из любого открытого покрытия пространства Л. к. п. равносильна его бикомпактности. Существенно новое содержание несет идея локальной конечности в соединении с понятием вписанности. Теорема Стоуна утверждает, что в любое открытое покрытие произвольного метрич. пространства можно вписать Л. к. п. Хаусдорфовы пространства, обладающие последним свойством, наз. паракомпактами. Л. к. п. важны не только своим участием в определении паракомпактности. Требование локальной конечности играет существенную роль в конструкциях, принадлежащих теории размерности, в формулировках и доказательствах разного рода аддиционных теорем. Существование в регулярном пространстве базы, распадающейся в объединение счетного семейства локально конечных открытых покрытий, равносильно метризуемости этого пространства. Открытые Л. к. п. нормальных пространств служат построению разбиения единицы на этом пространстве, подчиненного этому покрытию. С помощью разбиений единицы строятся, в частности, стандартные отображения многообразий в евклидовы пространства. Требование локальной конечности покрытия не обязательно соединять с предположением о его открытости. Локальная конечность покрытия пространства автоматически влечет, что в этом покрытии «достаточно много» множеств, близких по свойствам к открытым. Если в любое открытое покрытие регулярного пространства можно вписать какое-нибудь Л. к. п., то пространство паракомпактно. Рассматриваются также локально конечные семейства множеств в пространстве, определяемые аналогично, но не обязанные покрывать пространство. Специальный их случай представляют дискретные семейства множеств — такие семейства множеств, что у каждой точки всего пространства есть окрестность, пересекающая не более одного элемента этого семейства. Дискретные семейства важны в связи с изучением отделимости в пространстве. Так, выделяются коллективно нормальные пространства требованием: любое дискретное семейство множеств отделяется дискретным семейством окрестностей. С последним условием прямо связана задача комбинаторного продолжения локально конечных семейств множеств до локально конечных семейств открытых множеств.

Лит.: [1] Engelking R., General Topology, Warsz., 1977; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974;

[3] Александров П. С., «C. r. Acad. sci.», 1924, t. 178, p. 185—87; [4] Stone A. H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 54, p. 977—82; [5] Mihaei E., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 4, № 5, p. 831—38. *А. В. Архангельский.*

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНОЕ СЕМЕЙСТВО множеств в топологическом пространстве — семейство F множеств такое, что у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным множеством элементов семейства F. Важны локально конечные семейства открытых множеств и локально конечные открытые покрытия. Так, регулярное пространство метризуемо в том и только в том случае, если оно обладает базой, распадающейся на счетное множество Л. к. с. В любое открытое покрытие метрич. пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие. Пространства, обладающие этим свойством, наз. паракомпактными пространствами. *А. В. Архангельский.*

ЛОКАЛЬНО ЛИНЕЙНО СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, в к-ром для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности O_x существует меньшая окрестность $U_x \subset O_x$ такая, что для любых двух точек $x_0, x_1 \in U_x$ существует непрерывное отображение $f : I \to O_x$ единичного отрезка I [0, 1] в окрестность O_x с $f(0) = x_0$ и $f(1) = x_1$. Всякое Л. л. с. п. локально связно. Всякое открытое подмножество Л. л. с. п. локально линейно связно. Связное Л. л. с. п. является *линейно связным пространством*.

Л. л. с. п. играют важную роль в теории накрытий. Пусть $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — накрытие, а Y — Л. л. с. п. Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы отображение $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ допускало поднятие, т. е. существовало такое отображение $g : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, что $f = pog$, является выполнение соотношения

$$f_{\#}(\pi_1(Y, y_0)) \subset P(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),$$

где π_1 — фундаментальная группа. Если X — локально односвязное (локально 1-связное, см. ниже) пространство и $x_0 \in X$, то для любой подгруппы H группы $\pi_1(X, x_0)$ существует накрытие $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, для к-рого $p_{\#}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$.

Многомерным обобщением локальной линейной связности является локальная k-связность (локальная связность в размерности k). Пространство X наз. локально k-связным, если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности O_x существует такая меньшая окрестность $U_x \subset O_x$, что любое отображение r-мерной сферы S^r в U_x, где $r \leqslant k$, гомотопно в O_x постоянному отображению. Метрич. пространство X локально k-связно тогда и только тогда, когда всякое отображение $f : A \to X$ с произвольного замкнутого подмножества A метрич. пространства Y с $\dim Y \leqslant k+1$ можно продолжить на нек-рую окрестность A в Y (теорема Куратовского — Дугунджи). *С. А. Богатый.*

ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНАЯ АЛГЕБРА — алгебра, всякая конечно порожденная подалгебра к-рой нильпотентна. Л. н. а. удобно себе представлять как объединение возрастающей цепочки нильпотентных подалгебр. Л. н. а. с ассоциативными степенями является нильалгеброй. Л. н. а. Ли является энгелевой. Класс Л. н. а. замкнут относительно взятия гомоморфных образов и перехода к подалгебрам.

В случае ассоциативных алгебр расширение Л. н. а. с помощью локально нильпотентной снова будет Л. н. а. Поэтому сумма всех локально нильпотентных идеалов ассоциативной алгебры представляет собою наибольший локально нильпотентный идеал, содержащий все локально нильпотентные идеалы и наз. радикалом Левицкого. Аналог радикала Левицкого можно

определить в энгелевой алгебре Ли ограниченного индекса. Локально нильпотентная алгебра не может быть простой.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [3] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, № 4, с. 515—40.

В. Н. Латышев.

ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — группа, каждая конечно порожденная подгруппа к-рой нильпотентна (см. *Нильпотентная группа*). В Л. н. г. все элементы конечного порядка образуют нормальную подгруппу, являющуюся периодич. частью этой группы. Эта подгруппа разлагается в прямое произведение силовских подгрупп, а факторгруппа по ней не имеет кручения. Л. н. г. без кручения обладает свойством однозначности извлечения корня: если для элементов a и b при каком-либо целом $n\neq 0$ будет $a^n=b^n$, то $a=b$. Каждая Л. н. г. G без кручения обладает мальцевским пополнением, т. е. вкладывается в однозначно определенную Л. н. г. без кручения G^* такую, что в ней разрешимы все уравнения вида $x^n=g$, где $n\neq 0$, а g — любой элемент из G. Это пополнение функториально, т. е. любой гомоморфизм $f: G_1\to G_2$ Л. н. г. без кручения G_1 в G_2 однозначно продолжается до гомоморфизма $f^*: G_1^*\to G_2^*$.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

А. Л. Шмелькин.

ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНАЯ ГРУППА — группа G, всякое конечное подмножество к-рой содержится в некотором конечном нормальном делителе группы G.

ЛОКАЛЬНО ПЛОСКОЕ ВЛОЖЕНИЕ — вложение q одного топологич. многообразия M^n в другое N^n, для к-рого для каждой точки $x\in M$ имеются карты в окрестности U точки x и в окрестности V точки qx в N, в к-рых ограничение q на U линейно отображает U в V. Иными словами, q локально линейно в надлежащих системах координат. Эквивалентно: имеются окрестность U точки $x\in M$ и окрестность V точки $qx\in N$ такие, что пару (V, qU) можно гомеоморфно отобразить на стандартную пару (D^n, D^m) или (D^n, D^m_+), где D^k — единичный шар пространства $\mathbb{R}^k$ с центром в начале, а D^k_+ — пересечение этого шара с полупространством $x_k\geqslant 0$.

Любое вложение окружности и дуги в плоскость является Л. п. в., однако окружность или дуга могут быть вложены в $\mathbb{R}^k$ при $k\geqslant 3$ не локально плоско (см. *Дикое вложение*, *Дикая сфера*). Любое гладкое вложение локально плоско в гладком смысле (т. е. в определении координат можно выбрать гладкими). Кусочно линейное вложение может не быть локально плоским не только в кусочно линейном, но и в топологич. смысле, напр. конус с вершиной в $\mathbb{R}^4_+$ над замкнутой ломаной, заузленной в граничной плоскости $\mathbb{R}^3$. Для $n\neq 4$ и $m\neq n-2$ имеется гомотопич. критерий того, чтобы вложение было локально плоским: для каждой точки $x\in M$ и окрестности U точки qx имеется окрестность $V\subset U$ такая, что любая петля в $V\setminus qM$ гомотопна нулю в U/qM (локальная односвязность). Если $m=n-2$, то критерий имеется и при $n\neq 4$, но существенно сложнее. При $m=4$ вопрос остается невыясненным. При $m=n-1$ и $m=n-2$ Л. п. в. имеет топологическое нормальное расслоение.

А. В. Чернавский.

ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМАЯ АЛГЕБРА — алгебра, для к-рой всякая ее конечно порожденная подалгебра разрешима. Л. р. а. удобно представлять себе как объединение возрастающей цепочки разрешимых подалгебр. Класс Л. р. а. замкнут относительно перехода к подалгебрам и взятия гомоморфных образов.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964.

В. Н. Латышев.

ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — группа, в к-рой каждая конечно порожденная подгруппа разрешима (см. *Разрешимая группа*). Класс Л. р. г. замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов, но не замкнут относительно расширений.

Периодическая Л. р. г. локально конечна.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *А. Л. Шмелькин.*

ЛОКАЛЬНО СВОБОДНАЯ ГРУППА — группа, каждая конечно порожденная подгруппа к-рой свободна (см. *Свободная группа*). Таким образом, счетная Л. с. г. является объединением возрастающей цепи свободных подгрупп.

Говорят, что Л. с. г. имеет конечный ранг n, если всякое ее конечное подмножество содержится в подходящей свободной подгруппе ранга n, причем n — наименьшее число с этим свойством. Класс Л. с. г. замкнут относительно свободного произведения, причем ранг свободного произведения Л. с. г. конечного ранга равен сумме рангов сомножителей.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *А. Л. Шмелькин.*

ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫЙ ПУЧОК — пучок модулей, локально изоморфный прямой сумме нескольких экземпляров структурного пучка. Точнее, пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — *окольцованное пространство*. Пучок модулей $\mathcal{F}$ над $\mathcal{O}_X$ наз. локально свободным, если для каждой точки $x \in X$ существует такая открытая окрестность $U \subset X$, $x \in U$, что ограничение $\mathcal{F}|U$ пучка $\mathcal{F}$ на U является свободным пучком модулей над $\mathcal{O}_{X|U}$, т. е. изоморфно прямой сумме нек-рого множества $I(x)$ экземпляров структурного пучка $\mathcal{O}_{X|U}$. Если X связно и множество $I(x)$ конечно, напр. состоит из n элементов, то n не зависит от точки x и наз. рангом Л. с. п. $\mathcal{F}$. Пусть V — векторное расслоение ранга n на X и $\mathcal{F}$ — пучок ростков его сечений, тогда $\mathcal{F}$ — Л. с. п. ранга n. Обратно, для каждого Л. с. п. $\mathcal{F}$ ранга n существует векторное расслоение V ранга n на X такое, что $\mathcal{F}$ является пучком ростков его сечений (см. [1], [2]); тем самым существует естественное взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных Л. с. п. ранга n и классами изоморфных векторных расслоений ранга n на X.

Пример: пусть X — гладкое связное алгебраич. многообразие размерности n, тогда пучок регулярных дифференциальных форм Ω^1_X является Л. с. п. ранга n.

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — связная аффинная схема — спектр коммутативного кольца A, $\mathcal{F}$ — Л. с. п. ранга n, $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ — A-модуль его глобальных сечений. Тогда A-модуль M проективен и отображение $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством классов (с точностью до изоморфизма) Л. с. п. ранга n и множеством классов (с точностью до изоморфизма) проективных A-модулей ранга n (см. [2]).

Лит.: [1] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [2] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y.— Hdlb.— B., 1977. *В. А. Исковских.*

ЛОКАЛЬНО СВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, в к-ром для любой точки x и любой ее окрестности O_x имеется меньшая связная окрестность U_x. Всякое открытое подмножество Л. с. п. локально связно. Всякая компонента связности Л. с. п. открыто-замкнута. Пространство X локально связно тогда и только тогда, когда для всякого семейства $\{A_t\}$ подмножеств X имеет место включение

$$\operatorname{Fr}(\bigcup_t A_t) \subset \bigcup_t \overline{\operatorname{Fr}(A_t)}$$

(здесь $\operatorname{Fr} B$ — граница B, а $\overline{B}$ — замыкание B). Всякое *локально линейно связное пространство* локально связно. Частичное обращение этого утверждения: всякое полное метрич. Л. с. п. является локально линейно связ-

ным (теорема Мазуркевича — Мура — Менгера). *С. А. Богатый.*

ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫЙ КОНТИНУУМ — континуум, являющийся *локально связным пространством*. Примеры Л. с. к.: n-мерный куб, n 0, 1, 2, . . .; *гильбертов кирпич*; все *тихоновские кубы*. Объединение графика функции

$$y - \sin\frac{1}{x}, \quad 0 < x \leqslant 1,$$

с отрезком $I = \{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ дает пример не локально связного (в точках отрезка I) континуума. Метризуемый континуум локально связан тогда и только тогда, когда он является непрерывным образом отрезка, т. е. линией в смысле Жордана. Любой метризуемый Л. с. к. линейно связан. Более того, любые две различные точки такого континуума K содержатся в простой дуге, лежащей в K.

Б. А. Пасынков.

ЛОКАЛЬНО ТРИВИАЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ — расслоение $\pi : X \to B$ со слоем F, для любой точки базы к-рого $b \in B$ существует окрестность $U \ni b$ и гомеоморфизм $\varphi_U : U \times F \to \pi^{-1}(U)$ такой, что $\pi\varphi_U(u, f) = u$, где $u \in U$, $f \in F$. Отображение $h_U = \varphi_U^{-1}$ наз. картой Л. т. р. Совокупность карт $\{h_U\}$, ассоциированная с покрытием базы $\{U\}$, образует атлас Л. т. р. Напр., *главное расслоение*, пространство к-рого локально компактно, а G — группа Ли, является Л. т. р., причем любая карта h_U удовлетворяет соотношению

$$h_U(gx) = gh_U(x), \quad x \in \pi^{-1}(U),$$

где G действует на $G \times U$ по формуле $g(g', u) \quad (gg', u)$. Для любого Л. т. р. $\pi : X \to B$ и непрерывного отображения $f : B' \to B$ *индуцированное расслоение* является Л. т. р.

Лит.: [1] Спеньер Э., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1971; [2] Стинрод Н., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [3] Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, пер. с англ., М., 1964; [4] Хьюзмоллер Д., Расслоенные пространства, пер. с англ., М., 1970.

М. И. Войцеховский.

ЛОКАЛЬНОЕ ЗАЦЕПЛЕНИЕ — свойство расположения замкнутого множества Ф вблизи его точки a в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заключающееся в существовании такого числа $\varepsilon > 0$, что при любом положительном числе δ в открытом множестве $O(a, \delta) \setminus \Phi$ лежит q-мерный цикл Z^q, $q < n$, с целыми коэффициентами, обладающий свойством: всякий лежащий в $O(a, \varepsilon)$ компакт P, в к-ром цикл Z^q гомологичен нулю, имеет непустое пересечение с множеством Ф. При этом $O(a, \delta)$, $O(a, \varepsilon)$ суть шары с центром a и радиусами δ, ε. Не меняя содержания этого определения, можно ограничиться компактами P, являющимися полиэдрами. При q 0 понятие Л. з. переходит в понятие *локального разбиения*. Теорема Александрова о препятствиях: для того чтобы $\dim \Phi = p$, необходимо и достаточно, чтобы число $n - p - 1$ было наименьшим целым числом q, для к-рого в $\mathbb{R}^n$ имеется q-мерное зацепление множества Ф вблизи какой-либо точки $a \in \Phi$. Доказана и аналогичная теорема о препятствиях «по модулю m», характеризующая множества Ф, имеющие равную p *гомологическую размерность* «по модулю m».

Далеко идущими обобщениями теорем о препятствиях являются теоремы о *гомологическом опоясывании* компактов.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию, М., 1975; [2] Ситников К., «Докл. АН СССР», 1951, т. 81, № 2, с. 153—56.

А. А. Мальцев.

ЛОКАЛЬНОЕ КОЛЬЦО — коммутативное кольцо с единицей, имеющее единственный максимальный идеал. Если A — Л. к. с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то факторкольцо $A/\mathfrak{m}$ является полем и наз. полем вычетов Л. к. A.

Примеры Л. к. Любое поле или кольцо нормирования является локальным. Локально и кольцо формальных степенных рядов $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ над полем k или над любым Л. к. Напротив, кольцо многочленов $k[X_1, \ldots, X_n]$ при $n \geqslant 1$ не локально. Пусть X — топологич. пространство (или дифференцируемое многообразие, или аналитич. пространство, или алгебраич. многообразие), а x — точка X. Пусть A — кольцо ростков в точке x непрерывных функций (соответственно дифференцируемых, аналитических или регулярных функций); тогда A — Л. к., максимальный идеал к-рого состоит из ростков функций, обращающихся в 0 в точке x.

К Л. к. приводят нек-рые общие теоретико-кольцевые конструкции, важнейшей из к-рых является *локализация*. Пусть A — коммутативное кольцо, а $\mathfrak{p}$ — простой идеал A. Кольцо $A_{\mathfrak{p}}$, к-рое состоит из дробей вида $\frac{a}{s}$, где $a \in A$, $s \in A - \mathfrak{p}$, является локальным и наз. локализацией кольца A в $\mathfrak{p}$. Максимальным идеалом кольца $A_{\mathfrak{p}}$ является идеал $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, а поле вычетов $A_{\mathfrak{p}}$ отождествляется с полем частных целостного факторкольца $A/\mathfrak{p}$. Другие конструкции, приводящие к Л. к.,— гензелизация или пополнение кольца относительно нек-рого максимального идеала. Любое факторкольцо Л. к. также локально.

Свойство кольца A (или A-модуля M, или A-алгебры B) наз. локальным свойством, если выполнение его для A (или M, или B) эквивалентно выполнению его для колец $A_{\mathfrak{p}}$ (соответственно модулей $M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$, или алгебр $B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$) для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$ кольца A (см. *Локальное свойство*).

Степени $\mathfrak{m}^n$ максимального идеала $\mathfrak{m}$ Л. к. A определяют базис окрестностей нуля так наз. топологии локального кольца (или $\mathfrak{m}$-адической топологии). Для нётерова Л. к. эта топология отделима (теорема Крулля), а любой его идеал является замкнутым.

Далее рассматриваются только нётеровы локальные кольца. Л. к. наз. полным локальным кольцом, если оно полно относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии; в этом случае $A = \varprojlim_n A/\mathfrak{m}^n$. В полном Л. к. $\mathfrak{m}$-адическая топология слабее любой другой отделимой топологии (теорема Шевалле). Любое полное Л. к. представляется как факторкольцо кольца $S[[X_1, \ldots, X_n]]$ формальных степенных рядов, где S — поле (в равнохарактеристическом случае) или полное кольцо дискретного нормирования (в случае разных характеристик). Эта теорема позволяет доказать, что полные Л. к. обладают рядом специфич. свойств, отсутствующих у произвольных нётеровых Л. к. (см. [5]), напр. полное Л. к. является *превосходным кольцом*.

Более тонкое, количественное исследование Л. к. A связано с применением понятия присоединенного градуированного кольца $\mathrm{Gr}(A) = \bigoplus_{n \geqslant 0} (\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1})$. Пусть $H_A(n)$ — размерность векторного пространства $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ над полем вычетов $A/\mathfrak{m}$; как функция целого аргумента n она наз. функцией Гильберта — Самюэля (или характеристической функцией) Л. к. A. При больших n эта функция совпадает с нек-рым многочленом $\overline{H}_A(n)$ от n, к-рый наз. многочленом Гильберта — Самюэля Л. к. A (см. также *Гильберта многочлен*). Этот факт можно выразить в терминах ряда Пуанкаре: формальный ряд

$$P_A(t) = \sum\nolimits_{n \geqslant 0} H_A(n) \cdot t^n$$

является рациональной функцией вида $f(t)(1-t)^{-d(A)}$,

где $f(t)\in\mathbb{Z}[t]$ — многочлен, а $d(A)$—1 равно степени H_A. Целое число $d(A)$ совпадает с размерностью (по Круллю) dim A кольца A и является одним из важнейших инвариантов кольца. Кроме того, $d(A)$ равно наименьшему числу элементов $a_1, \ldots, a_d\in A$, для к-рых факторкольцо $A/(a_1, \ldots, a_d)$ артиново. Если эти элементы можно выбрать так, чтобы они порождали максимальный идеал $\mathfrak{m}$, то Л. к. A наз. регулярным локальным кольцом. Регулярность A эквивалентна тому, что $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=\dim A$. Для d-мерного регулярного кольца A

$$H_A(n)=\binom{n+d-1}{d-1},$$

а $P_A(t)=(1-t)^{-d}$. Геометрически регулярность означает неособость соответствующей точки (аналитического или алгебраического) многообразия.

Помимо характеристич. функции H_A и связанных с ней размерности и кратности у Л. к. имеются различные инварианты гомологич. природы. Главным из них является глубина prof A (см. *Глубина модуля*); условие prof $A=\dim A$ выделяет среди Л. к. так наз. *Коэна — Маколея кольца*. Неизвестно (1982), для всякого ли полного Л. к. A существует модуль M с prof $M=\dim A$. Другими гомологич. инвариантами являются т. н. числа Бетти $b_i(A)$ Л. к. A, т. е. размерности k-пространств $\mathrm{Tor}_i^A(k, k)$, где k — поле вычетов A. Открыт вопрос о рациональности ряда Пуанкаре $\sum_{n\geqslant 0} b_n(A)t^n$, хотя для многих классов колец известен утвердительный ответ. Имеются также инварианты алгебро-геометрич. природы; при их определении используется разрешение особенности, соответствующей Л. к.

Аналогичная теория строится для полулокальных колец, т. е. колец, имеющих конечное число максимальных идеалов. Роль максимального идеала для них при этом играет *Джекобсона радикал*.

Лит.: [1] Krull W., «J. reine und angew. Math.», 1938, Bd 179, S. 204—26; [2] Chevalley C., «Ann. Math.», 1943, v. 44, p. 690—708; [3] Cohen I. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1946, v. 59, p. 54—106; [4] Samuel P., Algèbre locale, P., 1953; [5] Nagata M., Local rings, N. Y.— L., 1962; [6] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [7] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93; [8] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [9] Атья М.-Ф., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру, пер. с англ., М., 1972.

В. И. Данилов.

ЛОКАЛЬНОЕ ПОЛЕ — полное дискретно нормированное поле с конечным полем вычетов. Структура Л. п. хорошо известна: 1) если характеристика K равна 0, то K является конечным расширением поля $\mathbb{Q}_p$ *р-адических чисел*; 2) если характеристика K больше 0, то K изоморфно полю $k((T))$ формальных степенных рядов над конечным полем k. Локальными такие поля называются в противоположность глобальным полям (конечным расширениям полей $\mathbb{Q}$ или $k(T)$) и являются средством изучения последних. О когомологич. свойствах расширений Галуа локальных полей см. [1], а также ст. *Адель* и *Полей классов теория*.

Для построения теории полей классов многомерных схем используется обобщение понятия Л. п. А именно, структурой n-мерного локального поля наз. последовательность O_0, O_1, . . ., O_n полных колец дискретного нормирования вместе с изоморфизмами

$$k(O_i)\xrightarrow{\sim} K(O_{i+1}),$$

где k — поле вычетов, а K — поле частных кольца O; при этом $k(O_n)$ должно быть конечным. Для n-мерных Л. п. построена структурная теория (см. [3]).

Лит.: [1] Serre J.-P., Corps locaux, P., 1962; [2] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [3] Паршин А. Н., «Докл. АН СССР», 1978, т. 243, № 4, с. 855—58.

В. И. Данилов.

ЛОКАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ мера приближения (в частности, наилучшего приближения) функции $f(x)$ на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, рассматриваемая как функция этого множества. Основной интерес представляет поведение Л. п. ф., когда mes $E \to 0$. В нек-рых случаях удается охарактеризовать в терминах Л. п. ф. степень гладкости приближаемой функции. Пусть $E_n(f;\ (\alpha,\ \beta))$ — наилучшее приближение функции $f(x) \in C\ [a,\ b]$ алгебраич. многочленами степени n на интервале $(\alpha,\ \beta)$, $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$. Справедливо следующее утверждение: условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $f(x)$ имела непрерывную производную порядка $n+1$ во всех точках $[a,\ b]$, заключается в том, что

$$\frac{E_n(f;\ (\alpha,\ \beta))}{(\beta-\alpha)^{n+1}} \longrightarrow \lambda(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

равномерно при $\beta \to x$, $\alpha \to x$, $\alpha < x < \beta$, где непрерывная функция $\lambda(x)$ определяется равенством

$$(n+1)!\ 2^{2n+1}\ \lambda(x) = |f^{(n+1)}(x)|.$$

Лит.: [1] Райков Д. А., «Докл. АН СССР», 1939, т. 24, № 7; [2] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954, [3] Брудный Ю. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 24, с. 69—132.
Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

ЛОКАЛЬНОЕ РАЗБИЕНИЕ — свойство расположения замкнутого множества Φ в пространстве $\mathbb{R}^n$, заключающееся в существовании такой точки a (точка, в к-рой множество Φ разбивает пространство) и такого положительного числа ε, что при любом числе $\delta > 0$ в открытом множестве $O(a,\ \delta) \setminus \Phi$, где $O(a,\ \delta)$ — (открытый) шар радиуса δ с центром a, содержится пара точек, обладающая свойством: всякий лежащий в $O(a,\ \varepsilon)$ континуум, содержащий эту пару точек, имеет непустое пересечение с множеством Ф. К. Менгер (K. Menger) и П. С. Урысон доказали, что лежащее в плоскости замкнутое множество Φ тогда и только тогда имеет размерность 1, когда оно не содержит внутренних (относительно плоскости) точек и локально разбивает плоскость (хотя бы в одной точке a).

Аналогичная характеризация замкнутых $(n-1)$-мерных множеств в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ дана П. С. Александровым (см. *Локальное зацепление*).
А. А. Мальцев.

ЛОКАЛЬНОЕ СВОЙСТВО в коммутативной алгебре – свойство P коммутативного кольца A или A-модуля M, к-рое верно для кольца A (модуля M) тогда и только тогда, когда аналогичное свойство выполняется для локализаций кольца A (модуля M) относительно всех простых идеалов кольца A, т. е. свойство, к-рое выполняется глобально тогда и только тогда, когда оно выполняется всюду локально. Часто вместо множества всех простых идеалов можно ограничиться рассмотрением всех максимальных идеалов кольца A. Эта терминология становится понятной, если сопоставить кольцу A топологич. пространство Spec A (спектр кольца A), состоящее из всех простых идеалов A. Тогда утверждение «P верно для A» эквивалентно утверждению «P выполняется на всем пространстве Spec A», а утверждение «P верно для всех $A_{\mathfrak{p}}$» эквивалентно утверждению «каждая точка $\mathfrak{p}$ пространства Spec A обладает окрестностью, в к-рой выполняется P».

Примеры Л. с. Область целостности A целозамкнута в своем поле частных тогда и только тогда, когда целозамкнуты локализации $A_{\mathfrak{p}}$ для всех максимальных идеалов кольца A. Гомоморфизм A-модулей $f: M \to N$ является изоморфизмом (мономорфизмом, эпиморфизмом, нулевым) тогда и только тогда, когда отображение локализованных модулей $f_{\mathfrak{p}}: M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ является таковым для всех максимальных идеалов кольца A.

Напротив, свойство A-модуля M быть свободным не является локальным.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *Л. В. Кузьмин.*

ЛОКАЛЬНОСТИ ПРИНЦИП — собирательное понятие, объединяющее ряд утверждений, относящихся в основном к эллиптическим (в нек-рых случаях к гипоэллиптическим) уравнениям (операторам) и вытекающих из точечного характера особенности фундаментального решения для этого класса уравнений. Напр., эллиптич. оператор $L(D, x)$ с переменными коэффициентами, записанный в виде

$$L(D, x) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

представим, в соответствующем смысле, в окрестности точки x_0 как сумма

$$L(D, x) - \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x_0) D^\alpha + L'(x),$$

где первое слагаемое — оператор с постоянными коэффициентами, а $L'(x)$ «достаточно мал» в указанной окрестности.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж.-Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 2, М., 1966. *А. А. Дезин.*

ЛОКАЛЬНЫЕ ГОМОЛОГИИ — *гомологии группы*

$$H_p^x = H_p^c(X, X \setminus x; G),$$

определенные в точках $x \in X$, где H_p^c — *гомологии с компактными носителями*. Эти группы совпадают с прямыми пределами

$$\varinjlim H_p^c(X, X \setminus U; G)$$

по открытым окрестностям U точки x, а для гомологически локально связных X — также с обратными пределами

$$\varprojlim H_{p-1}^c(U \setminus x; G).$$

Гомологическая размерность конечномерного метризуемого локально компактного пространства X над G совпадает с наибольшим значением n, для к-рого $H_n^x \neq 0$, причем множество таких точек $x \in X$ имеет размерность n.

Пусть C_* — дифференциальный пучок над X, определяемый сопоставлением каждому открытому множеству $U \subset X$ комплекса цепей $C_*(X, X \setminus U; G)$. Группы H_p^x являются слоями производных пучков $\mathcal{H}_p = H_p(C_*)$. Для обобщенных многообразий $H_p^x = 0$ при $p \neq n = \dim X$. В этом случае гомологич. последовательность с коэффициентами в G пары (X, A) совпадает с когомологиями пары $(X, X \setminus A)$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{H}_n$ (двойственность Пуанкаре — Лефшеца). Для локальных когомологий локально компактных пространств аналогичные факты не имеют места.

Лит.: [1] Скляренко Е. Г., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, № 4, с. 831—43; [2] Харлап А. Э., «Матем. сб.», 1975, т. 96, № 3, с. 347—73. *Е. Г. Скляренко.*

ЛОКАЛЬНЫЕ И РЕЗИДУАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА — абстрактные (т. е. сохраняющиеся при изоморфизме) свойства алгебраич. систем или универсальных алгебр. Если P — нек-рое свойство алгебр, то говорят, что алгебра A локально обладает свойством P, если существует локальная система подалгебр алгебры A, каждая из к-рых обладает свойством P. Локальной системой подалгебр алгебры A наз. система непустых подалгебр, направленная по включению, объединение всех подалгебр к-рой совпадает с A. Если каждая алгебра нек-рого класса, к-рая локально обладает свойством P, в действительности сама обладает свойством P, то P наз. локальным свойством алгебр этого класса. Напр., свойство быть абелевой группой — локальное

свойство в классе всех групп, а свойство быть конечной группой — не локальное. Подробнее о локальности свойств см. *Мальцева локальные теоремы*.

Говорят, что алгебра A р е з и д у а л ь н о о б л а д а е т с в о й с т в о м P, если существует такое разделяющее семейство конгруэнций $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ на A, что каждая факторалгебра A/q_λ обладает свойством P. Семейство $(q_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ наз. р а з д е л я ю щ и м с е м е й с т в о м к о н г р у э н ц и й, если пересечение всех q_λ есть максимальная (т. е. самая дробная) конгруэнция данной алгебры. Алгебра A резидуально обладает свойством P тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде подпрямого произведения однотипных с ней алгебр, обладающих свойством P. Свойство P наз. резидуальным в нек-ром классе алгебр, если всякая алгебра этого класса, резидуально обладающая свойством P, в действительности сама обладает свойством P. В классе всех групп свойство быть абелевой группой резидуально, а конечность не резидуальна. Всякое резидуальное свойство алгебр, сохраняющееся при переходе к гомоморфным образам, локально.

Лит.: [1] К о н П., *Универсальная алгебра*, пер. с англ., М., 1968.

О. А. Иванова.

ЛОКАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ с о з н а ч е н и я м и в п у ч к е а б е л е в ы х г р у п п — когомологии со значениями в пучке, носители к-рых содержатся в заданном подмножестве. Пусть X — топологич. пространство, $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на X, Z — локально замкнутое подмножество в X, т. е. замкнутое подмножество нек-рого открытого в X подмножества V, тогда через $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ обозначают подгруппу в $\Gamma(V, F|V)$, состоящую из сечений пучка $\mathcal{F}|V$ с носителями в Z. Если фиксировать Z, то соответствие $F \to \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ определяет точный слева функтор из категории пучков абелевых групп на X в категорию абелевых групп. Значение соответствующего i-го правого производного функтора на пучке $\mathcal{F}$ обозначают через $H^i_Z(X, \mathcal{F})$ и наз. i-й группой локальных когомологий пространства X со значениями в $\mathcal{F}$ относительно Z. При этом

$$H^0_Z(X, \mathcal{F}) = \Gamma_Z(X, \mathcal{F}).$$

Пусть $H^0_Z(\mathcal{F})$ — пучок на X, отвечающий предпучку, к-рый сопоставляет любому открытому подмножеству $U \subset X$ группу $\Gamma_{Z \cap U}(U, \mathcal{F}|U)$. Соответствие $\mathcal{F} \to \mathcal{H}_Z(\mathcal{F})$ является точным слева функтором из категории пучков абелевых групп на X в нее же. Значение его i-го правого производного функтора на пучке $\mathcal{F}$ обозначается через $\mathcal{H}_Z(\mathcal{F})$ и наз. пучком i-х локальных когомологий пучка $\mathcal{F}$ относительно Z. Пучок $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F})$ ассоциирован с предпучком, сопоставляющим открытому подмножеству $U \subset X$ группу $H^i_{Z \cap U}(U, \mathcal{F}|U)$.

Существует спектральная последовательность $E_r^{p,q}$, сходящаяся к $H^{p+q}_Z(X, \mathcal{F})$, у к-рой $E_r^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q_Z(\mathcal{F}))$ (см. [2], [3]).

Пусть Z — локально замкнутое подмножество в X, Z' — замкнутое подмножество в Z, $Z'' = Z \setminus Z'$, тогда имеют место точные последовательности:

$$0 \to H^0_{Z'}(X, \mathcal{F}) \to \ldots \to H^i_{Z'}(X, \mathcal{F}) \to$$

$$\to H^i_Z(X, \mathcal{F}) \to H^i_{Z''}(X, \mathcal{F}) \to H^{i+1}_{Z'}(X, \mathcal{F}) \to \quad (1)$$

$$0 \to \mathcal{H}^0_{Z'}(\mathcal{F}) \to \ldots \to \mathcal{H}^i_{Z'}(\mathcal{F}) \to$$

$$\to \mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^i_{Z''}(\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^{i+1}_{Z'}(\mathcal{F}) \to \quad (2)$$

Если Z есть все X, а Z' — замкнутое подмножество в X, то последовательность (2) дает точную последовательность

$$0 \to \mathcal{H}^0_{Z'}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to \mathcal{H}^0_{X \setminus Z}(\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^1_{Z'}(\mathcal{F}) \to 0$$

и систему изоморфизмов

$$\mathcal{H}^i_{X\setminus Z'}(\mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^{i+1}_{Z'}(\mathcal{F}), \quad i \geqslant 1.$$

Пучки $\mathcal{H}^i_{X\setminus Z'}(\mathcal{F})$ наз. i-ми лакунарными пучками пучка $\mathcal{F}$ и имеют важные приложения к вопросу о продолжении сечений и классов когомологий пучка $\mathcal{F}$, заданных на $X\setminus Z'$, на все X (см. [4]).

Если X — локально нётерова схема, $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на X, Z — замкнутая подсхема в X, то $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F})$ — также квазикогерентные пучки на X. Если $\mathcal{Y}$ — когерентный пучок идеалов на X, задающий подсхему Z, то имеют место изоморфизмы

$$\varinjlim_n \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\mathcal{Y}^n, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F}).$$

Важными для приложений являются следующие критерии тривиальности и когерентности пучков локальных когомологий (см. [3], [4]).

Пусть X — локально нётерова схема или комплексное аналитич. пространство, Z — локально замкнутая подсхема или аналитич. подпространство в X, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, $\mathcal{Y}$ — когерентный пучок идеалов, задающий Z. Пусть

$$\operatorname{prof}_Z \mathcal{F} = \min_{x\in Z} \operatorname{prof}_{\mathcal{Y}_{X,x}} \mathcal{F}_x,$$

где $\operatorname{prof}_{\mathcal{Y}_{X,x}} \mathcal{F}$ — длина максимальной регулярной для $\mathcal{F}_x$ последовательности элементов из $\mathcal{Y}_{X,x}$ или ∞, если $\mathcal{F}_x = 0$. Тогда равенство $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F}) = 0$ для $i<n$ равносильно условию $\operatorname{prof}_Z \mathcal{F} \geqslant n$. Пусть $\operatorname{codh}_x \mathcal{F}_x = \operatorname{prof}_{\mathfrak{m}_x} \mathcal{F}_x$ (где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал колец $\mathcal{O}_{X,x}$) и пусть $S_m(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \operatorname{codh}_x \mathcal{F} \geqslant m\}$. Если X — комплексное аналитич. пространство или алгебраич. многообразие, то все множества $S_m(\mathcal{F})$ являются аналитическими или соответственно алгебраическими. Если при этом $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, а Z — соответственно аналитич. пространство или подмногообразие, то когерентность пучков $\mathcal{H}^i_Z(\mathcal{F})$ для $0 \leqslant i \leqslant q$ равносильно условию

$$\dim Z \cap \overline{S_{k+q+1}}\,(\mathcal{F} \mid X\setminus Z) \leqslant k$$

для всякого целого k.

В терминах Л. к. определяются гиперфункции, имеющие важные приложения в теории дифференциальных уравнений с частными производными [5]. Пусть Ω — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, к-рое естественным образом вложено в $\mathbb{C}^n$. Тогда $\mathcal{H}^p_\Omega(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$ при $p \neq n$. Предпучок $\Omega \to H^n_\Omega(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ на $\mathbb{R}^n$ определяет вялый пучок, называемый пучком гиперфункций.

Аналог Л. к. существует и в теории этальных когомологий [3].

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология, Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112; [2] Grothendieck A., Local cohomology, B.— Hdlb.— N. Y., 1967; [3] его же, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, Amst.— P., [1968]; [4] Siu Y.-T., Trautmann G., Gap-sheaves and extension of coherent analytic subsheaves, B.— [a. o.], 1971; [5] Шапира П., Теория гиперфункций, пер. с франц., М., 1972; [6] Bănică C., Stănăşilă O., Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe, Buc., 1974.

Д. А. Пономарев.

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ теории вероятностей — предельные теоремы для плотностей, т. е. теоремы, устанавливающие сходимость плотностей последовательности распределений к плотности предельного распределения (если указанные плотности существуют), или классический вариант Л. п. т. — локальные теоремы для решетчатых распределений, простейшей из к-рых является локальная *Лапласа теорема.*

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих общую функцию распределения $F(x)$ с математич. ожиданием a и конечной положительной дисперсией σ^2. Пусть $F_n(x)$ функция распределения нормированной суммы

$$Z_n = (1/\sigma\sqrt{n})\sum_{j=1}^{n}(X_j - a)$$

и $\Phi(x)$ — нормальная (0,1) функция распределения. Сделанные предположения обеспечивают выполнение соотношения $F_n(x) \to \Phi(x)$ при $n \to \infty$ для любого x. Можно показать, что это соотношение не влечет за собой сходимость плотности распределения $p_n(x)$ случайной величины Z_n к нормальной плотности

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

даже если распределение F имеет плотность. Если же Z_n имеет при нек-ром $n = n_0$ ограниченную плотность распределения $p_{n_0}(x)$, то

$$p_n(x) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad (*)$$

равномерно относительно x. Условие ограниченности плотности $p_{n_0}(x)$ для нек-рого n_0 необходимо для того, чтобы (*) имело место равномерно относительно x.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое невырожденное распределение, и X_1 с вероятностью 1 принимает значения вида $b + Nh$, $N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где $h > 0$ и b — постоянные (т. е. X_1 имеет *решетчатое распределение* с шагом h).

Пусть X_1 имеет конечную дисперсию σ^2, $a = EX_1$ и

$$P_n(N) = \mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j = nb + Nh\right\}.$$

Для того чтобы

$$\sup_N \left| \sigma\sqrt{n}\, h^{-1} P_n(N) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{nb + Nh - na}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right\}\right| \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы шаг h был максимальным. Эта теорема Гнеденко представляет собой обобщение локальной теоремы Лапласа.

Л. п. т. для сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин могут служить основным математич. аппаратом классической статистич. механики и квантовой статистики (см. [7], [8]).

Л. п. т. глубоко изучены для сумм независимых случайных величин и векторов вместе с оценками скорости сходимости в этих теоремах. Наиболее полно исследован случай предельного нормального распределения (см. [3], гл. 7); ряд работ посвящен Л. п. т. для случая произвольного устойчивого распределения (см. [2]). Аналогичные исследования проведены также для сумм зависимых случайных величин, в частности для сумм случайных величин, образующих цепь Маркова (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; [2] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965; [3] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., 1972; [4] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [5] Сираждинов С. Х., Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Ташкент, 1955; [6] Статулявичус В. А., «Литовский матем. сб.», 1961, т. 1, в. 1—2, с. 231—314; 1969, т. 9, в. 2, с. 345—62; [7] Хинчин А. Я., Математические основания статистической механики, М.— Л., 1943; [8] Хинчин А. Я., Математические основания квантовой статистики, М.— Л., 1951.

В. В. Петров.

ЛОКАЛЬНЫЙ ГОМЕОМОРФИЗМ — отображение $f : X \to Y$ топологич. пространств такое, что для каждой

точки $x \in X$ найдется окрестность O_x, к-рая посредством f отображается в Y гомеоморфно. Иногда в определение Л. г. автоматически включается требование $fX = Y$ и, кроме того, отображение f предполагается открытым. Примеры Л. г.: непрерывно дифференцируемое с отличным от нуля якобианом отображение открытого подмножества n-мерного евклидова пространства в n-мерное евклидово пространство; отображение накрытия и, в частности, естественное отображение топологич. группы на ее факторпространство по дискретной подгруппе. Если отображение $f : X \to Y$ полного по Чеху, в частности, хаусдорфова локально бикомпактного пространства на тихоновское пространство Y открыто и счетнократно, т. е. $|f^{-1}y| \leqslant \aleph_0$, $y \in Y$, то на нек-ром открытом и всюду плотном в X множестве отображение f является Л. г. *Б. А. Пасынков.*

ЛОКАЛЬНЫЙ УНИФОРМИЗИРУЮЩИЙ ПАРАМЕТР, локальная униформизирующая, локальный параметр,— комплексное переменное t, определенное как непрерывная функция $t_{p_0} = \varphi_{p_0}(p)$ точки p *римановой поверхности* R всюду в нек-рой окрестности $V(p_0)$ точки $p_0 \in R$, реализующая гомеоморфное отображение окрестности $V(p_0)$ на круг $D(p_0) = \{t \in \mathbb{C} : |t| < r(p_0)\}$, причем $\varphi_{p_0}(p_0) = 0$. При этом $V(p_0)$ наз. отмеченной, или параметрической, окрестностью, φ_{p_0}: $V(p_0) \to D(p_0)$ — отмеченным, или параметрическим, отображением, $D(p_0)$ — отмеченным, или параметрическим, кругом. При отмеченном отображении любая функция точки $g(p)$, определенная в отмеченной окрестности $V(p_0)$, переходит в функцию Л. у. п. t, т. е. $g(p) = g[\varphi_{p_0}^{-1}(t)] = G(t)$. Если $V(p_0)$ и $V(p_1)$ — две отмеченные окрестности такие, что $V(p_0) \cap V(p_1) \neq \varnothing$, t_{p_0} и t_{p_1} — соответствующие Л. у. п., то $t_{p_1} = \varphi_{p_1}[\varphi_{p_0}^{-1}(t_{p_0})]$ есть однолистная голоморфная функция на нек-рой подобласти $D(p_0)$, осуществляющая биголоморфное отображение этой подобласти в $D(p_1)$.

Если $R = R_F$ — риманова поверхность аналитич. функции $w = F(z)$ и p_0 — регулярный элемент $F(z)$ с проекцией $z_0 \neq \infty$, то $t_{p_0} = z - z_0$; $t_{p_0} = 1/z$ при $z_0 = \infty$. Если p_0 — особый, или алгебраический, элемент $F(z)$, соответствующий *ветвления точке* z_0 порядка $k - 1 > 0$, то $t_{p_0} = \sqrt[k]{z - z_0}$ при $z_0 \neq \infty$ и $t_{p_0} = 1/\sqrt[k]{z}$ при $z_0 = \infty$. В отмеченной окрестности элемента p_0 Л. у. п. t фактически осуществляет при этом локальную *униформизацию*, вообще говоря, многозначного соотношения $w = F(z)$ по формулам (для примера, при $z_0 \neq \infty$):

$$z = z_0 + t^k, \quad w = F(z_0 + t^k) = w(t), \quad k \geqslant 1.$$

В случае, когда R — риманова поверхность с краем, для точек p_0, принадлежащих краю R, Л. у. п. $t_{p_0} = \varphi_{p_0}(p)$ отображает отмеченную окрестность $V(p_0)$ на полукруг

$$D(p_0) = \{t \in \mathbb{C} : |t| < r(p_0), \quad \operatorname{Im} t \geqslant 0\}.$$

Если R — *риманова область* над комплексным пространством $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, то Л. у. п.

$$t_{p_0} = \varphi_{p_0}(p) = (t_1, \ \ldots, \ t_n)_{p_0} = (\varphi_1(p), \ \ldots, \ \varphi_n(p))_{p_0}$$

осуществляет гомеоморфное отображение отмеченной окрестности $V(p_0)$ на поликруг

$$D(p_0) = \{t = (t_1, \ \ldots, \ t_n) \in \mathbb{C}^n : \\ : |t_1| < r_1(p_0), \ \ldots, \ |t_n| < r_n(p_0)\}.$$

При этом, если пересечение $V(p_0) \cap V(p_1)$ не пусто, то отображение $t_{p_1} = \varphi_{p_1}[\varphi_{p_0}^{-1}(t_{p_0})]$ биголоморфно отображает нек-рую подобласть $D(p_0)$ в $D(p_1)$.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ МЕТОД — один из прямых методов численного решения задач оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты и управляющие функции, основанный на варьировании в пространстве состояний (см. [1] — [3]).

В Л. в. м. исходная задача оптимального управления, заданная в форме *Лагранжа задачи*, приводится в результате дискретизации по аргументу t и фазовому вектору x к задаче минимизации аддитивного функционала

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} F^0(x_k,\ x_{k+1},\ u_k,\ t_k,\ t_{k+1}) \qquad (1)$$

при условиях

$$x_{k+1} - x_k - \tau F(x_k,\ x_{k+1},\ u_k,\ t_k,\ t_{k+1}),$$
$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1, \qquad (2)$$

$$(x_k,\ u_k) \in G_k, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N, \qquad (3)$$

где x_k, u_k — векторы фазовых координат и управлений в узле t_k (имеющие размерности соответственно n и m), G_k — заданные области $(n+m)$-мерного пространства (G_0 и G_N описывают граничные условия), $\tau = (T-t_0)/N$ — шаг разбиения исходного интервала $[t_0,\ T]$ для независимого переменного. Существенным для Л. в. м. является условие равенства размерностей $n-m$ векторов x и u, при к-ром построение элементарной операции оказывается достаточно простым. Под элементарной операцией понимается определение управления u_k, переводящего систему из точки $(t_k,\ x_k)$ в близкую точку $(t_{k+1},\ x_{k+1})$. При равенстве размерностей векторов x и u и при нек-рых дополнительных условиях управление u_k определяется на каждом интервале $(t_k,\ t_{k+1})$ из решения системы n уравнений (2), полученной в результате конечноразностной аппроксимации системы дифференциальных уравнений исходной вариационной задачи.

Пусть в качестве начального приближения задана нек-рая ломаная Γ_0 : $(x_0^0, \ldots, x_N^0)$, для к-рой выполнены условия (2), (3). Алгоритм Л. в. м. состоит в последовательном улучшении положения узлов, через к-рые проходит ломаная Γ_0, осуществляемом в результате поочередного локального варьирования каждой j-й компоненты вектора x_k. На каждом участке от t_k до t_{k+2}, $k = 0,\ 1,\ \ldots$, при фиксированных x_k и x_{k+2} каждая j-я компонента вектора x_k поочередно варьируется с шагом $h_j > 0$. Если в результате этого варьирования значение функционала (1) уменьшается (при выполнении условий (2), (3)), то аналогичное варьирование производится с очередной $(j+1)$-й компонентой вектора x_k, в противном случае j-я компонента варьируется с шагом $(-h_j)$. Такое локальное варьирование осуществляется последовательно для всех узлов ломаной Γ_0. В результате к моменту окончания итерации получается новая ломаная Γ_1, на к-рой функционал (1) принимает значение, не большее чем на начальном приближении Γ_0. Последующие итерации выполняются аналогично. При необходимости производится уменьшение шагов h_j и τ. Приближенное решение исходной вариационной задачи определяется путем интерполяции по найденным значениям управления на каждом шаге.

При $m-n=1$ решение, полученное Л. в. м. при заданных значениях τ и h, удовлетворяет конечноразностной аппроксимации уравнения Эйлера с точностью до членов порядка $\max(h,\ h/\tau,\ h/\tau^2)$ (см. [3]).

Если варьирование исходной ломаной Γ_0 не ограничивается поочередным варьированием ее узлов, а осу-

ществляется на более полном графе, соответствующем выбранным шагам τ и h_j и включающем ломаную Γ_0, то говорят о *блуждающей трубки методе*.

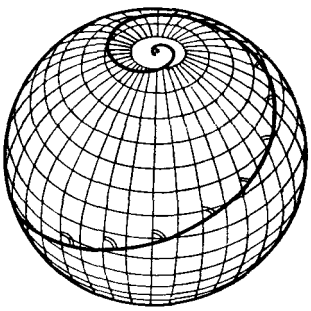
При $m<n$ выполнение элементарной операции связано с нек-рыми трудностями. В этом случае вместо Л. в. м. может применяться близкий к нему *бегущей волны метод*.

Л. в. м. непосредственно обобщается на вариационные задачи с неаддитивными функционалами, в к-рых ограничения носят характер изопериметрич. условий (см. [3]). Л. в. м. может быть распространен на вариационные задачи, в к-рых неизвестные функции зависят от нескольких независимых переменных и соответствующие функционалы задаются в виде интегралов по областям различной размерности (см. [2]).

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971; [2] Крылов И. А., Черноусько Ф. Л., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1966, т. 6, № 2, с. 203—17; [3] Баничук Н. В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л., там же, 1969, т. 9, № 3, с. 548—57.

И. Б. Вапнярский.

ЛОКСОДРОМА, локсодромия,— линия на поверхности вращения, пересекающая все меридианы под постоянным углом α. Если α — острый или тупой угол, то Л. образует бесконечное число витков вокруг полюса, все приближаясь к нему. Для поверхности вращения, первая квадратичная форма к-рой записана в виде



$$ds^2 = du^2 + G(u)dv^2,$$

уравнение Л.:

$$c\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \pm \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{G(u)}}.$$

Для сферы с первой квадратичной формой

$$ds^2 = R^2(du^2 + \cos^2 u\, dv^2)$$

уравнение Л.:

$$v\ \mathrm{ctg}\,\alpha = R \ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2R}\right).$$

А. Б. Иванов.

ЛОММЕЛЯ МНОГОЧЛЕН — многочлен $R_{m,\nu}(z)$ степени m относительно z^{-1} для $m=0, 1, 2, \ldots$ и любого ν, определяемый равенством

$$R_{m,\nu}(z) = \frac{\pi z}{2\sin \nu\pi}\left[J_{\nu+m}(z)\, J_{-\nu+1}(z) + (-1)^m J_{-\nu-m}(z)\, J_{\nu-1}(z)\right]$$

или

$$R_{m,\nu}(z) = \frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{2}{z}\right)^m \times$$

$$\times {}_2F_3\left(\frac{1-m}{2}, -\frac{m}{2}; \nu, -m, 1-\nu-m; -z^2\right).$$

При этом $J_\mu(z)$ — *Бесселя функция* и ${}_2F_3$ — гипергеометрический ряд, Л. м. удовлетворяют соотношениям:

$$J_{\nu+m}(z) = J_\nu(z)\, R_{m,\nu}(z) - J_{\nu-1}(z)\, R_{m-1,\nu-1}(z),$$

$$R_{0,\nu}(z) = 1, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Лит.: [1] Magnus W., Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2 Aufl., B.— Gött.— Hdlb., 1948.

А. Б. Иванов.

ЛОММЕЛЯ ФУНКЦИЯ — решение неоднородного *Бесселя уравнения*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = x^\rho.$$

Если $\rho=\nu+2n$, где n — натуральное число, то

$$y=(-1)^{n-1}(n-1)!\,2^{\nu+2n-2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\times$$
$$\times\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\frac{\Gamma(\nu+n)}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Если числа $\rho+\nu\geqslant 0$ и $\rho-\nu\geqslant 0$ не являются целыми, то

$$y=2^{\rho-2}\,\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+2k}}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}+k+1\right)}.$$

Если $\rho=\nu-2n$, где $n\geqslant 0$ — целое число, и ν не является целым числом $\leqslant n$, то

$$y=\frac{\Gamma(\nu-n)}{n!\,2^{-\nu+2n+2}}\left[2J_\nu(x)\ln\frac{x}{2}-\right.$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{\Gamma(\nu-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n+2k}-$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}+\frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\right)\right].$$

Здесь при $n=0$ первая сумма принимается равной нулю, $J_\nu(x)$ — *Бесселя функция*. Известны также Л. ф. от двух переменных.

См. также *Ангера функция*, *Вебера функция*, *Струве функция*.

Л. ф. изучалась Э. Ломмелем [1].

Лит.: [1] Lommel E., «Math. Ann.», 1880, Bd 16, S. 183—208; [2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949, [3] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

ЛОНГМАНА МЕТОД — метод приближенного вычисления определенного интеграла

$$I\stackrel{\text{def}}{=}\int_a^b f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ имеет точно n корней x_i внутри промежутка $[a, b]$:

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b=x_{n+1}$$

и удовлетворяет формулируемым ниже условиям. Пусть

$$v_i\stackrel{\text{def}}{=}(-1)^i\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,dx,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

тогда $I=S$, где

$$S\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j v_j.$$

Предполагается, что $f(x)$ сохраняет знак на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ и имеет разные знаки на соседних промежутках, при этом $v_i\neq 0$, $i=0, 1, 2, \ldots, n$. Такую функцию $f(x)$ наз. к о л е б л ю щ е й с я. Вычисление I с помощью квадратурной формулы при большом n затруднительно, т. к. хорошее приближение колеблющейся функции на всем промежутке $[a, b]$ практически невозможно. Использование равенства $I=S$ приводит к вычислению всех интегралов v_j, что также нецелесообразно в случае большого n.

Приближенное вычисление I в Л. м. основано на равенстве ($n\geqslant p$)

$$S=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k 2^{-k-1}\Delta^k v_0+$$
$$+(-1)^n\sum_{k=0}^{p-1}2^{-k-1}\Delta^k v_{n-k}+$$
$$+2^{-p}(-1)^p\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k\Delta^p v_k. \qquad (1)$$

В равенство (1) входят конечные разности v_j как функции дискретного аргумента j:

$$\Delta v_j \stackrel{\text{def}}{=} v_{j+1} - v_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$\Delta^{r+1} v_j \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^r v_{j+1} - \Delta^r v_j,$$

$$r = 1, 2, \ldots, p-1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-r-1.$$

Если функция v_j такова, что в правой части (1) можно пренебречь слагаемыми, содержащими конечные разности порядка p, то приближенное равенство

$$S \cong \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k 2^{-k-1} \Delta^k v_0 + \\ + (-1)^n \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-k-1} \Delta^k v_{n-k} \qquad (2)$$

можно использовать для вычисления S. Чтобы вычислить правую часть (2), достаточно знать p первых значений v_j, т. е. значения $v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$, и p последних значений $v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{n-p+1}$. Л. м. и состоит в использовании равенства (2) для приближенного вычисления суммы S.

Если в интеграле I верхний предел интегрирования $b = +\infty$ и

$$I = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i v_i,$$

то вместо (1) следует воспользоваться равенством

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i v_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i 2^{-i-1} \Delta^i v_0$$

(преобразование Эйлера) и ряд в правой части заменить частичной суммой.

Метод предложен И. Лонгманом [1].

Лит.: [1] Longman I. M., «Math. Comput.», 1960, v. 14, № 69, p. 53—59; [2] Davis P. J., Rabinowitz P., Methods of numerical integration, N. Y., 1975.

И. П. Мысовских.

ЛОПИТАЛЯ ПРАВИЛО — раскрытие неопределенностей вида $0/0$, ∞/∞ сведением предела отношения функций к пределу отношения производных рассматриваемых функций. Так, для случая, когда действительные функции f и g определены в проколотой правосторонней окрестности точки a числовой оси, Л. п. имеет вид

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (*)$$

Как в случае неопределенности типа $0/0$, т. е. когда

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0,$$

так и в случае ∞/∞, т. е. когда

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = \infty,$$

Л. п. справедливо при условиях, что функции f и g дифференцируемы на нек-ром интервале (a, b), $g'(x) \neq 0$ для всех точек $x \in (a, b)$ и существует конечный или бесконечный предел отношения производных

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(в случае неопределенности типа ∞/∞ этот предел, если он бесконечный, может быть только бесконечностью определенного знака); тогда существует и предел отношения функций $\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство (*). Это утверждение с естественными видоизменениями остается верным как для случая левостороннего, так и для случая двустороннего предела, а также тогда, когда $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

При практическом отыскании пределов отношения функций с помощью Л. п. иногда приходится применять его несколько раз подряд.

При сделанных выше предположениях существование предела отношения производных $f'(x)/g'(x)$ является достаточным условием существования предела отношения $f(x)/g(x)$ самих функций, но не необходимым.

Лит.: [1] Лопиталь Г. Ф., Анализ бесконечно малых, пер. с франц., М.— Л., 1935; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

ЛОРАНА РЯД — обобщение степенного ряда по целым неотрицательным степеням разности $z-a$ или по целым неположительным степеням $z-a$ в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k. \qquad (1)$$

Ряд (1) понимается как сумма двух рядов:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

— правильная часть Л. р. и

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k$$

— главная часть Л. р. Ряд (1) считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся его правильная и главная части. Свойства Л. р.: 1) если область сходимости Л. р. содержит внутренние точки, то она представляет собой круговое кольцо $D=\{z\in\mathbb{C}: 0\leqslant r<|z-a|<R\leqslant+\infty\}$ с центром в точке $a\neq\infty$; 2) во всех внутренних точках кольца сходимости D ряд (1) сходится абсолютно; 3) как и для степенных рядов, поведение Л. р. в точках граничных окружностей $|z-a|=r$ и $|z-a|=R$ может быть самым разнообразным; 4) на любом компактном множестве $K\subset D$ ряд (1) сходится равномерно; 5) сумма ряда (1) в D есть аналитич. функция $f(z)$; 6) ряд (1) можно дифференцировать и интегрировать в D почленно; 7) коэффициенты c_k Л. р. определяются через его сумму $f(z)$ формулами

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}}, \qquad k=0,\ \pm 1,\ \ldots, \qquad (2)$$

где $\gamma=\{z:\ |z-a|=\rho,\ r<\rho<R\}$ — любая окружность с центром a, расположенная в D; 8) разложение в Л. р. единственно, т. е. если $f(z)=\varphi(z)$ в D, то все коэффициенты их Л. р. по степеням $z-a$ совпадают.

Для случая центра в бесконечно удаленной точке $a=\infty$ Л. р. принимает вид

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k, \qquad (3)$$

причем теперь правильной частью является

$$\sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k,$$

а главной —

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k.$$

Область сходимости ряда (3) имеет вид

$$D'=\{z:\ 0\leqslant r<|z|<R\leqslant+\infty\},$$

а формулы (2) переходят в формулы

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{k+1} f(z)\,dz, \quad k=0,\ \pm 1,\ \ldots,$$

где $\gamma=\{z:\ |z|=\rho,\ r<\rho<R\}$. В остальном все свойства те же, что и в случае конечного центра a.

Применение Л. р. основано главным образом на теореме Лорана (1843): любая однозначная аналитич. функция $f(z)$ в кольце D $\{z:\ 0\leqslant r<|z-a|<R\leqslant+\infty\}$ представима в D сходящимся Л. р. (1). В частности, в проколотой окрестности $D=\{z:\ 0<$

$<|z-a|<R\}$ изолированной особой точки a однозначного характера аналитич. функция $f(z)$ представима Л. р., к-рый и служит основным инструментом исследования ее поведения в окрестности изолированной особой точки.

Для голоморфных функций $f(z)$ многих комплексных переменных $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ аналогом теоремы Лорана можно считать следующее предложение: всякую функцию $f(z)$, голоморфную в произведении D колец $D_\nu=\{z_\nu\subset\mathbb{C}: 0\leqslant r_\nu<|z_\nu-a_\nu|<R_\nu\leqslant+\infty\}$, можно представить в D в виде сходящегося кратного Л. р.

$$f(z)=\sum_{|k|=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k, \qquad (4)$$

в к-ром суммирование распространяется на все целочисленные мультииндексы

$$k=(k_1, k_2, \ldots, k_n), \quad |k|=k_1+k_2+\ldots+k_n,$$

$$(z-a)^k=(z_1-a_1)^{k_1}(z_2-a_2)^{k_2}\ldots(z_n-a_n)^{k_n},$$

$$c_k=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{k+n}},$$

где γ — произведение окружностей $\gamma_\nu=\{z_\nu\in\mathbb{C}: z_\nu-a_\nu=\rho_\nu e^{it}; r_\nu<\rho_\nu<R_\nu, 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$, $\nu=1, 2, \ldots, n$. Область сходимости ряда (4) логарифмически выпуклая и является относительно полной *кратно круговой областью*. Однако применение кратных Л. р. (4) ограничено, поскольку при $n\geqslant 2$ голоморфные функции $f(z)$ не могут иметь изолированных особенностей.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967, гл. 4; [2] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., М., 1976, ч. 1, гл. 2, ч. 2, гл. 1.

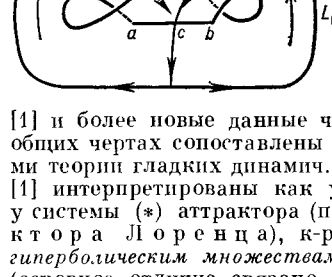
Е. Д. Соломенцев.

ЛОРЕНЦА АТТРАКТОР — компактное инвариантное множество L в трехмерном фазовом пространстве гладкого потока $\{S_t\}$, к-рое имеет указанную ниже сложную топологич. структуру и является асимптотически устойчивым (т. е. оно устойчиво по Ляпунову и все траектории из нек-рой окрестности L стремятся к L при $t\to\infty$); в понятие аттрактора, т. е. притягивающего множества, часто включают только последнее из этих двух свойств, однако как Л. а., так и другие практически важные аттракторы обладают обоими этими свойствами.

Л. а. впервые появился в численных экспериментах Э. Лоренца [1], исследовавшего поведение траекторий системы

$$\dot{x}=-\sigma x+\sigma y, \quad \dot{y}=rx-y-xz, \quad \dot{z}=-bz+xy \quad (*)$$

при нек-рых конкретных значениях параметров σ, r, b. (Эта система вначале была введена как первое нетривиальное галеркинское приближение для нек-рых гидродинамич. задач — чем и мотивировался выбор значений $\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$, но она возникает также и в других физич. вопросах, см. [2], [3].) В [4] результаты [1] и более новые данные численных экспериментов в общих чертах сопоставлены с теоретич. представлениями теории гладких динамич. систем, а в [5] результаты [1] интерпретированы как указание о существовании у системы (*) аттрактора (получившего назв. аттрактора Лоренца), к-рый во многом аналогичен *гиперболическим множествам*, но не является таковым (основное отличие связано с тем, что в состав Л. а. входит положение равновесия типа седло с одним положительным собственным значением; для системы (*) это положение равновесия — начало координат). Су-



ществование Л. а. и ряд его свойств следуют из определенных особенностей отображения последования на нек-рой поверхности П (для системы (*) используется плоскость $z=27$), точная формулировка к-рых, однако, весьма громоздка (см. [6], [9]) и при проверке к-рых для конкретных систем, включая (*), приходится прибегать к численному интегрированию. Соответственно, Л. а. посвящены исследования двух типов.

1) В исследованиях теоретич. характера с самого начала предполагается, что рассматриваемые потоки имеют на нек-рой поверхности П надлежащее отображение последования, и отсюда извлекаются следствия о свойствах Л. а. Его строение описывается следующим образом [8]. Рассмотрим «разветвленное многообразие» L_0, на к-ром при $t\geqslant 0$ задан поток φ_t, как указано на рисунке. Пусть отображение последования на линии разветвления ab является (равномерно) растягивающим, т. е. во всех точках (кроме c, где оно терпит разрыв) его производная больше нек-рого $\lambda>1$ (годится любое такое λ, но исследование упрощается при $\lambda>\sqrt{2}$, что совместимо с вычислительными данными о системе (*) при указанных σ, r, b). Пары $\{(L_0, \varphi_t)\}$ естественным образом образуют обратный спектр топологич. пространств и отображений; его предел и есть $(L, S_t|L)$. (Дальнейшее изучение структуры Л. а. [8], [11] основывается на этом описании, к-рое поэтому естественно включить в определение Л. а., особенно если не связывать определение со специальными свойствами отображения последования.) Л. а. обладают *топологической транзитивностью* и их периодич. траектории в совокупности плотны в L. При малом (в смысле C^1) возмущении потока с надлежащим отображением последования у возмущенного потока имеется Л. а., близкий к Л. а. исходного потока, но, вообще говоря, не гомеоморфный ему. В этом смысле Л. а. сохраняется при малых возмущениях (в теории гладких динамич. систем известны (1982) только два класса компактных инвариантных множеств с этим свойством и сколько-нибудь изученной структурой: Л. а. и локально максимальные *гиперболические множества*), но Л. а. (в отличие от последних) не обладают *локальной грубостью*.

2) Чтобы обнаружить Л. а. у конкретной системы типа (*) и уточнить его свойства, приходится наряду с различными теоретич. соображениями использовать численное интегрирование (см. [7], [9]). Таким путем были исследованы бифуркации, происходящие в системе (*) при изменении r или σ и приводящие к появлению Л. а. [9]. Естественно, численное интегрирование и само по себе дает нек-рую информацию об аттракторе (поскольку траектории со временем приближаются к нему, то на чертеже, изображающем последовательные точки пересечения просчитываемых траекторий с П, возле аттрактора эти точки расположены значительно «гуще», чем вдали от него, и это сразу бросается в глаза). Относящийся сюда материал весьма обширен; так, обнаружены новые области значений параметров, при к-рых система (*) имеет Л. а. [10]. Здесь, однако, остаются невыясненными детали топологич. структуры, к-рая может и отличаться от описанного выше строения «стандартных» Л. а.

Теоретич. интерпретации данных численных экспериментов для систем порядка выше трех пока (1982) не имеется.

Лит.: [1] Lorenz E. N., «J. Atmos. Sci.», 1963, v. 20, № 2, p. 130—41; [2] Монин А. С., «Успехи физич. наук», 1978, т. 125, в. 1, с. 97—122; [3] Рабинович М. И., там же, с. 123—68; [4] McLaughlin J. B., Martin P. C., «Phys. Rev. Letters», 1974, v. 33, p. 1189—92; «Phys. Rev. Scr. A», 1975, v. 12, № 1, p. 186—203; [5] Ruelle D., в кн.: Lecture Notes in Mathematik, № 565, [1976], p. 146—58; [6] Marsden J. E., McCrokes M., The Hopf bifurcation and its applications, B., 1976, p. 368; [7] Нелинейные волны, М., 1979, с. 176, 212; [8] Williams R. F., в кн.: Lecture Notes in Mathematik, № 615, [1977], p. 94—112; [9] Аф раймо-

вич В. С., Быков В. В., Шильников Л. П., «Докл. АН СССР», 1977, т. 234, № 2, с. 336–39; [10] Morioka N., Shimizu T., «Phys. Letters», 1978, v. 66 A, № 6, p. 447—49; [11] Rand D., «Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1978, v. 83, № 3, p. 451—60. *Д. В. Аносов.*

ЛОРЕНЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование координат, связывающее две *галилеевы системы координат* в каком-либо *псевдоевклидовом пространстве*; иными словами, Л. п. сохраняет квадрат т. н. интервала событий. Л. п. является аналогом ортогональных преобразований (или обобщением понятия движения) в евклидовом пространстве. Л. п. образуют группу, называемую группой Лоренца (или общей группой Лоренца), к-рая обозначается через L. Л. п. находят применение в четырехмерном пространстве-времени специальной теории относительности, для к-рого в галилеевых координатах x, y, z, t интервал имеет вид

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2,$$

где c — скорость света в вакууме.

Часто рассматривают более узкие классы Л. п. Так, Л. п., сохраняющие знак координаты t, образуют т. н. полную группу Лоренца $L_\uparrow$. Л. п., матрицы к-рых имеют положительный определитель, наз. собственными преобразованиями Лоренца и образуют собственную группу Лоренца L_+. Пересечение $L_\uparrow$ и L_+ часто наз. просто группой Лоренца.

Общая группа Л. п. состоит из комбинаций пространственных отражений, отражений во времени, пространственных поворотов и преобразований, к-рые с физич. точки зрения являются преобразованиями перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой со скоростью V, а с математич. точки зрения — гиперболич. поворотом на угол ψ в плоскости с псевдоевклидовой метрикой. Наличие последнего типа преобразований является специфич. чертой группы Л. п.

Для перехода от галилеевой системы координат x', y', z', t' к галилеевой системе координат x, y, z, t, движущейся относительно первой со скоростью V параллельно оси x', указанные преобразования имеют вид

$$x = \frac{x' - Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' - \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Если ввести угол гиперболического поворота ψ по формулам

$$\operatorname{sh}\psi = -\frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

то Л. п. примут вид

$$x = x'\operatorname{ch}\psi + ct'\operatorname{sh}\psi, \quad ct = x'\operatorname{sh}\psi + ct'\operatorname{ch}\psi, \quad y = y', \quad z = z'.$$

Эти преобразования часто наз. просто Л. п. Они не образуют группу: действие трех гиперболич. поворотов с непараллельными векторами скоростей может дать обычный пространственный поворот — т. н. томасовская прецессия.

Часто к общим Л. п. добавляют переносы начала координат, получая при этом т. н. преобразования Пуанкаре, образующие группу Пуанкаре.

Свойства группы Л. п. сходны со свойствами ортогональных групп. Отличия связаны с наличием двух типов отражений (пространственных и временны́х) и с некомпактностью группы Л. п. (т. к. единичная сфера в псевдоевклидовом пространстве, т. е. множество точек, для к-рого модуль интервала до начала координат равен единице, некомпактна).

Физические приложения Л. п. связаны с Эйнштейна *относительности принципом*, согласно к-рому все

физич. законы, кроме законов гравитации, инвариантны относительно Л. п. В ряде случаев, напр. в аксиоматической квантовой теории поля, использование этого и других столь же общих постулатов позволяет делать далеко идущие выводы о видах функциональных зависимостей между различными физич. величинами.

В различных областях физики (в особенности, в теории элементарных частиц) находят широкое применение представления групп Л. п. В соответствии с принципом относительности Эйнштейна физич. величины с различными законами преобразований - векторы, спиноры, тензоры — преобразуются по тем или иным представлениям группы Л. п. При этом оказывается, что эти представления можно характеризовать двумя инвариантами, к-рые отождествляются с массой и спином частиц, описываемых этой физич. величиной.

Инфинитезимальные Л. п., т. е. повороты на бесконечно малый угол, часто используют для получения различных законов сохранения.

Находят применения также Л. п. в касательном пространстве псевдориманова пространства; эти преобразования относятся к т. н. локальным симметриям.

Л. п. получили свое название в связи с работами Г. Лоренца (H. Lorentz) по электронной теории, к-рые сыграли важную роль в формулировании этого понятия.

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., т. 2, М., 1973; [2] Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, М., 1958; [3] Физический энциклопедический словарь, т. 3, М., 1963. *Д. Д. Соколов.*

ЛОРЕНЦА СИЛА — сила, действующая со стороны заданного электромагнитного поля на движущуюся заряженную частицу. Выражение для Л. с. $\boldsymbol{F}$ было впервые дано Г. Лоренцем (см. [1]):

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{B}], \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрич. поля, $\boldsymbol{B}$ — магнитная индукция, $\boldsymbol{V}$ — скорость заряженной частицы относительно системы координат, в к-рой вычисляются величины $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}$; e — заряд частицы, c — скорость света в вакууме. Выражение для Л. с. является релятивистски инвариантным (т. е. справедливым в любой инерциальной системе отсчета); оно позволяет связать уравнения для электромагнитного поля с уравнениями движения заряженных частиц.

В постоянном и однородном магнитном поле движение частицы с массой m и зарядом e в нерелятивистском приближении ($V \ll c$) описывается уравнением

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{B}]. \qquad (2)$$

В прямоугольной системе координат с осью z, направленной вдоль внешнего магнитного поля B, решение уравнения (2) имеет следующий вид

$$x = x_0 + r\sin(\omega_0 t + \alpha), \quad y = y_0 + r\cos(\omega_0 t + \alpha),$$
$$z = z_0 + V_{oz}t,$$

где $\omega_0 = eB/mc$ — ларморовская частота вращения частицы, $r = V_{ot}/\omega_0$ — радиус вращения частицы *(ларморовский радиус)*, α — начальная фаза вращения, $\boldsymbol{V}_0$ — начальная скорость частицы. Таким образом, в однородном магнитном поле заряд движется по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля.

Если электрич. поле $\boldsymbol{E}$ не равно нулю, то движение носит более сложный характер. Происходит перемещение центра вращения частицы поперек поля $\boldsymbol{B}$ (т. н. дрейф). Средняя величина дрейфа в векторном виде

$$\boldsymbol{V} = c\,[\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B}]/B^2.$$

Неусредненное движение частицы в плоскости xy в этом случае происходит по трохоиде.

Лит.: [1] Lorentz H. A., The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat, 2 ed., Lpz.— N. Y., 1916 (рус. пер.— Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, 2 изд., М., 1956); [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973.

В. В. Парваил.

ЛУЗИНА ГИПОТЕЗА в теории множеств: мощность континуума есть мощность множества всех подмножеств, состоящих из счетных порядковых чисел, т. е. $2^{\aleph_0}=2^{\aleph_1}$. Л. г. совместна с системой аксиом Цермело — Френкеля теории множеств и аксиомой выбора. Н. Н. Лузин [1] рассматривал эту гипотезу как альтернативу к континуум-гипотезе, т. к. $2^{\aleph_0}=\aleph_1<2^{\aleph_1}$. Аксиома Мартина и отрицание континуум-гипотезы влекут Л. г. Отрицание Л. г. $2^{\aleph_0}<2^{\aleph_1}$ иногда также наз. гипотезой Лузина. Л. г., обозначаемая через (HL), или ее отрицание, к-рое обозначается через (LH), используется при доказательстве ряда теорем общей топологии. Напр., (LH) эквивалентна одному из следующих утверждений: всякий бикомпакт мощности, не превосходящей мощности континуума, имеет всюду плотное подпространство, удовлетворяющее 1-й аксиоме счетности; всякий диадический бикомпакт мощности, не превосходящей мощности континуума, метризуем. Из (LH) вытекают следующие предложения: всякое нормальное пространство, удовлетворяющее 1-й аксиоме счетности и *Суслина условию*, является коллективно нормальным; всякое сепарабельное нормальное пространство Мура метризуемо.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «Fundam. math.», 1935, v. 25, p. 109—31; [2] Мостовский А., Конструктивные множества и их приложения, пер. с англ., М., 1973.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА КРИТЕРИЙ измеримости функции действительного переменного: для того чтобы функция $f(x)$ почти всюду конечная, заданная на отрезке $[a, b]$, была измеримой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовала непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ такая, что мера множества

$$\{x \in [a, b]: f(x) \neq \varphi(x)\}$$

была меньше ε. Доказан Н. Н. Лузиным [1]. Другими словами, почти всюду конечная функция является измеримой тогда и только тогда, когда она становится непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1912, t. 154, p. 1688—90; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА МНОЖЕСТВО, проективное множество,— подмножество полного сепарабельного метрич. пространства, к-рое определяется по индукции следующим образом. Л. м. класса 0 — есть борелевские множества. Л. м. класса $2n+1$ — это непрерывные образы Л. м. класса $2n$. Л. м. класса $2n$ — это дополнения к Л. м. класса $2n-1$. В частности, Л. м. класса 1, т. е. непрерывные образы борелевских множеств, наз. аналитическими множествами, или A-множествами, или суслинскими множествами. Понятие Л. м. принадлежит Н. Н. Лузину [1]. Если P_i есть Л. м. класса n, то $\bigcup_{i=1}^{k} P_i$ и $\bigcap_{i=1}^{k} P_i$ — также Л. м. класса n. Если $P_i \subset X_i$ есть Л. м. класса n, лежащее в полном сепарабельном метрич. пространстве X_i, то прямое произведение (конечное или счетное) $\Pi_i P_i$ является Л. м. класса n в пространстве $\Pi_i X_i$. Л. м. нечетного класса n, расположенное в пространстве X, совпадает с проекцией множества класса $n-1$, расположенного в произведении $X \times X$. Пространство X иррациональных чисел интервала $[0, 1]$ содержит для любого $n>0$ Л. м. класса n, к-рое не является Л. м. класса $<n$; простран-

ство X содержит также множества, не являющиеся Л. м.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1925, t. 180, p. 1318 -20; [2] его же, Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953; [3] Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1966.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА ПРИМЕРЫ в теории функций комплексного переменного — примеры, характеризующие граничные *единственности свойства* аналитич. функций (см. [1], [2]).

1) Для любого множества E меры нуль на единичной окружности $\Gamma = \{z: |z| = 1\}$ Н. Н. Лузин построил (1919, см. [1]) функцию $f(z)$, регулярную аналитическую и ограниченную в единичном круге $D = \{z: |z| < 1\}$ и такую, что $f(z)$ не имеет радиальных граничных значений вдоль каждого из радиусов, оканчивающихся в точках E.

Аналогичный пример Н. Н. Лузина и И. И. Привалова (1925, см. [2], [3]) отличается лишь незначительными изменениями.

2) Н. Н. Лузин построил (1925, см. [2]) также регулярные аналитич. функции $f_1(z)$ и $f_2(z) \not\equiv 0$ в D, стремящиеся соответственно к бесконечности и нулю по всем радиусам, оканчивающимся в точках нек-рого множества полной меры 2π на Γ. Это множество E первой категории по Бэру на Γ.

См. также *Граничные свойства аналитических функций*, *Лузина — Привалова теоремы*, *Предельное множество*.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1953, с. 267—69; [2] его же, там же, с. 280—318; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950; [4] Ловатер А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259.

Е. Д. Соломенцев.

ЛУЗИНА ПРИНЦИПЫ ОТДЕЛИМОСТИ — две теоремы, доказанные Н. Н. Лузиным в 1930 (см. [1]) в дескриптивной теории множеств. Два множества E и E' без общих точек, лежащие в евклидовом пространстве, B - отделимы, если существуют два борелевских множества H и H' без общих точек, содержащие соответственно множества E и E'. Первый Л. п. о. состоит в том, что два непересекающихся аналитич. множества всегда B-отделимы. Так как существуют два непересекающихся аналитич. дополнения, к-рые B-неотделимы, то имеет смысл определение: два множества E_1 и E_2 без общих точек отделимы при помощи аналитич. дополнений, если существуют два непересекающихся множества H_1 и H_2, содержащие соответственно E_1 и E_2, каждое из к-рых есть аналитич. дополнение. Второй Л. п.о. состоит в том, что если удалить из двух аналитич. множеств их общую часть, то оставшиеся части всегда отделимы при помощи аналитич. дополнений.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА ПРОБЛЕМА — 1) Проблема теории тригонометрич. рядов, состоявшая в доказательстве гипотезы Лузина о том, что ряд Фурье

$$a_0(f) + \sum_{n=1} \{a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx\} \qquad (*)$$

каждой измеримой по Лебегу функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, 2\pi]$, с конечным интегралом

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx$$

сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Гипотеза высказана Н. Н. Лузиным в 1915 в его диссертации (см. [1] с. 219). Л. п. решена в 1966 в утвердительном смысле Л. Карлесоном (см. *Карлесона теорема*). До работы Л. Карлесона [2] не было даже известно, сходится ли

хотя бы в одной точке ряд Фурье каждой непрерывной на отрезке $[0,2\pi]$ функции.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, 2 изд., М.— Л., 1951; [2] Carleson L., «Acta math.», 1966, v. 116, p. 135—57.

Б. С. Кашин.

2) Ряд фундаментальных задач теории множеств, поставленных Н. Н. Лузиным [1], для решения к-рых он предложил метод резольвент. Именно, нек-рая проблема P теории множеств поставлена в резольвенту, если можно назвать множество точек E такое, что проблема P решается положительно каждый раз, когда можно назвать точку из E, и решается отрицательно, если можно доказать, что множество E пусто. Само множество E наз. резольвентой проблемы P.

Проблема 1. Будут ли все аналитич. дополнения либо счетны, либо иметь мощность континуума? Резольвента E этой проблемы есть *Лузина множество* класса не выше 3, т. е. если можно указать точку из E, то существует несчетное аналитич. дополнение без совершенной части, а если E пусто, то таких аналитич. дополнений не существует.

Проблема 2. Существуют ли неизмеримые по Лебегу множества Лузина?

Проблема 3. Существует ли множество Лузина без *Бэра свойства?*

Н. Н. Лузин предполагал, что проблемы 1, 2, 3 неразрешимы. Эта гипотеза подтвердилась (см. [3], [4]). Установлены связи между этими проблемами. Напр., из существования неизмеримого множества типа A_2 следует существование несчетного множества типа CA, не содержащего совершенного подмножества. Получено [5] положительное решение Л. п. о частях натурального ряда, исходя из континуум-гипотезы или отрицания гипотезы Лузина.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1925, t. 181, p. 279—81; [2] Его же, Собр. соч., т. 2, М., 1958; [3] Новиков П. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 279—316; [4] Solovay R., «Ann. Math.», 1970, v. 92, № 1, p. 1—56; [5] Новак Й., «Чехосл. матем. ж.», 1953, т. 3, с. 385—95.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА ПРОСТРАНСТВО — несчетное топологич. T_1-пространство, в к-ром каждое нигде не плотное подмножество счетно. Существование Л. п. на действительной прямой вытекает из континуум-гипотезы. Из отрицания континуум-гипотезы и аксиомы Мартина следует, что не существует Л. п. со счетной л-базой. В частности, с системой аксиом Цермело—Френкеля теории множеств и аксиомой выбора совместно утверждение, что любое сепарабельное метрич. пространство не содержит Л. п. Существование метризуемых Л. п. доказано при весьма широких предположениях о месте мощности континуума в шкале алефов. Любое Л. п. X, лежащее в сепарабельном метрич. пространстве Y, обладает следующим свойством: для любой последовательности $\{\lambda_n\}$ положительных чисел существует последовательность множеств $\{A_n\}$ такая, что $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ и $\delta(A_n)<\lambda_n$, где $\delta(A)$ — диаметр множества A. Оно инвариантно относительно непрерывных отображений. Любой непрерывный образ Л. п., лежащий в Y, имеет меру Лебега нуль и является нульмерным пространством. Более того, любой непрерывный образ Л. п., лежащий в Y, вполне несовершенен, т. е. не содержит канторова совершенного множества. Из континуум-гипотезы вытекает существование регулярного, наследственно сепарабельного, наследственно финально компактного, экстремально несвязного Л. п. счетного л-веса и мощности континуума.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., «C. r. Acad. sci.», 1914, t. 158, p. 1258—61; [2] Куратовский К., Топология, т. 1, М., 1966.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА РЕШЕТО — произвольное отображение $W: Q_0\to 2^X$, к-рое каждой двоичной дроби $r\in Q_0$ ставит в соответствие нек-рое подмножество $W_r\subset X$.

Как правило, X предполагается полным сепарабельным метрич. пространством. Введено Н. Н. Лузиным [1]. Множество A точек $x \in X$ таких, что существует бесконечная последовательность $r_1 < r_2 < \ldots$, удовлетворяющая условию $x \in W_{r_1} \cap W_{r_2} \cap \ldots$, наз. п р о с е я н н ы м через Л. р. W. Для каждой A-операции существует Л. р. W такое, что результат этой A-операции просеивается через решето W. Основной результат, касающийся Л. р., состоит в том, что *Лузина множество* n-го класса (или проективный класс L_n) инвариантно относительно операции просеивания через Л. р. для $0 \neq n \neq 2$.

Лит.: [1] Л у з и н Н. Н., «Fundam. math.», 1927, t. 10, p. 1—95; [2] К у р а т о в с к и й К., Топология, т. 1, М., 1966.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА C-СВОЙСТВО — характеристическое свойство *измеримой функции*, конечной почти всюду на области определения. Функция $f(x)$, конечная почти всюду на $[0, 1]$, о б л а д а е т н а $[0, 1]$ C-с в о й с т в о м, если для любого $\varepsilon > 0$ существует на $[0, 1]$ совершенное множество Q с мерой $> 1 - \varepsilon$, на к-ром $f(x)$ непрерывна, если ее рассматривать только на Q. Понятие C-свойства было введено Н. Н. Лузиным [1], к-рый также доказал, что для того, чтобы функция обладала C-свойством, необходимо и достаточно, чтобы она была измерима и конечна почти всюду на E. Эта теорема Лузина (к р и т е р и й Л у з и н а) обобщается на случай функций многих переменных (см. [3], [4]) и является одной из основных теорем метрич. теории функций.

Лит.: [1] Л у з и н Н. Н., «Матем. сб.», 1912, т. 28, в. 2, с. 266—94; [2] е г о ж е, Собр. соч., т. 1, М., 1953; [3] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [4] К а м к е Э., Интеграл Лебега — Стилтьеса, пер. с нем., М., 1959.

А. А. Конюшков.

ЛУЗИНА N-СВОЙСТВО, «н у л ь - с в о й с т в о», функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$: для любого множества $E \subset [a, b]$ с мерой $\operatorname{mes} E = 0$ образ этого множества $f(E)$ также имеет меру нуль. Введено Н. Н. Лузиным в 1915 (см. [1]). Имеют место следующие утверждения.

1) Функция $f \not\equiv \text{const}$ на $[a, b]$ такая, что $f'(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$, не обладает Л. N-с.

2) Если $f(x)$ не обладает Л. N-с., то на $[a, b]$ существует совершенное множество P меры нуль такое, что $\operatorname{mes} f(P) > 0$.

3) Абсолютно непрерывная функция обладает Л. N-с.

4) Если $f(x)$ обладает Л. N-с. и имеет на $[a, b]$ ограниченное изменение, то f абсолютно непрерывна на $[a, b]$ (т е о р е м а Б а н а х а — З а р е ц к о г о).

5) Если $f(x)$ не убывает на $[a, b]$, причем $f'(x)$ конечна на $[a, b]$, то f обладает Л. N-с.

6) Для того чтобы для любого измеримого множества $E \subset [a, b]$ множество $f(E)$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы f обладала на $[a, b]$ Л. N-с.

7) Функция $f(x)$, обладающая Л. N-с, имеет $f'(x)$ на множестве, любая непустая порция к-рого имеет положительную меру.

8) Для любого совершенного нигде не плотного множества $P \subset [a, b]$ существует функция $f(x)$, обладающая Л. N-с. на $[a, b]$, у к-рой $f'(x)$ не существует в каждой точке множества P.

Понятие Л. N-с. обобщается на функции многих переменных и функции более общей природы, определенные на пространствах с мерой.

Лит.: [1] Л у з и н Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, 2 изд., М.—Л., 1951.

А. А. Конюшков.

ЛУЗИНА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. в теории функций комплексного переменного (л о к а л ь н ы й п р и н ц и п к о н е ч н о й п л о щ а д и) — результат Н. Н. Лузина, обнаруживающий связь между граничными свойствами аналитич. функций в единичном круге и метрикой римановых поверхностей, на к-рые они отображают круг (см. [1], [2]).

Пусть V — любая область внутри единичного круга $D=\{z\colon |z|<1\}$ плоскости комплексного переменного z, примыкающая к нек-рой дуге σ единичной окружности $\Gamma=\{z\colon |z|=1\}$, а

$$w=f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

— регулярная аналитич. функция в D. Тогда, если площадь римановой поверхности, являющейся образом области V при отображении $w=f(z)$, конечна, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

сходится почти всюду на дуге σ.

В связи с этой теоремой Н. Н. Лузин сформулировал гипотезу, известную также как п р о б л е м а Л у з и н а. Точку $e^{i\theta_0}\in\Gamma$ наз. т о ч к о й Л у з и н а функции $w=f(z)$, если $w=f(z)$ отображает каждый круг, изнутри касающийся Γ в точке $e^{i\theta_0}$, на область бесконечной площади на римановой поверхности функции $w=f(z)$. Г и п о т е з а Л у з и н а состоит в том, что существуют ограниченные аналитич. функции в D такие, что каждая точка Γ является для них точкой Лузина. Гипотеза Лузина впервые была подтверждена полностью в 1955 (см. [3]).

Лит.: [1] Л у з и н Н. Н., «Докл. АН СССР», 1947, т. 56, № 5, с. 447—50; [2] е г о же, Собр. соч., т. 1, М., 1953, с. 318—30; [3] Л о в а т е р А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259.

Е. Д. Соломенцев.

2) Л. т. в дескриптивной теории множеств можно условно разбить на три цикла. Первый и основной цикл направлен на изучение эффективных множеств (аналитических, борелевских, лузинских (проективных) множеств). Сюда относится *Лузина принципы отделимости* и теорема о существовании *Лузина множеств* любого класса. Второй цикл представляет собой изучение задач, лежащих на пути к решению континуум-гипотезы и проблемы мощности CA-множеств. Здесь выделяется теорема Лузина—Серпиньского о разбиении отрезка на $\aleph_1$ борелевских множеств, к-рое определяется соответствующим *Лузина решетом*, а также Л. т. о покрытии: пусть E и A — непересекающиеся аналитич. множества и

$$E\subset X\setminus A=\bigcup_{\alpha<\omega_1}A_\alpha$$

— разложение множества $X\setminus A$ на конституанты, тогда существует такой индекс $\alpha_0<\omega_1$, что

$$E\subset\bigcup_{\alpha<\alpha_0}A_\alpha.$$

Третий цикл содержит результаты, полученные с использованием аксиомы выбора. Сюда же примыкают философские работы по теории множеств. Здесь выделяются Л. т. о существовании несчетного множества 1-й категории на всяком совершенном множестве, о разбиении интервала на несчетное множество неизмеримых множеств. Завершает этот цикл Л. т. о частях натурального ряда, отражающие нек-рые свойства нароста $\beta N\setminus N$ *Стоуна — Чеха бикомпактного расширения* βN натурального ряда N.

Лит.: [1] Л у з и н Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1958.

Б. А. Ефимов.

ЛУЗИНА — ДАНЖУА ТЕОРЕМА — см. *Данжуа — Лузина теорема.*

ЛУЗИНА — ПРИВАЛОВА ТЕОРЕМЫ в т е о р и и ф у н к ц и й к о м п л е к с н о г о п е р е м е н н о г о — классические результаты Н. Н. Лузина и И. И. Привалова, выясняющие характер граничного *единственности свойства* аналитич. функций (см. [1]).

1) Пусть $f(z)$ — мероморфная функция комплексного переменного z в односвязной области D со спрямляемой границей Γ. Если $f(z)$ принимает угловые граничные значения нуль на множестве $E\subset\Gamma$ положительной меры Лебега на Γ, то $f(z)\equiv 0$ в D. Не существует

мероморфной в D функции, имеющей бесконечные угловые граничные значения на каком-либо множестве $E \subset \Gamma$ положительной меры.

2) Пусть $w=f(z)$ — мероморфная в единичном круге $D=\{z: |z|<1\}$ функция, отличная от константы и имеющая радиальные граничные значения (конечные или бесконечные) на множестве E, расположенном на дуге σ единичной окружности $\Gamma=\{z: |z|=1\}$, метрически плотном и второй категории по Бэру на σ. Тогда множество W ее радиальных граничных значений на E содержит по крайней мере две различные точки. Метрическая плотность E на σ означает, что любая порция E на σ имеет положительную меру. Отсюда следует, что если радиальные граничные значения $f(z)$ на множестве E указанного типа равны нулю, то $f(z)=0$ в D. Далее, не существует мероморфной функции в единичном круге, принимающей бесконечные радиальные граничные значения на множестве E указанного типа.

Н. Н. Лузин и И. И. Привалов (см. [1], [2]) построили примеры, показывающие, что условия метрич. плотности и 2-й категории по отдельности не являются достаточными для того, чтобы выполнялось утверждение теоремы 2.

См. также *Граничные свойства аналитических функций*, *Лузина примеры*, *Предельное множество*, *Привалова теорема*, *Риссов теорема*.

Лит.: [1] Лузин Н. Н., Привалов И. И., «Ann. sci. École norm. supér.» (3), 1925, t. 42, p. 143—91; [2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М. — Л., 1950; [3] Ловатер А., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259.

Е. Д. Соломенцев.

ЛУПА — *квазигруппа* с единицей, т. е. с таким элементом e, что $xe=ex=x$ для любого элемента x из квазигруппы. Значение Л. в теории квазигрупп определяется следующей теоремой: всякая квазигруппа изотопна (см. *Изотопия*) нек-рой Л. Поэтому одной из основных задач теории квазигрупп является описание Л., к-рым изотопны квазигруппы данного класса.

С каждой Л. связаны три ядра. Множество

$$N_l=\{a \mid ax\cdot y=a\cdot xy, \quad \text{для всех } x, y \in Q\}$$

элементов из Л. $Q(\cdot)$ наз. левым ядром. Аналогично определяются среднее и правое ядра. Они всегда существуют в Л. Их пересечение наз. ядром лупы. Каждое ядро — ассоциативная подлупа, т. е. подгруппа в $Q(\cdot)$. Соответственные ядра изотопных Л. изоморфны. Существуют Л. с любыми наперед заданными ядрами. Л. $Q(\cdot)$, изотопная группе $Q(\cdot)$, является сама группой и изоморфна группе $Q(\cdot)$ (теорема Алберта). В частности, изотопные группы изоморфны. Нек-рые другие классы Л. также обладают этим свойством, напр. свободные лупы. Л. $Q(\cdot)$ наз. G-лупой, если любая Л., изотопная $Q(\cdot)$, будет ей изоморфна.

На Л. распространяются многие понятия и результаты теории групп. Однако нек-рые обычные свойства групп могут и не иметь места для Л. Так, в конечных Л. теорема Лагранжа (о том, что порядок подгруппы делит порядок группы), вообще говоря, не имеет места. Если тем не менее для Л. справедлива теорема Лагранжа, то такую Л. наз. лагранжевой. Если всякая подлупа Л. $Q(\cdot)$ лагранжева, то говорят, что $Q(\cdot)$ обладает свойством L'. Необходимым и достаточным условием, чтобы Л. $Q(\cdot)$ обладала свойством L', является следующее: $Q(\cdot)$ должна обладать такой нормальной цепью

$$Q \quad Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n=e,$$

где Q_i нормальная подлупа в Q_{i-1}, что Q_{i-1}/Q_i для всех $i=1, 2, \ldots, n$ обладает свойством L'.

Наиболее изученным и наиболее близким к группам является класс *Муфанг луп*. Основная теорема о них (теорема Муфанг): если три элемента a, b, c такой Л. связаны ассоциативным законом, т. е.

$$ab \cdot c = a \cdot bc,$$

то они порождают ассоциативную подлупу, т. е. группу. В частности, всякая лупа Муфанг диассоциативна, т. е. любые ее два элемента порождают ассоциативную подлупу. Свойство Л. быть лупой Муфанг является универсальным, т. е. инвариантным при изотопии: любая Л., изотопная лупе Муфанг, сама является лупой Муфанг.

Одним из наиболее общих классов Л. является класс IP-луп, или луп со свойством обратимости. Они определяются тождествами

$$^{-1}x \cdot xy = y \quad \text{и} \quad yx \cdot x^{-1} = y.$$

Здесь ^{-1}x и x^{-1} соответственно левый и правый обратные элементы для x. Всякая лупа Муфанг будет IP-лупой. В IP-лупе ядра совпадают. Ядро лупы Муфанг является нормальной характеристической подлупой. Свойство Л. быть IP-лупой не является универсальным. Более того, если всякий изотоп нек-рой IP-лупы $Q(\cdot)$ есть IP-лупа, то $Q(\cdot)$ является лупой Муфанг.

Более общим, чем класс IP-луп, является класс WIP-луп, или луп со свойством ослабленной обратимости. Они определяются тождеством $x(yx)^{-1} = y^{-1}$. Это тождество универсально, если

$$(yx)\,(\theta_y z \cdot y) = (y \cdot xz)\,y$$

для всех x, y, $z \in Q$, где θ_y — нек-рый автоморфизм. В этом случае ядро WIP-лупы является нормальным и факторлупа по ядру будет лупой Муфанг. Частным случаем WIP-луп являются CI-луны, или скрещенно-обратимые лупы, определяемые тождеством $(xy)\,x^{-1} = y$.

Обобщением луп Муфанг являются (левые) лупы Бола, в них выполняется тождество

$$x(y \cdot xz) = (x \cdot yx)z.$$

Они инвариантны при изотопии и моноассоциативны, т. е. каждый элемент такой Л. порождает ассоциативную подлупу.

Важным понятием теории квазигрупп и Л. является понятие псевдоавтоморфизма. Подстановка φ Л. $Q(\cdot)$ наз. левым псевдоавтоморфизмом, если существует такой элемент $a \in Q$, что выполняется равенство

$$\varphi(xy) \cdot a = \varphi(x)\,(\varphi y \cdot a) \quad \text{для всех} \quad x,\ y \in Q,$$

и наз. правым псевдоавтоморфизмом, если существует такой элемент $b \in Q$, что

$$b \cdot \varphi(xy) = (b \cdot \varphi x)\,\varphi y \quad \text{для всех} \quad x,\ y \in Q.$$

Если φ — одновременно левый и правый псевдоавтоморфизм, то φ наз. псевдоавтоморфизмом, а элементы a и b — соответственно левым и правым компаньонами. В Л. автоморфизм — частный случай псевдоавтоморфизма. Каждый псевдоавтоморфизм IP-лупы индуцирует автоморфизм в ее ядре, а в коммутативной лупе Муфанг всякий псевдоавтоморфизм является автоморфизмом.

В теории Л. значительную роль играют внутренние подстановки. Подстановка α из ассоциированной группы G Л. $Q(\cdot)$ с единицей e наз. внутренней, если $\alpha e = e$. Совокупность I всех внутренних подстановок является подгруппой группы G и наз. группой внутренних подстановок. Группа I порождается подстановками трех видов:

$$L_{x,\,y} = L_{xy}^{-1} L_x L_y; \quad R_{x,\,y} = R_{xy}^{-1} R_y R_x, \quad T_x = R_x^{-1} L_x.$$

С помощью внутренних подстановок определяются A-л у п ы — лупы, для к-рых все внутренние подстановки являются автоморфизмами. Если A-лупа одновременно является IP-лупой, то она диассоциативна. Коммутативные диассоциативные A-лупы являются лупами Муфанг. Для коммутативных луп Муфанг внутренние подстановки являются автоморфизмами.

Нек-рые определения из теории групп переносятся и на Л. Так, Л. наз. г а м и л ь т о н о в о й, если всякая ее подлупа нормальна. Абелевы группы также считаются гамильтоновыми Л. Моноассоциативные гамильтоновы Л. с элементами конечного порядка являются прямыми произведениями гамильтоновых p-луп (p-лупа определяется аналогично p-группе). Диассоциативные гамильтоновы Л. будут либо абелевыми группами, либо прямым произведением $A\times T\times H$, где A — абелева группа, элементы к-рой имеют нечетный порядок, T — абелева группа экспоненты 2, а H — некоммутативная Л., удовлетворяющая нек-рым дополнительным условиям.

Л. $Q(\cdot)$ наз. л и н е й н о (ч а с т и ч н о) у п о р я д о ч е н н о й, если Q линейно (частично) упорядоченное множество (относительно $\leqslant$) и из $a\leqslant b$ следует

$$ac\leqslant bc,\quad ca\leqslant cb,$$

и обратно. Если в линейно упорядоченной Л. центр имеет конечный индекс, то $Q(\cdot)$ центрально нильпотентна. Решеточно упорядоченные Л. с условием минимальности для элементов являются свободными абелевыми группами.

Л. изучались и с помощью ассоциированных групп. Доказано, напр., что существует взаимно однозначное соответствие между нормальными подлупами Л. и нормальными делителями соответствующей ассоциированной группы.

Лит. см. при статье *Квазигруппа*.

В. Д. Белоусов.

ЛУПА а н а л и т и ч е с к а я — аналитическое многообразие M, наделенное структурой Л., основные операции к-рой (умножение, левое и правое деление) являются аналитич. отображениями $M\times M$ в M. Если e — единица лупы M, $g(t)$, $h(t)$ — аналитич. пути, выходящие из e и имеющие в точке e касательные векторы a, b, то касательный вектор $c=ab$ в e к пути $k(t)$, где

$$k(t^2)=g(t)\,h(t)/[h(t)\,g(t)],$$

есть билинейная функция векторов a, b. Касательное пространство $T(M)$ в точке e с операцией умножения $c=ab$ наз. к а с а т е л ь н о й а л г е б р о й Л. M. Координаты $(x^1,\ldots,x^n)$ в нек-рой окрестности U элемента $e=(0,\ldots,0)$ наз. к а н о н и ч е с к и м и 1-г о р о д а, если для любого вектора $a=(a^1,\ldots,a^n)$ кривая $x(t)=(a^1t,\ldots,a^nt)$ является локальной однопараметрич. подгруппой ($|t|\leqslant\varepsilon$) с касательным вектором a в точке e (см. [1]). Аналитич. Л. с ассоциативными степенями обладает каноническими координатами 1-го рода [2]. В этом случае отображение $a\to x(1)$, определенное для достаточно малых a, позволяет отождествить U с окрестностью начала координат в $T(M)$ и наделить $T(M)$ строением локальной аналитич. лупы M_0. Если аналитич. лупа M альтернативна, т. е. любые два ее элемента порождают подгруппу, то касательная алгебра $T(M)$ бинарно лиева, а умножение $(x,y)\to x\circ y$ в M_0 выражается *Кэмпбелла — Хаусдорфа формулой*. Любая конечномерная бинарно лиева алгебра над полем $\mathbb{R}$ есть касательная алгебра одной и (с точностью до локальных изоморфизмов) только одной локальной альтернативной аналитич. Л. [1].

Наиболее полно изучены аналитические *Муфанг лупы*. Касательная алгебра аналитич. лупы Муфанг удовлетворяет тождествам

$$x^2=0,\ J(x,y,xz)=J(x,y,z)x,$$

где

$$J(x, y, z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y;$$

такие алгебры наз. алгебрами Мальцева. Обратно, любая конечномерная алгебра Мальцева над $\mathbb{R}$ является касательной алгеброй нек-рой односвязной аналитич. лупы Муфанг M, определенной однозначно с точностью до изоморфизма (см. [2], [3]). Если M' — связная аналитич. лупа Муфанг с той же касательной алгеброй и, следовательно, локально изоморфная M, то существует эпиморфизм $M\to M'$, ядро к-рого H есть дискретная нормальная подгруппа в M; при этом фундаментальная группа $\pi(M')$ пространства M' изоморфна H. Если φ — локальный гомоморфизм односвязной аналитич. лупы Муфанг M в связную аналитич. лупу Муфанг M', то φ однозначно продолжается до гомоморфизма M в M'. Пространство односвязной аналитич. лупы Муфанг с разрешимой касательной алгеброй Мальцева аналитически изоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ (см. [3]).

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1955, т. 36, в. 3, с. 569—76; [2] Кузьмин Е. Н., «Алгебра и логика», 1971, т. 10, в. 1, с. 3—22; [3] Кердман Ф. С., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, в. 3, с. 533—36. *Е. Н. Кузьмин.*

ЛУЧ — то же, что *полупрямая*.

ЛУЧЕВАЯ ФУНКЦИЯ — действительная функция $F(x)$, заданная на n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая следующим условиям: $F(x)$ непрерывна, неотрицательна и однородна (т. е. $F(\tau x)=\tau F(x)$ для любого действительного числа $\tau\geqslant 0$). Л. ф. $F(x)$ наз. положительной, если $F(x)>0$ для всех $x\neq 0$, и наз. симметрической, если $F(-x)=F(x)$. Л. ф. наз. выпуклой, если для любых $x, y\in\mathbb{R}^n$

$$F(x+y)\leqslant F(x)+F(y).$$

Для любой Л. ф. $F(x)$ найдется постоянная $c=c_F$, для к-рой

$$F(x)\leqslant c\,|\,x\,|,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Если $F(x)$ положительна, то найдется и постоянная $c'=c'_F>0$, для к-рой

$$F(x)\geqslant c'\,|\,x\,|,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Множество $\mathfrak{S}$ точек $x\in\mathbb{R}^n$ с условием

$$F(x)<1$$

является *звездным телом*. Обратно, для каждого открытого звездного тела $\mathfrak{S}$ найдется единственная Л. ф. $F_{\mathfrak{S}}(x)$, для к-рой

$$\mathfrak{S}=\{x\,|\,F_{\mathfrak{S}}(x)<1\}.$$

Звездное тело $\mathfrak{S}_F$ ограничено тогда и только тогда, когда его Л. ф. $F(x)$ положительна. Если $F(x)$ — симметрич. функция, то $\mathfrak{S}_F$ — симметрично относительно точки 0; верно и обратное. Звездное тело будет выпуклым телом тогда и только тогда, когда $F(x)$ — выпуклая Л. ф.

Лит.: [1] Касселс Дж.-В.-С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965. *А. В. Малышев.*

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД — метод формального нахождения высокочастотной асимптотики решения задач теории дифракции и распространения волн. Л. м. состоит из совокупности приемов нахождения того или иного варианта *геометрического приближения* (г. п.) к решению соответствующей задачи.

Пусть, напр., волновой процесс описывается волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2(x, y, z)}u_{tt}-\Delta u=0.$$

Подстановка ряда г. п. в волновое уравнение и приравнивание нулю коэффициентов при последовательных

степенях $1/\omega$ (параметр ω соответствует частоте колебаний) приводят к соотношениям

$$(\nabla\tau)^2 = c^{-2},\quad 2\nabla\tau\nabla u_j + \Delta\tau u_j = \Delta u_{j-1},\quad u_{-1}=0,$$
$$j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

из к-рых первое — *эйконала уравнение*, остальные уравнения наз. уравнениями переноса. Это — рекуррентная последовательность линейных уравнений вдоль лучей, т. е. экстремалей функционала Ферма (см. *Ферма принцип*).

Если заданы поверхности Σ_s, на к-рых выполняются классические однородные краевые условия и вектор $\nabla\tau$ некасателен к Σ_s, то по заданному г. п. можно найти отраженное или отраженное и преломленное г. п., к-рые в сумме будут формально удовлетворять краевым условиям. Пусть, напр., на Σ выполняется краевое условие Дирихле $u|_\Sigma=0$, тогда отраженное г. п. ищется в виде

$$u_{\text{отр}} \sim \exp[-i\omega(t-\tau_{\text{отр}})]\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u_j^{\text{отр}}}{(-i\omega)^j}. \qquad (1)$$

Формальное выполнение краевого условия приводит к равенствам

$$\tau_{\text{отр}}|_\Sigma = \tau|_\Sigma,\quad u_j^{\text{отр}}|_\Sigma = -u_j|_\Sigma,\quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Из первого условия следует классич. закон отражения лучей: «угол падения равен углу отражения». Равенства для $u_j^{\text{отр}}$ задают начальные данные для уравнений переноса, к-рым удовлетворяют $u_j^{\text{отр}}$. Таким образом, задание «надающей волны» полностью определяет отраженную волну (1). Аналогично рассматривается задача преломления на границе раздела двух сред.

В окрестности особенностей поля лучей г. п. неприменимо и приходится пользоваться более сложными разложениями, напр. тем или иным вариантом метода эталонных задач и дифракционного пограничного слоя (из вариантов последнего, по-видимому, наиболее важным является метод параболич. уравнения).

Дополненный указанным образом Л. м. позволяет строить формально высокочастотные разложения достаточно широкого класса дифракционных задач. По-видимому, практически всегда такие разложения являются асимптотическими разложениями решений. В такой общности это утверждение не доказано, установлена его справедливость лишь в частных случаях (когда удается построить явное решение или получить равномерную по ω оценку нормы оператора, обратного к волновому при рассматриваемых условиях). Одномерным вариантом Л. м. является метод ВКБ, квантовомеханическим — *квазиклассическое приближение*. Л. м. успешно применяется при изучении высокочастотных волн любой природы (напр., упругих, электромагнитных). Более далеким аналогом Л. м. является Л. м. для волн Рэлея, распространяющихся вдоль поверхности упругого тела произвольной формы, для волн на поверхности тяжелой жидкости, слабо изогнутых упругих или акустич. слоев и т. п.

Одно из обобщений получается, если г. п. заменить рядом:

$$u \sim \exp[-ip\psi(t,x)]\sum_{j=0}^{\infty}\frac{u_j(t,x)}{(-ip)^j}. \qquad (2)$$

Теорию таких разложений наз. пространственно-временной геометрич. оптикой, или теорией волн, модулированных как по частоте, так и по амплитуде. Разложения вида (2) применяют также и в том случае, когда уравнения, описывающие волновые процессы, не являются дифференциальными (диспергирующие среды). Разложения (2) используют как в случае дифференциальных, так и для псевдодифференциальных уравнений. Разработаны нелинейные аналоги (см. [2]).

Другие варианты Л. м. связаны с рассмотрением разрывных уравнений: во многих ситуациях разрывы описываются с помощью нестационарного варианта Л. м. и распространяются вдоль лучей. На нестационарном аналоге Л. м. основан т. н. метод Адамара исследования задачи Коши линейных гиперболич. уравнений 2-го порядка и его обобщения на системы линейных гиперболических дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений.

Лит.: [1] Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, М., 1972; [2] Уизем Дж. Б., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; [3] Боровиков В. А., Кинбер Б. Е., Геометрическая теория дифракции, М., 1978. *В. М. Бабич.*

ЛЬЕНАРА УРАВНЕНИЕ — нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$x''+f(x)\,x'+x=0. \qquad (*)$$

Это уравнение описывает динамику системы с одной степенью свободы при наличии линейной восстанавливающей силы и нелинейного затухания. Если функция $f(x)$ обладает следующим свойством:

$$f(x)<0 \quad \text{при малых } |x|,$$
$$f(x)>0 \quad \text{при больших } |x|,$$

т. е. если при малых амплитудах система поглощает энергию, а при больших происходит диссипация, то в системе можно ожидать самовозбуждение колебаний (возникновение *автоколебаний).* Впервые достаточные условия возникновения автоколебаний в системе (*) доказал А. Льенар [1].

Л. у. тесно связано с *Рэлея уравнением.* Важным частным случаем Л. у. является *Ван дер Поля уравнение.* Вместо уравнения (*) часто удобно рассматривать систему

$$x'=v,\ v'=-x-f(x)v$$

(автоколебательному процессу в системе (*) адекватен устойчивый предельный цикл на фазовой плоскости x, v) или эквивалентное ей уравнение

$$\frac{dv}{dx}=\frac{-x-f(x)\,v}{v}.$$

Если ввести новую переменную $y=x'+F(x)$, где $F(x)=\int_0^x f(\xi)\,d\xi$, то уравнение (*) переходит в систему

$$x'=y-F(x),\ y'=-x.$$

Более общими, чем Л. у., являются уравнения

$$x''+f(x)x'+g(x)=0,$$
$$x''+\varphi(x,\,x')x'+g(x)=0.$$

Основной интерес представляет выяснение возможно более широких достаточных условий, при к-рых эти уравнения имеют единственное устойчивое периодич. решение. Подробно изучалось также неоднородное Л. у.

$$x''+f(x)x'+x=e(t)$$

и его обобщения.

Лит.: [1] Liénard A., «Rev. gén. électr.», 1928, t. 23, p. 901—12, 946—54; [2] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 2, М., 1954; [4] Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; [5] Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р., Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений, пер. с нем., М., 1974. *Н. Х. Розов.*

ЛЬЕНАРА — ШИПАРА КРИТЕРИЙ — модификация *Рауса — Гурвица критерия*, сводящая все вычисления в нем к вычислению главных миноров только четного (или только нечетного) порядка матрицы Гурвица.

Пусть дан многочлен

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n, \quad a_0>0, \qquad (*)$$

H — его матрица Гурвица и Δ_i — ее главные миноры порядка i, $i=1, 2, \ldots, n$.

Критерий Льенара — Шипара: любое из следующих четырех условий является необходимым и достаточным для того, чтобы все корни многочлена * с действительными коэффициентами имели отрицательные действительные части:

1) $a_n > 0, \quad a_{n-2} > 0, \ \ldots, \ \Delta_1 > 0, \ \Delta_3 > 0, \ \ldots;$

2) $a_n > 0, \quad a_{n-2} > 0, \ \ldots, \ \Delta_2 > 0, \ \Delta_4 > 0, \ \ldots;$

3) $a_n > 0, \ a_{n-1} > 0, \ a_{n-3} > 0, \ \ldots, \ \Delta_1 > 0, \ \Delta_3 > 0, \ \ldots;$

4) $a_n > 0, \ a_{n-1} > 0, \ a_{n-3} > 0, \ \ldots, \ \Delta_2 > 0, \ \Delta_4 > 0, \ \ldots.$

Критерий установлен А. Льенаром и А. Шипаром [1].

Лит.: [1] Liénard A., Chipart H., «J. math. pures et appl.», 1914, t. 10, p. 291—346; [2] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967. *И. В. Проскуряков.*

ЛЮКСЕМБУРГА НОРМА — функция

$$\| x \|_{(M)} = \inf \{\lambda : \lambda > 0, \ \int_G M(\lambda^{-1} x(t)) \, dt \leqslant 1\},$$

где $M(u)$ — четная выпуклая функция, возрастающая при положительных U,

$$\lim_{u \to 0} u^{-1} M(u) = \lim u (M(u))^{-1} = 0,$$

$M(u) > 0$ при $u > 0$, G — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Свойства этой нормы были изучены В. Люксембургом [1]. Л. н. эквивалентна норме Орлича (см. *Орлича пространство*) и

$$\| x \|_{(M)} \leqslant \| x \|_M \leqslant 2 \| x \|_{(M)}.$$

Если функции $M(u)$ и $N(u)$ дополнительны друг к другу (см. *Орлича класс*), то

$$\| x \|_M = \sup \left\{ \int_G x(t) \, y(t) \, dt : \| y \|_{(N)} \leqslant 1 \right\}.$$

Если $\chi_E(t)$ — характеристич. функция измеримого подмножества $E \subset G$, то

$$\| \chi_E \|_{(M)} = 1/M^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{mes} E}\right).$$

Лит.: [1] Luxemburg W., Banach function spaces, [s. l.], 1955; [2] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958. *Е. М. Семенов.*

ЛЮРОТА ПРОБЛЕМА — проблема характеризации подполей поля рациональных функций.

В 1876 Ж. Люрот [1] (см. также [2]) доказал, что всякое подполе поля рациональных функций от одной переменной $k(x)$, содержащее поле k и отличное от k, изоморфно полю $k(x)$ (теорема Люрота). Вопрос о том, верно ли аналогичное утверждение для подполей R поля $k(x_1, \ldots, x_n)$, $R \supset k$, $R \neq k$, $n \geqslant 2$, известен как проблема Люрота.

Пусть X — алгебраич. многообразие, являющееся моделью (см. *Минимальная модель*) поля R, тогда вложение $R \cdot k(X) \subset k(x_1, \ldots, x_n)$ определяет рациональное отображение $f : P^n \to X$, образ к-рого плотен в X. Многообразия, для к-рых существует такое отображение на них проективного пространства, наз. унирациональными. Рациональными наз. многообразия, бирационально изоморфные P^m. На геометрич. языке Л. п. может быть сформулирована следующим образом: является ли всякое унирациональное многообразие X рациональным? Без ограничения общности можно предполагать, что $\dim X = n$, т. е. что R имеет степень трансцендентности, равную n.

В случае $n=1$ положительное решение Л. п. для любого основного поля k дает сформулированная выше теорема Люрота. Для $n=2$ и алгебраически замкнутого поля k характеристики 0 проблема положи-

тельно решена Г. Кастельнуово (G. Castelnuovo) в 1893. Из критерия рациональности Г. Кастельнуово следует также положительное решение Л. п. для таких поверхностей X над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики, для к-рых существует сепарабельное отображение $f: P^2 \to X$ (см. [7]). Для несепарабельных отображений f существуют примеры, дающие отрицательное решение Л. п. для полей простой характеристики. В случае алгебраически незамкнутого поля k такими примерами являются минимальные кубич. поверхности в P^3, обладающие k-точками.

Для трехмерных многообразий Л. п. также решается отрицательно (см. [4], [5], [6]). Доказана [5] нерациональность трехмерной *кубической гиперповерхности*, к-рая, как известно, унирациональна. Для доказательства был найден новый метод, основанный на сравнении промежуточного якобиана кубики с якобианами кривых. Доказана [4] нерациональность гладких трехмерных квартик. Для конструкции контрпримеров использована [6] в качестве инварианта группа Брауэра многообразия (группа кручений в трехмерных когомологиях). Этот бирациональный инвариант использован также для построения контрпримеров во всех размерностях $n \geqslant 3$.

Лит.: [1] Lüroth J., «Math. Ann.», 1876, Bd 9, S. 163—65; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [3] Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972; [4] Исковских В. А., Манин Ю. И., «Матем. сб.», 1971, т. 86, № 1, с. 140—66; [5] Клеменс К. Г., Гриффитс Ф. С., «Математика», 1972, т. 16, № 6, с. 3—32; 1973, т. 17, № 1, с. 3—41; [6] Artin M., Mumford D., «Proc. London Math. Soc.», 1972, v. 25, № 1, p. 75—95; [7] Zariski O., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, p. 146—84.

В. А. Исковских.

ЛЯПУНОВА ПОВЕРХНОСТИ И КРИВЫЕ — класс поверхностей и кривых, обладающих достаточно хорошими свойствами гладкости, введенный в теории потенциала А. М. Ляпуновым в кон. 19 — нач. 20 вв.

Поверхность S в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ наз. поверхностью Ляпунова, если выполнены следующие три условия (условия Ляпунова): 1) в каждой точке S существует определенная касательная плоскость и, следовательно, нормаль; 2) существует такое число $r>0$, одно и то же для всех точек S, что если взять часть Σ поверхности S, попавшую внутрь сферы Ляпунова $B(y_0, r)$ с центром в любой точке $y_0 \in S$ радиуса r, то прямые, параллельные нормали к S в точке y_0, встречают Σ не более чем один раз; 3) существуют такие два числа $A>0$ и λ, $0<\lambda\leqslant 1$, одни и те же для всей поверхности S, что для любых двух точек $y_1, y_2 \in S$ выполняется неравенство:

$$|\theta| < A\,|y_1 - y_2|^{\lambda}, \qquad (*)$$

где θ — угол между нормалями к S в точках y_1 и y_2. Иногда к этим трем условиям добавляются требования замкнутости S и того, чтобы телесный угол, под к-рым любая часть σ поверхности S видна из произвольной точки $x \in \mathbb{R}^3$, был равномерно ограничен.

Условия Ляпунова обобщаются для гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

Аналогично, простая непрерывная кривая L на плоскости $\mathbb{R}^2$ наз. кривой Ляпунова, если она удовлетворяет следующим условиям: 1′) в каждой точке L существует определенная касательная и, следовательно, нормаль; 3′) существуют такие два числа $A>0$ и λ, $0<\lambda\leqslant 1$, одни и те же для всей кривой L, что для любых двух точек $y_1, y_2 \in L$ выполняется неравенство (*), где θ - угол между касательными или нормалями к L в точках y_1, y_2. Условие Ляпунова 2) здесь вытекает из 1′) и 3′). Кривые Ляпунова представляют собой подкласс простых гладких кривых.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле, в его кн.: Собр. соч., т. 1, М., 1954, с. 45—47; 48—100; [2] Соболев С. Л., Уравнения математи-

ческой физики, 4 изд., М., 1966; [3] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1971, гл. 5; [4] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968, гл. 1. *Е. Д. Соломенцев.*

ЛЯПУНОВА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — гладко зависящее от параметра $t\in\mathbb{R}$ линейное невырожденное преобразование $L(t):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (или $L(t):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$), удовлетворяющее условию:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left[\|L(t)\|+\|L^{-1}(t)\|+\|\dot{L}(t)\|\right]<+\infty.$$

Введено А. М. Ляпуновым в 1892 (см. [1]). Л. п. широко используется в теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом во многих случаях от требования

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\dot{L}(t)\|<+\infty$$

можно отказаться.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.—Л., 1956, с. 7—263. *В. М. Миллионщиков.*

ЛЯПУНОВА СТОХАСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — неотрицательная функция $V(t,x)$, для к-рой пара $(V(t,X(t)),\ F_t)$ — супермартингал для нек-рого случайного процесса $X(t)$, F_t есть σ-алгебра событий, порожденных течением процесса X до момента t. Если $X(t)$ — марковский процесс, то Л. с. ф. есть функция, для к-рой стохастич. оператор Ляпунова

$$LV_{(t,x)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}M\{[V(t+h,\ X(t+h))-V(t,\ X(t))]/X(t)=x\}$$

неположителен. Оператор L есть инфинитезимальный оператор процесса $(t,X(t))$, и потому проверку условия $LV\leqslant 0$ легко осуществить для конкретных случаев. Оператор L переходит в обычный оператор Ляпунова $dV(t,X(t))/dt$, когда процесс X детерминированный, описываемый системой дифференциальных уравнений. С помощью Л. с. ф. удается проверить те или иные качественные свойства траекторий процесса $X(t)$; их роль в теории случайных процессов аналогична роли классич. *Ляпунова функций* в теории систем дифференциальных уравнений.

Часто Л. с. ф. наз. и такие, для к-рых функция $V(t,X(t))$ хотя и не является супермартингалом, но с ее помощью легко можно сформировать супермартингал. Ниже приведены типичные результаты качественного поведения траекторий марковских процессов в терминах Л. с. ф.

1) Если $X(t)$ — непрерывный справа строго марковский процесс в $\mathbb{R}^k$, определенный до момента τ первого выхода из любого компакта, и существуют Л. с. ф. $V(t,x)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^k$, и постоянная c такие, что

$$\inf_{t,\,|x|>R}V(t,\ x)\longrightarrow\infty\ \text{при}\ R\longrightarrow\infty,\ LV\leqslant cV,$$

то

$$\mathsf{P}\{\tau<\infty\mid X(0)=x\}=1$$

для любого $x\in\mathbb{R}^k$, т. е. процесс X определен при всех $t>0$ (неограниченно продолжаем).

2) Для существования стационарного марковского процесса в $\mathbb{R}^k$, отвечающего *переходной функции* $P(t,x,A)$, достаточно существования функции $V(x)\geqslant 0$, для к-рой

$$\sup_{|x|>R}LV(x)\longrightarrow-\infty$$

при $R\to\infty$.

С помощью Л. с. ф. на марковские процессы переносятся основные теоремы прямого метода Ляпунова, эти функции нашли применение и для исследования процессов с дискретным временем.

Лит.: [1] Кушнер Г. Дж., Стохастическая устойчивость и управление, пер. с англ., М., 1969; [2] Хасьминский Р. З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969; [3] Калашников В. В., Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций, М., 1978.

Р. З. Хасьминский.

ЛЯПУНОВА ТЕОРЕМА — 1) Л. т. в теории вероятностей — теорема, устанавливающая весьма общие достаточные условия для сходимости распределений сумм независимых случайных величин к *нормальному распределению*. Точная формулировка Л. т. такова: пусть независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_k, \ldots$ имеют конечные математич. ожидания $\mathsf{E}X_k$, дисперсии $\mathsf{D}X_k$ и абсолютные моменты $\mathsf{E}\,|X_k-\mathsf{E}X_k|^{2+\delta}$, $\delta>0$, и пусть $B_n=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}X_k$ — дисперсия суммы $X_1, \ldots, X_n$. Тогда если при нек-ром $\delta>0$ выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\,|X_k-\mathsf{E}X_k|^{2+\delta}}{B_n^{1+\delta/2}}=0, \qquad (1)$$

то вероятность неравенства

$$x_1<\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathsf{E}X_k)}{\sqrt{B_n}}<x_2 \qquad (2)$$

стремится при $n\to\infty$ к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-x^2/2}dx \qquad (3)$$

равномерно относительно всех значений x_1 и x_2. Условие (1) наз. условием Ляпунова. Л. т. была сформулирована и доказана А. М. Ляпуновым (1901) и явилась завершающим этапом исследований П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова по проблеме об условиях приложимости *центральной предельной теоремы* теории вероятностей. В дальнейшем были установлены условия, расширяющие условие Ляпунова и являющиеся не только достаточными, но и необходимыми. Окончательное решение вопроса в этом направлении было получено С. Н. Бернштейном, Дж. Линдебергом (J. Lindeberg) и В. Феллером (W. Feller). В Л. т. впервые была продемонстрирована сила метода характеристич. функций.

А. М. Ляпуновым была также дана оценка сверху при $\delta\leqslant 1$ для абсолютной величины разности Δ между вероятностью неравенства (2) и ее приближенным значением (3). Этой оценке можно придать следующий вид: при $\delta<1$

$$|\Delta|\leqslant C_1L_{n,\,\delta}$$

и при $\delta=1$

$$|\Delta|\leqslant C_2L_{n,\,1}\left|\log\frac{1}{L_{n,\,1}}\right|,$$

где C_1 и C_2 — абсолютные постоянные и $L_{n,\,\delta}$ — дробь (дробь Ляпунова), стоящая под знаком предела в (1). См. также *Бэрри — Эссеена неравенство*.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 1, М., 1954, с. 157—76; [2] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.— Л., 1946; [3] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

2) Л. т. в теории потенциала — теоремы о поведении потенциалов и решения *Дирихле задачи*, полученные А. М. Ляпуновым в 1886—1902 (см. [1]).

Теорема о теле наибольшего потенциала: если существует однородное тело T в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, *ньютонов потенциал* к-рого самого на себя, т. е. интеграл

$$E(T)=\int_T\int_T\frac{dx\,dy}{|x-y|}, \qquad (1)$$

при данном объеме достигает наибольшего значения, то это тело есть шар.

Интеграл (1) есть э н е р г и я однородного распределения масс плотности 1 в теле T. Позднее Т. Карлеман (T. Carleman, 1919) доказал, что такое тело T, для к-рого энергия $E(T)$ при данном объеме достигает своего наибольшего значения, действительно существует.

П е р в а я т е о р е м а о н о р м а л ь н ы х п р о и з в о д н ы х п о т е н ц и а л а д в о й н о г о с л о я: пусть S — замкнутая поверхность Ляпунова в $\mathbb{R}^3$, $f(y)$ — плотность масс, распределенных на S, причем выполняется одно из следующих двух условий: 1) $f(y)$ непрерывна на S, а показатель λ в условии Ляпунова на угол θ между нормалями к S в точках $y_1, y_2 \in S$, т. е. $|\theta| < A|y_1 - y_2|^{\lambda}$ (см. *Ляпунова поверхности и кривые*); 2) $f(y)$ непрерывна по Гёльдеру с показателем 1, т. е. $|f(y_1) - f(y_2)| < A|y_1 - y_2|$; тогда если *двойного слоя потенциал*

$$W(x) = \int_S f(y) \frac{\cos(y-x, n_y)}{|x-y|^2}\, dy \qquad (2)$$

имеет в точке $y_0 \in S$ одну из нормальных производных dW_i/dn_{y_0} изнутри S или dW_e/dn_{y_0} извне S, то он имеет и другую, причем эти производные совпадают.

В т о р а я т е о р е м а о н о р м а л ь н ы х п р о и з в о д н ы х п о т е н ц и а л а д в о й н о г о с л о я: в предположениях предыдущей теоремы пусть, кроме того, плотность $f(y)$ удовлетворяет у с л о в и ю Л я п у н о в а

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho, \varphi) - f(y_0)|\, d\varphi < a\rho^{1+\nu}, \quad a > 0, \ \nu > 0,$$

где (ρ, φ, z) — цилиндрич. координаты внутри сферы Ляпунова (см. *Ляпунова поверхности и кривые*) с началом в точке $y_0 \in S$ и осью Oz, направленной по нормали n_{y_0}. Тогда потенциал двойного слоя (2) имеет обе нормальные производные в точке y_0.

Т е о р е м а о п е р в ы х п р о и з в о д н ы х потенциала простого слоя: пусть S — замкнутая поверхность Ляпунова и плотность $f(y)$ непрерывна по Гёльдеру, т. е.

$$|f(y_1) - f(y_2)| < A|y_1 - y_2|^{\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Тогда частные производные первого порядка $\partial V/\partial x_i$, $i = 1, 2, 3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, *простого слоя потенциала*

$$V(x) = \int_S f(y) \frac{dy}{|x-y|}$$

непрерывны по Гёльдеру с тем же показателем λ в замкнутых внутренней $\bar{D}_i$ и внешней $\bar{D}_e$ областях.

В этой теореме гёльдерова непрерывность была только высказана А. М. Ляпуновым, доказательство было завершено Н. М. Гюнтером (см. [2]).

Эти теоремы послужили А. М. Ляпунову основой при построении строгой теории разрешимости задачи Дирихле методом интегральных уравнений. Развитию идей А. М. Ляпунова посвящена монография Н. М. Гюнтера (см. [2]); обобщения для потенциалов более общего вида см. в [3].

Лит.: [1] Л я п у н о в А. М., Собр. соч., т. 1, М., 1954, с. 26—32, 33—44, 45—100, 101—122; [2] Г ю н т е р Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [3] М и р а н д а К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957.

Е. Д. Соломенцев.

ЛЯПУНОВА ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ — теория устойчивости движения, построенная А. М. Ляпуновым в конце 19 — нач. 20 вв. (см. [1]). В основе ее лежат понятия *устойчивости по Ляпунову* и асимптотич. устойчивости (см. *Асимптотически устойчивое решение*), введенные А. М. Ляпуновым, теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению (на к-рой ос-

нован первый метод Ляпунова исследования устойчивости) и второй метод Ляпунова (см. *Ляпунова функция*). Результаты и методы А. М. Ляпунова, разработанные им при построении теории устойчивости, получили важные и многочисленные применения в математике, в механике и технике. См. также *Устойчивости теория*.

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956.

В. М. Миллионщиков.

ЛЯПУНОВА ФУНКЦИЯ — функция, определяемая следующим образом. Пусть x_0 — неподвижная точка системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x,\ t)$$

(т. е. $f(x_0,\ t)\equiv 0$), где отображение $f(x,\ t):\ U\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$ непрерывно и непрерывно дифференцируемо по x (здесь U — нек-рая окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^n$); в координатах эта система записывается в виде

$$\dot{x}^i=f^i\ (x^1,\ \ldots,\ x^n,\ t),\quad i=1,\ \ldots,\ n.$$

Л. ф. наз. дифференцируемая функция $V(x):\ U\to\mathbb{R}$, обладающая свойствами:

1) $V\ (x)>0$ при $x\neq x_0$;

2) $V\ (x_0)=0$;

3) $$0\geqslant\frac{dV\ (x)}{dx}\ f\ (x,\ t)=$$
$$-\sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\partial V\ (x^1,\ \ldots,\ x^n)}{\partial x^i}\ f^i\ (x^1,\ \ldots,\ x^n,\ t).$$

Функция $V(x)$ введена А. М. Ляпуновым (см. [1]).

Имеет место лемма Ляпунова: если Л. ф. существует, то неподвижная точка устойчива по Ляпунову. На этой лемме основан один из методов исследования устойчивости (т. н. второй метод Ляпунова).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956, с. 7—263; [2] Барбашин Е. А., Функции Ляпунова, М., 1970.

В. М. Миллионщиков.

ЛЯПУНОВА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ решения линейной системы — верхний предел

$$\lambda_{x\ (t)}=\varlimsup_{t\to+\infty}\ \frac{1}{t}\ \ln|\ x\ (t)\ |,$$

где $x(t)\neq 0$ — решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A\ (t)x;\qquad (1)$$

здесь $x\in\mathbb{R}^n$, $A\ (\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$ или $x\in\mathbb{C}^n$, $A\ (\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}\to\mathrm{Hom}\ (\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^n)$. В координатной записи

$$x\ (t)=(x^1\ (t),\ \ldots,\ x^{(n)}\ (t)),$$
$$\dot{x}^i=\sum\nolimits_{j=1}^{n}a_j^i\ (t)\ x^j,\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

где $a_j^i(t)$ — суммируемые на каждом отрезке функции, а

$$|\ x\ |=\sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^{n}|\ x^i\ |^2}$$

(или любая другая эквивалентная норма; $\lambda_{x(t)}$ не зависит от выбора нормы в $\mathbb{R}^n$ или в $\mathbb{C}^n$).

Теорема Ляпунова. Пусть

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\ \frac{1}{t}\int_0^t\|\ A\ (\tau)\ \|\ d\tau<+\infty;$$

эквивалентно:

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\ \frac{1}{t}\int_0^t|\ a_j^i\ (\tau)\ |\ d\tau<+\infty,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n.$$

Тогда для всякого решения $x(t)\neq 0$ системы (1) Л. х. п. $\lambda_{x(t)}$ — действительное число (т. е. $\neq\pm\infty$).

Для Л. х. п. ненулевых решений системы (1) справедливы утверждения:

1) $\lambda_{\alpha x(t)} = \lambda_{x(t)}$, $\alpha \neq 0$,

2) $\lambda_{(x_1(t)+x_2(t))} \leqslant \max(\lambda_{x_1(t)}, \lambda_{x_2(t)})$,

3) существуют линейно независимые решения $x_i(t)$, $i=1, \ldots, n$, системы (1), обладающие свойством: для всяких n линейно независимых решений $\hat{x}_i(t)$, $i=1, \ldots, n$, системы (1), занумерованных в порядке убывания Л. х. п., т. е. $\lambda_{\hat{x}_i(t)} \geqslant \lambda_{\hat{x}_j(t)}$ при $i \leqslant j$, выполняются неравенства

$$\lambda_{\hat{x}_i(t)} \geqslant \lambda_{x_i(t)}, \quad i=1, \ldots, n.$$

Фундаментальная система решений $x_i(t)$, $i=1, \ldots, n$, обладающих этим свойством, наз. нормальной; при этом:

а) семейство чисел $\lambda_i(A) = \lambda_{x_i(t)}$, $i=1, \ldots, n$, не зависит от выбора нормальной фундаментальной системы $x_i(t)$, $i=1, \ldots, n$;

б) для всякого решения $x(t) \neq 0$ системы (1) Л. х. п. $\lambda_{x(t)}$ равен нек-рому $\lambda_i(A)$;

в) $\lambda_i(A) \geqslant \lambda_j(A)$, $i \leqslant j$.

Числа $\lambda_1(A) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(A)$ наз. Л. х. п. системы (1); число $\lambda_1(A)$ наз. часто старшим Л. х. п. системы (1).

Множество всех Л. х. п. ненулевых решений системы (1) наз. ее спектром.

Частные случаи. 1) Система с постоянными коэффициентами (т. е. $A(t) = A(0)$). В этом случае $\lambda_i(A)$ равны действительным частям собственных значений оператора $A(0)$ (матрицы $\|a_j^i\|$).

2) Система с периодич. коэффициентами (т. е. $A(t+T) = A(t)$, $T>0$). В этом случае

$$\lambda_i(A) = \frac{1}{T} \ln |\mu_i|,$$

где μ_i — *мультипликаторы* системы (1), занумерованные в порядке невозрастания их модулей (каждый берется столько раз, какова его кратность).

Роль Л. х. п. в теории устойчивости по Ляпунову основана на следующем утверждении: если $\lambda_1(A) < 0$ (>0), то решения системы (1) асимптотически устойчивы (соответственно неустойчивы). Из того, что $\lambda_1(A) < 0$, не следует, что нулевое решение системы

$$\dot{x} = A(t)\,x + O(|x|^2)$$

устойчиво по Ляпунову; однако если дополнительно известно, что система (1) *правильная линейная система*, то такое заключение справедливо (теорема Ляпунова).

Пусть система $\dot{x} = B(t)x$ получена малым возмущением системы (1), удовлетворяющей условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| < +\infty,$$

т. е. расстояние между ними, определяемое формулой

$$d(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t) - B(t)\|, \qquad (2)$$

мало́. При $n>1$ отсюда не следует, что величина

$$|\lambda_1(A) - \lambda_1(B)|$$

мала (следует, если система (1) имеет постоянные или периодич. коэффициенты, а также для нек-рых других систем); иными словами, функционалы $\lambda_i(A)$ не всюду непрерывны на пространстве систем (1) ($\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| < +\infty$), наделенном указанной метрикой (2).

Л. х. п. введены А. М. Ляпуновым, причем не только для решений системы (1), но и для произвольных функций на $\mathbb{R}^+$ (см. [1]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956, с. 7—263; [2] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, М., 1966; [3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146.

В. М. Миллионщиков.

ЛЯПУНОВА — ШМИДТА УРАВНЕНИЕ — нелинейное интегральное уравнение вида

$$u(x) - \int_\Omega K(x, s)\, u(s)\, ds = U_{01}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \\ + \sum\nolimits_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix}, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

где

$$U_{01}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = K_0(x)\, v(x) + \int_\Omega K_1(x, s)\, v(s)\, ds,$$

$$U_{mn}\begin{pmatrix} x \\ u, v \end{pmatrix} = \sum\nolimits_{\nu=1}^{n_i} \int_\Omega \dots \int_\Omega K^{(\nu)}(x, s_1, \dots, s_i) \times$$

$$\times u^{\alpha_0}(x)\, u^{\alpha_1}(s_1) \dots u^{\alpha_i}(s_i)\, v^{\beta_0}(x)\, v^{\beta_1}(s_1) \dots v^{\beta_i}(s_i)\, ds_1 \dots ds_i,$$

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_i$ — неотрицательные целые числа,

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_i = m, \quad \beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_i = n,$$

Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства, v и функции K — заданные непрерывные функции своих аргументов $x, s, s_1, \dots, s_i \in \Omega$, u — искомая функция. Сумма, входящая в

правую часть равенства (1), может быть конечной или представлять бесконечный ряд. В последнем случае ряд наз. интегро-степенным рядом от двух функциональных аргументов. Предполагается, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно.

Если единица не является характеристич. числом ядра $K(x, s)$, то уравнение (1) при достаточно малом $|v(x)|$ в классе непрерывных функций имеет единственное малое решение, представимое в виде интегро-степенного ряда. Случай, когда единица есть характеристич. число ядра K, является более сложным. В этом случае строится нек-рая система уравнений — уравнение разветвления:

$$\omega_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, v) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

где ω_k — известные степенные ряды, n — кратность характеристич. числа 1. Система (2) в общем случае имеет неединственное решение. Какова бы ни была фиксированная достаточно малая функция v, каждому малому непрерывному решению системы (2) (непрерывное решение системы (2) наз. малым, если $\xi_i(0)=0$) соответствует малое решение уравнения (1), представимое в виде интегро-степенного ряда.

Уравнение типа (1) впервые было рассмотрено А. М. Ляпуновым в 1906, а позднее — в более общем виде — Э. Шмидтом (E. Schmidt, 1908).

Лит.: [1] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [2] Смирнов Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, Л.— М., 1936.

Б. В. Хведелидзе.

МАГИЧЕСКИЙ КВАДРАТ — квадратная $n\times n$-таблица $\|a_{ij}\|$ целых чисел от 1 до n^2, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\ n+1-i} = s, \quad (*)$$

где $s = n(n^2+1)/2$. Рассматриваются также более общие М. к., в к-рых не требуется, чтобы $1 \leqslant a_{ij} \leqslant n^2$.

Любое число a, $1 \leqslant a \leqslant n^2$, однозначно характеризуется парой вычетов (α, β) по модулю n (цифрами по основанию n числа $a-1$), т. е. точкой двумерного пространства $(\mathbb{Z}/n)^2$ над кольцом $\mathbb{Z}/n$ вычетов по модулю n. Поскольку координаты (i, j) клеток квадрата также можно считать элементами пространства $(\mathbb{Z}/n)^2$, отсюда следует, что любое распределение чисел от 1 до n^2 в квадратную $n\times n$-таблицу $\|a_{ij}\|$ задается нек-рым отображением

$$(\mathbb{Z}/n)^2 \longrightarrow (\mathbb{Z}/n)^2,$$

т. е. парой функций $\alpha = \alpha(i, j) \in \mathbb{Z}/n$, $\beta = \beta(i, j) \in \mathbb{Z}/n$ от $i, j \in \mathbb{Z}/n$. Задача состоит в исследовании таких пар, дающих М. к. В общем виде это сделано (см. [1]) только при дополнительном предположении линейности функций α и β. Оказалось, в частности, что М. к. с линейными функциями α и β существуют только при нечетных n.

Уже в средние века был известен ряд алгоритмов построения М. к. нечетного порядка n. Каждый такой алгоритм характеризуется шестью вычетами i_0, j_0, p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$ и описывается следующими правилами: 1) число 1 вписывается в клетку (i_0, j_0); 2) если число a вписано в клетку (i, j), то число $a+1$ вписывается в клетку $(i+p, j+q)$, если эта клетка еще свободна от чисел, и в клетку $(i+\bar{p}, j+\bar{q})$, если клетка $(i+p, j+q)$ занята.

Вычеты i_0, j_0, p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$ не могут быть произвольны, но должны удовлетворять определенным условиям, обеспечивающим не только выполнение условий (*), но и выполнимость алгоритма, т. е. пустоту клетки $(i+\bar{p}, j+\bar{q})$, если занята клетка $(i+p, j+q)$. Эти условия легко находятся (см. [1] с. 41), причем оказывается, что М. к. тогда и только тогда может быть построен алгоритмом такого вида, когда описывающие этот квадрат функции α, β линейны.

Известно много других алгоритмов построения М. к. (приводящих к квадратам с нелинейными функциями α, β), но никакой общей их теории нет (1982). Неизвестно даже общее число М. к. порядка n (при $n \geqslant 5$; для $n=3$ существует, с точностью до очевидных симметрий, только один М. к., а для $n=4$ число М. к. равно 880).

Исследовались также М. к., обладающие дополнительными свойствами симметрии, лишь опять в очень специальных ситуациях (напр., при $n \leqslant 5$; см. [2]).

Лит.: [1] Постников М. М., Магические квадраты, М., 1964; [2] Гурсевич Е. Я., Тайна древнего талисмана, М., 1969.

М. М. Постников.

МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — задачи, связанные с исследованием движения электропроводящих жидкостей и газов в присутствии магнитного поля.

МАЖОРАНТА И МИНОРАНТА — 1) Две функции, значения первой из к-рых не меньше, а второй не больше соответствующих значений данной функции (для всех рассматриваемых значений независимого переменного). 2) Для функций, представимых степенным рядом, под м а ж о р а н т о й понимают сумму степенного ряда с положительными коэффициентами, к-рые не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов данного ряда. 3) Мажоранта (миноранта) нек-рого подмножества X упорядоченного множества E — элемент $y \in E$ такой, что для всякого $x \in X$ справедливо $y \geqslant x$ ($x \geqslant y$). 4) В теории интегрирования и в теории дифференциальных уравнений м а ж о р а н т о й (м и н о р а н т о й), или м а ж о р а н т н о й (м и н о р а н т н о й) ф у н к ц и е й, для нек-рой функции $f(t)$ наз. такая непрерывная функция, у к-рой в каждой точке t все *производные числа* не меньше (не больше), чем значения $f(t)$, и отличны от $-\infty (+\infty)$. Разность между любой мажорантой и любой минорантой является неубывающей функцией. Любая суммируемая на отрезке функция обладает абсолютно непрерывными М. и м., сколь угодно близкими к ее неопределенному интегралу Лебега. Понятие М. и м. может быть обобщено на случай аддитивной функции множества, а также на случай, когда производные числа понимаются в нек-ром обобщенном смысле.

Лит.: [1] Б у р б а к и Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [2] С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949.

В. А. Скворцов.

МАЙЕРА ЗАДАЧА — одна из основных задач вариационного исчисления на условный экстремум. М. з. состоит в следующем. Найти минимум функционала

$$J(y) = g(x_1,\ y(x_1),\ x_2,\ y(x_2)),\quad g: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

при наличии дифференциальных ограничений типа равенств

$$\varphi(x,\ y,\ y') = 0,\quad \varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\quad m < n,$$

и граничных условий:

$$\psi(x_1,\ y(x_1),\ x_2,\ y(x_2)) = 0,\quad \psi: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$
$$p < 2n+2.$$

Подробнее см. *Больца задача.*

М. з. названа по имени А. Майера (A. Mayer), к-рый изучал необходимые условия ее решения (кон. 19 в.).

И. Б. Вапнярский.

МАКДОНАЛЬДА ФУНКЦИЯ, м о д и ф и ц и р о в а н н а я ц и л и н д р и ч е с к а я ф у н к ц и я, б е с с е л е в а ф у н к ц и я м н и м о г о а р г у м е н т а, — функция

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)},$$

где ν — произвольное нецелое действительное число,

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}$$

— цилиндрич. функция чисто мнимого аргумента. Рассмотрена Х. Макдональдом [1]. Если n — целое число, то

$$K_n(z) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(z).$$

М. ф. $K_\nu(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}-(z^2+\nu^2)\,y=0, \qquad (*)$$

стремящимся экспоненциально к нулю, когда $z\to\infty$, принимая положительные значения. Функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (*).

При $\nu\geqslant 0$ функция $K_\nu(z)$ имеет корни лишь в случае $\mathrm{Re}\,(z)<0$. Если $\pi/2<|\arg z|<\pi$, то число всех корней в этих двух квадрантах равно ближайшему к $\nu-\frac{1}{2}$ четному числу, если только $\nu-\frac{1}{2}$ не является целым; в последнем случае число всех корней равно $\nu-\frac{1}{2}$. При $\arg z=\pm\pi$ корней нет, если только $\nu-\frac{1}{2}$ не целое.

Ряды и асимптотич. представления:

$$K_{n+1/2}(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}e^{-z}\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{r!\,(n-r)!\,(2z)^r},$$

n — целое неотрицательное;

$$K_0(z)=$$

$$=-\ln\left(\frac{z}{2}\right)I_0(z)+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\frac{1}{(m!)^2}\psi(m+1),$$

$$\psi(1)=-C,\ \psi(m+1)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-C,$$

$C=0{,}5772157\ldots$ — постоянная Эйлера;

$$K_n(z)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m(n-m-1)!}{m!\,(z/2)^{n-2m}}+$$

$$+(-1)^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}\times\left\{\ln(z/2)-\frac{1}{2}\psi(m+1)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\psi(n+m+1)\right\},$$

$n\geqslant 1$ — целое;

$$K_\nu(z)\sim\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}e^{-z}\times$$

$$\times\left[1+\frac{4\nu^2-1^2}{1!8z}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2}+\ldots\right],$$

z велико и $|\arg z|<\pi/2$.

Рекуррентные формулы:

$$K_{\nu-1}(z)-K_{\nu+1}(z)=-\frac{2\nu}{z}K_\nu(z),$$

$$K_{\nu-1}(z)+K_{\nu+1}(z)=-2\frac{dK_\nu(z)}{dz}.$$

Лит.: [1] Macdonald H. M., «Proc. London Math. Soc.», 1899, v. 30, p. 165—79; [2] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949.

В. И. Пагурова.

МАККИ БОРЕЛЕВСКАЯ СТРУКТУРА — некоторая борелевская структура (т. е. *борелевская система множеств)* на спектре $\hat{A}$ сепарабельной C^*-*алгебры* A, определяемая следующим образом. Пусть H_n, $n=1,2,\ldots$, — гильбертово пространство размерности n, $\mathrm{Irr}_n(A)$ — множество ненулевых неприводимых представлений C^*-алгебры A в пространстве H_n, снабженное топологией простой слабой сходимости. Пусть множество $\mathrm{Irr}_n(A)$ снабжено борелевской системой множеств, подчиненной его топологии (т. е. наименьшей борелевской системой множеств, относительно к-рой все отображения $\pi\to(\pi(x)\xi,\eta)$, $x\in A$, $\xi,\eta\in H_n$, $\pi\in\mathrm{Irr}_n(A)$, — борелевские функции), и пусть $\mathrm{Irr}\,(A)$ — объединение подпространств $\mathrm{Irr}_n(A)$, $n=1,2,\ldots$, снабженное борелевской системой множеств таких, что подмножество в $\mathrm{Irr}\,(A)$ тогда и только тогда является борелевским, когда его пересечение с каждым из множеств $\mathrm{Irr}_n(A)$ принадлежит соответствующей борелев-

ской системе множеств. Пусть φ — отображение борелевского пространства $\mathrm{Irr}(A)$ на спектр $\hat{A}$ C^*-алгебры A, сопоставляющее представлению его класс унитарной эквивалентности. Борелевская система множеств в $\hat{A}$, образованная множествами, полные прообразы к-рых при отображении φ принадлежат построенной борелевской системе множеств на $\mathrm{Irr}(A)$, и называется борелевской структурой Макки на $\hat{A}$. М. б. с. содержит все множества из борелевской системы множеств на $\hat{A}$, подчиненной топологии пространства $\hat{A}$; каждая точка в $\hat{A}$ является борелевским множеством в М. б. с. Следующие условия эквивалентны: 1) М. б. с. стандартна (т.е. изоморфна как борелевская система множеств борелевской системе подмножеств нек-рого полного сепарабельного метрич. пространства, подчиненной его топологии); 2) М. б. с. совпадает с борелевской системой множеств, подчиненной топологии в $\hat{A}$; 3) М. б. с. на $\hat{A}$ счетно отделима; 4) если A — CGR-алгебра, то М. б. с. может быть введена также на квазиспектре сепарабельной C^*-алгебры.

Лит.: [1] Диксмье Ж., C^*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [2] Gardner T., «Canad. J. Math.», 1971, v. 23, № 4, p. 674—78; [3] Halpern H., «Canad. J. Math.», 1974, v. 26, № 3, p. 621—28.

А. И. Штерн.

МАККИ ТОПОЛОГИЯ $\tau(F, G)$ в F, находящемся в двойственности с пространством G (над тем же полем), — топология равномерной сходимости на компактных в слабой топологии (определяемой двойственностью между F и G) выпуклых уравновешенных множествах из G. Введена Дж. Макки [1]. М. т. является сильнейшей из отделимых локально выпуклых топологий, согласованных с двойственностью между F и G (т. е. таких отделимых локально выпуклых топологий $\mathscr{T}$ в F, что совокупность непрерывных линейных функционалов на пространстве F, наделенном топологией $\mathscr{T}$, совпадает с G). Семейства множеств в $\mathscr{T}$, ограниченных относительно М. т. и слабой топологии, совпадают. Выпуклое множество в G равностепенно непрерывно при наделении пространства F топологией Макки в том и только в том случае, если оно относительно компактно в слабой топологии; если отделимое локально выпуклое пространство E бочечно или борнологично (в частности, метризуемо) и E' — его сопряженное, то М. т. в E (находящемся в двойственности с E') совпадает с исходной топологией в E; для пары пространств (F, G) в двойственности М. т. в $\mathscr{T}$ не обязательно бочечна или метризуема. Слабо непрерывное линейное отображение отделимого локально выпуклого пространства E в отделимое локально выпуклое пространство F непрерывно относительно М. т. $\tau(E, E')$ и $\tau(F, F')$. Локально выпуклое пространство E наз. пространством Макки, если топология в E есть $\tau(E, E')$. Пополнения, факторпространства и метризуемые подпространства, произведения, локально выпуклые прямые суммы и индуктивные пределы семейств пространств Макки являются пространствами Макки. Если E — пространство Макки и u — слабо непрерывное линейное отображение пространства E в локально выпуклое пространство F, образ к-рого является пространством Макки, то u — непрерывное линейное отображение E в F. Если E — квазиполное пространство Макки и пространство, сопряженное к пространству E, снабженному сильной E'-топологией, полурефлексивно, то E рефлексивно.

Лит.: [1] Mackey G. W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1946, v. 60, p. 519—37; [2] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [3] Шефер Х., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1971.

А. И. Штерн.

МАКЛОРЕНА РЯД для функции $f(z)$ — степенной ряд вида

$$f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Изучался К. Маклореном [1]. Если аналитическая в нуле функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд, то этот ряд совпадает с М. р. В случае, когда функция зависит от m переменных, М. р. есть кратный степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{z_1}^{(k_1)}(0) \dots f_{z_m}^{(k_m)}(0)}{k_1! \dots k_m!} z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m},$$

суммирование в к-ром проводится по мультииндексам $k=(k_1, k_2, \dots, k_m)$, k_i — неотрицательные целые. М. р. – частный случай *Тейлора ряда*.

Лит.: [1] Mac Laurin C., A treatise of fluxions, v. 1–2, Edinburgh, 1742.

Л. Д. Кудрявцев.

МАКЛОРЕНА ФОРМУЛА — частный случай *Тейлора формулы*. Пусть функция $f(x)$ имеет n производных в точке $x=0$. Тогда в нек-рой окрестности U этой точки функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x), \quad x \in U,$$

где $r_n(x)$ — остаточный член n-го порядка, представимый в том или ином виде.

Термин «М. ф.» используется также для функций m переменных $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$. В этом случае в М. ф. под k понимается мультииндекс $k=(k_1, k_2, \dots, k_m)$ (см. *Маклорена ряд*). Названа по имени К. Маклорена (C. Maclaurin).

Л. Д. Кудрявцев.

МАКСВЕЛЛА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей с плотностью вероятности

$$p(x)=\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} e^{-x^2/2\sigma^2}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases} \qquad (*)$$

зависящей от параметра $\sigma>0$. Функция распределения М. р. имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 2\Phi(x/\sigma)-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}-1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного *нормального распределения*. М. р. имеет положительный коэффициент асимметрии; оно унимодально — единственная мода находится в точке $x=\sqrt{2}\sigma$. М. р. имеет конечные моменты любого порядка; математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$ и $\frac{3\pi-8}{\pi}\sigma^2$.

Если X_1, X_2, X_3 — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами 0 и σ^2, то случайная величина $\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$ имеет М. р. с плотностью (*). Иначе, М. р. может быть получено как распределение длины случайного вектора, координаты к-рого в декартовой системе координат в трехмерном пространстве независимы и нормально распределены с параметрами 0 и σ^2. М. р. при $\sigma=1$ совпадает с распределением квадратного корня из величины, имеющей χ^2-распределение с тремя степенями свободы (см. также *Рэлея распределение*). М. р. широко известно как распределение скоростей частиц в статистич. механике и физике. Впервые установлено Дж. Максвеллом (J. Maxwell, 1859) при решении задачи о распределении скоростей молекул идеального газа.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

МАКСВЕЛЛА УРАВНЕНИЯ — уравнения электромагнитного поля в материальных средах; установлены в 60-х гг. 19 в. Дж. Максвеллом (J. Maxwell) на основе экспериментально найденных к тому времени законов электрических и магнитных явлений.

В классич. электродинамике для описания электромагнитного поля в среде вводятся четыре векторных поля: напряженность электрич. поля $\boldsymbol{E}$, электрич. индукция $\boldsymbol{D}$, напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ и магнитная индукция $\boldsymbol{B}$, к-рые являются непрерывными и дифференцируемыми функциями $\boldsymbol{r}$ радиус-вектора точки 3-мерного пространства и времени t. Эти поля определяются с точностью до постоянных множителей, позволяющих выбрать соответствующую систему физич. единиц измерения абсолютной величины этих полей.

М. у. представляют собой систему неоднородных дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка для полей $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, к-рая в т. н. абсолютной системе физич. единиц Гаусса имеет вид:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}+\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{1а}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0, \tag{1б}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0, \tag{1в}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho, \tag{1г}$$

где неоднородные члены $\rho(t, \boldsymbol{r})$ — заданное скалярное поле плотности электрич. заряда в среде и $\boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{r})$ — векторное поле плотности электрич. тока (заряда, проходящего за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения зарядов) являются источниками поля, а $c=3\cdot10^{10}$ *см/сек* — постоянная, равная скорости распространения электромагнитных взаимодействий в вакууме. М. у. могут быть записаны также и в интегральной форме:

$$\left.\begin{aligned}
&\oint_L \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}=\frac{1}{c}\int_S\left(4\pi\boldsymbol{j}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)d\boldsymbol{s},\\
&\oint_L \boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{l}=-\frac{1}{c}\int_S\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,d\boldsymbol{s},\\
&\oint_S \boldsymbol{B}d\boldsymbol{s}=0,\\
&\oint_{(S)} \boldsymbol{D}d\boldsymbol{s}=4\pi\int_{(V)}\rho\,dV.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{j}$ не являются независимыми, причем в согласии с экспериментальными фактами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{j}$ зависят только от $\boldsymbol{E}$, а $\boldsymbol{B}$ зависит только от $\boldsymbol{H}$, т. е. имеют место следующие функциональные зависимости:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}),\quad \boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{E}),\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H}), \tag{3}$$

к-рые наз. уравнениями состояния, или материальными уравнениями среды. В рамках классической макроскопич. электродинамики уравнения состояния (3) должны быть заданы дополнительно (постулированы или определены по экспериментальным данным) и с их учетом система М. у. для двух независимых векторных полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ становится замкнутой. Конкретный вид уравнений состояния (3) определяется электрическими и магнитными свойствами данной среды и ее состоянием. В общем случае в уравнениях состояния (3) векторные поля $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{B}$ в точке $\boldsymbol{r}$ в момент времени t могут зависеть нелинейно от значений полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ соответственно во всех точках среды (нелокальный случай) во все любые моменты времени, предшествующие согласно физич. принципу причинности - данному моменту t (случай среды с последействием или с памятью). Большинство имеющих практич. интерес сред характеризуется локальной линейной зависимостью $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{j}$ от $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ от $\boldsymbol{H}$, и в этом случае М. у. оказываются линейными дифференциальными уравнениями, однако в приложениях встречаются и более сложные случаи (напр., в нелинейной оптике).

Уравнения состояния (3) могут быть рассчитаны в принципе с помощью микроскопич. электродинамики, если учесть законы движения отдельных частиц среды и их индивидуальные микроскопич. характеристики

(значения электрич. зарядов, масс). При этом значения макроскопич. полей $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ определяются как усредненные значения микроскопич. полей, создаваемых отдельными движущимися заряженными частицами среды, и для них справедливы М. у.

На поверхности раздела различных сред должны быть выполнены граничные условия

$$[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_2]-[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1]=\frac{4\pi}{c}\,j_{\text{пов}},$$
$$[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_2]-[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1]=0,$$
$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{D}_2)-(\boldsymbol{n}\boldsymbol{D}_1)=4\pi\sigma,$$
$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{B}_2)-(\boldsymbol{n}\boldsymbol{B}_1)=0,$$

где $j_{\text{пов}}$ - плотность поверхностного тока, σ - плотность поверхностного заряда, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности раздела, индексы 1 и 2 отмечают значения полей с разных сторон поверхности раздела.

Следствием М. у. является уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0,$$

выражающее закон сохранения электрич. заряда.

М. у. инвариантны относительно преобразований Лоренца. Если в псевдоевклидовом пространстве 4-мерном пространстве-времени с координатами $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=ict$ ввести два антисимметричных 4-мерных тензора F_{kl} и G_{kl} $(k, l=1, 2, 3, 4)$ с компонентами

$$\left.\begin{aligned}&F_{12}=B_3,\ F_{23}=B_1,\ F_{31}=B_2,\ F_{4k}=iE_k,\ k=1,2,3,4,\\&G_{12}=H_3,\ G_{23}=H_1,\ G_{31}=H_2,\ G_{4k}=iD_k,\ k=1,2,3,4,\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

а также 4-мерный вектор тока j_k, $k=1, 2, 3, 4$, пространственные компоненты к-рого $j_1=j_x$, $j_2=j_y$, $j_3=j_z$ совпадают с компонентами тока $\boldsymbol{j}$ и четвертая компонента $j_4=ic\rho$ пропорциональна плотности заряда, то М. у. (1) могут быть записаны в релятивистски ковариантной форме:

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_m}+\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{mk}}{\partial x_l}=0,\quad k,\ l,\ m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\tag{5}$$

и

$$\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial G_{kl}}{\partial x_l}=\frac{4\pi}{c}\,j_k,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4.\tag{6}$$

Уравнения (5) представляют собой 4-мерную форму записи М.у. (1б) и (1в), а уравнения (6) — 4-мерную форму записи М. у. (1а) и (1г).

Для электромагнитного поля в вакууме, по определению, $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}$ и, следовательно, $G_{kl}\equiv F_{kl}$, и электромагнитное поле описывается лишь одним тензором F_{kl}. Если ввести 4-мерный вектор электромагнитного потенциала A_k, $k=1, 2, 3, 4$, пространственные компоненты к-рого $A_1=A_x$, $A_2=A_y$, $A_3=A_z$ образуют т. н. 3-мерный вектор-потенциал $\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r})$, а четвертая временная компонента $A_4=i\varphi$ пропорциональна скалярному потенциалу поля $\varphi(t, \boldsymbol{r})$, то компоненты антисимметричного тензора электромагнитного поля F_{kl} можно выразить через компоненты 4-мерного вектора электромагнитного потенциала A_k согласно соотношению

$$F_{kl}=\frac{\partial A_k}{\partial x_l}-\frac{\partial A_l}{\partial x_k},\quad k,\ l=1,\ 2,\ 3,\ 4.\tag{7}$$

С учетом (7) уравнения (5) удовлетворяются тождественно, а уравнения (6) принимают вид

$$\sum_{l=1}^{4}\left(\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_l^2}-\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial A_l}{\partial x_l}\right)=\frac{4\pi}{c}\,j_k,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\tag{8}$$

т. е. неоднородных волновых уравнений для компоненты A_k. Введение в рассмотрение потенциала A_k позволяет записать М. у. в простой форме (8), однако потенциал A_k определен неоднозначно, что отражает инвариантность М. у. в форме (8) относительно градиентных преобразований. Указанная неоднозначность в определении потенциала A_k может быть устранена (см. *Градиентное преобразование*).

Согласно (4) и (7) физически наблюдаемые поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можно выразить через вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ и скалярный потенциал φ:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}.$$

В случае, когда электромагнитное поле в вакууме является свободным, т. е. отсутствуют источники, М. у. (1) и (8) становятся однородными, и из М. у. (1) и (8) можно получить независимые однородные волновые уравнения для электрического и магнитного поля

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} - \Delta \boldsymbol{E} = 0; \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H} - \Delta \boldsymbol{H} = 0,$$

где Δ — лапласиан и c — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме.

М. у. для электромагнитного поля применимы лишь в классич. теории, т. к. в случае, когда переменные электрическое и магнитное поля имеют очень высокие частоты и очень малые длины волн (сравнимые с длинами порядка размеров атомов), становятся существенными квантовые эффекты, и теория электромагнитного поля и его источников должна строиться на основе квантовой электродинамики.

Лит.: [1] Максвелл Дж. К., Избр. соч. по теории электромагнитного поля, пер. с англ., М., 1954; [2] Тамм И. Е., Основы теории электричества, 7 изд., М., 1957; [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; [4] их же, Электродинамика сплошных сред, М., 1957.

В. Д. Кукин.

МАКСИМАЛЬНАЯ КОМПАКТНАЯ ПОДГРУППА топологической группы G — компактная подгруппа $K \subset G$, к-рая не содержится в качестве собственной подгруппы ни в какой компактной подгруппе группы G. Напр., $K = \mathrm{SO}(n)$ для $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $K = \{e\}$ для разрешимой односвязной группы Ли G.

В произвольной группе G М. к. п. могут и не существовать (напр., если $G = \mathrm{GL}(V)$, где V — бесконечномерное гильбертово пространство), а если они существуют, то среди них могут быть неизоморфные.

Наиболее изучены М. к. п. групп Ли. Если G — связная группа Ли, то любая компактная подгруппа группы G содержится в нек-рой максимальной (в частности, М. к. п. обязательно существуют), и все М. к. п. в G связны и сопряжены между собой. Пространство группы G диффеоморфно $K \times \mathbb{R}^n$, поэтому большинство топологич. вопросов о группах Ли сводится к соответствующим вопросам о компактных группах Ли.

Лит.: [1] Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949; [2] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

В. В. Горбацевич.

МАКСИМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — собственная подгруппа группы G, не содержащаяся ни в какой другой собственной подгруппе группы G, т. е. максимальный элемент в множестве всех собственных подгрупп группы G, упорядоченных по включению. Существуют группы без М. п., напр. группа типа p^∞.

Обобщением понятия М. п. служит понятие подгруппы, максимальной по некоторому свойству σ, т. е. такой обладающей свойством σ собственной подгруппы H_0 группы G, что в G нет другой собственной подгруппы H, обладающей свойством σ и содержащей подгруппу H_0.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

Н. Н. Вильямс.

МАКСИМАЛЬНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА: если T — эндоморфизм пространства с мерой (X, μ) и $f \in L^1(X, \mu)$, а E — множество тех $x \in X$, для к-рых

$$\sup_{n \geqslant 0} \sum_{i=0}^{n} f(T^i x) \geqslant 0,$$

то

$$\int_E f \, d\mu \geqslant 0.$$

М. э. т. принадлежит К. Иосиде и Ш. Какутани [1], указавшим, что она может играть роль центрального этапа в доказательстве *Биркгофа эргодической теоремы* (у самого Дж. Биркгофа вместо М. э. т. применялись несколько иные соображения). В доказательствах появившихся позднее обобщений теоремы Биркгофа (а также при исследовании родственного вопроса о разложении фазового пространства на консервативную и диссипативную части в условиях, когда действуют эти обобщения) тоже используется соответствующим образом обобщенная М. э. т. Имеется обобщение М. э. т., принадлежащее Э. Хопфу (E. Hopf), и простое доказательство этого обобщения, предложенное А. Гарсиа (A. García) (см. [2]). См. также [3] и лит. при ст. *Биркгофа эргодическая теорема.*

Лит.: [1] Yosida K., Kakutani S., «Proc. Imp. Acad. Tokyo», 1939, v. 15, p. 165—68; [2] Неве Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [3] Вершик А. М., Юзвинский С. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 133—87.

Д. В. Аносов.

МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ МЕТОД — один из основных общих методов построения оценок неизвестного параметра в статистич. теории оценивания.

Пусть по наблюдению X с распределением P_θ, зависящим от неизвестного параметра $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, оценивается θ. Предполагая, что все меры P_θ абсолютно непрерывны относительно общей меры ν, определяют функцию правдоподобия равенством

$$L(\theta) = \frac{dP_\theta}{d\nu}(X).$$

М. п. м. рекомендует принять в качестве оценки для θ статистику $\hat{\theta}$, определяемую соотношением

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta^c} L(\theta).$$

Оценка $\hat{\theta}$ наз. оценкой максимального (или наибольшего) правдоподобия (о. м. п.). В широком классе случаев о. м. п. является решением уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \log L(\theta) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k). \quad (1)$$

Пример 1. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — последовательность независимых случайных величин (наблюдений) с общим распределением $\mathcal{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$. Если существует плотность

$$f(x, \theta) = \frac{d\mathcal{P}_\theta}{dm}(x)$$

относительно нек-рой меры m, то

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^{n} f(X_j; \theta),$$

и уравнения (1) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log f(X_j; \theta) = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \quad (2)$$

Пример 2. Пусть в условиях 1-го примера $\mathcal{P}_\theta$ есть нормальное распределение с плотностью

$$(\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

где $x\in\mathbb{R}^1$, $\theta=(a,\sigma^2)$, $-\infty<a<\infty$, $\sigma^2>0$. Уравнения (2) принимают вид

$$\sigma^{-2}\sum_{j=1}^n (X_j-a)=0,$$

$$(2\sigma^4)^{-1}\sum_{j=1}^n (X_j-a)^2-n(2\sigma^2)^{-1}=0;$$

о. м. п. выражается равенствами:

$$\hat{a}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_j-\overline{X})^2.$$

Пример 3. В условиях 1-го примера X_j принимают значения 0 и 1 с вероятностями соответственно $1-\theta$, θ. Тогда

$$L(\theta)=\prod_{j=1}^n \theta^{X_j}(1-\theta)^{1-X_j},$$

а о. м. п. $\hat{\theta}=\overline{X}$.

Пример 4. Пусть наблюдение $X=X_t$ есть диффузионный процесс со стохастическим дифференциалом

$$dX_t=\theta a_t(X_t)+dw_t,\quad X_0=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где w_t — винеровский процесс, а θ — неизвестный одномерный параметр. Здесь (см. [3])

$$\log L(\theta)=\theta\int_0^T a_t(X_t)\,dX_t-\frac{\theta^2}{2}\int_0^T a_t^2(X_t)\,dt,$$

$$\hat{\theta}=\frac{\int_0^T a_t(X_t)\,dX_t}{\int_0^T a_t^2(X_t)\,dt}.$$

В основе М. п. м. не лежат никакие четко выраженные соображения оптимальности, и широко распространенная вера в его хорошие качества основана отчасти на большом успехе, с к-рым М. п. м. применялся к многочисленным конкретным задачам, отчасти на строго установленных асимптотически оптимальных свойствах. Напр., в ситуации 1-го примера в широких предположениях $\hat{\theta}_n\to\theta$ с P_θ-вероятностью 1. Если существует информационное количество Фишера

$$I(\theta)=\int\frac{|f'_\theta(x,\ \theta)|^2}{f(x,\ \theta)}\,m(dx),$$

то разность $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$ асимптотически нормальна с параметрами $(0,\ I^{-1}(\theta))$ и $\hat{\theta}_n$ имеет в определенном смысле асимптотически минимальный средний квадрат уклонения от θ (см. [4]).

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; [4] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979. *И. А. Ибрагимов.*

МАКСИМАЛЬНОЕ И МИНИМАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЯ симметрического оператора A — операторы $\overline{A}$ (замыкание оператора A) и A^* (сопряженный к A оператор) соответственно. Все замкнутые симметрич. расширения оператора A находятся между ними. Равенство М. и м. р. эквивалентно самосопряженности оператора A и является необходимым и достаточным условием единственности самосопряженного расширения. *А. И. Логинов, В. С. Шульман.*

МАКСИМАЛЬНЫЙ И МИНИМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОРЫ — *максимальное и минимальное расширения* оператора, определяемого данным дифференциальным

выражением на подпространстве финитных функций. Области определения М. и м. о. могут быть конкретно описаны в ряде случаев, напр. для обыкновенного дифференциального оператора, для эллиптич. оператора, для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

Лит.: [1] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965.

А. И. Логинов, В. С. Шульман.

МАКСИМАЛЬНЫЙ ИДЕАЛ — максимальный элемент в частично упорядоченном множестве тех или иных собственных идеалов соответствующей алгебраич. системы. М. и. играют существенную роль в теории колец. Всякое кольцо с единицей обладает левыми (а также правыми и двусторонними) М. и. Фактормодуль $M=RI$ левого (соответственно правого) R-модуля R по левому (соответственно правому) М. и. I является неприводимым; гомоморфизм ф кольца R в тело эндоморфизмов модуля M — представление кольца R. Ядро всех таких представлений, т. е. множество элементов кольца, переходящих в нуль при всех его представлениях, наз. радикалом Джекобсона кольца R, оно совпадает с пересечением всех левых (а также всех правых) М. и.

В кольце $R=C[a, b]$ непрерывных действительных функций на отрезке $[a, b]$ множество всех функций, обращающихся в нуль в фиксированной точке x_0, является М. и. Такими идеалами исчерпываются все М. и. кольца R. Это соответствие между точками отрезка и М. и. кольца R привело к построению различных теорий, представляющих кольца, как кольца непрерывных функций на нек-ром топологич. пространстве.

Зарисского топология, вводимая на множестве простых идеалов Spec R кольца R, обладает слабыми свойствами отделимости (т. е. существуют незамкнутые точки). Аналогичная топология в некоммутативном случае вводится на множестве Spec R примитивных идеалов, являющихся аннуляторами неприводимых R-модулей. Множество М. и., а в некоммутативном случае — примитивных М. и., образует подпространство Spec $mR\subset$Spec R, к-рое удовлетворяет аксиоме отделимости T_1.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961.

В. Е. Говоров.

В теории полугрупп М. и. играют меньшую роль, нежели *минимальные идеалы*. Если M — максимальный двусторонний идеал (м. д. и.) полугруппы S, то либо $M=S\setminus\{a\}$, где a — нек-рый неразложимый элемент из S (т. е. $a\in S^2\setminus S$), либо M есть простой идеал (т. е. для любых идеалов A, B из $AB\subseteq M$ следует $A\subseteq M$ или $B\subseteq M$); отсюда следует, что в S всякий м. д. и. будет простым тогда и только тогда, когда $S^2=S$. В полугруппе S с м. д. и. простой идеал $P\neq S$ будет максимальным тогда (и, очевидно, только тогда), когда P содержит пересечение I всех м. д. и. из S. Факторполугруппа Риса S/I есть 0-*прямое объединение* полугрупп, каждая из к-рых либо 0-простая, либо двухэлементная нильпотентная.

Иногда полугруппа S с собственными левыми идеалами может иметь среди таких идеалов наибольший L^* (т. е. содержащий все другие собственные левые идеалы); это, напр., выполняется, если S обладает правой единицей. Если в этом случае множество $S\setminus L^*$ неодноэлементно, то оно является подполугруппой. В периодич. полугруппе S из существования L^* вытекает, что L^* будет (наибольшим собственным) двусторонним идеалом. Другой пример такой же ситуации доставляют подгруппы с отделяющейся групповой частью (см. *Обратимый элемент*), не являющиеся группами.

Лит.: [1] Schwarz Š., «Чехосл. матем. ж.», 1953, т. 3, № 2, с. 139—53; т. 4, с. 365—83; [2] его же, там же, 1969, т. 19, № 1, с. 72—9; [3] Grillet P. A., «Amer. Math. Monthly», 1969, v. 76, № 5, p. 503—09.

Л. Н. Шеврин.

МАКСИМАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ — *инвариантная статистика*, принимающая различные значения на различных орбитах, порожденных группой взаимно однозначных измеримых преобразований *выборочного пространства*. Таким образом, если $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ — выборочное пространство, а $G - \{g\}$ — группа взаимно однозначных $\mathfrak{B}$-измеримых преобразований $\mathfrak{X}$ на себя, то инвариантная статистика $T(x)$ является М. и., если из того, что $T(x_2) = T(x_1)$, следует, что $x_2 = gx_1$ для некоторого элемента $g \in G$. Напр., если $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, G $\{\Gamma\}$ — группа ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y = \Gamma x$, то статистика $T(x) = \sum x_i$ является М. и. Любая инвариантная статистика является функцией М. и.

М. и. используют при построении *инвариантных критериев*.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., М., 1964; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [3] Климов Г. П., Инвариантные выводы в статистике, М., 1973.

М. С. Никулин.

МАКСИМАЛЬНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ — характеристика взаимозависимости случайных величин X и Y, определяемая как точная верхняя грань значений коэффициентов корреляции между действительными случайными величинами $\varphi_1(X)$ и $\varphi_2(Y)$ — функциями от случайных величин X и Y такими, что $\mathsf{E}\varphi_1(X) = \mathsf{E}\varphi_2(Y) = 0$ и $\mathsf{D}\varphi_1(X) = \mathsf{D}\varphi_2(Y) = 1$:

$$\rho^*(X, Y) = \sup \mathsf{E}[\varphi_1(X)\varphi_2(Y)].$$

Если эта верхняя грань достигается при $\varphi_1 = \varphi_1^*(X)$ и $\varphi_2 = \varphi_2^*(Y)$, то М. к. к. между случайными величинами X и Y равен коэффициенту корреляции между величинами $\varphi_1^*(X)$ и $\varphi_2^*(Y)$. М. к. к. обладает тем свойством, что равенство $\rho^*(X, Y) = 0$ необходимо и достаточно для независимости случайных величин X и Y. При линейной корреляции между величинами М. к. к. совпадает с обычным коэффициентом корреляции.

Лит.: [1] Сарманов О. В., «Докл. АН СССР», 1958, т. 120, № 4, с. 715—18; [2] его же, там же, 1946, т. 53, № 9, с. 781—84; [3] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973.

И. О. Сарманов.

МАКСИМАЛЬНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ ТИП — тип максимальной спектральной меры μ (т. е. класс эквивалентных ей мер) *нормального оператора* A, действующего в гильбертовом пространстве H. Эта мера определяется (с точностью до эквивалентности) из следующего условия. Пусть $E(\lambda)$ — разложение единицы, фигурирующее в спектральном разложении нормального оператора $A = \int \lambda dE(\lambda)$, а $E(\Lambda) = \int_\Lambda dE(\lambda)$ (где Λ обозначает борелевское множество) — соответствующая «операторнозначная» мера; тогда $E(\Lambda) = 0$ в точности для тех Λ, для к-рых $\mu(\Lambda) = 0$. Любому $x \in H$ сопоставляется его спектральная мера $\mu_x(\Lambda) = (x, E(\Lambda)x)$; в этих терминах определение μ означает, что для любого x мера μ_x абсолютно непрерывна относительно μ и существует x_0, для к-рого μ_{x_0} эквивалентна μ (говорят, что x_0 принадлежит М. с. т.). Если H сепарабельно, то мера μ с такими свойствами всегда существует, но если H несепарабельно, то такой меры может и не быть; тогда A не имеет М. с. т. Это обстоятельство усложняет теорию унитарных инвариантов нормальных операторов в несепарабельном случае.

Лит.: [1] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965.

Д. В. Аносов.

МАКСИМАЛЬНЫЙ ТОР — 1) М. т. линейной алгебраической группы G — алгебраическая подгруппа в G, являющаяся *алгебраическим тором* и не содержащаяся ни в какой большей подгруппе такого типа. Пусть, далее, группа G связна. Объеди-

нение всех М. т. группы G совпадает с множеством всех полупростых элементов группы G (см. *Жордана разложение)*, а пересечение — с множеством всех полупростых элементов центра группы G. Всякий М. т. содержится в нек-рой *Бореля подгруппе* группы G. Централизатор М. т. является *Картана подгруппой* группы G; он всегда связен. Любые два М. т. группы G сопряжены в G. Если группа G определена над полем k, то в G существует М. т., также определенный над k; его централизатор тоже определен над k.

Пусть G — *редуктивная группа*, определенная над полем k. Среди всех алгебраич. подгрупп в G, являющихся расщепимыми над k алгебраич. торами, также можно рассматривать максимальные подгруппы. Получающиеся таким образом максимальные k-расщепимые торы сопряжены над k. Общая размерность таких торов наз. k-рангом группы G и обозначается $\mathrm{rk}_k G$. Максимальный k-расщепимый тор не является, вообще говоря, М. т., т. е. $\mathrm{rk}_k G$, вообще говоря, меньше ранга G (равного размерности М. т. в G). Если $\mathrm{rk}_k G = 0$, то G наз. анизотропной над k группой, а если $\mathrm{rk}_k G$ совпадает с рангом G, то G наз. расщепимой над k группой. Если k алгебраически замкнуто, то G всегда расщепима над k. В общем случае G всегда расщепима над сепарабельным замыканием k.

Примеры. Пусть k — поле и $\bar{k}$ — его алгебраич. замыкание. Группа $G = GL_n(\bar{k})$ невырожденных матриц порядка n с коэффициентами в k (см. *Классическая группа*, *Полная линейная группа)* определена и расщепима над простым подполем поля k. Подгруппа всех диагональных матриц является М. т. в G.

Пусть характеристика поля k отлична от 2. Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\bar{k}$, а F — невырожденная квадратичная форма на V, определенная над k (последнее означает, что в нек-ром базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V форма $F(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)$ является многочленом от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами в k). Пусть G — группа всех невырожденных линейных преобразований пространства V, имеющих определитель 1 и сохраняющих форму F. Она определена над k. Пусть V_k — линейная оболочка над k векторов $e_1, \ldots, e_n$; она является k-формой пространства V. В V всегда существует базис $f_1, \ldots, f_n$, в к-ром форма имеет вид

$$F(x_1f_1 + \ldots + x_nf_n) = x_1x_n + x_2x_{n-1} + \ldots + x_px_{n-p+1},$$

где $p = n/2$, если n четно, и $p = (n+1)/2$, если n нечетно. Подгруппа в G, состоящая из тех элементов, к-рые в этом базисе имеют матрицу вида $\|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $a_{ii}a_{n-i+1,\,n-i+1} = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, p$, является М. т. в G (так что ранг G равен целой части числа $n/2$). Указанный базис не лежит, вообще говоря, в V_k. Однако в V_k всегда существует базис $h_1, \ldots, h_n$, в к-ром квадратичная форма имеет вид

$$F(x_1h_1 + \ldots + x_nh_n) =$$
$$= x_1x_n + x_2x_{n-1} + \ldots + x_qx_{n-q+1} + F_0(x_{q+1}, \ldots, x_{n-q}),$$
$$q \leqslant p,$$

где F_0 — квадратичная форма, не представляющая над k нуля (т. е. такая, что уравнение $F_0 = 0$ имеет в k только нулевое решение) (см. *Витта разложение*). Подгруппа в G, состоящая из всех элементов, к-рые в базисе $h_1, \ldots, h_n$ имеют матрицу вида $\|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $a_{ii}a_{n-i+1,\,n-i+1} = 1$ при $i = 1, \ldots, q$ и $a_{ii} = 1$ при $i = q+1, \ldots, n-q$, является максимальным k-расщепимым тором в G (так что $\mathrm{rk}_k G = q$ и G расщепима тогда и только тогда, когда q равно целой части $n/2$).

Рассмотрение М. т. позволяет сопоставить редуктивной группе G нек-рую *корневую систему*, что является основой классификации редуктивных групп. А имен-

но, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G и T — фиксированный М. т. в G. Присоединенное представление тора T в пространстве $\mathfrak{g}$ рационально и диагонализируемо, так что $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму весовых подпространств этого представления. Множество ненулевых весов этого представления (рассматриваемое как подмножество своей линейной оболочки в векторном пространстве $X(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$, где $X(T)$ — группа рациональных характеров тора T) оказывается (приведенной) корневой системой. Аналогично определяется и *относительная система корней*: если G определена над k, а S — максимальный k-расщепимый тор в G, то множество ненулевых весов присоединенного представления S в $\mathfrak{g}$ образует корневую систему (вообще говоря, неприведенную) в нек-ром подпространстве пространства $X(S)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. См. также *Вейля группа*, *Полупростая группа*.

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Арифметические группы и автоморфные функции, пер. с англ. и франц., М., 1969.

2) М. т. связной вещественной группы Ли G — связная компактная коммутативная подгруппа Ли T в G, не содержащаяся ни в какой большей подгруппе такого типа. Как группа Ли, М. т. T изоморфен прямому произведению нескольких экземпляров связной одномерной компактной вещественной группы Ли, к-рая, с точностью до изоморфизма, существует только одна и может быть отождествлена с «окружностью» S (мультипликативной группой всех комплексных чисел, равных по модулю 1). Всякий М. т. группы G содержится в максимальной компактной подгруппе группы G; любые два М. т. группы G (так же, как и любые две ее максимальные компактные подгруппы) сопряжены в G. Это в известной степени сводит изучение М. т. к тому случаю, когда G компактна.

Пусть, далее, G является компактной группой. Объединение всех М. т. группы G совпадает с G, а пересечение — с центром G. Алгебра Ли М. т. T является максимальной коммутативной подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, и всякая максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$ так получается. Централизатор М. т. T в G совпадает с T. Присоединенное представление T в $\mathfrak{g}$ диагонализируемо, и все ненулевые веса этого представления образуют в пространстве $X(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$, где $X(T)$ — группа характеров тора T, корневую систему. Последнее обстоятельство служит основой классификации компактных групп Ли.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964. *В. Л. Попов.*

МАКСИМАЛЬНЫЙ ЧЛЕН РЯДА — член сходящегося числового или функционального ряда с положительными членами, значение к-рого не меньше значений всех членов этого ряда.

Применяя это понятие при изучении степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

по комплексному переменному z с положительным радиусом сходимости R, $0<R\leqslant\infty$, имеют в виду максимальный член $\mu(r)$ ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k, \quad 0 < r = |z-a| < R;$$

таким образом,

$$|c_k| r^k \leqslant \mu(r), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Индекс $\nu(r)$ М. ч. р. $\mu(r)$ наз. центральным индексом:

$$\mu(r) = |c_{\nu(r)}| r^{\nu(r)}.$$

Если имеется несколько членов ряда, по модулю равных $\mu(r)$, то за центральный индекс принимается наибольший из индексов этих членов. Функция

$$y = \ln \mu(e^x), \quad -\infty < x < \infty,$$

— неубывающая и выпуклая; функция $\nu(r)$ — ступенчатая, возрастает в точках разрыва на натуральное число и всюду непрерывна справа.

Лит.: [1] Валирон Ж., Аналитические функции, пер. с франц., М., 1957; [2] Виттих Г. В., Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, пер. с нем., М., 1960.

Е. Д. Соломенцев.

МАКСИМИЗАЦИЯ И МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ конечного числа переменных — задача поиска экстремума функции $f(x)$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$; под этой задачей понимается:

1) нахождение $\overline{f} = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ или $\underline{f} = \inf\limits_{x \in X} f(x)$;

2) отыскание точек максимума или минимума, если $\overline{f}$ или $\underline{f}$ достигаются на допустимом множестве (см. *Максимум и минимум функции*);

3) построение максимизирующей последовательности $\{x_i\}$ или минимизирующей последовательности $\{x_i\}$ таких, что

$$\lim_{i \to \infty} f(x_i) = \overline{f}, \quad \lim_{j \to \infty} f(x_j) = \underline{f},$$

если $\overline{f}$ или $\underline{f}$ недостижимы на X.

Исследованием экстремумов функций дискретных аргументов занимается *дискретное программирование* и *целочисленное программирование*. Ниже освещены только методы М. и м. ф. непрерывных аргументов.

Классические (непрямые) методы М. и м. ф. применимы только для гладких функций. Они используют необходимое условие экстремума для поиска стационарных точек. Нули производных $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, n$, вычисляются на практике чаще всего одним из многочисленных методов последовательных приближений (см. [3]). С другой стороны, каждую задачу решения конечных функциональных уравнений вида

$$\varphi_m(x^1, \ldots, x^n) = 0, \quad m \leqslant n,$$

можно интерпретировать как задачу М. и м. ф., напр. функции

$$f(x) = \varphi_1^2(x) + \ldots + \varphi_m^2(x) \longrightarrow \min,$$

и применить для решения последней один из специфич. методов М. и м. ф.

Прямые методы М. и м. ф. основываются на непосредственном сравнении значений $f(x)$ в двух или нескольких точках.

Для практич. отыскания экстремумов применяются итеративные алгоритмы вида:

$$x_{i+1} = \hat{X}(i, x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-j}),$$

где i — номер итерации, а $\hat{X}(\cdot)$ — нек-рый оператор. При этом обычно предполагается:

1) сходимость алгоритма в том или ином смысле, чаще всего в смысле

$$x_\infty = \overline{x}(x_\infty = \underline{x}) \text{ или } f(x_\infty) = \overline{f}(f(x_\infty) = \underline{f});$$

2) локальность итерационной процедуры, т. е. $j \ll i (j = o(i)$ при $i \to \infty)$; алгоритм «помнит» значения x только для итераций в нек-рой окрестности текущего положения x_i. При $j = 0$ получается простой марковский вычислительный процесс без памяти.

Оператор $\hat{X}(\cdot)$ может быть детерминированным в детерминированных методах или содержать стохастич. параметры. В вычислительной практике часто сочетают стохастич. методы с детерминированными, напр. в

покоординатного спуска методе направление спуска может определяться случайным образом. Вероятностные характеристики стохастических параметров, в свою очередь, могут меняться от итерации к итерации (поиск с адаптацией и «самообучением», случайный поиск).

Широко применяют и комбинирование различных детерминированных методов, к к-рому относится последовательное и параллельное вычисление экстремума несколькими методами, композиции алгоритмов вида $\hat{X}=\hat{X}_2(\hat{X}_1(\cdot))$ и т. п. Напр., метод Левенберга – Марквардта

$$x_{i+1}=x_i-(\alpha_i\nabla\nabla f(x_j)+\beta_i I)^{-1}\nabla f(x_i),$$

к-рый при $\alpha_i=0$ совпадает с градиентным методом, а при $\beta_i=0$ с методом Ньютона.

Одномерная оптимизация, то есть М. и м. ф. $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, помимо самостоятельного интереса, является необходимым этапом большинства применяемых методов. К специфически одномерным относятся, напр., *Фибоначчи метод*, *половинного деления метод* (дихотомии метод), *парабол метод*. Методами М. и м. ф. многих переменных являются *градиентный метод*, *наискорейшего спуска метод*, *покоординатного спуска метод*, *симплексный поиск*, *сканирования метод*, *сопряженных градиентов метод*, *тяжелого шарика метод*, *установления метод* и др.

Алгоритмы большинства из перечисленных методов укладываются в схему метода спуска (подъема):

$$x_{i+1}=x_i\mp\varkappa_i y_i,$$

причем $f(x_{i+1})\leqslant f(x_i)$ или $f(x_{i+1})\geqslant f(x_i)$ для всех i (условие релаксации). Они различаются между собой либо выбором вектора направления y_i спуска, либо выбором способов движения вдоль вектора спуска, определяемым шаговым множителем $\varkappa$.

Овражные методы разработаны для функций, рельеф к-рых имеет вид «оврагов с крутыми склонами» (см. *Овражных функций методы минимизации*). Ординарные (не овражные) методы, будучи примененными здесь, дают извилистый релаксационный путь, требующий чрезмерно больших затрат машинного времени для вычисления экстремума.

Сравнительная эффективность методов оценивается по многим и противоречивым критериям. Сюда входят: точность решения, скорость решения, надежность метода, время подготовки задачи к счету, сходимость алгоритма и др. Область применения каждого из апробированных методов весьма ограничена.

Для испытания методов разработаны наборы стандартных тест-функций, характерных для различных функциональных классов (см. [1]). Усиленно исследуется сходимость методов М. и м. ф. (см. [6], [8]). Однако сходимость — это качество, к-рое не является ни необходимым, ни достаточным для эффективного окончания вычислений.

Все перечисленные выше методы приводят к одному из локальных экстремумов, если начальное приближение принадлежит области притяжения точки этого экстремума. Нахождение глобального экстремума гарантируется лишь для выпуклых и родственных им унимодальных функций. Теория отыскания глобального экстремума находится (1982) в начальной стадии развития (см. *Многоэкстремальная задача*). Другим развивающимся направлением М. и м. ф. является оптимизация негладких функций (см. [4], [13], [16]). В частности, к негладкой функции, как правило, приводит задача минимизации функции максимума (см. *Максимин*; численные методы). По-видимому, все из общеупотребительных методов оптимизации имеют содержательный физический, экономический или биологический

смысл. Соответствующие исследования только разворачиваются (см. [9]) и приводят к созданию новых методов (см. также *Непрерывные аналоги итерационных методов*). Если значения исследуемой функции определяются статистически со стохастич. помехой, то для отыскания экстремума применяется один из методов *стохастической аппроксимации*. Сюда же примыкает и *планирование эксперимента*.

Экспериментальные методы М. и м. ф. используют воспроизведение различных физич. процессов для поиска экстремумов. К ним относится и моделирование на АВМ (см. [17]). Несмотря на удобство и дешевизну использования в простейших автоматич. оптимизаторах, последнее не обеспечивает высокой точности вычисления.

Графич. методы пригодны только для прикидочных расчетов и построения начального приближения для итеративных методов.

Если допустимое множество задано в виде функциональных условий

$$\varphi_m(x) \leqslant 0$$

(связи и ограничения, условный экстремум), то для поиска экстремумов применяются методы математич. программирования. Эта же задача может быть сведена к последовательности задач на безусловный экстремум с помощью штрафных и барьерных функций (см. *Штрафных функций метод*).

Лит.: [1] Аоки М., Введение в методы оптимизации, пер. с англ., М., 1977; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962; [4] Васильев Ф. П., Лекции по методам решения экстремальных задач, М., 1974; [5] Гупал А. М., Стохастические методы решения негладких экстремальных задач, К., 1979; [6] Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1975; [7] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М., Методы оптимизации, М., 1978; [8] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [9] Разумихин Б. С., Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике, М., 1975; [10] Растригин Л. А., Системы экстремального управления, М., 1974; [11] Саульев В. К., Самойлова И. И., в сб.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 11, М., 1973, с. 91—128; [12] Уайлд Д.-Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ., М., 1967; [13] Федоров В. В., Численные методы максимина, М., 1979; [14] Ортега Д., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [15] Современное состояние теории исследования операций, М., 1979; [16] Nonsmooth Optimization, Oxf., 1978; [17] Towards Global Optimisation, v. 1—2, Amst.—N. Y., 1975—78; [18] Евтушенко Ю. Г., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 6, с. 1390—1403.

Ю. П. Иванилов, В. В. Охрименко.

МАКСИМИН — смешанные экстремумы

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y), \quad \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) \text{ и т. п.} \qquad (*)$$

М. можно интерпретировать (напр., в теории принятия решений, исследовании операций или теории игр) как наибольший выигрыш из тех, к-рые могут быть достигнуты принимающим решения субъектом в наихудших для него условиях, и, тем самым, как гарантированный выигрыш. Поэтому принятие решений, ориентирующее на М., может считаться разумным, оптимальным.

Значение М. не превосходит значения соответствующего *минимакса*. Условия их равенства весьма важны в теории игр (см. *Минимакса принцип*). Такими условиями являются, напр., наличие в X линейной структуры, выпуклость X в ней и вогнутость функции F по $x \in X$ при любом $y \in Y$ (или же линейность и выпуклость Y и выпуклость F по $y \in Y$ при любом $x \in X$).

Нахождение М. как математич. операция формально состоит в последовательном вычислении экстремумов, т. е. в решении стандартных («однокритериальных») задач оптимального программирования, и потому никаких концептуальных сложностей не содержит.

Однако даже в условиях «хорошо устроенного» множества Y и равностепенно по X непрерывной функции F на нем функция, выражающая соответствие значения x значениям y, на к-рых достигается (или «почти достигается») экстремум $\inf\limits_{y \in Y} F(x, y)$, может оказаться «плохо устроенной» и, в частности, разрывной функцией от x. В этих случаях аналитич. нахождение М. (*) становится затруднительным, и этот М. приходится определять численными методами (см. *Максимин, численные методы*). Сказанное относится и к нахождению минимаксов.

Н. Н. Воробьев.

МАКСИМИН; численные методы — раздел вычислительной математики, посвященный решению максиминных (минимаксных) задач. Задачи вычисления максиминов и минимаксов часто возникают в исследовании операций и теории игр, напр. при использовании *минимакса принципа* или *наибольшего гарантированного результата принципа*.

Исходной является задача вычисления *М.*:

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y), \tag{1}$$

возникающая, напр., при решении антагонистич. игр с полной информацией. Ее естественным обобщением является задача нахождения М. со «связанными» переменными:

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in B(x)} F(x, y), \tag{2}$$

причем множество $B(x)$ часто задается в виде

$$B(x) = \{y \in Y \mid \varphi(x, y) \geqslant 0\} \neq \varnothing$$

для всякого $x \in X$. Эта задача оказывается основной в теории игр двух лиц с обменом информацией (см., напр., *Игра с иерархической структурой*). Итерирование исходной задачи приводит к задаче кратного, или последовательного, М.:

$$\sup_{x_1 \in X_1} \inf_{y_1 \in Y_1} \dots \sup_{x_n \in X_n} \inf_{y_n \in Y_n} F(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n), \tag{3}$$

к-рая связана с решением нек-рых динамич. игр. Представляют интерес стохастич. задачи вычисления М., а также минимаксные задачи оптимального управления.

В основе большинства способов решения минимаксных задач лежит градиентный метод или *штрафных функций метод*. При применении первого из них задачу (1) рассматривают как задачу оптимального программирования

$$\sup_{x \in X} f(x), \tag{4}$$

где

$$f(x) = \inf_{y \in Y} F(x, y). \tag{5}$$

Построение численных методов решения задачи (4) — (5) связано с дифференцируемостью по направлению функции минимума (5).

Если $X \subset \mathbb{R}^n$, Y — компакт в $\mathbb{R}^m$, $\frac{\partial f(x)}{\partial g}$ — производная по направлению $g \in \mathbb{R}^n$ (см [1] — [3]),

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial g} &= \min_{y \in Y(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x, y), g\right), \\ Y(x) &= \{y \in Y \mid F(x, y) = f(x)\}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то в случае конечного множества Y формула (6) позволяет построить итеративную последовательность $x_1, x_2, \dots$, в к-рой $x_{k+1} = x_k + \alpha_k g_k$ для $k = 0, 1, \dots$ и к-рая при нек-рых дополнительных предположениях сходится к точке, удовлетворяющей необходимому условию М.

При использовании метода штрафных функций задача (1) для непрерывной на произведении компакта

$X \subset \mathbb{R}^n$ и единичного куба $Y \subset \mathbb{R}^m$ функции $F(x, y)$ сводится к нахождению

$$\lim_{c \to \infty} \max_{u,\, x \in X} \mathscr{L}(x,\, u,\, c),$$

где

$$\mathscr{L}(x,\, u,\, c) = u - c \int_Y (\min(0,\, F(x,\, y) - u))^2\, dy \quad (7)$$

(u — вспомогательная переменная). При этом если пара $(u(c),\, x(c))$ реализует максимум

$$\max_{u,\, x \in X} \mathscr{L}(x,\, y,\, c),$$

то любая предельная точка $(u^*,\, x^*)$ последовательности $\{(u(c_k),\, x(c_k)) | c_k \to \infty\}$ дает величину

$$u^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x,\, y)$$

M. (1) и одну из оптимальных стратегий x^*, для к-рой

$$u^* = \min_{y \in Y} F(x^*,\, y)$$

(см. [4]). Тем самым решение задачи (1) с любой точностью сводится к отысканию максимума функции (7) при достаточно больших значениях штрафа c. Избежать трудностей, связанных с вычислением интегралов в (7), позволяет метод стохастич. градиента (см. [5], [8]):

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha_k \xi_k(c_k), \\ u_{k+1} &= u_k + \alpha_k \eta_k(c_k), \end{aligned}\right\} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots, \qquad (8)$$

где $(\xi_k(c_k),\ \eta_k(c_k))$ — стохастич. градиент функции $\mathscr{L}(x,\, y,\, c_k)$, т. е. случайная величина, математич. ожидание к-рой совпадает с

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathscr{L}(x_k,\, u_k,\, c_k),\ \ \frac{\partial}{\partial u} \mathscr{L}(x_k,\, u_k,\, c_k)\right).$$

При нек-рых условиях, налагаемых на последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{c_k\}$ и функцию $F(x, y)$, для любого начального приближения $(x_1,\, y_1)$ последовательность, определяемая процессом (8), с вероятностью 1 сходится к множеству решений задачи нахождения М. (1).

Избежать больших значений параметра штрафа c в (7) позволяет т. н. «метод невязок» (см. [6]), представляющий собой еще один способ преобразования задачи (1). При этом величина u^* М. (1) определяется как максимальное значение u, для к-рого

$$\min_{x \in X} \Phi(x,\, u) = 0, \qquad (9)$$

где

$$\Phi(x,\, y) = \int_Y (\min(0,\, F(x,\, y) - u))^2\, dy.$$

Здесь значение x^*, реализующее

$$\min_{x \in X} \Phi(x,\, u^*),$$

дает оптимальную стратегию в задаче (1). Отыскивать наибольший корень u^* уравнения (9) можно, используя градиентные методы минимизации функции Φ по x.

Методы преобразования задач, основанные на методе штрафных функций, позволяют приближенно сводить к задачам на максимум минимаксные задачи со связанными переменными (2) (см. [7], [8]).

Экстремальные задачи, к-рые получаются при сведении минимаксных задач к задачам на максимум, весьма сложны, и их решение известными методами сопряжено с большими, подчас непреодолимыми для современных ЭВМ трудностями. В особенности это относится к проблеме отыскания последовательных М. из (3) при большой кратности.

Наряду с указанными общими подходами к решению минимаксных задач имеется ряд приемов, ориентиро-

ванных на те или иные частные классы задач, напр. на задачи теории игр двух лиц с передачей информации (см. [6]).

Лит.: [1] Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н., Введение в минимакс, М., 1972; [2] Данскин Дж. М., Теория максимина, пер. с англ., М., 1970; [3] Демьянов В. Ф., Минимакс: дифференцируемость по направлениям, Л., 1974; [4] Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971; [5] Ермольев Ю. М., Методы стохастического программирования, М., 1976; [6] Гермейер Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1976; [7] Ерешко Ф. И., Злобин А. С., «Экономика и матем. методы», 1977, т.13, № 4, с. 703—13; [8] Федоров В. В., Численные методы максимина, М., 1979.

В. В. Федоров.

МАКСИМИНА ПРИНЦИП — см. *Минимакса принцип.*

МАКСИМИННЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий для проверки сложной гипотезы $H_0: \Theta \in \Theta_0 \subset \subset \Theta$ против сложной альтернативы $H_1: \Theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, минимальное значение мощности к-рого является максимальным в классе всех статистич. критериев, предназначенных для проверки H_0 против H_1 и имеющих один и тот же размер α, $0<\alpha<1$. В задаче статистич. проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 М. к. существует в основном, если сама эта задача является инвариантной относительно нек-рой группы преобразований G, а в соответствующем классе инвариантных критериев существует равномерно наиболее мощный критерий. М. к. существует, если семейство вероятностных распределений, определяемое нулевой и конкурирующей гипотезами H_0 и H_1, является абсолютно непрерывным относительно нек-рой σ-конечной меры.

Лит.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971.

М. С. Никулин.

МАКСИМУМ И МИНИМУМ ФУНКЦИИ — наибольшее и соответственно наименьшее значения функции, принимающей действительные значения. Точку области определения рассматриваемой функции, в к-рой она принимает максимум или минимум, наз. соответственно точкой максимума или точкой минимума (см. *Максимума и минимума точки*). Если нек-рая точка является точкой абсолютного (локального) максимума или минимума, строгого или нестрогого, то значение функции в этой точке наз. абсолютным (локальным), соответственно строгим или нестрогим максимумом или минимумом. Если функция непрерывна на компакте, то она всегда принимает на нем максимальное и минимальное значения.

М. и м. ф. называется ее экстремумом.

Л. Д. Кудрявцев.

МАКСИМУМА И МИНИМУМА ТОЧКИ — точки, в к-рых действительная функция принимает наибольшее или наименьшее значения на области определения; такие точки наз. также точками абсолютного максимума или абсолютного минимума. Если функция f определена на топологич. пространстве X, то точка x_0 наз. точкой локального максимума (локального минимума), если существует такая окрестность $U \subset X$ точки x_0, что для сужения рассматриваемой функции на этой окрестности точка x_0 является точкой абсолютного максимума (минимума). Различают точки строгого и нестрогого максимума (минимума) (как абсолютного, так и локального). Напр., точка $x_0 \in R$ наз. точкой нестрогого (строгого) локального максимума функции f, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \in U$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) < < f(x_0)$, $x \neq x_0$).

Для функций, определенных на конечномерных областях, в терминах дифференциального исчисления существуют условия и признаки того, чтобы данная точка была точкой локального максимума (минимума). Пусть функция f определена в нек-рой окрестности

точки x_0 числовой оси. Если x_0— точка нестрогого локального максимума (минимума) и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю.

Если заданная функция f дифференцируема в окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, в к-рой она непрерывна, и производная f' по каждую сторону от точки x_0 в этой окрестности сохраняет постоянный знак, то для того чтобы x_0 была точкой строгого локального максимума (локального минимума), необходимо и достаточно, чтобы производная меняла знак с плюса на минус, т. е. чтобы $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$ (соответственно с минуса на плюс: $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$). Однако не для всякой функции, дифференцируемой в окрестности точки x_0, можно говорить о перемене знака производной в этой точке.

Если функция f имеет в точке x_0 m производных, причем $f^{(k)}(x_0)=0$, $k=1, 2, \ldots, m-1$, $f^{(m)}(x_0)\neq 0$, то для того чтобы x_0 была точкой строгого локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы m было четным и чтобы $f^{(m)}(x_0)<0$, и — локального минимума, чтобы m было четно и $f^{(m)}(x_0)>0$.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в n-мерной окрестности точки $x^{(0)}$ $(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и дифференцируема в этой точке. Если $x^{(0)}$ является точкой нестрогого локального максимума (минимума), то дифференциал функции f в этой точке равен нулю. Это условие равносильно равенству нулю в этой точке всех частных производных 1-го порядка функции f. Если функция имеет 2-е непрерывные частные производные в точке $x^{(0)}$, все ее 1-е производные обращаются в $x^{(0)}$ в нуль, а дифференциал 2-го порядка в точке $x^{(0)}$ представляет собой отрицательную (положительную) квадратичную форму, то $x^{(0)}$ является точкой строгого локального максимума (минимума). Известны условия для М. и м. т. дифференцируемых функций, когда на область изменения аргументов наложены определенные ограничения: удовлетворяются уравнения связи. Необходимые и достаточные условиям максимума (минимума) действительной функции, область определения к-рой имеет более сложную структуру, изучаются в специальных разделах математики: напр., в *выпуклом анализе*, *математическом программировании* (см. также *Максимизация и минимизация функций*). М. и м. т. функций, определенных на многообразиях, изучаются в *вариационном исчислении в целом*, а М. и м. т. для функций, заданных на функциональных пространствах, т. е. для функционалов, в *вариационном исчислении*. Существуют также различные методы численного приближенного нахождения М. и м. т.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; [2] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1, 2, М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

МАКСИМУМА МОДУЛЯ ПРИНЦИП — теорема, выражающая одно из основных свойств модуля аналитич. функции. Пусть $f(z)$ — регулярная аналитическая, или голоморфная, функция n комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n\geqslant 1$, в области D комплексного числового пространства $\mathbb{C}^n$, отличная от константы, $f(z)\neq\text{const}$. М. м. п. в локальной форме утверждает, что ни в какой точке $z^0\in D$ не может достигаться локальный максимум модуля $f(z)$, т. е. не существует окрестности $V(z^0)$ точки z^0, в к-рой выполняется неравенство $|f(z)|\leqslant|f(z^0)|$, $z\in V(z^0)$. Если, кроме того, $f(z^0)\neq 0$, то z^0 не может быть и точкой локального минимума модуля $f(z)$. Равносильная формулировка М. м. п. в глобальной форме состоит в том, что при тех же условиях модуль аналитич. функции $f(z)$ не может достигать своей верхней грани

$$M=\sup\{|f(z)|: z\in D\}$$

ни в какой точке $z^0 \in D$. Следовательно, если $f(z)$ непрерывна в конечной замкнутой области D, то наибольшее значение M достигается только в граничных точках области D. Приведенные формулировки М. м. п. сохраняют силу и в том случае, если $f(z)$ — голоморфная функция на связном комплексном (аналитическом) многообразии, в частности на римановой поверхности или на римановой области D.

М. м. п. допускает обобщения в различных направлениях. Во-первых, вместо голоморфности $f(z)$ достаточно предположить только, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ — (комплексная) *гармоническая функция*. Другое обобщение связано с тем, что для голоморфной функции $f(z)$ модуль $|f(z)|$ есть *логарифмически субгармоническая функция*. Если $f(z)$ — ограниченная голоморфная функция в конечной области $D \subset \mathbb{C}^n$ и условие

$$\limsup \{|f(z)| : z \to \zeta,\ z \in D\} \leqslant M$$

выполняется для всех точек $\zeta \in \partial D$, кроме точек нек-рого множества $E \subset \partial D$ внешней *емкости* нуль (в пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$), то $|f(z)| \leqslant M$ всюду в D. См. также *Двух констант теорема*, *Фрагмена — Линделёфа теорема*.

М. м. п. обобщается и на голоморфные отображения. Пусть $f : D \to \mathbb{C}^m$ — голоморфное отображение области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, в пространство $\mathbb{C}^m$, т. е. $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $m \geqslant 1$, f_j, $j = 1, \ldots, m$, — голоморфные функции в D, $f(z) \neq \text{const}$ и $\|f\| = \sqrt{|f_1|^2 + \ldots + |f_m|^2}$ — евклидова норма. Тогда ни в какой точке $z^0 \in D$ функция $\|f(z)\|$ не может достигать локального максимума. М. м. п. справедлив всякий раз, когда выполняется *сохранения области принцип*.

Лит.: [1] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., М., 1962; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976.

Е. Д. Соломенцев.

МАКСИМУМА ПРИНЦИП дискретный — принцип максимума Понтрягина для дискретных по времени процессов управления. Для такого процесса М. п. может не выполняться, хотя для его непрерывного аналога, получающегося заменой конечно разностного оператора $x_{t+1} - x_t$ на дифференциальный dx/dt, *Понтрягина принцип максимума* справедлив. Пусть, напр., имеется задача оптимального управления

$$\max J(x_{T+1}), \tag{1}$$

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t), \tag{2}$$

$$u_t \in U,\ t = 0, 1, \ldots, T, \tag{3}$$

$$x_0 = a. \tag{4}$$

Задачу (1) — (4) можно трактовать как обычную задачу на экстремум при наличии ограничений. Тогда условия оптимальности траектории $\{x_t^*, u_t^*\}$ можно получить с помощью *Лагранжа функции*

$$L = J(x_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} (p_{t+1} f_t(x_t, u_t) - p_{t+1} x_{t+1}),$$

где выражение

$$p_{t+1} f_t(x_t, u_t) = H_t$$

по аналогии с непрерывным случаем наз. *Гамильтона функцией*. Пусть функции J, f_t, $t = 0, 1, \ldots, T$, дифференцируемы по совокупности переменных, а множество U ограничено и замкнуто. Тогда для того чтобы решение $\{x_t^*, u_t^*\}$ задачи (1) — (4) было оптимальным, необходимо существование *Лагранжа множителей* $\{p_{t+1}^*\}$ таких, что точка $(x_t^*, u_t^*, p_{t+1}^*)$ будет стационарной точкой функции Лагранжа, т. е. в этой точке выполняются условия

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial p} = 0; \quad \delta_u L = \frac{\partial L}{\partial u}\,\delta u \leqslant 0$$

для всех допустимых вариаций управления δu. Первое условие приводит к уравнениям динамики дискретного процесса (2) и начальному условию (4). Второе — к граничному условию и сопряженной системе для импульсов $\{p_{t+1}\}$:

$$p_{T+1} = \partial J / \partial x_{T+1},$$

$$p_t = p_{t+1}\, \partial f / \partial x_t, \quad t = T, \ldots, 1, 0.$$

Третье условие — к условию для первой вариации функции Гамильтона:

$$\delta_u H_t = \frac{\partial H_t}{\partial u_t}\, \delta u_t \leqslant 0. \tag{5}$$

Однако условие (5) не означает, что функция Гамильтона на оптимальном управлении достигает максимума

$$H_t(x_t^*,\ u_t^*,\ p_{t+1}^*) = \max_{u \in U} H_t(x_t^*,\ u_t^*,\ p_{t+1}^*)$$

по всем управлениям, удовлетворяющим ограничениям (3); оно показывает, что u_t^* — стационарная точка функции Гамильтона. Если первая вариация функции Гамильтона $\frac{\partial H_t}{\partial u_t}\, \delta u_t$ обращается в нуль (это имеет место, в частности, когда u_t^* — внутренняя точка множества или когда в точке u_t^* существуют допустимые вариации управления δu_t, ортогональные $\partial H_t/\partial u_t$), то характер стационарной точки определяется следующими по порядку членами в разложении:

$$H_t(u_t^* + \varepsilon \delta u_t) - H_t(u_t^*) = \varepsilon\, \frac{\partial H_t}{\partial u_t}\, \delta u_t \leqslant 0.$$

Построены примеры, в к-рых оптимальное управление u_t^* является точкой локального максимума, локального минимума и даже седловой точкой функции Гамильтона. Таким образом, в общем случае для дискретных систем принцип максимума не имеет места.

Для систем, линейных по фазовым переменным

$$x_{t+1} = A(u_t)\, x_t + \varphi(u_t)$$

или по управлениям

$$x_{t+1} = g(x_t) + B(x_t)\, u_t,$$

при дополнительном условии линейности критерия $J = c_{T+1} x_{T+1}$ в первом или выпуклости множества U во втором случае принцип максимума выполняется (см. [1] — [5]).

Трактуя задачу оптимального управления линейной дискретной системой как задачу линейного программирования (см. [6], [7]), можно получить двойственную ей динамич. задачу с дискретным временем. Сопряженная система для импульсов дает уравнения динамики для двойственной динамич. задачи. На оптимальной траектории совпадают не только критерии, но и функции Гамильтона двойственных динамич. задач.

Лит.: [1] Фан Лянь-цэнь, Ван Чу-сен, Дискретный принцип максимума, пер. с англ., М., 1967; [2] Пропой А. И., Элементы теории оптимальных процессов, М., 1973; [3] Шеничный Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969; [4] Болтянский В. Г., Оптимальное управление дискретными системами, М., 1973; [5] Габасов Р., Кириллова Ф. М., «Автоматика и телемеханика», 1966, № 11, с. 46–51; [6] Иванилов Ю. П., «Прикл. матем. и программирование», Кишинев, 1971, в. 4, с. 31–40; [7] Иванилов Ю. П., Пропой А. И., «Докл. АН СССР», 1971, т. 198, № 5, с. 1011–1014.

Ю. П. Иванилов.

МАКСИМУМА ПРИНЦИП Понтрягина — см. *Понтрягина принцип максимума.*

МАЛАЯ КАТЕГОРИЯ — *категория* $\mathfrak{N}$, класс морфизмов $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{N}$ к-рой является множеством. М. к. $\mathfrak{N}$ наз. U-*категорией*, если $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{N} \subset U$, где U — *универсальное множество*. Для каждой М. к. $\mathfrak{N}$ и произвольной категории $\mathfrak{C}$ можно корректно говорить

о категории одноместных ковариантных (контравариантных) *функторов* из $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{S}$. В частности, М. к. образуют *замкнутую категорию* Cat малых категорий — одну из основных категорий математики [1].

Лит.: [1] Lawvere F. W., The category of categories as a foundation for mathematics, в кн.: Proc. of the Conference on categorical algebra, La Jolla, 1965, B. Hdlb. — N. Y., 1966.

М. Ш. Цаленко.

МАЛЕРА ПРОБЛЕМА — гипотеза в метрич. теории диофантовых приближений, высказанная К. Малером [1]: для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел $\omega \in R$ неравенство

$$|P(\omega)| < [H(P)]^{-n-\varepsilon}$$

имеет конечное число решений в многочленах $P \in \mathbb{Z}[x]$ степени не выше n. Здесь $\varepsilon > 0$, n — натуральное и $H(P)$ — максимум модулей коэффициентов P. Эквивалентная формулировка: для почти всех $\omega \in R$ неравенство

$$\max(\|\omega q\|, \|\omega^2 q\|, \ldots, \|\omega^n q\|) < q^{-1/n-\varepsilon}$$

имеет конечное число решений в целых числах q ($\|\alpha\|$ — расстояние от α до ближайшего целого числа).

М. п. решена утвердительно в 1964 В. Г. Спринджуком [2]. Им же доказаны аналогичные утверждения для комплексных и p-адических чисел, а также степенных рядов над конечными полями.

Лит.: [1] Mahler K., «Math. Ann.», 1932, Bd 106, S. 131—39; [2] Спринджук В. Г., Проблема Малера в метрической теории чисел, Минск, 1967.

Ю. В. Нестеренко.

МАЛОГО ПАРАМЕТРА МЕТОД в теории дифференциальных уравнений — приемы построения приближенных решений дифференциальных уравнений и систем, зависящих от параметра.

1) М. п. м. для обыкновенных дифференциальных уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения, к к-рым приводят прикладные задачи, обычно содержат один или несколько параметров. Параметр может входить также в начальные данные или граничные условия. Поскольку найти точное решение дифференциального уравнения можно лишь для отдельных весьма частных классов, возникла задача о построении приближенного решения. Одна из типичных постановок ее такова: уравнение и начальные (граничные) условия содержат параметр λ и решение известно (или его можно считать известным) при $\lambda = \lambda_0$; требуется построить приближенное решение при значениях параметра λ, близких к λ_0, т. е. построить асимптотику решения при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$ — малый параметр. М. п. м., возникший в связи с задачей трех тел небесной механики, восходит к Ж. Д'Аламберу (J. D'Alembert) и интенсивно развивается с кон. 19 в.

Ниже используются следующие обозначения: t — независимое переменное, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, I — отрезок $0 \leqslant t \leqslant T$, знак $\sim$ означает асимптотич. равенство. Все векторные и матричные функции, входящие в уравнения и в граничные условия, предполагаются гладкими (класса C^∞) по совокупности переменных в рассматриваемой области (по ε — при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ или $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$).

1. Задача Коши для системы n-го порядка:

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0(\varepsilon). \tag{1}$$

Пусть решение $\varphi_0(t)$ предельной задачи (т. е. задачи, получающейся из (1) при $\varepsilon = 0$) существует и единственно при $t \in I$. Тогда для решения $x(t, \varepsilon)$ задачи (1) справедливо асимптотич. разложение при $\varepsilon \to 0$

$$x(t, \varepsilon) \sim \varphi_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \varphi_j(t), \tag{2}$$

равномерное по $t \in I$. Этот факт вытекает из теоремы о гладкой зависимости от параметра решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если

вектор-функции f и x_0 голоморфны при $|z|\leqslant\varepsilon_0$, $x=\varphi_0(t)$, $t\in I$, то ряд (2) сходится к решению $x(t, \varepsilon)$ при достаточно малых $|\varepsilon|$ равномерно по $t\in I$ (теорема Пуанкаре). Аналогичные результаты справедливы и для краевой задачи для системы вида (1), если решение соответствующей предельной задачи существует и единственно.

Различают два вида зависимости уравнения (или системы) от малого параметра — регулярную и сингулярную. Система в нормальной форме регулярно зависит от параметра ε, если все правые ее части — гладкие функции от ε при малых $\varepsilon\geqslant 0$; в противном случае система зависит от параметра ε сингулярно. При регулярной зависимости системы от ε решение задачи с параметром на конечном отрезке по t, как правило, равномерно стремится при $\varepsilon\to 0$ к решению предельной задачи.

2. В линейной теории рассматриваются сингулярно зависящие от параметра ε системы n-го порядка

$$\varepsilon\dot{x}=A(t, \varepsilon)x+f(t, \varepsilon),$$

где элементы $n\times n$-матрицы A и компоненты вектора f — комплекснозначные функции. Центральная задача линейной теории — построение такой фундаментальной системы решений (ф. с. р.) однородной системы (т. е. при $f\equiv 0$), для к-рой асимптотика при $\varepsilon\to+0$ известна на всем отрезке I.

Основным результатом линейной теории является следующая теорема Биркгофа. Пусть: 1) собственные значения $\lambda_j(t, 0)$, $1\leqslant j\leqslant n$, матрицы $A(t, 0)$ различны при $t\in I$; 2) величины

$$\operatorname{Re}(\lambda_j(t, 0)-\lambda_k(t, 0)),\ 1\leqslant j,\ k\leqslant n,\ j\neq k,$$

не меняют знак. Тогда существует ф. с. р. $x_1(t, \varepsilon)$, ..., $x_n(t, \varepsilon)$ однородной системы

$$\varepsilon\dot{x}=A(t, \varepsilon)x,$$

для к-рой справедливо асимптотич. разложение при $\varepsilon\to 0$:

$$x_j(t, \varepsilon)\sim\exp\left[\varepsilon^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda_j(\tau, \varepsilon)\,d\tau\right]\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\varphi_{kj}(t), \quad (3)$$

$$1\leqslant j\leqslant n.$$

Это разложение равномерно по $t\in I$ и его можно дифференцировать по t и по ε любое число раз. Если матрица A не зависит от ε, т. е. $A=A(t)$, то

$$\varphi_{0j}(t)=\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\left(e_j^*(\tau), \frac{de_j(\tau)}{d\tau}\right)d\tau\right]e_j(t),$$

где e_j^*, e_j — левые и правые собственные векторы матрицы $A(t)$, нормированные условием

$$(e_j^*(t), e_j(t))\equiv 1,\ t\in I.$$

Решения, имеющие асимптотику вида (3), наз. также ВКБ-решениями (см. *ВКБ-метод*). Качественная структура этих решений такова. Если

$$\operatorname{Re}\lambda_j(t)<0\ [\operatorname{Re}\lambda_j(t)>0]\ \text{при}\ t\in I,$$

то x_j есть вектор-функция типа пограничного слоя при $t_0=0$ ($t_0=T$), т. е. заметно отлична от нуля только в ε-окрестности точки $t=0$ ($t=T$). Если же $\operatorname{Re}\lambda_j(t)\equiv 0$, $t\in I$, то решение x_j сильно осциллирует при $\varepsilon\to+0$ и имеет порядок $O(1)$ на всем отрезке I.

Если матрица-функция $A(t, \varepsilon)$ голоморфна при $|t|\leqslant t_0$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ и условие 1) выполнено, то формула (3) справедлива при $\varepsilon\to+0$, $0\leqslant t\leqslant t_1$, где $t_1>0$ достаточно мало. Трудной проблемой является построение асимптотики ф. с. р. при наличии на I точек поворота, т. е. точек, в к-рых матрица $A(t, 0)$ имеет кратное собственное значение. Эта проблема полностью решена только для отдельных типов точек пово-

рота (см. [1]). В окрестности точки поворота имеется переходная область, в к-рой решение устроено довольно сложно и в простейшем случае выражается через *Эйри функции*.

Аналогичные результаты (см. [1]) справедливы для скалярных уравнений вида

$$\varepsilon^n x^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j a_j(t, \varepsilon)\, x^{(j)} = 0,$$

где a_j — комплекснозначные функции; роль функций $\lambda_j(t, \varepsilon)$ играют корни характеристич. уравнения

$$\lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j a_j(t, \varepsilon) = 0.$$

ВКБ-решения возникают также и в нелинейных системах вида

$$\varepsilon \dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

ВКБ-асимптотика (3), в условиях теоремы Биркгофа, справедлива на бесконечном интервале $0 \leqslant t < \infty$ (т. е. разложение (3) — асимптотическое и при $\varepsilon \to +0$, и при $t \to +\infty$), если матрица $A(t, \varepsilon)$ достаточно правильно ведет себя при $t \to +\infty$, напр. быстро стремится к постоянной матрице с различными собственными значениями (см. [2]). К сингулярным задачам с малым параметром приводят многие вопросы спектрального анализа (см. [3]) и математич. физики.

3. Особый интерес представляет исследование нелинейных систем вида

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{y} &= g(x, y), \quad y(0) = y_0, \quad y \in \mathbb{R}^m, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Первое уравнение описывает **быстрые движения**, второе — **медленные движения**. Напр., *Ван дер Поля уравнение* с помощью замены

$$y = \int_0^x (x^2 - 1)\, dx + \frac{1}{\lambda} \frac{dx}{dt}, \quad t_1 = \frac{t}{\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda^2}$$

приводится при больших значениях параметра λ к системе

$$\varepsilon \dot{x} = y - \frac{1}{3} x^3 + x, \quad \dot{y} = -x,$$

имеющей вид (4).

При $\varepsilon = 0$ уравнение быстрых движений вырождается в уравнение $f(x, y) = 0$. Пусть это уравнение имеет в нек-рой ограниченной замкнутой области D изменения y изолированный устойчивый непрерывный корень $x = \varphi(y)$ (т. е. действительные части всех собственных значений матрицы Якоби $\frac{\partial f}{\partial x}$ отрицательны при $x = \varphi(y)$, $y \in D$); пусть решения задачи (4) и вырожденной задачи

$$x = \varphi(y), \quad \dot{y} = g(x, y), \quad y(0) = y_0 \tag{5}$$

существуют и единственны при $t \in I$, причем получающаяся при решении задачи (5) функция $\bar{y}(t) \in D$ при $t \in I$. Если точка (x_0, y_0) принадлежит области влияния корня $x = \varphi(y)$, то

$$x(t, \varepsilon) \longrightarrow \bar{x}(t), \quad 0 < t \leqslant T,$$
$$y(t, \varepsilon) \longrightarrow \bar{y}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

при $\varepsilon \to +0$, где $(\bar{x}, \bar{y})$ — решение вырожденной задачи (**теорема Тихонова**). Вблизи точки $t = 0$ предельный переход $x(t, \varepsilon) \to \bar{x}(t)$ является неравномерным — возникает *пограничный слой*. Для задачи (4) построена асимптотика решения:

$$x(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \prod_k \left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{6}$$

а асимптотика для $y(t, \varepsilon)$ имеет аналогичный вид. В (6) первая сумма — р е г у л я р н а я часть асимптотики, вторая — п о г р а н и ч н ы й с л о й. Регулярная часть асимптотики вычисляется стандартным способом: ряды вида (2) подставляются в систему (4), правые части разлагаются в ряды по степеням ε и затем приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях ε. Для вычисления погранслойной части асимптотики в окрестности точки $t=0$ вводится новая переменная $\tau=t/\varepsilon$ (б ы с т р о е в р е м я) и применяется описанная выше процедура. Возникает нек-рый интервал на оси t, на к-ром пригодно и регулярное (или в н е ш н е е) разложение, и погранслойное (или в н у т р е н н е е) разложение. Функции x_k, Π_k определяются из условия совпадения этих разложений (т. н. м е т о д с ш и в а н и я, см. [4], [5]).

Аналогичные результаты справедливы в случае, когда правые части системы (4) явно зависят от t, для скалярных уравнений вида

$$\varepsilon x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) \qquad (7)$$

и для краевых задач для таких систем и уравнений (см. *Дифференциальные уравнения с малым параметром при производных*, [6], [7]).

При приближении решения задачи (4) к т о ч к е с р ы в а, где теряется устойчивость (напр., где одно из собственных значений матрицы $\partial f/\partial x$ при $x=\varphi(y)$ обращается в нуль), ряды вида (5) теряют асимптотич. характер. В окрестности точки срыва асимптотика имеет совершенно иной характер (см. [8]). Исследование окрестностей точки срыва особенно существенно для построения асимптотич. теории *релаксационных колебаний*.

4. Задачи небесной механики и теории нелинейных колебаний приводят, в частности, к необходимости исследовать поведение решения задачи (1) не на конечном интервале, а на большом, порядка ε^{-1} или более высокого, интервале по t. Для исследования этих задач широко применяется метод усреднения (см. *Крылова — Боголюбова метод усреднения*, *Малые знаменатели*, [9] — [11]).

5. Асимптотика решений уравнений вида (7) исследуется, в частности, с помощью т. н. м е т о д а м н о г и х м а с ш т а б о в (см. [4], [5]); этот метод является обобщением ВКБ-метода. Рассмотрим этот метод на примере скалярного уравнения

$$\varepsilon^2 x'' + f(t, x) = 0, \qquad (8)$$

к-рое имеет периодич. решения (см. [12]). Решение ищется в виде

$$x = \varphi(T, t, \varepsilon) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \varphi_j(T, t), \quad T = \frac{s(t)}{\varepsilon} \qquad (9)$$

(функции T, t наз. м а с ш т а б а м и). Если уравнение (8) — линейное, то $\varphi_j = e^T \psi_j(t)$ и (9) есть ВКБ-решение. В нелинейном случае уравнения первых двух приближений имеют вид

$$\dot{S}^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial T^2} + f(t, \varphi_0) = 0,$$

$$\dot{S}^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial T^2} + \frac{\partial f(t, \varphi_0)}{\partial x} \varphi_1 = -2\dot{S} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t \, \partial T} - \ddot{S} \frac{\partial \varphi_0}{\partial T},$$

причем первое уравнение содержит две неизвестные функции S и φ_0. Пусть это уравнение имеет периодическое по t решение $\varphi_0 \quad \varphi_0(t, T)$. Тогда недостающее уравнение, из к-рого определяется S, находится из условия периодичности по t решения φ_1 и имеет вид

$$\dot{S} \oint \left(\frac{\partial \varphi_0(t, T)}{\partial T} \right)^2 dT = E = \text{const},$$

где интеграл берется по периоду решения φ.

Лит.: [1] Вазов В., Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1968; [2] Федорюк М. В., «Матем. сб.», 1969, т. 79, № 4, с. 477—516; [3] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [4] Коул Д.-Д., Методы возмущений в прикладной математике, пер. с англ., М., 1972; [5] Найфэ А. Х., Методы возмущений, пер. с англ., М., 1976, [6] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, М., 1973; [7] их же, Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях, М., 1978; [8] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975; [9] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [10] Волосов В. М., Моргунов Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, М., 1971; [11] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 91—192; [12] Кузмак Г. Е., «Прикл. матем. и мех.», 1959, т. 23, № 3, с. 515—26; [13] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [14] Джакалья Г. Е., Методы теории возмущений для нелинейных систем, пер. с англ., М., 1979; [15] Моисеев Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики, М., 1969; [16] Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 5—73.

Н. Х. Розов, М. В. Федорюк.

2) **М. п. м. для дифференциальных уравнений с частными производными.** Как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, решения дифференциальных уравнений с частными производными могут зависеть от малого параметра ε (предполагается, что $\varepsilon>0$) регулярно или сингулярно. Грубо говоря, регулярная зависимость наблюдается тогда, когда старшие члены дифференциального оператора не зависят от ε, а младшие члены — гладкие функции ε при малых ε. Тогда и решение является гладкой функцией ε. Если же при $\varepsilon \to 0$ обращается в нуль какой-либо из старших членов в уравнении с частными производными, то решение, как правило, зависит от ε сингулярно. В этом случае часто говорят об уравнении с частными производными «с малым параметром при старших производных». Подобная классификация несколько условна, т. к. само выделение старших членов не всегда очевидно; к тому же параметр может входить и в граничные условия. Кроме того, сингулярность может возникнуть в случае неограниченной области, даже если малый параметр стоит при младших производных (на бесконечности они играют в определенном смысле такую же или даже более главную роль, чем старшие).

Пусть, напр., имеется эллиптич. уравнение с частными производными 2-го порядка в ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$. Решение задачи

$$\Delta u + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,\ \varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x,\ \varepsilon)\,u = f(x,\ \varepsilon),$$
$$u|_{\partial G} = \varphi(x,\ \varepsilon)$$

есть гладкая функция ε при малых ε, если граница гладкая, a_j, b, f, φ — гладкие функции от x и ε и предельная краевая задача

$$\Delta u + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,\ 0)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x,\ 0)\,u = f(x,\ 0),$$
$$u|_{\partial G} = \varphi(x,\ 0)$$

однозначно разрешима для любых гладких функций $f(x,\ 0)$, $\varphi(x,\ 0)$. Решение разлагается в асимптотич. ряд по степеням ε:

$$u(x,\ \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \qquad (1)$$

коэффициенты к-рого $u_k(x)$ — решения однотипных краевых задач и легко вычисляются в *возмущений теории*.

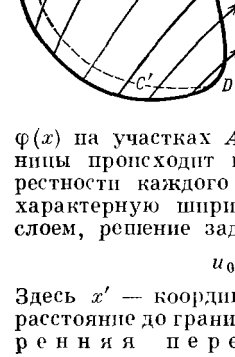
Совсем иная ситуация имеет место, напр., для краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2\Delta u + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x)\,u - f(x), \\ u|_{\partial G} = \varphi(x), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

т. к. при $\varepsilon = 0$ порядок уравнения понижается. Предельная задача имеет вид

$$\left.\begin{aligned} L_0 u \equiv \sum_{i=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b(x)\, u = f(x), \\ u|_{\partial G} = \varphi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

и, вообще говоря, неразрешима. Пусть $n = 2$, характеристики предельного уравнения имеют вид, указанный на рис., и их ориентация индуцирована векторным полем $\{a_j(x)\}$. Если решение предельного уравнения известно в некрой точке, то оно известно вдоль всей характеристики, проходящей через эту точку; поэтому краевая задача (3) неразрешима для любых $\varphi(x)$. При $\varepsilon \to 0$ решение задачи (2) стремится к решению $u_0(x)$ предельного уравнения $L_0 u_0 = f$, к-рое равно $\varphi(x)$ на участках AB и CD. На остальной части границы происходит потеря граничных условий. В окрестности каждого из участков AD и BC, имеющих характерную ширину ε^2 и называемую пограничным слоем, решение задачи (2) близко к сумме



$$u_0(x) + v_0(\rho\varepsilon^{-2},\ x').$$

Здесь x' — координата вдоль границы AD (BC), ρ — расстояние до границы по нормали, а $\rho\varepsilon^{-2}$ — т. н. в н у т р е н н я я п е р е м е н н а я. Решение задачи (2) разлагается в асимптотич. ряд вида (1) всюду, кроме пограничного слоя и нек-рых особых характеристик (на рис. 1 — это CC'). Частичные суммы асимптотич. ряда равномерно приближают решение задачи (2) в области, полученной из G выбрасыванием любых фиксированных окрестностей линий AD, BC и CC'. В пограничном слое, вне окрестностей точек A, B, C, D, C', к асимптотич. ряду (1) добавляется асимптотич. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} v_{2k}(\rho\varepsilon^{-2},\ x').$$

Функции $v_{2k}(\xi, x')$ экспоненциально убывают при $\xi \to \infty$. Первый асимптотич. ряд обычно наз. в н е ш н и м а с и м п т о т и ч е с к и м р я д о м, а второй — в н у т р е н н и м а с и м п т о т и ч е с к и м р я д о м, а функции $v_{2k}(\xi, x')$ — ф у н к ц и я м и п о г р а н и ч н о г о с л о я. Эта терминология, как и сами задачи, происходят из проблем обтекания тел жидкостью с малой вязкостью (см. *Гидродинамики математические задачи*, а также [1] — [4]). Указанный способ наз. м е т о д о м п о г р а н и ч н о г о с л о я, и он по существу не отличается от такого же метода для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В окрестностях точек A, B, C, D, в к-рых характеристики оператора L_0 касаются границы, и вблизи линии CC' асимптотика решения носит более сложный характер. Усложнения возникают и в случае, когда граница не всюду гладкая (имеются угловые точки, а при $n > 2$ — ребра). В нек-рых простых случаях можно построить асимптотику добавлением дополнительных функций пограничного слоя, зависящих уже от большего числа переменных, но по-прежнему экспоненциально стремящихся к нулю на бесконечности. Но, как правило, картина сложнее: как коэффициенты $u_k(x)$ внешнего разложения, так и коэффициенты $v_k(\xi, x')$ внутреннего разложения имеют сильные особенности в особых точках (на рис. — это точки A, B, C, D). Асимптотика решения, равномерная в замкнутой области $\bar{G}$, может быть построена методом многих мас-

штабов (методом согласования асимптотич. рядов, методом сращивания асимптотич. рядов [5]). Нек-рые задачи для уравнений с частными производными могут быть исследованы другим вариантом метода многих масштабов (метод подъема): решение рассматривается как функция основных независимых переменных и вспомогательных «быстрых» переменных. В результате повышается размерность исходной задачи, но упрощается зависимость от параметров (см. [6]).

Если поле характеристик предельного оператора L_0 имеет стационарные точки, то задача сильно усложняется. Напр., если $f(x)\equiv 0$, $b(x)\neq 0$ и все характеристики направлены внутрь области, то решение задачи (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к постоянной. Нахождение этой постоянной и построение асимптотич. ряда решения — трудная, лишь частично решенная задача (см. [7]). Уравнение (2) описывает случайные возмущения динамич. системы $\dot{x}=a(x)$. Проблемы в этой области также были одним из первоисточников развития М. п. м. в теории уравнений с частными производными (см. [8]).

Если $a_j(x)\equiv 0$ в уравнении (2), а $b(x)<0$, то асимптотич. ряд легко находится: всюду вдали от границы асимптотич. ряд имеет вид (1), а в пограничном слое вблизи границы добавляется асимптотич. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\xi, x'),$$

где теперь $\xi = \rho\varepsilon^{-1}$.

Задача резко усложняется, если $a_j(x)\equiv 0$, $b(x)\geqslant 0$. В этом случае решения сильно осциллируют; асимптотич. методы — *ВКБ-метод*, *квазиклассическое приближение*, *параболического уравнения метод* и др.

Имеется класс задач, в к-рых вырождается граница области при $\varepsilon \to 0$. Для определенности ниже рассмотрена задача

$$(\Delta + k^2)\, u(x) = 0, \quad x \in G_\varepsilon, \quad u|_{\partial G_\varepsilon} = \varphi(x), \qquad (4)$$

где G_ε — внешность ограниченной области D_ε в $\mathbb{R}^n$ и $k>0$; на бесконечности ставятся *излучения условия*. Пусть, напр., $D_\varepsilon = \varepsilon D$, D — фиксированная область, содержащая точку $x=0$; тогда D_ε стягивается в точку $x=0$ и задача (4) не имеет предельной. Величина $\lambda = 2\pi/k$ имеет смысл длины волны; в данном случае $\lambda \gg d_\varepsilon$, где d_ε — диаметр области D_ε, и в этом случае говорят о рассеянии длинных волн на препятствии D_ε (или *гидродинамическое приближение*, или рэлеевское приближение). Имеются две перекрывающиеся зоны: ближняя, содержащая ∂G_ε, ее размеры стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, и дальняя — внешность области, к-рая стягивается в точку $x=0$ при $\varepsilon \to 0$. Асимптотич. ряд решения имеет различный вид в этих зонах. Наиболее трудной оказывается первая краевая задача при $n=2$; внутреннее асимптотич. разложение имеет вид

$$u(x, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{N} \varepsilon^k \mu^l v_{kl}(\xi),$$

где $\xi = \varepsilon^{-1}x$, $\mu = (\ln\varepsilon + \alpha)^{-1}$ и α — нек-рая постоянная (см. [9]). Длинноволновое приближение исследовано в основном для уравнения Гельмгольца и для системы Максвелла (см. [10], [11]).

Другой вариант возникает, когда D_ε стягивается к отрезку L при $\varepsilon \to 0$; в этом случае предельная задача имеется при $n=2$ и отсутствует при $n>2$. Такого типа задачи (в том числе и для уравнения Лапласа, и для линейных гиперболич. уравнений, и для нелинейных уравнений с частными производными) возникают в гидродинамике и аэродинамике, в теории дифракции волн (обтекание тонкого тела потоком жидкости или газа). Задача (4) исследована при $n \geqslant 2$ (см.

[12]); при $n \geqslant 3$ она исследована, если $k=0$ и D_ε есть тело вращения (см. [13]).

Уравнения с частными производными, содержащие малый параметр, естественно возникают при излучении нелинейных колебаний, когда возмущение имеет порядок ε, но решение исследуется на большом отрезке *времени порядка* ε^{-1}. *Если вместо системы материальных точек рассматривается непрерывная среда*, то возникают уравнения с частными производными, к к-рым применяются обобщения метода усреднения (см. [14]).

Лит.: [1] Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, пер. с нем., М., 1969; [2] Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости, пер. с англ., М., 1967; [3] Вишик М. И., Люстерник Л. А., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 5, с. 3—122; [4] Треногин В. А., там же, 1970, т. 25, в. 4, с. 123—56; [5] Найфэ А. Х., Методы возмущений, пер. с англ., М., 1976; [6] Ломов С. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 3, с. 635—51; [7] Вентцель Л. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [8] Понтрягин Л., Андронов А., Витт А., «Ж. эксперимент. и теоретич. физики», 1933, т. 3, № 3, с. 165—80; [9] Ильина А. М., «Матем. сб.», 1977, т. 103, № 2, с. 265—84; [10] Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К., Теория дифракции, пер. с нем., М., 1964; [11] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 2, М., 1960; [12] Ильин А. М., «Матем. сб.», 1976, т. 99, № 4, с. 514—37; [13] Коул Д. Д., Методы возмущений в прикладной математике, пер. с англ., М., 1972; [14] Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И., Асимптотические решения уравнений в частных производных, К., 1976.

А. М. Ильин, М. В. Федорюк.

МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ — делители вида

$$i\langle P,\ \Omega\rangle + \langle Q,\ \Lambda\rangle \equiv$$
$$\equiv ip_1\omega_1 + \ldots + ip_m\omega_m + q_1\lambda_1 + \ldots + q_n\lambda_n, \qquad (1)$$

появляющиеся у коэффициентов рядов при интегрировании дифференциальных уравнений посредством рядов Тейлора, Фурье или Пуассона; здесь $P=(p_1, \ldots, p_m)$, $Q=(q_1, \ldots, q_n)$ — *целочисленные*, $\Omega=(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ — действительный и $\Lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — комплексный векторы, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение. При этом существование решения и такие его качества, как аналитичность, гладкость и т. п., существенно зависят от арифметич. природы чисел ω_j, λ_k и таких же качеств (аналитичность, гладкость и т. п.) дифференциальных уравнений. Ниже указаны условия на векторы Ω и Λ, к-рые обеспечивают аналитичность решения соответствующей аналитич. задачи. Эти условия различны для задач линейных и нелинейных.

1. Линейные задачи. а) Ряд Тейлора. Решение ξ уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_k}\lambda_k x_k - \varphi(X) =$$
$$= \sum_{\langle Q,\ \Lambda\rangle \neq 0,\ q_k \geqslant 0} \varphi_Q x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n},$$

где $X=(x_1, \ldots, x_n)$, а функция φ аналитична в точке $X=0$ (причем $\varphi(0)=0$) и разлагается в указанный ряд Тейлора, дается рядом Тейлора

$$\xi = \sum \frac{\varphi_Q}{\langle Q,\ \Lambda\rangle} x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}.$$

Этот ряд сходится в нек-рой окрестности нуля, если существуют такие числа ε, $\nu>0$, что

$$|\langle Q,\ \Lambda\rangle| \geqslant \varepsilon e^{-\nu|Q|},\ |Q| = |q_1| + \ldots + |q_n|, \qquad (2)$$

для всех целочисленных $Q\geqslant 0$, $\langle Q, \Lambda\rangle \neq 0$. Это условие неулучшаемо в классе всех аналитич. функций φ; оно необходимо для сходимости ряда ξ.

б) Ряд Фурье. Решение η уравнения

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \eta}{\partial y_j}\omega_j = \psi(Y) \equiv$$
$$\equiv \sum_{\langle P,\ Q\rangle \neq 0} \psi_P \exp i\langle P,\ Y\rangle, \qquad (3)$$

где $Y=(y_1, \ldots, y_m)$, правая часть к-рого разложена в ряд Фурье, дается рядом Фурье

$$\eta=\sum \frac{\psi_P}{i\langle P, \Omega\rangle} \exp i\langle P, Y\rangle,$$

к-рый сходится в нек-рой полосе $|\mathrm{Im} Y|<\varepsilon_0$, если функция ψ аналитична и

$$\lim_{|P|\to\infty} \frac{\ln|\langle P, \Omega\rangle|}{|P|}\geqslant 0, \tag{4}$$

где предел берется по всем целочисленным P, $\langle P, \Omega\rangle\neq 0$. Это условие неулучшаемо в классе всех аналитич. функций ψ вида (3).

Уравнение (3) встречается в задаче приведения системы обыкновенных дифференциальных уравнений на торе (см. [1], там вместо условия (4) ошибочно дано (2)). Аналогично обстоит дело при интегрировании по t условно периодич. функции $\psi(\Omega t)$. Подобные линейные задачи возникают в каждом приближении при итерационном решении нелинейных задач (в теории возмущений).

Если условия (2) или (4) не выполнены, то неформальное решение соответствующей задачи может не быть аналитическим, гладким или даже не существует вовсе (в зависимости от арифметич. природы векторов Λ и Ω), хотя формальные решения — ряды ξ и η всегда существуют (см. [1]).

2. Нелинейные задачи. В таких задачах М. з. (1) появляются не поодиночке, а в виде произведений.

а) Р я д ы Т е й л о р а. Рассмотрим систему вблизи неподвижной точки $X=0$:

$$\dot{x}_j=\lambda_j x_j+x_j\varphi_j(X),\ j=1,\ \ldots,\ n, \tag{5}$$

где φ_j — сходящиеся ряды Тейлора без свободных членов. Пусть $\langle Q, \Lambda\rangle\neq 0$ для целочисленных $Q\geqslant 0$, $Q\neq 0$. Тогда существует формальная обратимая замена координат

$$x_j=u_j+u_j\xi_j(U),\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

где ξ_j — также ряды Тейлора без свободных членов, к-рая приводит систему (5) к нормальной форме

$$\dot{u}_j=\lambda_j u_j,\ j=1,\ \ldots,\ n. \tag{5'}$$

Ряды ξ_j сходятся в нек-рой окрестности нуля, если

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\ln\beta_l}{2^l}>-\infty, \tag{6}$$

где $\beta_l=\min|\langle Q, \Lambda\rangle|$ по $|Q|<2^l$, $\langle Q, \Lambda\rangle\neq 0$, $Q\geqslant 0$ (см. [2]).

Впервые нелинейную задачу такого типа решил К. Зигель (C. Siegel, 1942; см. [2], [3]) при более жестком условии:

$$|\langle Q, \Lambda\rangle|\geqslant\varepsilon|Q|^{-\nu}. \tag{7}$$

При этом условии $\beta_l\geqslant\ln\varepsilon-l\nu\ln 2$ и ряд (6) сходится. Условие (2) эквивалентно ограниченности членов ряда (6); оно необходимо для сходимости рядов ξ_j при произвольных аналитических φ_j. Но пока (1982) неизвестно, что происходит в «щели» между условиями (2) и (6) (см. более сложные резонансные ситуации в [2]). Если условие (2) не выполнено, то между решениями системы (5) и ее нормальной формы (5') может не быть аналитического, гладкого и даже топологич. соответствия.

б) Р я д ы П у а с с о н а. Пусть аналитич. система

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_j=\lambda_j x_j+x_j\sum\varphi_{jPQ}X^Q\exp i\langle P, Y\rangle,\\&\dot{y}_k=\omega_k+\sum\psi_{kPQ}X^Q\exp i\langle P, Y\rangle,\\&X^Q=x_1^{q_1}\ldots x_n^{q_n},\ j=1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ \ldots,\ m,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

правые части к-рой разложены в ряды Пуассона вблизи инвариантного тора $X=0$ (т. е. в ряды Тейлора по X и ряды Фурье по Y), имеет формальное интегральное многообразие

$$x_i = \eta_j(x_{r+1}, \ldots, x_n, Y), \quad j=1, \ldots, r, \qquad (9)$$

где η_j — также ряды Пуассона. Спрашивается, когда это многообразие будет аналитическим (т. е. когда ряды η_j будут абсолютно сходиться для достаточно малых $|X|$ и $|\mathrm{Im}\,Y|$). При этом среди координат x_j могут быть и малые параметры, для них $\lambda_j=0$. Впервые такая задача решена А. Н. Колмогоровым [4] для гамильтоновой системы (8) с m степенями свободы и одним малым параметром x_n (т. е. $m+1=n$ и $\Lambda=0$): при условии

$$|\langle P, \Omega\rangle| \geqslant \varepsilon |P|^{-\nu} \qquad (10)$$

была доказана аналитичность многообразия (9) с $r=m$, состоящего из инвариантных торов. Там же для доказательства сходимости рядов Пуассона η_j был впервые предложен «метод Ньютона», ставший основным в исследовании нелинейных задач. Условие (10) и его аналог

$$|i\langle P, \Omega\rangle + \langle Q, \Lambda\rangle| \geqslant \varepsilon (|P|+|Q|)^{-\nu}$$

использовались затем в задачах такого же типа (см. [5] — [7]). Условия (2) и (4) здесь также необходимы для сходимости рядов (9) (см. более сложные вырожденные ситуации в [7]). Если эти условия не выполнены, то может не быть аналитического (и даже непрерывного) инвариантного многообразия вида (9).

Самое жесткое из ограничений (2), (6), (7) — условие (7) — при $\nu>n-1$ выполнено для почти всех (по мере Лебега) векторов Λ. Свойства типа (2), (6), (7) для векторов Λ изучаются в теории диофантовых приближений. Достаточно хорошо изучен двумерный случай. Пусть q_l — знаменатель l-й подходящей дроби цепной дроби числа $\lambda=\lambda_2/\lambda_1<0$. Тогда условие (6) эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\ln q_{l+1}}{q_l},$$

а условие (2) — ограниченности его членов.

Рассматривались М. з. (1) с переменными векторами Ω и Λ (см. [6]).

М. з. впервые встретились в задачах небесной механики, и основные линейные задачи были решены в 1884 Г. Брунсом (H. Bruns). Вообще в Солнечной системе имеется много «острых соизмеримостей» между частотами, следствием к-рых являются М. з. (1). Напр., малый знаменатель $2\omega_1-5\omega_2=0{,}007\ldots$, где ω_1 и ω_2 — частоты движения Юпитера и Сатурна соответственно, приводит к появлению больших взаимных возмущений в движении этих планет. Другой пример: щели в поясе астероидов и в кольце Сатурна соответствуют резонансам с частотой возмущающего тела (Юпитера и Мимаса соответственно).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1953, т. 93, № 5, с. 763—66; [2] Брюно А. Д., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 25, с. 119—262; 1972, т. 26, с. 199—239; [3] Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, пер. с нем., М., 1959; [4] Колмогоров А. Н., «Докл. АН СССР», 1954, т. 98, № 4, с. 527—30; [5] Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах, пер. с англ., М., 1973; [6] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1963, т. 18, в. 6, с. 91—192; [7] Брюно А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979.

А. Д. Брюно.

МАЛЫЙ ОБРАЗ множества $A\subset X$ при отображении f: $X\to Y$ — множество $f^{\#}A$ всех точек $y\in Y$, для к-рых $f^{-1}y\subset A$. Эквивалентное определение: $f^{\#}A=Y\setminus f(X\setminus A)$. Посредством М. о. можно охарактеризовать замкнутые и неприводимые отображения. Непрерывное отображение f: $X\to Y$ замкнуто

тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества $U \subset X$ его М. о. $f^{\#}U$ открыт. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ на Y замкнуто и неприводимо тогда и только тогда, когда М. о. всякого непустого открытого множества $U \subset X$ является непустым открытым множеством.

В. В. Федорчук.

МАЛЫЙ ОБЪЕКТ категории — понятие, выделяющее такие объекты категории, к-рым присущи свойства математич. структур с конечным числом образующих (конечномерных линейных пространств, конечно порожденных групп и т. д.). Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с копроизведениями. Объект $U \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{K}$ наз. м а л ы м, если для любого морфизма

$$\varphi: U \to \prod\nolimits^{*}_{i \in I} U_i\,(\sigma_i),$$

где $U_i = U$, $i \in I$, σ_i — вложения копроизведения, найдется конечное подмножество индексов $1, 2, \ldots, n$ и такой морфизм

$$\varphi': U \to U_1 * \ldots * U_n\,(\sigma_i'),$$

что выполнено равенство

$$U \xrightarrow{\varphi} \prod\nolimits^{*}_{i \in I} U_i = U \xrightarrow{\varphi'} U_1 * \ldots * U_n \xrightarrow{\sigma} \prod\nolimits^{*}_{i \in I} U_i,$$

в к-ром морфизм σ однозначно определяется равенствами $\sigma_i' \sigma = \sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$. Иногда дается более сильное определение, в к-ром не предполагается, что все множители копроизведения $\prod^{*}_{i \in I} U_i$ совпадают с U.

В многообразиях универсальных алгебр следующие условия равносильны: а) алгебра A является М. о. категории; б) алгебра имеет конечное число образующих; в) основной ковариантный функтор $H_A(X) = H(A, X)$ перестановочен с копределами (прямыми пределами) направленных семейств мономорфизмов. Свойство в) часто принимается за определение конечно порожденного объекта произвольной категории.

М. Ш. Цаленко.

МАЛЬЦЕВА АЛГЕБРА, муфанг-лиева алгебра,— линейная алгебра над полем, удовлетворяющая тождествам

$$x^2 = 0, \quad J(x, y, xz) = J(x, y, z)x,$$

где $J(x, y, z) = (xy)z + (zx)y + (yz)x$ — якобиан элементов x, y, z. М. а. представляют собой естественное обобщение алгебр Ли. Любая М. а. является *бинарно лиевой алгеброй*.

М. а. были введены А. И. Мальцевым [1] и названы им муфанг-лиевыми алгебрами ввиду их связи с аналитич. лупами Муфанг. Касательная алгебра локальной аналитич. лупы Муфанг является М. а. Верно также и обратное: любая конечномерная М. а. над полным нормированным полем характеристики 0 является касательной алгеброй нек-рой локальной аналитич. лупы Муфанг.

Имеется тесная связь между М. а. и альтернативными алгебрами (см. *Альтернативные кольца и алгебры*). Коммутаторная алгебра произвольной альтернативной алгебры, т. е. алгебра, получаемая заменой основного умножения на операцию коммутирования

$$[x, y] = xy - yx,$$

является М. а.

Всякая простая М. а. характеристики $p \neq 2$ либо лиева, либо есть 7-мерная алгебра над своим центроидом. Всякая первичная М. а. (при $p \neq 2$) либо лиева, либо вкладывается в качестве подкольца в подходящую 7-мерную простую алгебру над нек-рым полем. Произвольная полупервичная М. а. (при $p \neq 2$) изоморфно вкладывается в качестве подалгебры в

коммутаторную алгебру нек-рой альтернативной алгебры. Вопрос о вложении произвольной М. а. в коммутаторную алгебру альтернативой алгебры открыт (1982).

Пусть $Z(A)$ — лиев центр М. а. A:

$$Z(A)=\{n\in A \mid J(n, a, b)=0 \text{ для всех } a, b\in A\}.$$

Для любого идеала I произвольной полупервичной М. а. A (при $p\neq 2$) $Z(I)=Z(A)\bigcap I$.

Свойства алгебраич. М. а. аналогичны свойствам алгебраич. алгебр Ли. В произвольной алгебраич. М. а. (при $p\neq 2$) существует локально конечный радикал, т. е. максимальный локально конечный идеал, факторалгебра по к-рому не содержит локально конечных идеалов. М. а. характеристики $p\geqslant n$ или $p=0$, удовлетворяющие n-му условию Энгеля (см. *Энгелева алгебра*), локально нильпотентны. Различие между М. а. и алгебрами Ли проявляется при переходе от локальной нильпотентности к глобальной. Имеется пример М. а. ($p=0$), удовлетворяющей 3-му условию Энгеля, разрешимой индекса 2, но не нильпотентной.

Для М. а. имеется аналог теоремы Энгеля, играющей большую роль в структурной теории алгебр Ли: М. а., удовлетворяющая условию Энгеля и условию максимальности для подалгебр, нильпотентна. Этот результат справедлив даже в более общем случае — для бинарно лиевых алгебр.

Во всякой свободной М. а. (при $p\neq 2$) имеется ненулевой лиев центр. Свободная М. а. (при $p\neq 2$) с тремя и более образующими не является первичной алгеброй. Свободная М. а. (при $p=0$) с девятью и более образующими содержит тривиальные идеалы.

Если R_n — многообразие М. а., порожденное свободной М. а. от n образующих и $p=0$, то цепочка многообразий

$$R_1\subseteq R_2\subseteq \ldots \subseteq R_n\subseteq \ldots$$

не стабилизируется ни на каком конечном шаге.

Значительно развита теория конечномерных М. а. и их представлений. Основные результаты этой теории аналогичны результатам теории алгебр Ли. Имеются аналоги классич. теорем Ли: если ρ — расщепляемое представление разрешимой М. а. характеристики 0, то все матрицы $\rho(x)$ могут быть приведены одновременно к треугольному виду; если ρ — расщепляемое представление нильпотентной М. а. в пространстве V, то V разлагается в прямую сумму весовых подпространств V_α, и все матрицы ограничений операторов $\rho(x)$ на V_α могут быть приведены одновременно к треугольному виду с числом $\alpha(x)$ на главной диагонали.

Следующие результаты аналогичны критериям Картана разрешимости и полупростоты алгебр Ли: если ρ — точное представление М. а. A ($p=0$) и билинейная форма на A, ассоциированная с представлением ρ, тривиальна, то алгебра A разрешима; если ρ — представление полупростой М. а., то форма следа, ассоциированная с ρ, невырождена. Если киллингова форма алгебры A невырождена, то A полупроста.

Любое представление полупростой М. а. с $p=0$ вполне приводимо. Если S — радикал (максимальный разрешимый идеал) М. а. A, N — нильрадикал (максимальный нильпотентный идеал), то для любого дифференцирования D алгебры A $SD\subseteq N$.

Произвольная конечномерная М. а. A характеристики 0 есть прямая сумма (как линейных пространств) своего радикала S и полупростой подалгебры B, изоморфной факторалгебре алгебры A по радикалу S, и любые для полупростых фактора сопряжены внутренним автоморфизмом (аналог теоремы Леви — Мальцева — Хариш-Чандра, известной для алгебр Ли).

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1955, т. 36, № 3, с. 569—76; [2] Sagle A. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1961, v. 101, № 3, p. 426—58; [3] Кузьмин Е. Н., «Алгебра и логика», 1968, т. 7, № 2, с. 42—47; [4] его же, там же, № 4, с. 48—69; [5] его же, там же, 1971, т. 10, № 1, с. 3—22; [6] его же, там же, 1977, т. 16, № 4, с. 424—31; [7] Филиппов В. Т., там же, 1976, т. 15, № 1, с. 89—109; [8] его же, там же, 1977, т. 16, № 1, с. 101—108; [9] Гришков А. Н., там же, № 4, с. 389—96; [10] Шестаков И. П., там же, № 2, с. 227—46.

В. Т. Филиппов.

МАЛЬЦЕВА ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ — теоремы о перенесении свойств с локальных частей *модели* на всю модель, установленные А. И. Мальцевым. Система $\{M_i | i \in I\}$ подмножеств множества наз. его локальным покрытием, если каждый элемент из этого множества содержится в нек-ром M_i и любые два подмножества M_i, M_j содержатся в нек-ром третьем подмножестве M_k. Примеры локальных покрытий: система всех конечных подмножеств данного множества, система всех конечно порожденных подгрупп данной группы. Модель M локально обладает свойством σ, если существует локальное покрытие модели M, состоящее из подмоделей со свойством σ. Для свойства моделей σ (и соответствующего класса моделей) *справедлива локальная теорема, если всякая* модель, локально обладающая свойством σ, обладает этим свойством в целом.

Источником самых разнообразных локальных теорем является следующая основная локальная теорема (или теорема компактности узкого исчисления предикатов) Мальцева [1]: если совместна каждая конечная подсистема нек-рой *бесконечной* системы аксиом узкого исчисления предикатов, то совместна и вся система. А. И. Мальцев [2] указал общий метод получения конкретных локальных теорем теории групп с помощью основной локальной теоремы, положив этим начало *моделей теории*. Позднее, усовершенствовав свой метод, он доказал [3] локальную теорему для любого *свойства*, записываемого т. н. квазиуниверсальными аксиомами. Вопрос о справедливости локальной теоремы для свойства σ, к-рый решался кустарно для каждого σ, был тем самым сведен к общему и чисто «грамматическому» вопросу: нельзя ли записать σ квазиуниверсальными аксиомами?

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Матем. сб.», 1936, т. 1, № 3, с. 323—36; [2] его же, «Уч. записки Ивановского гос. пед. ин-та», 1941, т. 1, в. 1, с. 3—9; [3] его же, «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 3, с. 313—36; [4] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

Ю. И. Мерзляков.

МАЛЬЦЕВСКОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — операция на классе всех групп (обозначаемая $\circ$), наследственная при переходе к подгруппам сомножителей, т. е. если

$$G = \prod\nolimits^{\circ}_{i \in I} G_i$$

и в каждом сомножителе G_i выбрана подгруппа H_i, то подгруппы H_i, $i \in I$, в G должны порождать подгруппу H, являющуюся там же произведением H_i

$$H = \prod\nolimits^{\circ}_{i \in I} H_i.$$

Прямое и свободное произведения групп являются мальцевскими. Существуют и другие М. п., однако до сих пор (1982) не решена проблема Мальцева о существовании (отличного от прямого и свободного) М. п., удовлетворяющего закону ассоциативности и нек-рым другим естественным условиям (термин М. п. возник в связи с этой проблемой).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Шмелькин.

МАМФОРДА ГИПОТЕЗА — гипотеза о том, что всякая полупростая алгебраич. группа G геометрически редуктивна, т. е. обладает следующим свойством: для любого рационального представления

группы G в конечномерном векторном пространстве V и любого неподвижного относительно G ненулевого вектора $v \in V$ существует G-инвариантный однородный многочлен f положительной степени на пространстве V, для к-рого $f(v) \neq 0$.

Гипотеза была сформулирована Д. Мамфордом [1] (в несколько отличном от предыдущего, но эквивалентном ему виде) с целью найти такое свойство полупростых групп, определенных над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики, к-рое могло бы служить равноценной — с точки зрения геометрич. *инвариантов теории* заменой классич. свойства полной приводимости рациональных линейных представлений полупростых групп, определенных над полем нулевой характеристики (это последнее свойство не имеет места в случае положительной характеристики основного поля), и позволило бы снять ограничение на характеристику основного поля в ряде центральных результатов геометрич. теории инвариантов (в первую очередь, в теореме о конечной порожденности алгебры инвариантов редуктивной группы автоморфизмов алгебры конечного типа над полем, см. *Гильберта теорема* об инвариантах).

Если характеристика основного поля k равна нулю, то доказательство М. г. дается классич. теоремой Вейля о полной приводимости рациональных представлений полупростых групп (см. [2]): в этом случае к инвариантной прямой $L = kv$ в пространстве V имеется инвариантное дополнение Γ (т. е. такая инвариантная однородная гиперповерхность Γ степени 1 в V, что $L \cap \Gamma = 0$), и в качестве f можно взять линейную форму, являющуюся уравнением Γ. В случае поля k положительной характеристики p М. г. обобщает этот факт, также утверждая, что существует инвариантная однородная гиперповерхность Γ в V, для к-рой $L \cap \Gamma = 0$, но только степень Γ не обязательно равна 1 (в оригинальной постановке М. г. утверждает также, что эта степень равна p^n для нек-рого целого n).

М. г. эквивалентна также утверждению о том, что для любого регулярного действия полупростой группы G на аффинном алгебраич. многообразии X и любых двух замкнутых непересекающихся инвариантных подмножеств X_1 и X_2 в X существует инвариантная регулярная функция h на X, для к-рой $h(X_1) = 0$ и $h(X_2) = 1$ (т. е. X_1 и X_2 разделяются регулярными инвариантами, см. [3]).

Впервые М. г. доказана в [4] (включая и гипотезу о степени формы); это доказательство распространено в [5] на общий случай редуктивных групповых схем над кольцом.

Доказательство М. г. вместе с результатами работ [6], [10] позволило, во-первых, придать окончательную форму обобщению теоремы Гильберта об инвариантах: если R — алгебра конечного типа над полем k, G — редуктивная рациональная группа ее k-автоморфизмов и R^G — подалгебра всех G инвариантных элементов в R, то R^G — также алгебра конечного типа над k; и, во-вторых, позволило установить, что линейная алгебраич. группа над полем произвольной характеристики геометрически редуктивна тогда и только тогда, когда она редуктивна. М. г. имеет приложения в геометрич. теории инвариантов и теории модулей (см. [7] — [9]).

Лит.: [1] Mumford D., Geometric Invariant Theory, B. [a. o.], 1965; [2] Fogarty J., Invariant theory, N. Y.— Amst., 1969; [3] Дьедонне Ж., Кероли Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [4] Haboush W. J., «Ann. Math.», 1975, v. 102, p. 67—83; [5] Seshadri C. S., «Adv. Math.», 1977, № 26, p. 225—74; [6] Nagata M., «J. Math. Kyoto Univ.», 1964, № 3, p. 369—77; [7] Seshadri C. S., в кн.: Algebraic geometry. Papers presented at the Bombay colloquium. 1968, L., 1969, p. 347—71; [8] Popp H., Moduli theory and classification theory of algebraic varieties, B. [a. o.], 1977; [9] Seshadri C. S.,

«Proc. Symp. Pure Math.», 1975, v. 29, p. 263–304; [10] Nagata M., Miyata T., «J. Math. Kyoto Univ.», 1967, №3, p. 379–382. *В. Л. Попов.*

МАНГОЛЬДТА ФУНКЦИЯ — арифметическая функция, определяемая равенствами

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^m, \ p \text{ — простое}, \ m \geq 1, \\ 0, & \text{если } n \neq p^m. \end{cases}$$

Функция $\Lambda(n)$ обладает следующими свойствами:

$$\sum_{d \mid n} \Lambda(n) = \ln n,$$

$$\Lambda(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \ln \frac{n}{d},$$

где сумма берется по всем делителям d числа n. М. ф. тесно связана с *дзета-функцией* Римана $\zeta(s)$, а именно, производящим рядом для $\Lambda(n)$ является логарифмич. производная $\zeta(s)$:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1).$$

М. ф. предложена Х. Мангольдтом (H. Mangoldt) 1894). *С. А. Степ.*

МАННА ТЕОРЕМА — теорема, дающая оценку плотности суммы двух последовательностей. Пусть $A = \{0, a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$ — возрастающая последовательность целых чисел и

$$A(n) = \sum_{0 < a_i \leqslant n, a_i \in A} 1.$$

Плотностью последовательности A наз. величина

$$d(A) = \inf_n \frac{A(n)}{n}.$$

Арифметической суммой двух последовательностей A и B наз. последовательность $C = A + B$, состоящая из всевозможных сумм $c = a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$. М. т. утверждает, что

$$d(A+B) \geqslant \min\{d(A) + d(B), 1\}.$$

Из М. т. следует, что если A — последовательность положительной плотности, меньшей 1, а B — другая последовательность положительной плотности, то от сложения A с B плотность увеличивается. Другим важным следствием М. т. является утверждение: всякая последовательность положительной плотности есть базис натурального ряда. М. т. существенно усиливает аналогичную теорему Шнирельмана (см. *Шнирельмана метод*). Доказана Х. Манном [1].

Лит.: [1] Mann H. B., «Ann. Math.», 1942, v. 43, p. 523–527; [2] Ostmann H.-H., Additive Zahlentheorie, Bd 1–2, B., 1956; [3] Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962. *Б. М. Бредихин.*

МАННА — УИТНИ КРИТЕРИЙ — критерий для проверки гипотезы H_0 об однородности двух выборок $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$, все $n+m$ элементов к-рых взаимно независимы и подчиняются непрерывным распределениям. Этот критерий, предложенный Х. Манном и Д. Уитни [1], построен на статистике

$$U = W - \frac{1}{2} m(m+1) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij},$$

где W — статистика *Вилкоксона критерия*, предназначенного для проверки этой же гипотезы H_0, численно равная сумме рангов элементов второй выборки в общем вариационном ряду, а

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i < Y_j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, статистика U считает общее число тех случаев, в к-рых элементы второй выборки превосхо-

ят элементы первой выборки. Из определения статистики U следует, что если гипотеза H_0 верна, то

$$\mathsf{E}U = \frac{nm}{2}, \quad \mathsf{D}U = \frac{nm(n+m+1)}{12}, \qquad (*)$$

л, кроме того, эта статистика обладает всеми свойствами статистики Вилкоксона W, в том числе асимптотической нормальностью с параметрами (*), чем и следует пользоваться при использовании М.— У. к. на практике, если только $\min\{n, m\} > 25$.

Лит.: Mann H. B., Whitney D. R., «Ann. Math. Statistics», 1947, v. 18, p. 50–60.

М. С. Никулин.

МАРГИНАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, частное распределение,— распределение случайной величины или множества случайных величин, рассматриваемых в качестве компоненты или множества компонент нек-рого случайного вектора (см. *Многомерное распределение*) с заданным распределением. Иначе, М. р. является проекцией распределения случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_n)$ на любую ось x_1 или подпространство, определяемое переменными $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, и полностью определяется по распределению этого вектора. Напр., если $F(x_1, x_2)$ — функция распределения X (X_1, X_2) в $\mathbb{R}^2$, то функция распределения X_1 равна $F_1(x_1) = F(x_1, +\infty)$; если двумерное распределение абсолютно непрерывно и $p(x_1, x_2)$ — его плотность, то плотность М. р. X_1 равна

$$p_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2)\, dx_2.$$

Аналогично вычисляется М. р. для любой компоненты или множества компонент вектора $X = (X_1, \ldots, X_n)$ при любом n. Если распределение X нормально, то все М. р. также нормальны. В том случае, когда величины $X_1, \ldots, X_n$ взаимно независимы, по М. р. компонент $X_1, \ldots, X_n$ вектора X однозначно определяется его распределение:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$$

и

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i).$$

Аналогично определяется М. р. по отношению к распределению вероятностей, заданному на произведении пространств, более общих, чем числовая прямая.

Лит.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., [2 изд.], М., 1975.

А. В. Прохоров.

МАРКОВА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА – см. *Наивысшей алгебраической степени точности квадратурная формула.*

МАРКОВА КРИТЕРИЙ наилучшего интегрального приближения — теорема, позволяющая в нек-рых случаях эффективно указать многочлен и величину наилучшего интегрального приближения функции $f(x)$. Установлен А. А. Марковым в 1898 (см. [1]). Пусть $\{\varphi_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — система непрерывных на отрезке $[a, b]$ линейно независимых функций, а непрерывная функция $\psi(x)$ меняет знак в точках $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ интервала (a, b) и такова, что

$$\int_a^b \varphi_k(x)\, \operatorname{sign} \psi(x)\, dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если для многочлена

$$P_n^*(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^* \varphi_k(x)$$

разность $f(x) - P_n^*(x)$ меняет знак в точках x_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, и только в них, то $P_n^*(x)$ является многочле-

ном наилучшего интегрального приближения функции $f(x)$ и

$$\inf_{\{c_k\}} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right| dx =$$

$$\int_a^b \left| f(x) - P_n^*(x) \right| dx = \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sign} \psi(x)\, dx \right|.$$

Для системы функций $1, \cos x, \ldots, \cos nx$, рассматриваемых на отрезке $[0, \pi]$, в качестве функции $\psi(x)$ можно взять $\cos(n+1)x$; для системы $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,— функцию $\sin(n+1)x$, а для системы $1, x, \ldots, x^n$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, можно положить $\psi(x) = -\sin(n+2)\arccos x$.

Лит.: [1] Марков А. А., Избр. труды, М.— Л., 1948; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [3] Даугавет И. К., Введение в теорию приближения функций, Л., 1977.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

МАРКОВА НЕРАВЕНСТВО для производной от алгебраического многочлена — неравенство, дающее оценку максимального значения этой производной через наибольшее значение самого многочлена. Пусть $P_n(x)$ — алгебраич. многочлен степени не выше n и

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |P_n(x)|.$$

Тогда для любого x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{2Mn^2}{b-a}. \qquad (*)$$

Неравенство (*) получено А. А. Марковым в 1889 (см. [1]). М. н. является точным. Так, если $a=-1$, $b=1$,

$$P_n(x) = \cos n \arccos x,$$

то

$$M = 1, \quad P_n'(1) = n^2$$

и в неравенстве (*) достигается знак равенства.

Для производной любого порядка $r \leqslant n$ из М. н. следует соотношение

$$|P_n^{(r)}(x)| \leqslant \frac{M2^r}{(b-a)^r} n^2 (n-1)^2 \ldots (n-r+1)^2, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

к-рое при $r \geqslant 2$ уже не является точным. Точное неравенство для $P_n^{(r)}(x)$ получено В. А. Марковым [2]:

$$|P_n^{(r)}(x)| \leqslant \frac{M2^r n^2 (n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-(r-1)^2)}{(b-a)^r (2r-1)!!}.$$

Лит.: [1] Марков А. А., Избр. труды, М.— Л., 1948; [2] Марков В. А., О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПБ, 1892; [3] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

МАРКОВА ПРОБЛЕМА СПЕКТРА — проблема теории чисел, возникшая в связи с задачей о распределении нормированных значений арифметич. минимумов неопределенных бинарных квадратичных форм. Пусть

$$f = f(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

$$\delta(f) = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$$

и

$$m(f) = \inf |f(x, y)|, \quad x, y \in \mathbb{Z}^2, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

— однородный арифметич. минимум формы f. Число

$$\mu = \mu(f) = \sqrt{\delta(f)}/m(f), \quad \mu \leqslant +\infty,$$

наз. постоянной Маркова формы f. Множество $M = \{\mu(f)\}$, когда f пробегает все действительные неопределенные квадратичные формы, наз. спектром Маркова. Постоянную и спектр Маркова определяют по-разному, в частности А. А. Марков в

[1] рассматривал множество $\{2/\mu(f)\}$. Известно, что $\mu(f)$ — инвариант луча F классов форм, т. е. множества

$$F=\{f' \mid f' \simeq \tau f(\mathbb{Z}),\ \tau\in\mathbb{R},\ \tau>0\},$$

т. к. $\mu(f')=\mu(f)=\mu(F)$. Каждому лучу классов F взаимно однозначно сопоставляется двоякобесконечная (бесконечная в обе стороны) последовательность

$$I_F=\{\ldots,\ a_{-1},\ a_0,\ a_1,\ \ldots \mid a_k\in\mathbb{Z}\}$$

так, что если обозначить

$$\mu_k(I_F)=[a_k;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots]+[0;\ a_{k-1},\ a_{k-2},\ \ldots]$$

(знак $[;\ \ldots]$ — обозначение цепной дроби), то

$$\mu(F)=\sup_{k\in\mathbb{Z}}\mu(I_F).$$

Проблему Маркова можно сформулировать следующим образом: 1) описать спектр Маркова M, 2) для каждого $\mu\in M$ описать множество форм $f=f(x,\ y)$ (или лучей классов F), для к-рых $\mu(f)=\mu(F)=\mu$. Проблема решена А. А. Марковым для начальной части спектра M, определяемой условием $\mu(f)<3$. Эта часть спектра является дискретным множеством

$$M\cap[0,\ 3)=\left\{\sqrt{9-\frac{4}{m^2}}\ \middle|\ m^2+n^2+p^2=\right.$$
$$\left.=3mnp,\ m,\ n,\ p\in N\right\}=\left\{\sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \frac{\sqrt{221}}{5},\ \ldots\right\}$$

с единственной предельной точкой 3 (точка конденсации множества M); m, n, p пробегают все целые положительные решения диофантова уравнения Маркова

$$m^2+n^2+p^2=3mnp,\quad m\geqslant n\geqslant p>0. \qquad (*)$$

При этом каждой точке этой части спектра отвечает ровно один луч классов F_m, задаваемый формой Маркова $f_m=f_m(x,\ y)$, с условием

$$\mu(F_m)=\sqrt{9-\frac{4}{m^2}}.$$

Решение $(m,\ n,\ p)$ диофантова уравнения $(*)$ наз. тройкой Маркова; число m — числом Маркова. Форма Маркова f_m следующим образом сопоставляется числу Маркова $m=\max(m,\ n,\ p)$: пусть $r,\ s\in\mathbb{Z}$ определены условиями

$$nr\equiv p\ (\mathrm{mod}\ m),\quad 0\leqslant r<m,$$
$$r^2+1=ms;$$

тогда, по определению,

$$f_m=f_m(x,\ y)=x^2+\left(3-\frac{2r}{m}\right)xy+\frac{s-3r}{m}y^2.$$

Множество M — замкнуто, и имеется такое число $\mu_0=4{,}5278\ldots$, что $[\mu_0,\ +\infty)\subset M$, и к μ_0 примыкает интервал смежности множества M.

Проблема Маркова тесно связана с проблемой Лагранжа — Гурвица рациональных приближений к действительному числу θ. Величина

$$\lambda=\lambda(\theta)=\sup\tau,\quad \lambda\leqslant+\infty,$$

где точная верхняя граница берется по всем $\tau\in\mathbb{R}$, $\tau>0$, для к-рых неравенство

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{\tau q^2}$$

имеет бесконечное множество решений $p,\ q\in\mathbb{Z}$, $q>0$, наз. постоянной Лагранжа. Множество $L=\{\lambda(\theta)\mid\theta\in\mathbb{R}\}$ наз. спектром Лагранжа. Первым результатом в теории спектра Лагранжа естественно считать теорему Лагранжа: все

подходящие дроби разложения числа θ в цепную дробь удовлетворяют неравенству

$$\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

Если $\theta'\sim\theta$, т. е. если

$$\theta'=\frac{a\theta+b}{c\theta+d},\quad a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z},\quad |ad-bc|=1,$$

то $\lambda(\theta')=\lambda(\theta)=\lambda(\Theta)$, где $\Theta=\{\theta'|\theta'\sim\theta\}$ — класс эквивалентных чисел. Если θ разложено в цепную дробь $\theta=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$, то

$$\lambda(\theta)=\lim_{k\to\infty}\sup\lambda_k(\theta),\quad \lambda_k(\theta)=[0;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots]+$$
$$+[a_k;\ a_{k-1},\ \ldots,\ a_1],\qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Таким образом, проблему Лагранжа — Гурвица можно сформулировать так: 1) описать спектр Лагранжа L; 2) для каждого $\lambda\in L$ описать множество чисел θ (или классов Θ), для к-рых $\lambda(\theta)=\lambda(\Theta)=\lambda$.

Для $\lambda(\theta)<3$ эта задача сводится к проблеме Маркова, причем

$$Z\cap[0,\ 3)=M\cap[0,\ 3),$$

и каждому $\lambda\in L$, $\lambda<3$, отвечает ровно один класс чисел θ, описываемых формой Маркова f_m. Доказано, что L, как и M,— замкнутое множество, что $L\subset M$, но $L\neq M$, что

$$Z\cap[\mu_0,\ +\infty]=M\cap[\mu_0,\ +\infty]=[\mu_0,\ +\infty],$$

причем к μ_0 примыкает интервал смежности множества L. Исследования по структуре L и по связи L и M описаны в [6]. Об обобщениях и аналогах проблемы спектра Маркова и о «явлении изоляции» см. [2], [3], [7].

Лит.: [1] Марков А. А., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 5, с. 7 -51; [2] Кассельс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961; [3] Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.— Л., 1947; [4] Горшков Д. С., «Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР», 1977, т. 67, с. 39—85; [5] Фрейман Г. А., Диофантовы приближения и геометрия чисел. (Задача Маркова), Калинин, 1975; [6] Малышев А. В., «Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР», 1977, т. 67, с. 5—38; [7] Венков Б. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1945, т. 9, с. 429—94.

А. В. Малышев.

МАРКОВА СИСТЕМА ФУНКЦИЙ — система линейно независимых действительных непрерывных функций $\{\varphi_\nu(x)\}$, $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n\ (n\leqslant\infty)$, заданных на конечном отрезке $[a,\ b]$ и удовлетворяющих условию: для любого конечного $k\leqslant n$ функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_k(x)$ образуют на интервале $(a,\ b)$ *Чебышева систему.*

Примеры М. с. ф.:

а) $1,\ x,\ x^2,\ \ldots$— относительно любого отрезка $[a,\ b]$;

б) $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots$— относительно отрезка $[0,\ \pi]$;

в) $\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots$— относительно отрезка $[0,\ \pi]$.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

МАРКОВА СПЕКТР — см. *Маркова проблема спектра.*

МАРКОВА ФОРМА — неопределенная бинарная квадратичная форма $f=f(x,\ y)$, для к-рой постоянная Маркова $\mu(f)<3$ (см. *Маркова проблема спектра*).

А. В. Малышев.

МАРКОВА ЦЕПИ НУЛЕВОЙ КЛАСС СОСТОЯНИЙ — множество K состояний однородной цепи Маркова $\xi(t)$ с множеством состояний S такое, что:

$$\mathsf{P}\{\exists t>0:\xi(t)=j\mid\xi(0)=i\}=1$$

для любых $i,\ j\in K$,

$$p_{il}(t)=\mathsf{P}\{\xi(t)=l\mid\xi(0)=i\}=0$$

для любых $i\in K$, $l\in S\setminus K$, $t>0$ и

$$\mathsf{E}\,\tau_{ii}=\infty \qquad (*)$$

для любого $i \in K$, где τ_{ii} — время возвращения в состояние i:

$$\tau_{ii} = \min \{t > 0 : \xi(t) = i \,(\xi(0) = i)\}$$

для цепей Маркова с дискретным временем и

$$\tau_{ii} = \inf \{t > 0 : \xi(t) = i \,(\xi(0) = i,\ \xi(0+) \neq i)\}$$

для цепей Маркова с непрерывным временем.

Как и в случае положительного класса состояний (когда (*) заменено условием $\mathsf{E}\tau_{ii} < \infty$), состояния, принадлежащие одному нулевому классу, обладают рядом общих свойств; напр., для любых состояний i, j из нулевого класса K

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) \quad 0.$$

Примером цепи Маркова, множество состояний к-рой образует один нулевой класс, является симметричное случайное блуждание на множестве целых чисел:

$$\xi(0) = 0, \quad \xi(t) - \xi(t-1) + \eta(t), \quad t = 1, 2, \ldots,$$

где $\eta(1)$, $\eta(2)$, . . . — независимые случайные величины,

$$\mathsf{P}\{\eta(i) = 1\} - \mathsf{P}\{\eta(i) - -1\} - {}^1/_2, \quad i \quad 1, 2, \ldots$$

Лит.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964. *А. М. Зубков.*

МАРКОВА ЦЕПИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ КЛАСС СОСТОЯНИЙ — такое множество K состояний однородной цепи Маркова $\xi(t)$ с множеством состояний S, что для переходных вероятностей

$$p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$$

цепи $\xi(t)$ выполняются условия:

$$\sup_t p_{ij}(t) > 0 \text{ при любых } i,\ j \in K,$$

$p_{il}(t) = 0$ при любых $i \in K$, $l \in S \setminus K$, $t > 0$ и

$$\mathsf{E}\tau_{ii} < \infty \text{ при любом } i \in K,$$

где τ_{ii} — время возвращения в состояние i:

$$\tau_{ii} \quad \min \{t > 0 : \xi(t) - i \,(\xi(0) = i)\}$$

для цепей Маркова с дискретным временем и

$$\tau_{ii} - \inf \{t > 0 : \xi(t) = i \,(\xi(0) = i,\ \xi(0+) \neq i)\}$$

для цепей Маркова с непрерывным временем. В случае $\mathsf{E}\tau_{ii} = \infty$ класс K наз. нулевым классом состояний.

Состояния, принадлежащие одному и тому же положительному классу K, обладают рядом общих свойств. Напр., в случае дискретного времени при любых i, $j \in K$ существует

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^{n} p_{ij}(t) - p_j^* > 0;$$

если

$$d_i = \max \{d : \mathsf{P}\{\tau_{ii} \text{ делится на } d\} - 1\}$$

— период состояния i, то $d_i = d_j = d$ для любых i, $j \in K$ и d наз. периодом класса K; для любого $i \in K$ существует

$$\lim_{t \to \infty} p_{ii}(td) - dp_i^* > 0.$$

Цепь Маркова с дискретным временем, все состояния к-рой образуют один положительный класс периода 1, является примером *Маркова цепи эргодической*.

Лит.: [1] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956. *А. М. Зубков.*

МАРКОВА ЦЕПЬ — *марковский процесс* с конечным или счетным множеством состояний. Теория М. ц. возникла на основе исследований А. А. Маркова, к-рый в 1907 положил начало изучению последовательностей зависимых испытаний и связанных с ними сумм случайных величин [1].

Пусть пространство состояний — множество натуральных чисел N или его конечное подмножество. Пусть $\xi(t)$ — состояние М. ц. в момент времени t. Основным для М. ц. является *марковское свойство*, к-рое для М. ц. с дискретным временем (т. е. в случае, когда время t принимает лишь целые неотрицательные значения) определяется следующим образом: для любых t, $j \in N$, любых целых неотрицательных $t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t$ и любых натуральных $i_1, i_2, \ldots, i_k$ имеет место равенство

$$\mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_k) = i_k\} = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(t_k) = i_k\}. \quad (1)$$

Марковское свойство (1) можно переформулировать следующим образом. Момент времени t и связанные с ним события вида $\{\xi(t) = j\}$ назовем «настоящим» процесса; события, определяемые значениями $\xi(u)$ с $u < t$, – «прошлым» процесса; события, определяемые значениями $\xi(u)$ с $u > t$, – «будущим» процесса. Тогда свойство (1) равносильно следующему: для любого $t \in N$ при фиксированном «настоящем» $\xi(t) = j$ любые «прошлое» A и «будущее» B события условно независимы, т. е.

$$\mathsf{P}\{A \cap B \mid \xi(t) = j\} = \mathsf{P}\{A \mid \xi(t) = j\}\,\mathsf{P}\{B \mid \xi(t) = j\}.$$

Для вероятностного описания М. ц. $\xi(t)$ большую роль играют *переходные вероятности*

$$\mathsf{P}\{\xi(t+1) = j \mid \xi(t) = i\}. \quad (2)$$

В случае, когда переходные вероятности (2) не зависят *от* t, М. ц. наз. о д н о р о д н о й (во времени); в противном случае — н е о д н о р о д н о й. Далее рассматриваются лишь однородные М. ц. Пусть

$$p_{ij} = \mathsf{P}\{\xi(t+1) = j \mid \xi(t) = i\}.$$

Матрица $\mathsf{P} = \|p_{ij}\|$ с элементами p_{ij} наз. м а т р и ц е й п е р е х о д н ы х в е р о я т н о с т е й. Вероятность любой траектории $\xi(k) = i_k$, $k = 0, 1, \ldots, t$, выражается через переходные вероятности p_{ij} и начальное распределение $\mathsf{P}\{\xi(0) = i\}$ следующим образом:

$$\mathsf{P}\{\xi(k) = i_k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ t\} = \mathsf{P}\{\xi(0) = i_0\} \prod_{k=1}^{t} p_{i_{k-1} i_k}.$$

Наряду с переходными вероятностями p_{ij} в М. ц. рассматриваются также переходные вероятности $p_{ij}(t)$ за t шагов:

$$p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t_0 + t) = j \mid \xi(t_0) = i\}.$$

Эти переходные вероятности удовлетворяют *Колмогорова — Чепмена уравнению*

$$p_{ij}(t_1 + t_2) = \sum_k p_{ik}(t_1)\, p_{kj}(t_2).$$

С помощью переходных вероятностей можно произвести следующую классификацию состояний. Два состояния i и j наз. с о о б щ а ю щ и м и с я, если найдутся такие $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, что $p_{ij}(t_1) > 0$ и $p_{ji}(t_2) > 0$. Состояние k наз. н е с у щ е с т в е н н ы м, если найдется такое состояние l, что $p_{kl}(t_1) > 0$ для нек-рого $t_1 \geqslant 1$ и $p_{lk}(t) = 0$ для всех $t \in N$. Все остальные состояния наз. с у щ е с т в е н н ы м и. Таким образом, все множество состояний М. ц. разбивается на несущественные и существенные состояния. Множество всех существенных состояний разбивается на непересекающиеся классы сообщающихся состояний так, что любые два состояния из одного класса сообщаются между собой, а для любых двух состояний i и j из разных классов $p_{ij}(t) \equiv 0$, $p_{ji}(t) \equiv 0$. М. ц., все состояния к-рой составляют один класс сообщающихся

состояний, наз. неразложимой (см. *Маркова цепь неразложимая*); в противном случае М. ц. наз. разложимой (см. *Маркова цепь разложимая*). Если множество состояний конечно, то разбиение его на эти классы в значительной степени определяет асимптотич. свойства М. ц. Напр., для конечной неразложимой М. ц. всегда существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T}p_{ij}(t)=p_j, \tag{3}$$

причем $\sum_j p_j=1$. Если, кроме того, М. ц. непериодическая, т. е. при нек-ром t_0 для всех $t\geqslant t_0$ и всех состояний i и j $p_{ij}(t)>0$ (см. также *Маркова цепь периодическая*), то имеет место более сильное утверждение

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=p_j \tag{4}$$

(см. также *Маркова цепь эргодическая*).

Если множество состояний М. ц. счетно, то ее асимптотич. свойства зависят от более тонких свойств классов сообщающихся состояний. Ряд

$$\sum_t p_{ii}(t) \tag{5}$$

расходится или сходится сразу для всех состояний данного класса. Класс состояний наз. возвратным, если для любого состояния i этого класса ряд (5) расходится, и невозвратным, если ряд (5) сходится. В возвратном классе с вероятностью 1 М. ц. возвращается в любое свое состояние, в невозвратном классе вероятность возвращения меньше 1. Если среднее время возвращения в возвратном классе конечно, то класс наз. положительным; в противном случае класс наз. нулевым (см. *Маркова цепи положительный класс состояний*, *Маркова цепи нулевой класс состояний*). Если i и j принадлежат одному положительному классу состояний, то существует предел (3), а в непериодическом случае и предел (4). Если j принадлежит нулевому классу состояний или несущественно, то $p_{ij}(t)\to 0$, $t\to\infty$.

Пусть $f(\cdot)$ — действительная функция, определенная на состояниях М. ц. $\xi(t)$. Если М. ц. неразложима и ее состояния образуют положительный класс, то для сумм

$$\eta_t=\sum_{u=0}^{t}f(\xi(u))$$

справедлива центральная предельная теорема:

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{\eta_t-At}{\sqrt{Bt}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du \tag{6}$$

при нек-рых A и $B>0$. Для выполнения (6) достаточно дополнительно потребовать $\mathsf{D}\eta_t\sim Bt$, $t\to\infty$, $B>0$.

Если время t принимает любые значения из $[0,\infty)$, то М. ц. является М. ц. с непрерывным временем, к-рая определяется аналогично с помощью марковского свойства (1). Обычно для М. ц. с непрерывным временем требуют дополнительно, чтобы существовали конечные правые производные $\left.\frac{dp_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}=q_{ij}$, к-рые наз. плотностями вероятностей перехода. Для конечной М. ц. с непрерывным временем из уравнения Колмогорова — Чепмена можно получить две системы дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\sum_k p_{ik}(t)\,q_{kj} \tag{7}$$

и

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_k q_{ik} p_{kj}(t), \tag{8}$$

к к-рым присоединяются начальные условия $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. При нек-рых дополнительных предположениях системы уравнений (7) и (8) справедливы и для счетных М. ц.

Если М. ц. с непрерывным временем имеет *стационарное распределение* $\mathsf{P}\{\xi(t) = i\} = p_i$ (т. е. распределение $\xi(t)$, не зависящее от времени t), то это распределение $\{p_i\}$ удовлетворяет следующей системе линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\sum p_i = 1, \\ &\sum_i p_i q_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

М. ц. широко используются при решении различных прикладных задач. Напр., в теории массового обслуживания для расчета распределения вероятностей числа занятых приборов в системе $M|M|n$ с отказами (т. е. в системе, состоящей из n приборов с пуассоновским потоком требований и показательным законом времени обслуживания) используется конечная М. ц. с непрерывным временем, состояниями $0, 1, \ldots, n$ и со следующими плотностями вероятностей перехода:

$$q_{i,\,i+1} = \lambda, \quad 0 \leqslant i < n, \quad q_{i,\,i-1} = i\mu, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$q_{ii} = -(\lambda + i\mu), \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad q_{nn} = -n\mu, \quad q_{ij} = 0,$$

если $|i-j| > 1$ (здесь λ — интенсивность пуассоновского потока требований, μ^{-1} — среднее время обслуживания). С помощью (9) в этом случае определяется следующее стационарное распределение числа занятых приборов:

$$p_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} \Big/ \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$p_i = 0, \quad i > n,$$

к-рое наз. распределением Эрланга.

См. также *Маркова цепь сложная*, *Маркова цепь возвратная*, *Поглощающее состояние*, *Стохастическая матрица*, *Переход с запрещениями*.

Лит.: [1] Марков А. А., «Изв. Петерб. АН» (6), 1907, т. 1, № 3, с. 61—80; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [4] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967.

Б. А. Севастьянов.

МАРКОВА ЦЕПЬ ВОЗВРАТНАЯ — цепь Маркова, в к-рой случайная траектория $\xi(t)$, выходящая из любого состояния $\xi(0) = i$, с вероятностью 1 возвращается когда-нибудь в это же состояние. В терминах переходных вероятностей $p_{ij}(t)$ возвратность цепи Маркова с дискретным временем эквивалентна расходимости при любом i ряда

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_{ii}(t).$$

В М. ц. в. траектория $\xi(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, $\xi(0) = i$, с вероятностью 1 возвращается в состояние i бесконечное число раз. В М. ц. в. нет несущественных состояний, а все существенные состояния разбиваются на возвратные классы. Примером М. ц. в. может служить симметричное случайное блуждание по целочисленной решетке прямой или плоскости. В симметричном блуждании по прямой частица из положения x переходит в положения $x \pm 1$ с вероятностями $^1/_2$; в симметричном блуждании по плоскости частица из точки (x, y) с вероятностями $^1/_4$ переходит в одну из четырех соседних точек $(x \pm 1, y)$, $(x, y \pm 1)$. В этих примерах частица, начавшая блуждание из какой-либо точки, с вероятностью 1 возвращается в эту точку. Симметрич-

ное блуждание по целочисленной решетке трехмерного пространства, когда вероятности перехода из (x, y, z) в соседние точки $(x\pm1, y, z)$, $(x, y\pm1, z)$, $(x, y, z\pm1)$ равны $1/6$, невозвратно. В этом случае вероятность возвращения частицы в начальную точку равна приближенно 0,35.

Лит.: [1] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 1, М., 1967.

Б. А. Севастьянов.

МАРКОВА ЦЕПЬ НЕРАЗЛОЖИМАЯ — цепь Маркова, переходные вероятности $p_{ij}(t)$ к-рой обладают следующим свойством: для любых состояний i и j существует такой момент времени t_{ij}, что $p_{ij}(t_{ij})>0$. Неразложимость цепи Маркова равносильна неразложимости матрицы переходных вероятностей $\mathbf{P}=\|p_{ij}\|$ для цепей Маркова с дискретным временем и матрицы плотностей вероятностей перехода $Q=\|q_{ij}\|$, $q_{ij}=\left.\frac{dp_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$, для цепей Маркова с непрерывным временем. Множество состояний неразложимой цепи Маркова состоит из одного класса сообщающихся состояний.

Б. А. Севастьянов.

МАРКОВА ЦЕПЬ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ — неразложимая цепь Маркова $\xi(n)$, $n=1, 2, \ldots$, однородная во времени, в к-рой каждое состояние i имеет период, больший единицы, т. е.

$$d_i = \text{Н. о. д.}\{n: \mathbf{P}\{\xi(n)=i \mid \xi(0)=i\}>0\}>1.$$

В *Маркова цепи неразложимой* все состояния имеют одинаковые периоды. Если $d=1$, то цепь Маркова наз. непериодической.

В. П. Чистяков.

МАРКОВА ЦЕПЬ РАЗЛОЖИМАЯ — цепь Маркова, переходные вероятности $p_{ij}(t)$ к-рой обладают следующим свойством: существуют такие состояния $i\neq j$, что $p_{ij}(t)=0$ для всех $t\geqslant0$. Разложимость цепи Маркова равносильна разложимости матрицы переходных вероятностей $\mathbf{P}=\|p_{ij}\|$ для цепей Маркова с дискретным временем и матрицы плотностей вероятностей перехода $Q=\|q_{ij}\|$, $q_{ij}=\left.\frac{dp_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$, для цепей Маркова с непрерывным временем. Множество состояний М. ц. р. либо содержит несущественные состояния, либо состоит более чем из одного класса сообщающихся состояний.

Б. А. Севастьянов.

МАРКОВА ЦЕПЬ СЛОЖНАЯ — последовательность случайных величин ξ_n, обладающая следующими свойствами:

1) множество значений ξ_n конечно или счетно,

2) при любом n и любых значениях $i_0, i_1, \ldots, i_n$

$$\mathbf{P}\{\xi_n=i_n \mid \xi_0=i_0, \xi_1=i_1, \ldots, \xi_{n-s}=i_{n-s}, \ldots, \xi_{n-1}=i_{n-1}\}=\mathbf{P}\{\xi_n=i_n \mid \xi_{n-s}=i_{n-s}, \ldots, \xi_{n-1}=i_{n-1}\}. \quad (*)$$

Сложная цепь Маркова, удовлетворяющая (*), наз. s-сложной. При $s=1$ условие (*) является обычным *марковским свойством*. Изучение s-сложных цепей Маркова можно свести к изучению обычных цепей Маркова. Для этого рассматривается последовательность случайных величин η_n, значения к-рых находятся во взаимно однозначном соответствии со значениями вектора

$$(\xi_{n-s+1}, \xi_{n-s+2}, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n).$$

Последовательность случайных величин η_n образует обычную *Маркова цепь*.

Лит.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956.

В. П. Чистяков.

МАРКОВА ЦЕПЬ ЭРГОДИЧЕСКАЯ — однородная по времени цепь Маркова $\xi(t)$, обладающая следующим свойством: существуют (не зависящие от i) величины

$$p_j=\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t), \quad \sum_j p_j=1, \quad (1)$$

где

$$p_{ij}(t) = \mathsf{P}\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$$

— *переходные вероятности*. Распределение $\{p_j\}$ на множестве состояний цепи $\xi(t)$ наз. стационарным распределением: если $\mathsf{P}\{\xi(0) = j\} = p_j$ при всех j, то $\mathsf{P}\{\xi(t) = j\} = p_j$ при всех $t \geqslant 0$ и j. Вместе с основным свойством цепи Маркова

$$\mathsf{P}\{\xi(t) = j\} = \sum_i \mathsf{P}\{\xi(0) = i\}\, p_{ij}(t)$$

это позволяет находить $\{p_j\}$, не вычисляя пределов в (1).

Пусть

$$\tau_{jj} = \min\{t \geqslant 1 : \xi(t) = j \mid (\xi(0) = j)\}$$

— момент первого возвращения в состояние j (для цепи Маркова с дискретным временем), тогда

$$\mathsf{E}\tau_{jj} = p_j^{-1};$$

аналогичное (более сложное) соотношение имеет место для цепи Маркова с непрерывным временем.

Траектории М. ц. э. удовлетворяют эргодич. теореме: если $f(\cdot)$ — функция на множестве состояний цепи $\xi(t)$, то в случае дискретного времени

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{t\to\infty} n^{-1}\sum_{t=0}^{n} f(\xi(t)) = \sum_j p_j f(j)\right\} = 1,$$

в случае непрерывного времени первая сумма в левой части заменяется интегралом.

Цепь Маркова, для к-рой существуют такие $\rho < 1$ и $C_{ij} < \infty$, что при всех i, j, t

$$|p_{ij}(t) - p_j| \leqslant C_{ij}\rho^t, \tag{2}$$

наз. геометрически эргодической. Достаточным условием для геометрич. эргодичности М. ц. э. является условие Дёблина (см., напр., [1]), к-рое в рассматриваемом здесь случае дискретных (конечных или счетных) цепей Маркова может быть сформулировано так: существуют такие $n < \infty$ и состояние j, что $\inf\limits_i p_{ij}(n) = \delta > 0$. Если выполнено условие Дёблина, то для констант в (2) справедливо соотношение $\sup\limits_{i,j} C_{ij} = C < \infty$.

Необходимым и достаточным условием геометрич. эргодичности счетной цепи Маркова с дискретным временем является следующее (см. [3]): существуют такие числа $f(j)$, $q < 1$ и конечное множество B состояний цепи, что

$$\mathsf{E}\{f(\xi(1)) \mid \xi(0) = i\} \leqslant q f(i), \quad i \notin B,$$

$$\max_{i\in B} \mathsf{E}\{f(\xi(1)) \mid \xi(0) = i\} < \infty.$$

Лит.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [3] Попов Н. Н., «Докл. АН СССР», 1977, т. 234, № 2, с. 316—19. *А. М. Зубков.*

МАРКОВСКИЙ МОМЕНТ — понятие, используемое в теории вероятностей для случайных величин, обладающих свойством независимости от «будущего». Точнее, пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — нек-рое измеримое пространство с выделенным на нем неубывающим семейством $(\mathcal{F}_t)$, $t \in T$, σ-подалгебр $\mathcal{F}$ ($T = [0, \infty]$ в случае непрерывного времени и $T = \{0, 1, \ldots\}$ в случае дискретного времени). Случайная величина $\tau = \tau(\omega)$ со значениями в $T \cup \{+\infty\}$ наз. марковским моментом (относительно семейства $(\mathcal{F}_t)$, $t \in T$), если при каждом $t \in T$ событие $\{\tau(\omega) \leqslant t\}$ принадлежит $\mathcal{F}_t$. В случае дискретного времени это эквивалентно тому, что для любого $n \in \{0, 1, \ldots\}$ событие $\{\tau(\omega) = n\}$ принадлежит $\mathcal{F}_n$.

Примеры. 1) Пусть $X(t)$, $t \in T$, — действительный случайный процесс, заданный на $(\Omega, \mathcal{F})$, и

$\mathcal{F}_t = \sigma\{\omega : X(s),\ s \leqslant t\}$. Тогда случайные величины

$$\tau(\omega) = \inf\{t \geqslant 0 : X(t) \in B\}$$

и

$$\sigma(\omega) = \inf\{t > 0 : X(t) \in B\},$$

т. е. моменты (первого и первого после $+0$) достижения (борелевского) множества B, являются М. м. (в случае $\{\cdot\} = \varnothing$ полагают $\inf \varnothing = \infty$).

2) Если $W(t)$, $t \geqslant 0$, — стандартный винеровский процесс, то М. м.

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0 : W(t) \geqslant a\}, \quad a > 0,$$

имеет *плотность распределения вероятностей*

$$p(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\, e^{-a^2/2t}.$$

При этом $\mathsf{P}\{\tau < \infty\} = 1$, но $\mathsf{E}\tau = \infty$.

3) Случайная величина

$$\gamma = \inf\{t > 0 : X(s) \in B,\ \ s \geqslant t\},$$

являющаяся первым моментом, после к-рого процесс X_t остается в множестве B, является примером немарковского момента (случайной величины, зависящей от «будущего»).

С помощью понятия М. м. формулируется строго марковское свойство *марковских процессов*. М. м. и моменты остановки (т. е. конечные М. м.) играют важную роль в общей теории случайных процессов и статистическом последовательном анализе.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

А. Н. Ширяев.

МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС, процесс без последействия,— *случайный процесс*, эволюция к-рого после любого заданного значения временного параметра t не зависит от эволюции, предшествовавшей t, при условии, что значение процесса в этот момент фиксировано (короче: «будущее» и «прошлое» процесса не зависят друг от друга при известном «настоящем»).

Определяющее М. п. свойство принято наз. марковским; впервые оно было сформулировано А. А. Марковым [1]. Однако уже в работе Л. Башелье [2] можно усмотреть попытку трактовать броуновское движение как М. п., попытку, получившую обоснование после исследований Н. Винера (N. Wiener, 1923). Основы общей теории М. п. с непрерывным временем были заложены А. Н. Колмогоровым [3].

Марковское свойство. Имеются существенно отличающиеся друг от друга определения М. п. Одним из наиболее распространенных является следующее. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задан случайный процесс $X(t)$, $t \in T$, со значениями из измеримого пространства $(E, \mathscr{B})$, где T — подмножество действительной оси $\mathbb{R}$. Пусть N_t (соответственно N^t) есть σ-алгебра в Ω, порожденная величинами $X(s)$ при $s \leqslant t$ ($s \geqslant t$), где $s \in T$. Другими словами, N_t (соответственно N^t) — это совокупность событий, связанных с эволюцией процесса до момента t (начиная с t). Процесс $X(t)$ наз. марковским процессом, если (почти наверное) для всех $t \in T$, $\Lambda_1 \in N_t$ и $\Lambda_2 \in N^t$ выполняется марковское свойство:

$$\mathsf{P}\{\Lambda_1 \Lambda_2 \mid X(t)\} = \mathsf{P}\{\Lambda_1 \mid X(t)\}\, \mathsf{P}\{\Lambda_2 \mid X(t)\} \qquad (1)$$

или, что то же самое, если для любых $t \in T$ и $\Lambda \in N^t$

$$\mathsf{P}\{\Lambda \mid N_t\} = \mathsf{P}\{\Lambda \mid X(t)\}. \qquad (2)$$

М. п., для к-рого T содержится в множестве натуральных чисел, наз. *Маркова цепью* (впрочем, последний термин чаще всего ассоциируется со случаем не более чем счетного E). Если T является интервалом в $\mathbb{R}$,

а E не более чем счетно, М. п. наз. цепью Маркова с непрерывным временем. Примеры М. п. с непрерывным временем доставляются диффузионными процессами и процессами с независимыми приращениями, в том числе пуассоновским и винеровским.

В дальнейшем для определенности речь будет идти только о случае $T=[0, \infty)$. Формулы (1) и (2) дают ясную интерпретацию принципа независимости «прошлого» и «будущего» при известном «настоящем», но основанное на них определение М. п. оказалось недостаточно гибким в тех многочисленных ситуациях, когда приходится рассматривать не одно, а набор условий типа (1) или (2), отвечающих различным, хотя и согласованным определенным образом, мерам P. Такого рода соображения привели к принятию следующего определения (см. [9], [11]).

Пусть заданы:

а) измеримое пространство $(E, \mathscr{B})$, где σ-алгебра $\mathscr{B}$ содержит все одноточечные множества в E;

б) измеримое пространство (Ω, F), снабженное семейством σ-алгебр $F_t^s \subset F$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$, таких, что $F_t^s \subset F_v^u$, если $[s, t] \subset [u, v]$;

в) функция («траектория») $x_t = x_t(\omega)$, определяющая при любых $t \in [0, \infty)$ и $\omega \in [0, t]$ измеримое отображение (Ω, F_t^v) в $(E, \mathscr{B})$;

г) для каждых $s \geqslant 0$ и $x \in E$ вероятностная мера $\mathsf{P}_{s, x}$ на σ-алгебре F_∞^s такая, что функция $P(s, .\,; t, B) = \mathsf{P}_{s, .}\{x_t \in B\}$ измерима относительно $\mathscr{B}$, если $s \in [0, t]$ и $B \in \mathscr{B}$.

Набор $X(t) = (x_t, F_t^s, \mathsf{P}_{s, x})$ наз. (необрывающимся) марковским процессом, заданным в $(E, \mathscr{B})$, если $\mathsf{P}_{s, x}$-почти наверное

$$\mathsf{P}_{s, x}\{\Lambda \mid F_t^s\} = \mathsf{P}_{t, x_t}\{\Lambda\}, \tag{3}$$

каковы бы ни были $0 \leqslant s \leqslant t$ и $\Lambda \in N^t$. Здесь Ω — пространство элементарных событий, $(E, \mathscr{B})$ — фазовое пространство или пространство состояний, $P(s, x, t, B)$ — *переходная функция* или вероятность перехода процесса $X(t)$. Если E наделено топологией, а $\mathscr{B}$ — совокупность борелевских множеств в E, то принято говорить, что М. п. задан в E. Обычно в определение М. п. включают требование, чтобы $P(s, x; s, \{x\}) \equiv 1$, и тогда $\mathsf{P}_{s, x}\{\Lambda\}$ с $\Lambda \in F_\infty^s$ истолковывается как вероятность Λ при условии, что $x_s = x$.

Возникает вопрос: всякую ли марковскую переходную функцию $P(s, x; t, B)$, заданную в измеримом пространстве $(E, \mathscr{B})$, можно рассматривать как переходную функцию нек-рого М. п. Ответ положителен, если, напр., E является сепарабельным локально компактным пространством, а $\mathscr{B}$ — совокупностью борелевских множеств в E. Более того, пусть E — полное метрич. пространство и пусть

$$\lim_{h \downarrow 0} \alpha_\varepsilon(h) = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, где

$$\alpha_\varepsilon(h) = \sup\{P(s, x; t, V_\varepsilon(x)) : x \in E, \quad 0 < t - s < h\},$$

а $V_\varepsilon(x)$ — дополнение ε-окрестности точки x. Тогда соответствующий М. п. можно считать непрерывным справа и имеющим пределы слева (т. е. таковыми можно выбрать его траектории). Существование же непрерывного М. п. обеспечивается условием $\alpha_\varepsilon(h) = o(h)$ при $h \downarrow 0$ (см. [9], [11]).

В теории М. п. основное внимание уделяется однородным (по времени) процессам. Соответствующее определение предполагает заданной систему объектов а) — г) с той разницей, что для фигурировавших в

ее описании параметров s и u теперь допускается лишь значение 0. Упрощаются и обозначения:

$$\mathsf{P}_x = \mathsf{P}_{0x}, \quad F_t = F_t^0, \quad P(t, x, B) = P(0, x; t, B),$$
$$x \in E, \quad t \geqslant 0, \quad B \in \mathscr{B}.$$

Далее, постулируется однородность пространства Ω, т. е. требуется, чтобы для любых $\omega \in \Omega$ и $s \geqslant 0$ существовало такое $\omega' \in \Omega$, что $x_t(\omega') = x_{t+s}(\omega)$ при $t \geqslant 0$. Благодаря этому на σ-алгебре N, наименьшей из σ-алгебр в Ω, содержащих любое событие вида $\{\omega : x_s \in B\}$, задаются операторы временного сдвига θ_t, к-рые сохраняют операции объединения, пересечения и вычитания множеств и для к-рых

$$\theta_t \{\omega : x_s \in B\} = \{\omega : x_{t+s} \in B\},$$

где $s, t \geqslant 0$, $B \in \mathscr{B}$.

Набор $X(t) = (x_t, F_t, \mathsf{P}_x)$ наз. (**необрывающимся**) **однородным марковским процессом**, заданным в $(E, \mathscr{B})$, если P_x-почти наверное

$$\mathsf{P}_x \{\theta_t \Lambda \mid F_t\} = \mathsf{P}_{x_t} \{\Lambda\} \tag{4}$$

для $x \in E$, $t \geqslant 0$ и $\Lambda \in N$. Переходной функцией процесса $X(t)$ считается $P(t, x, B)$, причем, если нет специальных оговорок, дополнительно требуют, чтобы $P(0, x, \{x\}) = 1$. **Полезно иметь в виду, что при проверке (4) достаточно рассматривать лишь множества** Λ вида $\Lambda = \{\omega : x_s \in B\}$, где $s \geqslant 0$, $B \in \mathscr{B}$, и что в (4) всегда F_t можно заменить σ-алгеброй $\overline{F}_t$, равной пересечению пополнений F_t по всевозможным мерам $\mathsf{P}_x \{x \in E\}$. Нередко в $\mathscr{B}$ фиксируют вероятностную меру μ («начальное распределение») и рассматривают марковскую случайную функцию $(x_t, F_t, \mathsf{P}_\mu)$, где P_μ — мера на F_∞, заданная равенством

$$\mathsf{P}_\mu \{\cdot\} = \int \mathsf{P}_x \{\cdot\} \, \mu(dx).$$

М. п. $X(t) = (x_t, F_t, \mathsf{P}_\lambda)$ наз. **прогрессивно измеримым**, если при каждом $t > 0$ функция $x(s, \omega) = x_s(\omega)$ индуцирует измеримое отображение $([0, t] \times \Omega, \mathscr{B}_t \times F_t)$ в $(E, \mathscr{B})$, где $\mathscr{B}_t$ есть σ-алгебра борелевских подмножеств в $[0, t]$. Непрерывные справа М. п. прогрессивно измеримы. Существует способ сводить неоднородный случай к однородному (см. [11]), и в дальнейшем речь будет идти об однородных М. п.

Строго марковское свойство. Пусть в измеримом пространстве $(E, \mathscr{B})$ задан М. п. $X(t) = (x_t, F_t, \mathsf{P}_x)$. Функция $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ наз. *марковским моментом*, если $\{\omega : \tau \leqslant t\} \in F_t$ для всех $t \geqslant 0$. При этом множество $\Lambda \subset \Omega_\tau = \{\omega : \tau < \infty\}$ относят к семейству F_τ, если $\Lambda \cap \{\omega : \tau < t\} \in F_t$ при $t \geqslant 0$ (чаще всего F_τ интерпретируют как совокупность событий, связанных с эволюцией $X(t)$ до момента τ). Для $\Lambda \in N$ полагают

$$\theta_\tau \Lambda = \bigcup_{t \geqslant 0} [\theta_t \Lambda \cap \{\omega : \tau = t\}].$$

Прогрессивно измеримый М. п. X наз. **строго марковским процессом** (с. м. п.), если для любого марковского момента τ и всех $t \geqslant 0$, $x \in E$ и $\Lambda \in N$ соотношение

$$\mathsf{P}_x \{\theta_\tau \Lambda \mid F_\tau\} = \mathsf{P}_{x_\tau} \{\Lambda\} \tag{5}$$

(**строго марковское свойство**) выполняется P_x-почти наверное на множестве Ω_τ. При проверке (5) достаточно рассматривать лишь множества вида $\Lambda = \{\omega : x_s \in B\}$, где $s \geqslant 0$, $B \in \mathscr{B}$; в этом случае $\theta_\tau \Lambda = \{\omega : x_{s+\tau} \in B\}$. С. м. п. является, напр., любой непрерывный справа феллеровский М. п. в топологич. пространстве E. М. п. наз. **феллеровским марковским процессом**, если функция

$$P^t f(\cdot) = \int f(y) \, P(t, \cdot; dy)$$

непрерывна всякий раз, когда f непрерывна и ограничена.

В классе с. м. п. выделяются те или иные подклассы. Пусть марковская переходная функция $P(t, x, B)$, заданная в метрическом локально компактном пространстве E, стохастически непрерывна:

$$\lim_{t \downarrow 0} P(t, x, U) = 1$$

для любой окрестности U каждой точки $x \in E$. Тогда если операторы P^t переводят в себя класс непрерывных и обращающихся в 0 в бесконечности функций, то функции $P(t, x, B)$ отвечает стандартный М. п. X, т. е. непрерывный справа с. м. п., для к-рого 1) $F_t = \bar{F}_t$ при $t \in [0, \infty)$ и $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$ при $t \in [0, \infty)$ и 2) $\lim_{n \to \infty} x_{\tau_n} = x_\tau$ P_x-почти наверное на множестве $\{\omega : \tau < \infty\}$, где $\tau = \lim_{n \to \infty} \tau_n$, а $\tau_n (n \geqslant 1)$ — неубывающие с ростом n марковские моменты.

Обрывающийся марковский процесс. Нередко физич. системы целесообразно описывать с помощью необрывающегося М. п., но лишь на временном интервале случайной длины. Кроме того, даже простые преобразования М. п. могут привести к процессу с траекториями, заданными на случайном интервале (см. *Функционал* от марковского процесса). Руководствуясь этими соображениями, вводят понятие обрывающегося М. п.

Пусть $\tilde{X}(t) = (\tilde{x}_t, \tilde{F}_t, \tilde{\mathsf{P}}_x)$ — однородный М. п. в фазовом пространстве $(\tilde{E}, \tilde{B})$, имеющий переходную функцию $\tilde{P}(t, x, B)$, и пусть существуют точка $e \in \tilde{E}$ и функция $\zeta : \Omega \to [0, \infty]$ такие, что $\tilde{x}_t(\omega) = e$ при $\zeta(\omega) \leqslant t$ и $\tilde{x}_t(\omega) \neq e$ в противном случае (если нет специальных оговорок, считают $\zeta > 0$). Новая траектория $x_t(\omega)$ задается лишь для $t \in [0, \zeta(\omega))$ посредством равенства $x_t(\omega) = \tilde{x}_t(\omega)$, а F_t определяется как след $\tilde{F}_t$ в множестве $\{\omega : \zeta > t\}$.

Набор $X(t) = (x_t, \zeta, F_t, \tilde{\mathsf{P}}_x)$, где $x \in E = \tilde{E} \setminus \{e\}$, наз. обрывающимся марковским процессом (о. м. п.), полученным из $\tilde{X}(t)$ с помощью обрыва (или убивания) в момент ζ. Величина ζ наз. моментом обрыва, или временем жизни, о. м. п. Фазовым пространством нового процесса служит $(E, \mathscr{B})$, где $\mathscr{B}$ есть след σ-алгебры $\tilde{\mathscr{B}}$ в E. Переходная функция о. м. п. — это сужение $\tilde{P}(t, x, B)$ на множество $t \geqslant 0$, $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$. Процесс $X(t)$ наз. строго марковским процессом, или стандартным марковским процессом, если соответствующим свойством обладает $\tilde{X}(t)$. Необрывающийся М. п. можно рассматривать как о. м. п. с моментом обрыва $\zeta \equiv \infty$. Неоднородный о. м. п. определяется аналогичным образом. *М. Г. Шур.*

Марковские процессы и дифференциальные уравнения. М. п. типа броуновского движения тесно связаны с дифференциальными уравнениями параболич. типа. Переходная плотность $p(s, x, t, y)$ диффузионного процесса удовлетворяет при нек-рых дополнительных предположениях обратному и прямому дифференциальным уравнениям Колмогорова:

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \sum_{k=1}^{n} a_k(s, x) \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^{n} b_{kj}(s, x) \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial s} + L(s, x) p = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} (a_k(t, y) p) + \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j} (b_{kj}(t, y) p) = L^*(t, y) p. \tag{7}$$

Функция $p(s, x, t, y)$ есть функция Грина уравнений (6) — (7), и первые известные способы построения диффузионных процессов были основаны на теоремах существования этой функции для дифференциальных уравнений (6) — (7). Для однородного по времени процесса оператор $L(s, x) = L(x)$ на гладких функциях совпадает с характеристич. оператором М. п. (см. *Переходных операторов полугруппа*).

Математич. ожидания различных функционалов от диффузионных процессов служат решениями соответствующих краевых задач для дифференциального уравнения (1). Пусть $\mathsf{E}_{s,x}(\cdot)$ — математич. ожидание по мере $\mathsf{P}_{s,x}$. Тогда функция $\mathsf{E}_{s,x}\varphi(X(T)) = u_1(s, x)$ удовлетворяет при $s<T$ уравнению (6) и условию $u_1(T, x) = \varphi(x)$.

Аналогично, функция

$$u_2(s, x) = \mathsf{E}_{s,x}\int_s^T f(t, X(t))\,dt$$

удовлетворяет при $s<T$ уравнению

$$\frac{\partial u_2}{\partial s} + L(s, x)u_2 = -f(s, x)$$

и условию $u_2(T, x) = 0$.

Пусть τ — момент первого достижения границы ∂D области $D\subset\mathbb{R}^n$ траекторией процесса $X(t)$, $\tau\wedge T = \min(\tau, T)$. Тогда при нек-рых условиях функция

$$u_3(s, x) = \mathsf{E}_{s,x}\int_s^{\tau\wedge T} f(t, X(t))\,dt + \mathsf{E}_{s,x}\varphi(\tau\wedge T, X(\tau\wedge T))$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial s} + L(s, x)u = -f$$

и принимает значения φ на множестве

$$\Gamma = \{s < T,\ x\in\partial D\}\cup\{s = T,\ x\in D\}.$$

Решение 1-й краевой задачи для общего линейного параболич. уравнения 2-го порядка

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s} + L(s, x)u + c(s, x)u = -f(s, x),\\ u|_\Gamma = \varphi\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

при довольно общих предположениях может быть записано в виде

$$u(s, x) = \mathsf{E}_{s,x}\int_s^{\tau\wedge T}\exp\left\{\int_s^v c(t, X(t))\,dt\right\}\times f(v, X(v))\,dv + \mathsf{E}_{s,x}\left\{\exp\left\{\int_s^{\tau\wedge T} c(t, X(t))\,dt\right\}\times\varphi(\tau\wedge T, X(\tau\wedge T))\right\}. \qquad (9)$$

В случае, когда оператор L и функции c, f не зависят от s, аналогичное (9) представление возможно и для решения линейного эллиптич. уравнения. Точнее, функция

$$u(x) = \mathsf{E}_x\int_0^\tau\exp\left\{\int_0^v c(X(t))\,dt\right\} f(X(v))\,dv + \mathsf{E}_x\left\{\exp\left\{\int_0^\tau c(X(t))\,dt\right\}\varphi(X(\tau))\right\} \qquad (10)$$

при нек-рых предположениях есть решение задачи

$$L(x)u + c(x)u = -f(x),\quad u|_{\partial D} = \varphi. \qquad (11)$$

В случае, когда оператор L вырождается ($\det b(s, x) = 0$) или граница ∂D недостаточно «хорошая», граничные значения могут и не приниматься функциями (9), (10) в отдельных точках *или на целых множествах*. Понятие регулярной граничной точки для оператора L имеет вероятностную интерпретацию. В регулярных точках границы граничные значения достигаются

функциями (9), (10). Решение задач (8), (11) позволяет изучать свойства соответствующих диффузионных процессов и функционалов от них.

Существуют методы построения М. п., не опирающиеся на построение решений уравнений (6), (7), напр. метод *стохастических дифференциальных уравнений*, абсолютно непрерывная замена меры и др. Это обстоятельство вместе с формулами (9), (10) позволяет вероятностным путем строить и изучать свойства краевых задач для уравнения (8), а также свойства решений соответствующего эллиптич. уравнения.

Так как решение стохастического дифференциального уравнения нечувствительно к вырождению матрицы $b(s, x)$, то вероятностные методы применялись для построения решений вырождающихся эллиптических и параболических дифференциальных уравнений. Распространение принципа усреднения Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова на стохастические дифференциальные уравнения позволило с помощью (9) получить соответствующие результаты для эллиптических и параболических дифференциальных уравнений. Нек-рые трудные задачи исследования свойств решений уравнений такого типа с малым параметром при старшей производной оказалось возможным решить с помощью вероятностных соображений. Вероятностный смысл имеет и решение 2-й краевой задачи для уравнения (6). Постановка краевых задач для неограниченной области тесно связана с возвратностью соответствующего диффузионного процесса.

В случае однородного по времени процесса (L не зависит от s) положительное решение уравнения $L^*q=0$ с точностью до мультипликативной постоянной совпадает при нек-рых предположениях со стационарной плотностью распределения М. п. Вероятностные соображения оказываются полезными и при рассмотрении краевых задач для нелинейных параболич. уравнений.

Р. З. Хасьминский.

Лит.: [1] Марков А. А., «Изв. физ.-мат. об-ва Казан. ун-та», 1906, т. 15, № 4, с. 135—56; [2] Bachelier L., «Ann. scient. École norm. supér.», 1900, v. 17, p. 21—86; [3] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1931, Bd 104, S. 415—458; рус. пер. — «Успехи матем. наук», 1938, в. 5, с. 5—41; [4] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, пер. с англ., М., 1964; [5] Feller W., «Ann. Math.», 1954, v. 60, p. 417—36; [6] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 149—55; [7] Хант Дж.-А., Марковские процессы и потенциалы, пер. с англ., М., 1962; [8] Деллашери К., Емкости и случайные процессы, пер. с франц., М., 1975; [9] Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., 1959; [10] его же, Марковские процессы, М., 1963; [11] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973; [12] Фрейдлин М. И., в кн.: Итоги науки. Теория вероятностей, математическая статистика.— Теоретическая кибернетика. 1966, М., 1967, с. 7—58; [13] Хасьминский Р. З., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 1, с. 3—25; [14] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И., Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., 1979; [15] Blumenthal R. M., Getoor R. K., Markov processes and potential theory, N.Y.— L., 1968; [16] Getoor R. K., Markov processes: Ray processes and right processes, B., 1975; [17] Кузнецов С. Е., «Теория вероятн. и ее примен.», 1980, т. 25, в. 2, с. 389—93.

МАРКОВСКИЙ СТАЦИОНАРНЫЙ ПРОЦЕСС — марковский процесс, являющийся *стационарным случайным процессом*. М. с. п., отвечающий однородной марковской *переходной функции*, существует тогда и только тогда, когда существует стационарное начальное распределение $\mu(A)$, отвечающее этой функции, т. е. $\mu(A)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu(A) = \int_X \mathsf{P}(x, t, A)\,\mu(dx).$$

Если фазовое пространство процесса X — конечное множество, то стационарное начальное распределение существует всегда, независимо от того, рассматривается процесс с дискретным ($t=0, 1, 2, \ldots$) или непрерывным временем. Для процесса с дискретным временем и счетным множеством X условие существования

стационарного распределения найдено А. Н. Колмогоровым [1]: для этого необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой класс сообщающихся состояний $Y \subset X$, что математич. ожидание времени попадания из $y_1 \in Y$ в $y_2 \in Y$ было конечно для любых $y_i \in Y$. Этот критерий обобщается на строго марковские процессы с произвольным фазовым пространством X: для существования стационарного процесса достаточно, чтобы существовал компакт $K \subset X$ такой, что математич. ожидание времени достижения K из x конечно для всех $x \in X$. Справедливо следующее достаточное условие существования М. с. п. в терминах *Ляпунова стохастических функций*: если существует функция $V(x) \geqslant 0$, для к-рой $LV(x) \leqslant -1$ при $x \notin K$, то М. с. п., отвечающий марковской переходной функции $\mathsf{P}(x, t, A)$, существует.

В случае, когда стационарное начальное распределение μ единственно, соответствующий стационарный процесс эргодичен. В этом случае среднее по Чезаро переходных вероятностей слабо сходится к μ. При нек-рых дополнительных условиях

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}(x, t, A) = \mu(A) \quad \text{(слабо)}.$$

Стационарное начальное распределение удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова $L^*\mu = 0$, где L^* — оператор, сопряженный к инфинитезимальному оператору процесса. Напр., для диффузионных процессов L^* — сопряженный оператор к производящему дифференциальному оператору процесса. В этом случае μ имеет плотность p, относительно лебеговой меры, удовлетворяющую уравнению $L^*p = 0$. Для одномерного случая это уравнение решается в квадратурах.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний, М., 1937; [2] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [3] Севастьянов Б. А., «Теория вероятн. и ее примен.», 1957, т. 2, в. 1, с. 106–16. *Р. З. Хасьминский.*

МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО для действительного случайного процесса $X(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$, — свойство, заключающееся в том, что для любого набора $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$ моментов времени из T и любого борелевского множества B с вероятностью 1

$$\mathsf{P}\{X(t_{n+1}) \in B \mid X(t_n), \ldots, X(t_1)\} = \mathsf{P}\{X(t_{n+1}) \mid X(t_n)\}, \qquad (*)$$

т. е. условное распределение вероятностей для $X(t_{n+1})$ относительно величин $X(t_n), \ldots, X(t_1)$ совпадает (почти наверное) с условным распределением $X(t_{n+1})$ относительно $X(t_n)$. Это свойство интерпретируется как независимость «будущего» $X(t_{n+1})$ от «прошлого» $(X(t_{n-1}), \ldots, X(t_1))$ при фиксированном «настоящем» $X(t_n)$. Случайные процессы, удовлетворяющие свойству (*), наз. *марковскими процессами*. М. с. допускает (при нек-рых дополнительных предположениях) усиление, известное под названием «строго марковского свойства». В случае дискретного времени $T = \{1, 2, \ldots\}$ строгое марковское свойство, справедливое всегда для (марковских) последовательностей, удовлетворяющих свойству (*), означает, что для всякого момента остановки τ (относительно семейства (F_n), $n \geqslant 1$, с $F_n = \sigma\{\omega : X(1), \ldots, X(n)\}$ с вероятностью единица

$$\mathsf{P}\{X(\tau+1) \in B \mid X(\tau), \ldots, X(1)\} = \mathsf{P}\{X(\tau+1) \in B \mid X(\tau)\}.$$

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973. *А. Н. Ширяев.*

МАРТИНА ГРАНИЦА в теории марковских процессов — граница фазового пространства марковского процесса или его образа в нек-ром компакте, строящемся по схеме, подобной схеме Мартина (см. [1]).

Впервые вероятностное истолкование конструкции Мартина было предложено Дж. Дубом (см. [4]), рассмотревшим случай дискретных цепей Маркова.

Пусть $P(t, x, B)$ — *переходная функция* однородного марковского процесса $X = (x_t, \zeta, F_t, \mathsf{P}_x)$, заданного в сепарабельном локально компактном пространстве E, где $t \geqslant 0$, $x \in E$, $B \in \mathscr{B}$, а $\mathscr{B}$ — семейство борелевских множеств в E. Функция $g_\alpha(x, y) \geqslant 0$, определенная для $\alpha \geqslant 0$, $x \in E$, $y \in E$ и являющаяся $(\mathscr{B} \times \mathscr{B})$-измеримой при фиксированном α, наз. функцией Грина, если для каждого $B \in \mathscr{B}$

$$\int_B g_\alpha(x, y)\, m(dy) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} P(t, x, B)\, dt,$$

где m — нек-рая мера на $\mathscr{B}$. Чтобы избежать неоднозначности в определении функции Грина, в нем дополнительно требуют, напр., чтобы при любом выборе непрерывной функции $f(x)$ с компактным носителем функция

$$g_\alpha(\cdot) = \int_E f(x)\, g_\alpha(x, \cdot)\, m(dx)$$

была Λ-непрерывной (последнее означает существование непрерывной слева по t функции $F(t, \omega)$ такой, что

$$\mathsf{P}_x\{F(t, \omega) \neq g_\alpha(x_t(\omega))\} = 0, \quad x \in E, \quad t > 0).$$

Фиксируя меру γ на $\mathscr{B}$ и постулируя наличие функции Грина, определяют ядро Мартина

$$K_y^\alpha(x) = g_\alpha(x, y)\, q^{-1}(y),$$

где

$$q(y) = \int_E g_0(x, y)\, \gamma(dx)$$

(при этом приходится ввести нек-рые ограничения, обеспечивающие, в частности, положительность и Λ-непрерывность $q(y)$). Если γ — единичная мера, сосредоточенная в нек-рой точке, а X — *винеровский процесс*, обрываемый в момент первого выхода из нек-рой области, то определение $K_y^0(x)$ сводится к своему аналогу из [1]. При широких условиях устанавливается существование компакта $\mathscr{E}$ («компакта Мартина»), мер $K_y^\alpha(dx)$ на $\mathscr{B}$ $(\alpha \geqslant 0,\ y \in \mathscr{E})$ и отображения $i: E \to \mathscr{E}$, для к-рых а) $i(E)$ плотно в $\mathscr{E}$; б) функции

$$K_y^\alpha(f) = \int_{\mathscr{E}} f(x)\, K_y^\alpha(dx)$$

разделяют точки и непрерывны в $\mathscr{E}$, если f пробегает совокупность непрерывных в E функций с компактными носителями, и в) мера $K_{i(y)}^\alpha(dx)$ совпадает с $K_y^\alpha(x) m(dx)$, если $y \in E$. Граница множества $i(E)$ в $\mathscr{E}$ наз. границей Мартина или границей-выходом (при изучении разложений эксцессивных мер возникает двойственный объект — граница-вход, см. [3], [4]).

Для описания свойств компакта $\mathscr{E}$ удобно привлечь h-процессы в смысле Дуба: каждой *эксцессивной функции* h можно соотнести переходную функцию

$$P^h(t, x, B) = h^{-1}(x) \int_B h(y)\, P(t, x, dy)$$

в $(E^h, \mathscr{B}^h)$, где $E^h = \{x \in E : 0 < h(x) < \infty\}$, а $\mathscr{B}^h = \{A \in \mathscr{B} : A \subset E^h\}$; соответствующий ей марковский процесс и есть h-процесс. Все h-процессы вместе с X реализуются на одном и том же пространстве элементарных событий, так что они различаются лишь семействами мер $\{\mathsf{P}_x^h\}$. В $\mathscr{E}$ строится модификация x_t — непрерывный слева процесс z_t $(0 < t \leqslant \zeta)$, для к-рого $\mathsf{P}_x^h\{z_t \neq i(x_t)\} = 0$, если

$h \in L^1(\gamma)$. В топологии компакта $\mathscr{E}$ предел $z_\zeta = \lim\limits_{t \uparrow \zeta} z_t$ существует почти наверное.

Существует множество $U \subset \mathscr{E}$ («пространство выходов») такое, что, во-первых, $\mathsf{P}_x^h\{z_\zeta \in U\} = 1$ для всех $h(x)$ указанного вида, во-вторых, мера K_y^α при $y \in U$ имеет плотность $k_y^\alpha(\cdot)$ по мере $m\ (\alpha \geqslant 0)$, причем в качестве $k_y^0(\cdot)$ можно взять эксцессивную функцию со спектральной мерой, совпадающей с сосредоточенной в y единичной мерой, и, в-третьих, $h(x)$ допускает единственное интегральное разложение вида

$$h(x) = \int_U k_y^0(x)\, \mu(dx).$$

Мера μ из этого разложения наз. спектральной мерой функции h; она дается формулой

$$\mu(B) = \int_E h(x)\, \mathsf{P}_x^h\{z_\zeta \in B\}\, \gamma(dx),$$

где B — борелевское множество в $\mathscr{E}$.

В теории марковских процессов применяются и компактификации иных типов, особенно такие, в к-рых любая функция вида

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_E f(y)\, P(t, x, dy), \quad \alpha > 0, \quad x \in E,$$

допускает непрерывное продолжение для достаточно обширного набора функций f.

Лит.: [1] Martin R. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, p. 137—72; [2] Motoo M., в кн.: Proceedings of the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 2, pt 2, Berk.—Los Ang., 1967, p. 75—110; [3] Kunita H., Watanabe T., там же, p. 131—64; [4] Doob J. L., «J. Math. and Mech.», 1959, v. 8, № 3, 433—58; [5] Watanabe T., «Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A», 1960, v. 33, № 1, p. 39—108; [6] Хант Дж. А., «Математика», 1961, т. 5, № 5, с. 121—49; [7] Хеннекен П. Л., Тортра А., Теория вероятностей и некоторые ее приложения, пер. с франц., М., 1974; [8] Kunita H., Watanabe T., «Ill. J. Math.», 1965, v. 9, № 3, p. 485—526; [9] Шур М. Г., «Тр. Моск. ин-та электронного машиностроения», 1970, в. 5, с. 192—251; [10] Jeulin T., «Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb.», 1978, Bd 42, № 3, S. 229—60; [11] Дынкин Е. Б., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 4, с. 89—152.

М. Г. Шур.

МАРТИНА ГРАНИЦА в теории потенциала — идеальная граница *Грина пространства* Ω (см. также *Кольцевая граница*), позволяющая построить характеристич. представление положительных гармонич. функций на Ω. Пусть Ω — локально компактное, но не компактное топологич. пространство, Φ — семейство непрерывных функций $f: \Omega \to [-\infty, +\infty]$. Теорема Константинеску — Корня [2] утверждает, что существует единственное с точностью до гомеоморфизма компактное пространство $\hat{\Omega}$ со следующими свойствами: 1) Ω есть подпространство $\hat{\Omega}$, всюду плотное в $\hat{\Omega}$; 2) каждая функция $f \in \Phi$ непрерывно продолжается на $\hat{\Omega}$ до функции $\hat{f}$, разделяющей точки идеальной границы $\Delta = \hat{\Omega} \setminus \Omega$ пространства Ω относительно семейства Φ; 3) Ω есть открытое множество в $\hat{\Omega}$.

Пусть теперь Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, или, вообще, пространство Грина; G $G(x, y)$ — *Грина функция* Ω с полюсом $y \in \Omega$, точка $y_0 \in \Omega$ фиксирована. Пространство Мартина, или компактификация Мартина, $\hat{\Omega}$ области Ω получается по теореме Константинеску — Корня в том случае, если в качестве семейства Φ принимается

$$\Phi = \left\{ x \in \Omega \to K(x, y) = \frac{G(x, y)}{G(x, y_0)};\ y \in \Omega \right\},$$

причем, по определению, $K(x_0, y_0) = 1$. М. г. — это соответствующая идеальная граница $\Delta = \hat{\Omega} \setminus \Omega$.

Топология Мартина T — это топология пространства Мартина $\hat{\Omega}$. Пространства Мартина $\hat{\Omega}'$, $\hat{\Omega}''$, соответствующие выбору различных точек $y_0', y_0'' \in \Omega$, гомеоморфны между собой. **Функция** $\hat{K}(\xi, y): \Delta \times \Omega \to [0, +\infty]$, являющаяся продолжением $K(x, y)$, — гармоническая по y и непрерывная по совокупности переменных (ξ, y); $\hat{\Omega}$ — метризуемое пространство. Основная теорема Мартина [1] утверждает: класс всех положительных гармонич. функций $u(y) \geqslant v$ на Ω характеризуется представлением Мартина:

$$u(y) = \int K(\xi, y)\, d\mu(\xi), \qquad (*)$$

где μ — нек-рая положительная мера Радона на Δ. В представлении (*) мера μ определяется по функции u неоднозначно. Гармонич. функция $v \geqslant 0$ наз. минимальной в Ω, если каждая гармонич. функция w такая, что $0 \leqslant w \leqslant v$ в Ω, пропорциональна v. Минимальные гармонич. функции $v \neq 0$ пропорциональны $\hat{K}(\xi, y)$, соответствующие точки $\xi \subset \Delta$ наз. минимальными, множество всех минимальных точек $\Delta_1 \subset \Delta$ наз. минимальной границей Мартина. Подчиняя меру μ в (*) дополнительному условию, чтобы она была сосредоточена на Δ_1, получают каноническое представление Мартина:

$$u(y) = \int \hat{K}(\xi, y)\, d\mu_1(\xi),$$

в к-ром мера $\mu_1 \geqslant 0$ определяется по u однозначно.

Примеры. 1) Если $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < R\}$ — шар радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, то

$$\hat{K}(\xi, y) = \frac{R^{n-2}(R^2 - |y|^2)}{|\xi - y|^n}$$

есть ядро Пуассона, $\hat{\Omega}$ совпадает с евклидовым замыканием, $\hat{\Omega} = \bar{\Omega}$, М. г. Δ есть сфера $\{\xi \in \mathbb{R}^n: |\xi| = R\}$, все точки к-рой минимальные. Представление (*) в этом случае сводится к формуле Пуассона — Герглотца (см. *Интегральное представление аналитической функции, Пуассона интеграл*).

2) М. г. Δ совпадает с евклидовой границей $\Gamma = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ всякий раз, когда Γ есть достаточно гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

3) Если Ω — односвязная плоская область, то М. г. Δ совпадает с множеством *граничных элементов*, или простых концов по Каратеодори. Таким образом, элементы М. г. $\xi \in \Delta$ можно рассматривать как обобщение понятия простых концов для размерностей $n \geqslant 2$.

Лит.: [1] Martin R. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1941, v. 49, p. 137—72; [2] Constantinescu C., Cornea A., Ideale Ränder Riemannscher Flächen, B. [u. a.], 1963; [3] Брело М., О топологиях и границах в теории потенциала, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

МАРТИНГАЛ — стохастическая последовательность $X = (X_t, F_t)$, $t \in T \subseteq [0, \infty)$, заданная на вероятностном пространстве (Ω, F, P) с выделенным на нем неубывающим семейством σ-алгебр $(F_t)_{t \in T}$, $F_s \subseteq F_t \subseteq F$, $s < t$, такая, что $\mathsf{E}|X_t| < \infty$, X_t являются F_t-измеримыми и

$$E(X_t \mid F_s) = X_s \qquad (1)$$

(с вероятностью 1, или почти наверное). В случае дискретного времени $T = \{1, 2, \ldots\}$, в случае непрерывного времени $T = [0, \infty)$. Родственными понятиями являются стохастич. последовательности, образующие субмартингал, для к-рых

$$\mathsf{E}(X_t \mid F_s) \geqslant X_s,$$

и супермартингал, для к-рых

$$\mathsf{E}(X_t \mid F_s) \leqslant X_s.$$

Пример 1. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с $\mathsf{E}\xi_i = 0$, то $X = (X_n, F_n)$ с $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $F_n = \sigma\{\omega: \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ является М., $n \geqslant 1$.

Пример 2. Пусть $Y = (Y_n, F_n)$ — М. (субмартингал), $V = (V_n, F_n)$ — нек-рая предсказуемая последовательность (т. е. V_n являются не только F_n-измеримыми, но и F_{n-1}-измеримыми, $n \geqslant 1$, $F_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ и

$$(VY)_n = V_1 Y_1 + \sum_{k=2}^{n} V_k \Delta Y_k, \quad \Delta Y_k = Y_k - Y_{k-1}.$$

Тогда если величины $(VY)_n$ интегрируемы, то стохастич. последовательность $((VY)_n, F_n)$ образует М. (субмартингал). В частности, если $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, соответствующих схеме Бернулли

$$\mathsf{P}\{\xi_i = \pm 1\} = 1/2, \quad Y_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k,$$
$$F_k = \sigma\{\omega: \xi_1, \ldots, \xi_k\}$$

$$V_k = \begin{cases} 2, & \text{если } \xi_1 = \ldots = \xi_{k-1} = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2}$$

то $((VY)_n, F_n)$ образует М. Эта стохастич. последовательность служит математич. моделью игры, в к-рой игрок выигрывает единицу капитала, если $\xi_k = +1$, и проигрывает единицу, если $\xi_k = -1$, а V_k — величина его ставки в k-й партии. Игровой смысл функции V_k, определяемой равенством (2), состоит в том, что игрок увеличивает ставку вдвое при проигрыше и прекращает игру *при первом выигрыше*. Такая система игры в игровой практике носит название М., что и послужило причиной возникновения математич. термина «мартингал».

Один из основных фактов теории М. состоит в том, что структура М. (субмартингалов) $X = (X_t, F_t)$ сохраняется при случайной замене времени. Точная формулировка этого факта (называемого теоремой о преобразовании свободного выбора) состоит в следующем: если τ_1 и τ_2 — два конечных марковских момента, $\mathsf{P}\{\tau_1 \leqslant \tau_2\} = 1$ и

$$\mathsf{E}\,|X_{\tau_i}| < \infty, \quad \liminf_t \int_{\{\tau_i > t\}} |X_t|\, d\mathsf{P} = 0, \tag{3}$$

то $\mathsf{E}(X_{\tau_2} \mid F_{\tau_1})_{(\geqslant)} = X_{\tau_1}$ (с вероятностью 1, или почти наверное), где

$$F_{\tau_1} = \{A \in F: A \cap \{\tau_1 \leqslant t\} \in F_t, \quad \forall t \in T\}.$$

В качестве частного случая отсюда следует *Вальда тождество*:

$$\mathsf{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_\tau) = \mathsf{E}\xi_1 \mathsf{E}\tau.$$

К числу основных результатов теории М. относятся неравенства Дуба: если $X = (X_n, F_n)$ — неотрицательный субмартингал,

$$X_n^* = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j,$$

$$\|X_n\|_p = (\mathsf{E}\,|X_n|^p)^{1/p}, \quad p \geqslant 1, \quad n \geqslant 1,$$

то

$$\mathsf{P}\{X_n^* \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{E}X_n}{\varepsilon}, \tag{4}$$

$$\|X_n\|_p \leqslant \|X_n^*\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|X_n\|_p, \quad p > 1, \tag{5}$$

$$\|X_n^*\|_p \leqslant \frac{e}{e-1}[1 + \|X_n \ln^+ X_n\|_p], \quad p = 1. \tag{6}$$

Если $X = (X_n, F_n)$ — М., то для случая $p > 1$ справедливы неравенства Буркхольдера (обобщающие неравенства Хинчина и Марцинкевича —

Зигмунда для сумм независимых случайных величин):

$$A_p \| \sqrt{[X]_n} \|_p \leqslant \| X_n \|_p \leqslant B_p \| \sqrt{[X]_n} \|_p, \qquad (7)$$

где A_p и B_p — нек-рые универсальные константы (не зависящие от X и от n), в качестве к-рых можно взять

$$A_p = \left[18 p^{3/2}/(p-1)\right]^{-1}, \quad B_p = 18 p^{3/2}/(p-1)^{1/2}$$

и

$$[X]_n = \sum_{i=1}^{n} (\Delta X_i)^2, \quad X_0 = 0.$$

С учетом (5) из (7) следует, что $(p>1)$

$$A_p \| \sqrt{[X]_n} \|_p \leqslant \| X_n^* \|_p \leqslant \tilde{B}_p \| \sqrt{[X]_n} \|_p, \qquad (8)$$

где

$$\tilde{B}_p = 18 p^{5/2}/(p-1)^{3/2}.$$

На случай p 1 обобщаются неравенства (8). Именно, имеют место неравенства Дэвиса: существуют такие универсальные постоянные A и B, что

$$A \| \sqrt{[X]_n} \|_1 \leqslant \| X_n^* \|_1 \leqslant B \| \sqrt{[X]_n} \|_1.$$

Для доказательства разного рода теорем о сходимости субмартингалов с вероятностью единица ключевую роль играет неравенство Дуба для математического ожидания $\mathsf{E}\beta_n(a, b)$ числа пересечений $\beta_n(a, b)$ субмартингалов $X = (X_n, F_n)$ интервала $[a, b]$ снизу вверх за n шагов

$$\mathsf{E}\beta_n(a, b) \leqslant \frac{\mathsf{E}|X_n| + |a|}{b-a}. \qquad (9)$$

Основной результат о сходимости субмартингалов содержится в теореме Дуба: если $X = (X_n, F_n)$ — субмартингал и $\sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$, то с вероятностью единица существует $\lim_{n\to\infty} X_n (= X_\infty)$ и $\mathsf{E}|X_\infty| < \infty$. Если субмартингал X равномерно интегрируемый, то помимо сходимости с вероятностью единица имеет место и сходимость в смысле L_1, т. е.

$$\mathsf{E}|X_n - X_\infty| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Следствием этого результата является теорема Леви о непрерывности условных математических ожиданий: если $\mathsf{E}|\xi| < \infty$, то

$$\mathsf{E}(\xi \mid F_n) \longrightarrow \mathsf{E}(\xi \mid F_\infty),$$

где $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots$ и $F_\infty = \sigma(\bigcup_n F_n)$.

Естественным обобщением М. является понятие локального мартингала, т. е. такой стохастич. последовательности $X = (X_t, F_t)$, для к-рой найдется последовательность $(\tau_m)_{m\geqslant 1}$ конечных марковских моментов, $\tau_m \uparrow \infty$ (с вероятностью 1 или почти наверное), $m \geqslant 1$, таких, что для каждого $m \geqslant 1$ «остановленные» последовательности

$$X^{\tau_m} = \left(X_{t\wedge\tau_m} I(\tau_m > 0), F_t\right)$$

являются М. В случае дискретного времени каждый локальный М. $X = (X_n, F_n)$ есть мартингальное преобразование, т. е. представим в виде $X_n = (VY)_n$, где V — нек-рая предсказуемая последовательность, а Y — нек-рый М.

Каждый субмартингал $X = (X_t, F_t)$ допускает и притом единственное разложение Дуба — Мейера $X_t = M_t + A_t$, где $M = (M_t, F_t)$ — М., а $A = (A_t, F_t)$ — предсказуемый процесс. В частности, если $m = (m_t, F_t)$ — квадратично-интегрируемый М., то его квадрат $m^2 = (m_t^2, F_t)$ является субмартингалом, для к-рого в его разложении Дуба — Мейера $m_t^2 = M_t + \langle m\rangle_t$ процесс $\langle m\rangle = (\langle m\rangle_t, F_t)$ наз. квадратической характеристикой мартингала m. Для каждого квадратично-интегрируемого М. m и предска-

зуемого процесса $V=(V_t,\ F_t)$ таких, что $\int_0^t V_s^2 d\langle m\rangle_s < \infty$ (с вероятностью 1, или почти наверное), $t>0$, можно определить стохастич. интеграл

$$(Vm)_t = \int_0^t V_s dm_s,$$

к-рый является локальным М. В случае винеровского процесса W $(W_t,\ F_t)$, являющегося квадратично-интегрируемым М., $\langle m\rangle_t = t$ и стохастич. интеграл $(VW)_t$ есть не что иное, как стохастич. интеграл Ито по винеровскому процессу.

В случае непрерывного времени неравенства Дуба, Буркхольдера и Дэвиса также остаются в силе (для процессов непрерывных справа и имеющих пределы слева).

Лит.: [1] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [2] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971. *А. Н. Ширяев.*

МАРЦИНКЕВИЧА ПРОСТРАНСТВО — банахово пространство M_ψ всех измеримых на полуоси $(0,\ \infty)$ функций (классов) с конечной нормой

$$\|x\|_{M_\psi} = \sup_{0<h<\infty} [\psi(h)]^{-1} \int_0^h x^*(s)\,ds, \qquad (1)$$

где $x^*(s)$ — перестановка функции $x(t)$, т. е. невозрастающая непрерывная слева функция, равноизмеримая с $|x(t)|$, а $\psi(t)$ — нек-рая положительная неубывающая на $(0,\ \infty)$ функция, для к-рой $\psi(t)/t$ не возрастает (в частности, $\psi(t)$ — неубывающая вогнутая функция); введено И. Марцинкевичем [1].

Если $\psi(t)$ ограничена снизу и сверху положительными константами, то пространство M_ψ изоморфно L^1. Во всех других случаях оно не сепарабельно. Пространство M_ψ является интерполяционным между L^1 и L^∞ с интерполяционной константой 1.

На пространстве M_ψ определен функционал

$$F(x) = \sup_{0<t<\infty} t\,[\psi(t)]^{-1} x^*(t),$$

к-рый всегда не превосходит $\|x\|_{M_\psi}$. Функционал $F(x)$ не обладает свойствами нормы; он эквивалентен норме $\|x\|_{M_\psi}$ тогда и только тогда, когда при $s>1$

$$\inf_{0<t<\infty} \frac{\psi(st)}{\psi(t)} > 1$$

(в частности, для $\psi(t)=t^\alpha$ при $0<\alpha\leqslant 1$).

Пространство M_ψ возникло впервые в интерполяционной теореме Марцинкевича (с функционалом $F(x)$) и связано с *интерполированием операторов* слабого типа. Оно обладает экстремальным свойством: является наиболее широким среди всех симметричных пространств E, для к-рых фундаментальная функция совпадает с $h/\psi(h)$, т. е. $\|\chi_{(0,\ h)}\|_E = h/\psi(h)$, где $\chi_{(0,\ h)}$ — характеристич. функция интервала $(0,\ h)$. Если

$$\psi(+0)=0,\quad \psi(\infty)=\infty, \qquad (2)$$

то M_ψ изоморфно (изометрично, если ψ вогнута) сопряженному пространству к пространству Лоренца с нормой

$$\|y\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty y^*(s)\,d\tilde{\psi}(s),$$

где $\tilde{\psi}(s)$ — наименьшая вогнутая мажоранта $\psi(s)$. При условиях (2) в M_ψ выделяется подпространство M_ψ^0, состоящее из всех функций из M_ψ, для к-рых

$$\lim_{h\to 0,\ \infty} [\psi(h)]^{-1} \int_0^h x^*(t)\,dt = 0.$$

Если, кроме того, $\lim_{t\to 0} \psi(t)/t = \infty$, то подпространство

M^0_ψ совпадает с замыканием в M_ψ множества всех финитных ограниченных функций. При этом сопряженное к пространству M^0_ψ изоморфно пространству Лоренца и, следовательно, M_ψ изоморфно второму сопряженному пространству к M^0_ψ.

Если $\mathfrak{M}$ — пространство, на σ-алгебре измеримых множеств к-рого определена σ-конечная мера μ, то для каждой измеримой функции $x(m)$ определена ее перестановка $x^*(s)$, $0<s<\infty$, так что можно ввести М. п. $M_\psi(\mathfrak{M}, \mu)$ с нормой (1).

Лит.: [1] Marcinkiewicz J., «C. r. Acad. sci.», 1939, t. 208, p. 1272—73; [2] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов, М., 1978; [3] Стейн И., Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, пер. с англ., М., 1974.

С. Г. Крейн.

МАССА — физическая величина, определяющая инертные и гравитационные свойства материи. В классич. механике инертная масса — постоянный для данного тела коэффициент пропорциональности между силой и ускорением во втором законе Ньютона. Гравитационная масса определяется как коэффициент пропорциональности в законе всемирного тяготения. Согласно принципу эквивалентности инертная и гравитационная М. пропорциональны друг другу, а при обычном выборе систем единиц — равны. В классич. физике М. аддитивна — М. системы равна сумме М. ее частей. В специальной теории относительности М. (т. н. масса покоя) может быть определена как коэффициент пропорциональности в формуле, связывающей импульс тела p и его скорость v

$$p = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где c — скорость света в вакууме. Иногда вводят величину

$$m_{\text{дв.}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

наз. массой движения тела. Можно считать, что в теории относительности импульс и скорость связаны классич. формулой $p = m_{\text{дв.}} v$, но М. зависит от скорости. М. тела связана с его энергией E соотношением $E = mc^2$. В относительности теории М. не аддитивна: М. устойчивой системы меньше суммы М. ее частей на величину $\Delta m = \Delta E/c^2$, где ΔE — энергия связи системы, равная той энергии, к-рая выделилась при образовании системы. Величина Δm наз. дефектом массы. М. покоя всех известных физич. тел неотрицательна (равна нулю, напр. М. покоя фотона), однако иногда телам приписывается отрицательная масса.

Д. Д. Соколов.

МАССА И КОМАССА — сопряженные *нормы* в нек-рых двойственных друг другу векторных пространствах.

1) Масса r-вектора α — число

$$|\alpha|_0 = \inf\left\{\sum_i |\alpha_i| : \alpha = \sum \alpha_i,\ \alpha_i \text{ — простые } r\text{-векторы}\right\}.$$

Комасса r-ковектора ω — число

$$|\omega|_0 = \sup_\alpha \{|\omega \cdot \alpha|,\ \alpha \text{ — простые } r\text{-векторы},\ |\alpha| = 1\}.$$

Здесь $|\cdot|$ — стандартная норма r-вектора, $\omega \cdot \alpha$ — скалярное произведение вектора и ковектора.

Масса $|\alpha|_0$ и комасса $|\omega|_0$ — сопряженные нормы соответственно в пространствах r-векторов $V_{[r]}$ и r-ковекторов $V^{[r]}$, при этом:

а) $|\omega|_0 = \sup_\alpha \{|\omega \cdot \alpha| : |\alpha|_0 = 1\}$,

$|\alpha|_0 = \sup_\omega \{|\omega \cdot \alpha| : |\omega|_0 = 1\}$;

б) $|\alpha|_0 \geq \alpha$, $|\omega|_0 \geq \omega$,

и равенства имеют место в том и только в том случае, когда $\alpha(\omega)$ — простой r-(ко)вектор;

в) $|\alpha\vee\beta|_0\leqslant|\alpha|_0|\beta|_0$, $|\omega\vee\zeta|_0\leqslant B|\omega|_0|\zeta|_0$

для внешних произведений $\vee$, причем для простого поликовектора ω (или ξ) $B=1$, а в общем случае $B=C_r^{r+s}$, если $\omega\in V^{[r]}$, $\xi\in V^{[s]}$;

г) $|\omega\wedge\alpha|_0\leqslant\tilde{B}|\omega|_0|\alpha|_0$

для внутренних произведений $\wedge$, причем $\tilde{B}=1$ при $r\geqslant s$ и $\tilde{B}=C_s^r$ при $r\leqslant s$, $\omega\in V^{[r]}$, $\alpha\in V_{[s]}$.

Эти определения позволяют определить М. и к. для сечений соответствующих расслоений, стандартными слоями к-рых являются $V^{[r]}$ и $V_{[r]}$. Напр., к о м а с с а ф о р м ы ω в области $G\subset E^n$ равна

$$|\omega|_0=\sup\{|\omega(p)|_0,\ p\in G\}.$$

2) М а с с а п о л и э д р а л ь н о й ц е п и $A=\sum a_i\sigma_i^r$ равна

$$|A|=\sum|a_i||\sigma_i^r|,$$

где $|\sigma_i^r|$ — объем клетки σ_i^r. Для произвольной цепи массу (конечную или бесконечную) можно определить несколькими способами, к-рые для бемольной цепи (см. *Бемольная норма*) и диезной цепи (см. *Диезная норма*) дают одно и то же значение массы.

3) К о м а с с а (бемольной, в частности диезной) к о ц е п и X определяется стандартным образом:

$$|X|=\sup_{A\neq0}\frac{|X\cdot A|}{|A|},$$

где A — полиэдральная цепь, $X\cdot A$ — значение коцепи X на цепи A.

Лит. см. при ст. *Бемольная норма*. *М. И. Войцеховский.*

МАССИВНОЕ МНОЖЕСТВО — множество M топологич. пространства X, являющееся пересечением счетного числа открытых плотных в X подмножеств. Если каждое М. м. плотно в X, то X оказывается *Бэра пространством*. *М. И. Войцеховский.*

МАССОВАЯ ПРОБЛЕМА, а л г о р и т м и ч е с к а я п р о б л е м а, проблема нахождения алгоритма для решения бесконечной серии однотипных задач, зависящих от нек-рого параметра. Простейшие примеры М. п.: сложить два данных десятичных числа, умножить два данных числа, проверить, является данное целое число простым или нет, найти производную данной функции, разложить данную функцию в степенной ряд и т. д. Если искомый алгоритм не существует, то говорят, что рассматриваемая М. п. неразрешима.

Проблему нахождения алгоритма, решающего данную М. п., иногда называют п р о б л е м о й р а з р е ш и м о с т и. Этот несколько неудачный термин исторически впервые появился в связи с проблемой распознавания выводимости формул в классическом исчислении предикатов. Вообще же говоря, под проблемой разрешимости данной М. п. естественно считать вопрос о том, разрешима или нет эта М. п., т. е. существует или нет искомый алгоритм.

См. также *Алгоритмическая проблема*. *С. И. Адян.*

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА — понятие, к-рое включает в себя случайный «входящий» поток требований (вызовов, клиентов), нуждающихся в «обслуживании», и механизм (алгоритм), осуществляющий это «обслуживание».

Типичным примером М. о. с. являются автоматич. телефонные станции, на к-рые случайным образом поступают требования — вызовы абонентов (входящий поток вызовов), а механизм обслуживания состоит из

фиксированного числа n каналов (линий) связи, каждый из к-рых остается занятым под обслуживание очередного вызова случайное время, равное длительности разговора. Если все n каналов заняты, то вызов получает «отказ». Механизм (алгоритм) обслуживания может включать в себя также указания, на какую из свободных линий следует направлять очередной вызов, предложение ждать, если требуемый абонент занят, и др.

Существуют и системы другого типа, когда каждое требование непременно должно быть обслужено, как это имеет место, напр., в потоке самолетов, прибывающих в аэропорт для посадки, или в потоке задач (программ), к-рые должны быть реализованы на электронно-вычислительной машине.

«Случайную» часть М. о. с. удобно описывать с помощью случайных последовательностей или процессов. Наиболее простые М. о. с. можно описывать двумерными управляющими случайными последовательностями

$$\{\tau_j^e,\ \tau_j^s;\ 0 \leqslant j < \infty\}$$

неотрицательных случайных величин. Последовательность $\{\tau_j^e\}$ определяет поток вызовов e: она указывает случайные моменты времени

$$\tau_0^e,\ \tau_0^e+\tau_1^e,\ \tau_0^e+\tau_1^e+\tau_2^e,\ \ldots,$$

в к-рые в систему поступают требования, подлежащие обслуживанию. Эквивалентным образом входной поток можно характеризовать случайным процессом $\{e(t);\ t \geqslant 0\}$; значение $e(t)$ указывает число вызовов, поступивших в систему к моменту времени t. Вторая последовательность $\{\tau_j^s\}$ описывает процесс обслуживания s: случайная величина τ_j^s означает время, к-рое тратится на обслуживание вызова с номером j. Обслуженные вызовы выбывают из рассмотрения.

Весьма распространено описание управляющих последовательностей с помощью маркированных точечных процессов, в к-рых τ_j^e представляют собой интервалы между точками, а τ_j^s — марки этих точек.

Задание управляющей последовательности не определяет однозначно поведение системы. Необходимо задать еще алгоритм обслуживания — правило, которое определяет моменты начала обслуживания и поведение вызовов в зависимости от состояния системы.

Многообразие алгоритмов обслуживания порождает чрезвычайно много различных видов систем обслуживания. Ниже приведена классификация простейших из них.

I. Системы с ожиданием (или системы с очередью). Вызовы, поступившие в систему и не принятые немедленно к обслуживанию, накапливаются, образуя «очередь», ожидающую обслуживания. В дальнейшем вызовы обслуживаются в порядке поступления. Система занята в момент времени t, если в этот момент есть очередь или происходит обслуживание очередного вызова. В противном случае система наз. свободной в момент времени t. Различают два типа систем с очередью.

I_1. Обычные системы. Если система свободна, то она начинает действовать (обслуживать очередной вызов) немедленно при поступлении вызова. Если система занята, то обслуживание очередного вызова начинается после окончания обслуживания предыдущего. Такие системы наз. также полнодоступными.

I_2. Системы с автономным обслуживанием. Здесь обслуживание начинается только в моменты времени $0,\ \tau_1^s,\ \tau_1^s+\tau_2^s,\ \ldots$

II. Системы с ограниченной очередью. Считают, что длина $q(t)$ очереди в момент t равна $n \geqslant 1$, если один вызов в этот момент находится на обслуживании и $n-1$ вызовов ждут обслуживания. Пусть $q_n = q(\tau_0^e + \ldots + \tau_{n-1}^e)$ длина очереди в момент прихода n-го вызова (без учета этого вызова). В системах с ограниченной очередью вызов с номером n «получает отказ» и выбывает из рассмотрения, если в момент его прихода длина q_n очереди оказывается равной максимальному допустимому значению $N \geqslant 1$. Число N является существенной характеристикой системы. Если $N = \infty$, то получаются обычные системы с неограниченной очередью.

Рассматривают также системы со случайной ограниченной очередью и системы со случайным ограниченным временем ожидания.

III. Системы с ограниченной очередью в случае $N = 1$ наз. системами с отказами. Для систем с отказами автономное обслуживание обычно не рассматривается.

В каждом из рассмотренных простейших видов систем задание управляющей последовательности полностью определяет эволюцию системы. Другими словами, для каждого элементарного события ω и любого t однозначно определено состояние системы к моменту времени t.

Помимо перечисленных выше типов систем обслуживания, возможны и другие, более сложные системы. Они связаны с более сложными управляющими последовательностями и алгоритмами обслуживания.

IV. Групповой входной поток и групповое обслуживание. Управление такими системами может происходить с помощью четырехмерных управляющих последовательностей

$$\{\tau_j^e,\ \nu_j^e,\ \tau_j^s,\ \nu_j^s;\ j \geqslant 0\},$$

где ν_j^e и ν_j^s — неотрицательны и целочисленны. Смысл новых переменных следующий: вызовы поступают группами объемов $\nu_0^e, \nu_1^e, \ldots$ (соответственно в моменты времени $\tau_0^e, \tau_0^e + \tau_1^e, \ldots$); обслуживание также происходит группами: в первой партии обслуживается ν_0^s вызовов, во второй ν_1^s вызовов и т. д. (объемы этих групп могут быть и меньше, если в очереди не окажется достаточного количества вызовов). При этом на обслуживание k-й партии тратится время τ_k^s.

Для систем с групповым входом и обслуживанием возможны те же алгоритмы обслуживания, к-рые были описаны выше.

V. Многоканальные системы. В таких системах обслуживание может вестись одновременно в $m \geqslant 1$ каналах, так что обслуживание очередного вызова (или партии вызовов при групповом обслуживании) может начаться прежде, чем закончится обслуживание предыдущей. Алгоритмы обслуживания многоканальных систем выглядят аналогично для всех рассмотренных типов обслуживания (каждый канал действует как самостоятельное обслуживающее устройство). Надо лишь дополнить эти алгоритмы указаниями, в какой канал должны направляться вызовы, если свободными оказались одновременно несколько каналов. При этом по-прежнему на обслуживание i-й партии (объема $\leqslant \nu_i^s$) тратится время τ_i^s.

Многоканальная система наз. системой с отказами, если вызовы, в момент прихода к-рых все каналы оказались занятыми, получают отказ и выбывают из рассмотрения.

Иногда для того чтобы упростить природу управляющих последовательностей для многоканальных

систем, удобно задавать не две, а $m+1$ управляющих двумерных последовательностей

$$(\tau_i^e,\ \nu_i^e),\ (\tau_i^{s1},\ \nu_i^{s1}),\ \ldots,\ (\tau_i^{sm},\ \nu_i^{sm}),$$

так что k-й канал обслуживания управляется последовательностью $(\tau_i^{sk},\ \nu_i^{sk})$, $k=1,\ \ldots,\ m$. Напр., τ_i^{sk} есть время обслуживания партии вызовов, к-рая является i-й в k-м канале.

Приведенная классификация охватывает далеко не все виды систем обслуживания. Широкое распространение имеют, напр., системы, у к-рых вызовы подразделяются на два или более типов и одни типы имеют приоритет в обслуживании перед другими (такая ситуация возникает, когда стоимость простоя одних вызовов выше, чем у других). Характеризация таких систем требует введения в рассмотрение нескольких входящих потоков вызовов — по числу типов требований. К системам с приоритетным обслуживанием можно отнести также системы, у к-рых обслуживающее устройство требует перерывов в работе. Закон появления и длительности перерывов можно характеризовать специальным входным потоком.

В литературе по *массового обслуживания теории* рассмотрены и др. специальные виды систем обслуживания. Однако при этом следует иметь в виду, что:

1) основные и наиболее распространенные типы М. о. с. находятся в рамках приведенной выше классификации;

2) методы исследования М. о. с. для различных систем, как правило, отличаются мало и в достаточной степени иллюстрируются методами изучения «основных» систем; в основе этих методов лежит аппарат теории вероятностей, как общие его разделы, так и специально разработанные.

Основной целью изучения является исследование распределений различных параметров, характеризующих состояние системы (напр., длины очереди, времени ожидания начала обслуживания, вероятности данному вызову получить отказ и т. д.). Главный интерес при этом представляют эргодич. теоремы, описывающие поведение указанных характеристик через большой промежуток времени. Напр., одной из характеристик эффективности работы автоматической телефонной станции является доля вызовов, получивших отказ, т. е. предел p при $t\to\infty$ (если он существует) отношения $r(t)/e(t)$ числа $r(t)$ вызовов, потерянных за время t, к общему числу $e(t)$ вызовов, поступивших за это время. Этот предел можно с достаточными на то основаниями называть в е р о я т н о с т ь ю о т к а з а. Показателями, характеризующими системы с ожиданием, являются предельные при $n\to\infty$ распределения вероятностей $\mathsf{P}\{w_n<x\}$ и $\mathsf{P}\{q_n<x\}$ для времени w_n, к-рое n-й вызов ожидал начала обслуживания с момента прихода, и для длины q_n очереди в момент появления в системе n-го вызова.

Метод исследования часто состоит в отыскании марковских процессов или последовательностей, характеризующих состояние системы. Если, напр., случайные величины τ_j^e и τ_j^s показательно распределены и при разных индексах независимы, то «процесс очереди» $q(t)$ будет марковским и допускает описание с помощью простых дифференциальных уравнений для стационарного распределения. В других случаях обычно пытаются построить случайные моменты времени $t_1,\ t_2,\ \ldots$ такие, что $q(t_n)$ или значения других характеристик (напр., времени ожидания), взятые в моменты $t_1,\ t_2,\ \ldots$, образовывали бы цепь Маркова. Это т. н. метод вложенной цепи Маркова. Этот метод часто используется в модифицированном виде, когда строятся полумарковские процессы, описывающие интересующие нас состояния системы.

В более сложных случаях приходится использовать асимптотич. методы (см. *Массового обслуживания теория*) или прибегать к моделированию случайных процессов, описывающих поведение М. о. с., по *Монте-Карло методу*.

В статьях *Массового обслуживания система* с ожиданием и одним каналом обслуживания, *Массового обслуживания система* с ожиданием многоканальная, *Массового обслуживания система* с отказами, *Массового обслуживания система* (входящий поток вызовов) более подробно рассматриваются основные виды систем обслуживания и входные потоки. В этих статьях приняты следующие обозначения.

E — класс последовательностей независимых случайных величин с показательным распределением. Запись $\{\tau_j^e\} \in E$ означает, что

$$\mathsf{P}\{\tau_j^e > x\} = e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0.$$

Запись $\{\xi_j\} \in G_I$ означает, что случайные величины ξ_j независимы и одинаково распределены (само распределение может быть произвольным). Соотношения вида $\{\tau_j^e\} \in E$ или $\{\tau_j^s\} \in G_I$ обычно предполагают также, что управляющая последовательность $\{\tau_j^e\}$ не зависит от остальных управляющих последовательностей.

Класс стационарных в узком смысле последовательностей обозначен G_S.

Приведенные обозначения могут применяться и к многомерным последовательностям. Напр., $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_I$ означает, что двумерная последовательность стационарна и составлена из независимых векторов.

Для простоты изложения, как правило, ограничиваются рассмотрением «ординарных» входных и выходных процессов, когда $\nu_j^e = \nu_j^s \equiv 1$ (вызовы поступают и обслуживаются по одному). Возможности обобщений на «неординарный» случай (вызовы поступают и обслуживаются группами: $\nu_j^e \not\equiv 1$ или $\nu_j^s \not\equiv 1$) оговаривают отдельно.

Кроме того, природа управляющих последовательностей будет простой и однородной, если выделять из них начальные условия. Именно, рассматривают управляющие последовательности $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$ при $1 \leqslant j < \infty$ и считают, что $q(0) = 0$, а первый вызов пришел в систему в момент $\tau_0^e = 0$. Если управление задается входным процессом $e(t)$, то фиксация τ_0^e не производится.

Лит. см. при ст. *Массового обслуживания теория*.

А. А. Боровков.

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА; входящий поток вызовов — случайный процесс, заданный тем или иным образом и описывающий поступление вызовов в систему обслуживания. Входящий поток определяется обычно случайной последовательностью $\{\tau_j^e, \nu_j^e\}$, где τ_j^e, $j = 1, 2, \ldots$, указывают интервалы между поступлениями в систему групп требований объемов соответственно $\nu_1^e \geqslant 1$, $\nu_2^e \geqslant 1, \ldots$ Если $\nu_j^e \equiv 1$, то поток наз. ординарным. Эквивалентным образом входящий поток можно задавать с помощью точечного процесса или процесса $\{e(t); t \geqslant 0\}$, указывающего количество вызовов, поступивших в систему к моменту времени t. Можно считать для определенности, что $e(t) = e(t-0)$.

Наиболее распространенное требование, к-рое обычно предъявляется к входному потоку, состоит в его стационарности. Это условие может быть двояким: либо требуется стационарность в узком смысле последовательности $\{\tau_j^e, \nu_j^e\}$ (обозначается $\{\tau_j^e, \nu_j^e\} \in G_S$), либо требуется, чтобы процесс $e(t)$ был процессом со стационарными в узком смысле приращениями (обо-

значается $\{e(t)\}\in G_{IS}$). Эти два требования, вообще говоря, не совпадают.

Интенсивностью стационарного потока называется число

$$\mu = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}\,(e(t)-e(0))}{t}.$$

Если $\{e(t)\}\in G_{IS}$, то

$$\mu = \mathsf{E}\,(e(t+1)-e(t)) = \mathsf{E}\,(e(1)-e(0)),$$

так что μ равно среднему числу вызовов, поступивших в систему за единицу времени. Если последовательность $\{\tau_j^e\}$ стационарна и эргодична и $\{\nu_j^e\}\in G_I$, то

$$\mu = \frac{\mathsf{E}\nu_j^e}{\mathsf{E}\tau_j^e}.$$

В остальных случаях связь μ с распределением последовательности $\{\tau_j^e,\ \nu_j^e\}\in G_S$ может быть более сложной.

Пусть дан процесс $\{e(t)\}\in G_{IS}$ с интенсивностью μ и с начальным значением $e(0)=0$. С числом μ тесно связан другой параметр входного потока, определяемый равенством

$$\alpha = \lim_{t\to 0} \frac{\mathsf{P}\{e(t)\geqslant 1\}}{t}.$$

Этот предел всегда существует и $\alpha\leqslant\mu$. Если $\mu<\infty$, то $\alpha=\mu$ тогда и только тогда, когда входной поток ординарен.

При изучении свойств входного потока часто используются т. н. функции Пальма

$$\varphi_k(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\mathsf{P}\{e(t+\tau)-e(\tau)=k,\ e(\tau)\geqslant 1\}}{\mathsf{P}\{e(\tau)\geqslant 1\}}, \qquad (1)$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots$$

(здесь $e(0)=0$), к-рые имеют смысл условных вероятностей того, что на интервале $(0,\ t)$ появится k вызовов при условии, что в момент времени 0 пришел вызов. С распределением $e(t)$ функции $\varphi_k(t)$ связаны равенствами

$$\mathsf{P}\{e(t)=0\} = 1-\lambda\int_0^t \varphi_0(u)\,du,$$

$$\mathsf{P}\{e(t)=k\} = \lambda\int_0^t [\varphi_{k-1}(u)-\varphi_k(u)]\,du.$$

Если $\{\tau_j^e\}\in G_I$, то

$$\varphi_0(t) = \mathsf{P}\{\tau_j^e\geqslant t\},$$

$$\sum_{j=0}^{k}\varphi_j(t) = \mathsf{P}\{\tau_1^e+\ldots+\tau_{k+1}^e\geqslant t\}.$$

Значительную роль в теории массового обслуживания играют т. н. простейшие, или пуассоновские, входные потоки — стационарные входные потоки, для к-рых $\nu_j^e=1$, $\{\tau_j^e\}\in E$. Чтобы определить простейший поток в терминах процесса $e(t)$, требуют, чтобы процесс $\{e(t)\}$ был пуассоновским. Приращения этого процесса на непересекающихся интервалах времени независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами, пропорциональными длинам интервалов.

Находят широкое применение (особенно в телефонии) также и неоднородные пуассоновские потоки, к-рые характеризуются процессами $e(t)$ с независимыми приращениями, распределенными по закону Пуассона

$$\mathsf{P}\{e(t+u)-e(t)=k\} =$$

$$= \frac{e^{-(A(t+u)-A(t))}}{k!}(A(t+u)-A(t))^k,$$

где $A(t)$ — ведущая функция процесса (в однородном случае $A(t)=\alpha t$).

Особая роль пуассоновских процессов в теории массового обслуживания во многом объясняется основной предельной теоремой для входящих потоков, к-рая устанавливает, что в широких предположениях сумма большого числа произвольных независимых стационарных входных потоков малой интенсивности сходится к пуассоновскому процессу. Частое использование предположения о том, что входной поток пуассоновский, обусловливается тем, что во многих приложениях реальные входные потоки образуются именно таким способом (напр., поток вызовов, поступающих на телефонную станцию, представляет собой сумму слабых потоков, исходящих от отдельных абонентов).

Ниже приведена основная предельная теорема в двух формах. Первая относится к суммам произвольных (нестационарных) входных потоков.

Пусть даны возрастающие вместе с n совокупности независимых процессов $e_{1,n}(t), \ldots, e_{n,n}(t)$, $n=1, 2, \ldots$, зависящих от параметра n (т. е. рассматривается схема серий), и введены следующие обозначения

$$A_n(t, u) = \sum_{r=1}^{n} \mathsf{P}\{e_{r,n}(t) - e_{r,n}(u) \geqslant 1\},$$

$$B_n(t, u) = \sum_{r=1}^{n} \mathsf{P}\{e_{r,n}(t) - e_{r,n}(u) \geqslant 2\}.$$

Пусть, кроме того, при любом фиксированном $t>0$ выполнено условие

$$\mathsf{P}\{e_{r,n}(t) - e_{r,n}(0) \geqslant 1\} \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$ равномерно по r (это и есть условие малой интенсивности потоков $e_{r,n}(t)$). Тогда, для того чтобы конечномерные распределения процесса

$$e_n(t) = \sum_{r=1}^{n} e_{r,n}(t)$$

сходились к распределениям пуассоновского процесса с ведущей функцией $A(t)$, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$

$$A_n(t, u) \longrightarrow A(t) - A(u), \quad B_n(t, u) \longrightarrow 0.$$

Если в рассматриваемой схеме серий, процессы $e_{r+n}(t) \in G_{IS}$ и ординарны, то имеет место также следующее утверждение. Пусть $\mu_{r,n}$ — интенсивность $e_{r,n}(t)$ и при $n \to \infty$

$$\sum_{r=1}^{n} \mu_{r,n} \longrightarrow \alpha.$$

Тогда для сходимости конечномерных распределений процессов $e_n(t)$ к распределениям пуассоновского процесса $e(t)$ с параметром α необходимо и достаточно, чтобы при каждом t

$$\sum_{r=1}^{n} \mu_{r,n} \int_0^t \varphi_0^{(r)}(u)\, du \longrightarrow \alpha t, \tag{2}$$

где $\varphi_0^r(u)$ — функция Пальма для процесса $e_{r,n}(t)$, определенная равенством (1). Если при $n \to \infty$

$$\left(1 - \varphi_0^{(r)}(t)\right) \longrightarrow 0$$

равномерно по r, то условие (2) очевидно будет выполнено.

Лит. см. при ст. *Массового обслуживания теория.*

А. А. Боровков.

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА с ожиданием и одним каналом обслуживания — система массового обслуживания, алгоритм к-рой предусматривает, что вызовы, не принятые немедленно к обслуживанию (заставшие систему занятой), накапливаются в очереди; при этом обслуживание следующего вызова (или партии вызовов) может начаться лишь после того, как окончится обслуживание предыдущего (или предыдущей партии, если вызовы

обслуживаются группами). Основные определения и обозначения см. в ст. *Массового обслуживания система.*

Наиболее естественными характеристиками состояния систем с очередью являются следующие: а) время w_n ожидания начала обслуживания требования с номером n и виртуальное время $w(t)$ ожидания, к-рое определяется как время, необходимое для освобождения системы от вызовов, пришедших до момента времени t; б) длина q_n очереди в момент прихода n-го вызова и длина $q(t)$ очереди в момент времени t.

1) В «ординарном» случае ($\nu_j^e = 1$) значения w_n связаны рекуррентным соотношением

$$w_{n+1} = \max(0,\ w_n + \xi_n), \quad \xi_n = \tau_n^s - \tau_n^e. \tag{1}$$

Такого же типа уравнениями (для времени ожидания или для длины очереди) могут описываться системы с ожиданием и в «неординарном» случае, когда ν_j^e, ν_j^s отличны от единицы. Напр., для длины q_n очереди справедливы соотношения

$$q_{n+1} = \max(0,\ q_n + \nu_n^e - \beta_n), \tag{2}$$

где β_n — число вызовов, к-рое может быть обслужено за время τ_n^e при бесперебойной работе системы. Если $\{\tau_j^s\} \in E$, $\{\nu_j^s\} \in G_I$, то распределение β_n можно найти из соотношений

$$\mathsf{E}_{\tau_n^e} e^{i\lambda\beta_n} = \exp\left[\tau_n^e \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (e^{i\lambda k} - 1)\,\mathsf{P}\{\nu_j^s = k\}\right],$$

где α — показатель распределения τ_j^s.

Если обозначить $X_0 = 0$, $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, то решение уравнения (1) имеет вид

$$w_{n+1} = X_n - \min(-w_1,\ X_1,\ \ldots,\ X_n) = \\ = \max(X_n + w_1,\ X_n - X_1,\ \ldots,\ X_n - X_{n-1},\ 0). \tag{3}$$

Отсюда следует, что если $\{\xi_n\} \in G_S$ и $\mathsf{P}\{X_n \in \Delta\} \to 0$ при любом фиксированном интервале Δ и $n \to \infty$, то существует предельное распределение времени ожидания:

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{w_n > x\} = \mathsf{P}\{Y > x\},$$

где

$$Y = \sup_{k \geqslant 0} Y_k, \quad Y_k = \xi_{-k} + \ldots + \xi_{-1}, \quad Y_0 = 0.$$

Здесь величины ξ_{-k} — элементы последовательности $\{\xi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, являющейся расширением $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ до последовательности, стационарной на всей оси. В дальнейшем будет предполагаться что такое расширение произведено над всеми управляющими последовательностями.

Значения

$$w^k = \sup(0,\ \xi_k,\ \xi_k + \xi_{k-1},\ \xi_k + \xi_{k-1} + \xi_{k-2},\ \ldots\}$$

удовлетворяют уравнению (1) и имеют распределение, совпадающее с предельным распределением w_n. Это — стационарный процесс времени ожидания.

Пусть последовательность $\{\xi_n\} \in G_S$ и эргодична ($X_n/n \to \mathsf{E}\xi_1$ с вероятностью 1). Тогда

$$\mathsf{P}\{Y < \infty\} = \mathsf{P}\{w^k < \infty\} = 1,$$

если $\mathsf{E}\xi_k < 0$ или если $\mathsf{E}\xi_k = 0$ и $\xi_k = \eta_{k+1} - \eta_k$, где $\{\eta_k\} \in G_S$. В остальных случаях

$$\mathsf{P}\{Y = \infty\} = \mathsf{P}\{w^k = \infty\} = 1.$$

Если $\{\xi_n\} \in G_I$, то

$$\mathsf{P}\{Y < \infty\} = 1$$

тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}\xi_k < 0$ (тривиальный случай $\xi_k = 0$ исключается).

2) Как уже отмечалось, другой возможной характеристикой состояния системы является виртуальное время $w(t)$ ожидания. Грубо говоря, это — время, к-рое прождал бы начала своего обслуживания вызов, пришедший в момент t. Пусть $S(t)$ есть сумма времен обслуживания вызовов, поступивших в систему до момента времени t, $X(t)=S(t)-t$. Аналогом равенства (3) здесь является соотношение

$$w(t)=X(t)-\inf_{0\leqslant u\leqslant t}(0,\ X(u)). \tag{4}$$

Пусть G_{IS} — класс процессов со стационарными в узком смысле приращениями и G_{II} — класс процессов с независимыми приращениями (G_{II} и G_{IS} здесь можно понимать и более узко; напр., можно считать, что G_{II} — класс обобщенных пуассоновских процессов с положительными скачками и сносом -1). Если процесс $\{X(t);\ t\geqslant 0\}\in G_{IS}$, то он может быть расширен до процесса $\{X(t);\ -\infty<t<\infty\}$, заданного на всей оси и также принадлежащего G_{IS}. В этом случае существует

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{P}\{w(t)>x\}=\mathsf{P}\{\overline{Y}>x\},$$

где

$$\overline{Y}=\sup_{u\geqslant 0}Y(t),\qquad Y(t)=X(0)-X(-t).$$

Если, кроме того,

$$\mathsf{E}(X(1)-X(0))=\mathsf{E}(Y(1)-Y(0))=a<0,$$

то распределение процесса

$$w_t(u)=\{w(t+u);\ u\geqslant 0\}$$

сходится при $t\to\infty$ к распределению процесса

$$w^s(u)=\sup_{v\leqslant u}(X(u)-X(v)),$$

к-рый является собственным стационарным процессом виртуального времени ожидания. Сходимость здесь имеет место в сильной форме:

$$\mathsf{P}\{w_t\in B\}\longrightarrow\mathsf{P}\{w^s\in B\}$$

для любого измеримого B.

Далее, если $\{X(t)\}\in G_{IS}$ и $a<0$, то существует условная функция восстановления $H_0(x)$ процесса $X(t)$:

$$H_0(x)=\int_0^\infty\mathsf{P}\{0\leqslant X(u)-X(0)<x\mid X(0)=$$

$$=\inf_{v\leqslant 0}X(v)\Big\}\,du<\infty;$$

при этом

$$\left.\begin{aligned}&\mathsf{P}\{w^s(u)\geqslant x\}=-a\,\frac{dH_0(x)}{dx},\\&\mathsf{P}\{w^s(t)=0\}=-a.\end{aligned}\right\}$$

Приведенные формулы сохраняются и в случае $\nu_j^e\not\equiv 1$.

Для систем, у к-рых $\{\tau_j^s-\tau_j^e\}\in G_I$, существуют простые связи между распределениями w^k и $w^s(t)$.

3) Эргодические теоремы для длины очереди могут быть получены с помощью соответствующих теорем для времени ожидания. Пусть, напр., последовательность $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\}\in G_S$ эргодична (метрически транзитивна). Если, кроме того, $\mathsf{E}(\tau_j^s-\tau_j^e)<0$, то существует предельное (стационарное) распределение q_n такое, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n>k\}=\mathsf{P}\{w^0>\tau_1^e+\ldots+\tau_k^e\}.$$

Если же $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$ и распределение τ_j^e нерешетчато, то существует

$$\lim_{\tau \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) > k+1\} = \mathsf{P}\{w^0 > \tau_1^e + \ldots + \tau_k^e + \gamma\}, \quad k \geqslant 0,$$

$$\lim_{\tau \to 0} \mathsf{P}\{q(t) = 0\} = -a/\mathsf{E}\tau^e,$$

где все компоненты под знаком вероятности в правой части независимы, γ имеет плотность, равную

$$\mathsf{P}\{\tau_j^e > x\}/\mathsf{E}\tau^e,$$

$$w^0 = \sup(0, \xi_0, \xi_0 + \xi_{-1}, \ldots), \quad \xi_j = \tau_j^s - \tau_j^e.$$

Если $\{\tau_j^e\} \in E$, то предельные распределения q_n и $q(t)$ совпадают.

4) Если $\{\tau_j^e\} \in E$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$ (допускается также, что $\nu_j^e \not\equiv 1$, $\{\nu_j^e\} \in G_I$), то можно получить точные формулы и для допредельного распределения $w(t)$:

$$\mathsf{P}\{w(t) < x\} = \mathsf{P}\{Y(t) < x\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \mathsf{E}(Y(u)/u; \quad Y(u) < 0)\, \mathsf{P}\{Y(t-u) < x\}\, du,$$

$$\mathsf{P}\{w(t) = 0\} = -\mathsf{E}(Y(t)/t, \quad Y(t) < 0).$$

При $a < 0$ и $t \to \infty$ имеет место формула Хинчина для стационарного распределения:

$$\mathsf{E}e^{i\lambda w^s(u)} = \frac{1 - \alpha\mathsf{E}\theta}{1 - \alpha\dfrac{\varphi(\lambda) - 1}{i\lambda}}, \quad \varphi(\lambda) = \mathsf{E}e^{i\lambda\theta},$$

где θ — величина скачка процесса $X(t)$ ($\theta = \tau_j^s$, если $\nu_j^e \equiv 1$), α — показатель распределения τ_j^e.

Пусть T_j, $j = 1, 2, \ldots,$ — периоды занятости системы (т. е. длины интервалов времени в течение к-рых $w(t) > 0$). Тогда для рассматриваемых систем

$$\mathsf{P}\{T_j \in (u, u + du)\} = \frac{1}{\alpha u}\mathsf{P}\{X(u) \in (0, du)\}.$$

5) Для систем, у к-рых $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_I$ (допускается, также $\nu_j^e \not\equiv 1$, $\{\tau_j^e, \tau_j^s, \nu_j^e\} \in G_I$) распределение w^k совпадает с распределением величины

$$Y = \sup(0, \xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots).$$

По известному распределению ξ_j распределение Y может быть найдено следующим образом. Если $\mathsf{P}\{Y < \infty\} = 1$ (это всегда при $\mathsf{E}\xi_j < 0$), то справедливо следующее факторизационное тождество

$$1 - \mathsf{E}e^{i\lambda\xi} = (1-p)(1 - \mathsf{E}e^{i\lambda\chi})/\mathsf{E}e^{i\lambda Y}, \quad \operatorname{Im}\lambda = 0,$$

где $p = \mathsf{P}\{Y > 0\}$, $\chi \leqslant 0$ — величина первой неположительной суммы среди $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots$ Это соотношение позволяет отождествить с $\mathsf{E}e^{i\lambda Y}$ отношение $w_+(\lambda)/w_+(0)$ в любом тождестве

$$1 - \mathsf{E}e^{i\lambda\xi} = w_-(\lambda)/w_+(\lambda), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0, \tag{5}$$

в к-ром функции $w_\pm(\lambda)$ допускают представление

$$w_\pm(\lambda) = \int_0^{\pm\infty} e^{i\lambda t}\, dV_\pm(t)$$

($V_\pm$ — функции ограниченной вариации). Равенство (5) осуществляет т. н. V-факторизацию функции $1 - \mathsf{E}e^{i\lambda\xi}$. Оно позволяет указать следующие случаи, когда возможно отыскание $\mathsf{E}e^{i\lambda Y}$ в явном виде.

Предполагают, что $-\infty < \mathsf{E}\xi < 0$, и обозначают

$$f(\lambda) = \mathsf{E}e^{i\lambda\xi}, \quad f_+(\lambda) = e^{i\lambda\tau^s}, \quad f_-(\lambda) = e^{-i\lambda\tau^e},$$

так что $f(\lambda) = f_+(\lambda)\, f_-(\lambda)$.

А) Если f_+ — рациональная функция: $f_+ = P_m/Q_n$, где P_m и Q_n — многочлены степеней m и n соответст-

венно, то функция $(1-f)Q_n$ в области $\mathrm{Im}\lambda<0$ имеет ровно n нулей $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и

$$w_+(\lambda) = Q_n(\lambda)/\Pi_{k=1}^n(\lambda-\lambda_k),$$

$$\mathsf{E}e^{i\lambda Y} = w_+(\lambda)/w_+(0).$$

Это означает, что если распределение τ^s представимо в виде

$$\mathsf{P}\{\tau^s > x\} = \sum\nolimits_k P_k(x)\, e^{-\alpha_k x}, \qquad \mathrm{Re}\,\alpha_k > 0,$$

где $P_k(x)$ — многочлены, то такого же вида представление (при других α_k и P_k, определяемых нулями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$) будет иметь место и для $\mathsf{P}\{Y>x\}$.

В) Если $f_- = P_m/Q_n$ — рациональная функция, то функция $(1-f)Q_n$ в области $\mathrm{Im}\lambda>0$ имеет $n-1$ нулей $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ и

$$w_+(\lambda) = i\lambda \prod\nolimits_{k=1}^{n-1}(\lambda-\lambda_k)/Q_n(\lambda)\,(1-f(\lambda)).$$

Кроме этих формул, дающих явное выражение для распределения Y, можно также в широком классе случаев описать асимптотич. поведение $\mathsf{P}\{Y>x\}$ при $x\to\infty$. Именно, если

$$\gamma = \sup(\mu : \mathsf{E}e^{\mu\xi} < \infty) > 0$$

и $\mathsf{E}e^{\gamma\xi}>1$, то определен единственный корень $q>0$ уравнения $\mathsf{E}e^{q\xi}=1$. В этом случае при $x\to\infty$

$$\mathsf{P}\{Y > x\} = c_1 e^{-qx}(1+o(1)).$$

Если же $\gamma=0$, $-\infty<\mathsf{E}\xi<0$, то

$$\mathsf{P}\{Y>x\} = c_2 \int_x^\infty \mathsf{P}\{\xi > t\}\,dt\,(1+o(1)).$$

Постоянные c_1 и c_2 найдены в явном виде.

Результаты, аналогичные изложенным в пп. 2)—5), справедливы и для систем с дискретным временем, когда время t и случайные величины управляющих последовательностей принимают лишь целочисленные значения.

6) Теоремы устойчивости выясняют условия, при к-рых малое изменение конечномерных распределений управляющих последовательностей влечет за собой малое изменение стационарного распределения времени ожидания или длины очереди. Важность вопроса об устойчивости систем обслуживания объясняется тем, что обычно в реальных задачах пользуются теми или иными предположениями о природе управляющей последовательности (напр., предполагается, что ξ_j независимы или что τ_j^s распределены по показательному закону), в то время как на самом деле эти предположения выполняются лишь приближенно. Спрашивается, будет ли решение таких «идеализированных» задач близко к решению истинной задачи.

Чтобы получить точную постановку проблемы рассматривают схему серий, когда уравнением (1) управляют стационарные последовательности (серия последовательностей) $\xi^{(n)} = \{\xi_j^{(n)}, -\infty<j<\infty\}$, $n=1,2,\ldots$ Кроме того, рассматривают стационарную последовательность $\xi = \{\xi_j;\ -\infty<j<\infty\}$ и обозначают

$$Y^{(n)} = \sup_{k\geqslant 0} Y_k^{(n)},\ Y_k^{(n)} = \sum\nolimits_{j=1}^n \xi_{-j}^{(n)}.$$

Ответ на поставленный выше вопрос дает следующее утверждение.

Пусть конечномерные распределения $\xi^{(n)}$ слабо сходятся к соответствующим распределениям последовательности ξ, относительно к-рой предполагается, что она эргодична и $\mathsf{E}\xi_j<0$. Тогда для слабой сходимости

$$\mathsf{P}\{Y^{(n)} < t\} \Rightarrow \mathsf{P}\{Y < t\} \qquad (6)$$

(т. е. для сходимости распределений стационарных времен ожидания) достаточно, чтобы

$$\mathsf{E}\left(\xi_j^{(n)};\quad \xi_j^{(n)} \geqslant 0\right) \longrightarrow \mathsf{E}\left(\xi_j;\ \xi_j \geqslant 0\right).$$

Сформулированное условие сходимости близко к необходимому.

Если управляющие последовательности $\{\tau_j^{(n)e},\ \tau_j^{(n)s}\}$ и $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\}$ таковы, что $\tau_j^{(n)e}$ и $\tau_j^{(n)s}$ независимы, а распределения $\{\tau_j^{(n)e},\ \tau_j^{(n)s}\}$ слабо сходятся к распределениям $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\}$, то для выполнения (6) достаточно, чтобы

$$\mathsf{E}\tau_j^{(n)s} \longrightarrow \mathsf{E}\tau_j^s.$$

Аналогично обстоит дело со стационарным распределением виртуального времени $w^s(t)$ ожидания. Если конечномерные распределения процессов $Y^{(n)}(t) \in G_{IS}$ сходятся к распределениям $Y(t) \in G_{IS}$ и последовательность $\{\eta_k = Y(k+1) - Y(k)\}$ эргодична, $\mathsf{E}\eta_k = a < 0$, то для сходимости распределений

$$\sup_{t \geqslant 0} Y^{(n)}(t) \quad \text{и} \quad \sup_{t \geqslant 0} Y(t)$$

достаточно, чтобы

$$\mathsf{E}\left\{\eta_k^{(n)};\quad \eta_k^{(n)} \geqslant 0\right\} \longrightarrow \mathsf{E}\left\{\eta_k;\ \eta_k \geqslant 0\right\}.$$

7) Асимптотич. методы исследования одноканальных систем (они включают в себя и теоремы устойчивости) дают приближенные формулы для случая больших и малых нагрузок. Пусть $\{Y(t)\} \in G_{IS}$. Тогда говорят, что система имеет большую нагрузку, если

$$a = \mathsf{E}\left(Y(t+1) - Y(t)\right) < 0$$

близко к 0, и малую нагрузку, если a близко к -1.

Точная постановка задачи связана здесь как и в п. 6) с введением схемы серий. Именно, для случая больших нагрузок рассматривают процессы $X^a(t)$, зависящие от параметра $a \to 0$. Пусть $X^a(t)$ удовлетворяют условиям слабой зависимости, обеспечивающим при $t \to \infty$ выполнение условий

$$\mathsf{E}\left(\left| X^a(t) - X^a(0) - at \right|^{2+\gamma} / A\right) < ct^{1+\gamma/2},$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\left\{\frac{X^a(t) - X^a(0) - at}{\sigma\sqrt{t}} < x \mid A\right\} = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

равномерно по a, где

$$\gamma > 0, \quad c > 0, \quad \sigma > 0, \quad A = \left\{ X^a(0) - \inf_{v < 0} X^a(v) \right\}.$$

Тогда для стационарного виртуального времени $w^s(t)$ при $a \to 0$ справедливо

$$\mathsf{P}\left\{w^s(t) > x / |a|\right\} \longrightarrow e^{-2x/\sigma^2}.$$

Аналогичный результат будет иметь место и для стационарного распределения w^k.

Если условия большой нагрузки наложить на последовательности $\{\xi^{(n)} = \tau_j^{(n)e} - \tau_j^{(n)e}\} \in G_I$ (также в схеме серий по параметру n), потребовав, чтобы

$$0 > \alpha_n = \mathsf{E}\xi_j^{(n)} \longrightarrow 0, \qquad \mathsf{D}\xi_j^{(n)} \longrightarrow \sigma^2 > 0, \tag{7}$$

то весьма полно можно описать также и распределение допредельного времени w_n ожидания, включая т. н. переходные явления. Именно, пусть в дополнение к (7)

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{E}\left[(\xi_j^{(n)})^2;\quad |\xi_j^{(n)}| > \varepsilon\sqrt{n}\right] = 0$$

при любом $\varepsilon > 0$. Тогда если $\alpha - \alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ не меняя знака, так что $n\alpha^2 \to v^2$, то

$$\mathsf{P}\left\{w_n < x / |\alpha|\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathsf{P}\left\{w(u) < (x - u \operatorname{sign} n\alpha)/\sigma;\quad 0 \leqslant u \leqslant v^2\right\}, \tag{8}$$

где $w(u)$ — стандартный винеровский процесс. Значение правой части (8) вычислено в явном виде. Если $n\alpha^2 \to 0$, то

$$\mathsf{P}\{w_n < x\sqrt{n}\} \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\sigma} e^{-u^2/2}\, du.$$

Если $n\alpha^2 \to \infty$, $\alpha < 0$, то

$$\mathsf{P}\{w_n > x/|\alpha|\} \longrightarrow e^{-2x/\sigma^2}.$$

Если $n\alpha^2 \to \infty$, $\alpha > 0$, то

$$\mathsf{P}\{w_n < \alpha n + x\sqrt{n}\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sigma} e^{-u^2/2}\, du.$$

8) Системы с ограниченной очередью характеризуются тем, что вызовы, пришедшие в систему и заставшие очередь объема $n \geqslant N$, получают отказ и выбывают из рассмотрения. В этом случае $q_n \leqslant N$, а вероятность $\mathsf{P}\{q_n = N\}$ будет также вероятностью того, что n-й вызов получил отказ.

Уравнения (2) здесь следует заменить на уравнение вида

$$q_{n+1} = \min(N,\ \max(0,\ q_n + \eta_n)), \qquad n \geqslant 0.$$

Пусть $\{\eta_n\} \in G_S$ и последовательность $\{\eta_n\}$ метрически транзитивна. Пусть, кроме того, выполнено следующее условие: или $\mathsf{E}\eta_1 \neq 0$ или $\mathsf{E}\eta_1 = 0$, но во втором случае η_n не представимы в виде $\eta_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$, где $\{\gamma_n\} \in G_S$. При выполнении этих условий существует предельное распределение q_n при $n \to \infty$.

Если, кроме того, $\{\eta_n\} \in G_I$ (это имеет место, напр., в случае, когда $\{\tau_j^s\} \in E$, а остальные управляющие последовательности принадлежат G_I), то можно найти явный вид стационарного распределения для q_n при $n \to \infty$, поскольку в этом случае q_n связаны в простую однородную цепь Маркова с конечным числом состояний.

Существует также следующее представление для стационарного распределения:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{q_n = k\} = \mathsf{P}\{\chi(k-N, k) = k\}\, \mathsf{P}\{\chi(-N, 1) \leqslant -N\} + \\ + \mathsf{P}\{\chi(k-N,\ k) = k-N\}\, \mathsf{P}\{\chi(-1,\ N) \geqslant N\}, \quad (9)$$

где $\chi(-l,\ m)$ — положение частицы, вышедшей из 0 и блуждающей со скачками η_k, $k = 1, 2, \ldots$, в момент ее первого выхода за пределы интервала $(-l,\ m)$. Если $\nu_n^e = 1$ (т. е. если $\mathsf{P}\{\eta_n \leqslant 1\} = 1$), то вероятности (9) могут быть явным образом выражены через распределения τ_j^e и ν_j^s.

9) В системах с автономным обслуживанием обслуживание вызовов в отличие от обычных систем с ожиданием может начинаться лишь в моменты времени 0, τ^s, $\tau_1^s + \tau_2^s$, $\ldots$, где τ_j^s — элементы управляющей последовательности. Таким образом, вызов, заставший систему свободной, должен ждать до начала очередного этапа обслуживания.

Наряду с процессом $\{e(t)\}$, описывающим входящий поток, рассматривают процесс $\{s(t)\}$, где $s(t)$ определяется как число вызовов, к-рое приняла бы на обслуживание система к моменту t при бесконечной очереди. Обозначив через $q(t)$ длину очереди в момент t, не считая вызовов уже находящихся на обслуживании, и положив $X(t) = e(t) - s(t)$, получают

$$q(t) - q(0) + X(t) - \inf_{0 \leqslant u \leqslant t} (0,\ X(u) + q(0)) = \\ = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} (q(0) + X(t),\quad X(t) - X(u)).$$

Это равенство аналогично соотношению (4) и приводит к следующему результату. Если процесс $\{X(t)\} \in G_{IS}$ и эргодичен,

$$\mathsf{E}(X(1) - X(0)) < 0,$$

то распределение процессов $\{X_t(u)=X(t+u);\ u\geqslant 0\}$ сходится при $t\to\infty$ к распределению стационарного процесса

$$\overline{X}(u)=\sup_{v\leqslant u}(X(u)-X(v)).$$

Если $\{\tau_j^s\}\in E$ или $\{\tau_j^e\}\in E$, а остальные управляющие подпоследовательности принадлежат G_I, то можно указать явные формулы для распределения $\overline{X}(u)$.

Лит. см. при ст. *Массового обслуживания теория.*

А. А. Боровков.

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА с ожиданием многоканальная — система массового обслуживания, алгоритм к-рой предусматривает накапливание вызовов в очереди, если в момент их прихода система оказалась занятой; при этом обслуживание вызовов ведется в нескольких каналах одновременно. Основные определения и обозначения см. в ст. *Массового обслуживания система.*

Функционирование многоканальных систем с очередью, управляемых последовательностью $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\}$, происходит следующим образом. Вызовы прибывают в моменты времени $0,\ \tau_1^e,\ \tau_1^e+\tau_2^e,\ \ldots$. На обслуживание вызова с номером j тратится время τ_j^s, в каком бы из $m\geqslant 1$ каналов ни обслуживался этот вызов. Пришедшие вызовы тут же направляются (в порядке поступления) в любой свободный канал, если каналы не все заняты, или ждут, когда освободится какой-нибудь из каналов, куда и поступают на обслуживание. Пусть для простоты в момент времени $t=0$ система свободна.

1) Для наглядности изложения использованы следующие обозначения: $\boldsymbol{w}_n=(w_{n,1},\ \ldots,\ w_{n,m})$ — вектор времени ожидания n-го вызова, где $w_{n,i}$ — время, к-рое должен ждать этот вызов до освобождения i каналов от вызовов, пришедших раньше, чем он; так что $w_{n,1}$ — «истинное» время ожидания. Пусть, кроме того, $x^+=\max(0,\ x)$, $\boldsymbol{x}^+=(x_1^+,\ \ldots,\ x_m^+)$, $\boldsymbol{e}=(1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, $\boldsymbol{i}=(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$, а вектор $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ получен из $\boldsymbol{x}$ упорядочиванием по возрастанию его координат (так что первая координата $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ равна $\min(x_1,\ \ldots,\ x_m)$). Тогда имеет место следующее рекуррентное соотношение для $\boldsymbol{w}_n$, обобщающее свой одномерный аналог

$$w_{n+1}=\left[\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{w}_n+\tau_n^s\,\boldsymbol{e}\right)-\tau_n^e\boldsymbol{i}\right]^+. \qquad (1)$$

Если последовательность $\{\tau_j^e,\ \tau_j^s\}\in G_S$ и $\mathsf{E}(\tau_n^s-m\tau_n^e)<0$, то существует собственная последовательность $\{w^k\}\in G_S$, удовлетворяющая (1) и такая, что функция распределения $\boldsymbol{w}_n$ при $n\to\infty$ монотонно сходится к функции распределения $\boldsymbol{w}^0$. Это утверждение допускает обобщение на случай $\nu_j^e\not\equiv 1$ и распространяется также на длину q_n очереди в момент прихода n-го вызова (под q_n понимают очередь, включая вызовы, находящиеся на обслуживании). Существуют формулы, связывающие предельные распределения для $\boldsymbol{w}_n$ и q_n.

Если $\{\tau_j^e\}\in G_I$, $\{\tau_j^s\}\in G_I$, то (1) позволяет записать интегральное уравнение для стационарного распределения $\boldsymbol{w}^0$. В этом случае можно указать также простые связи между стационарными распределениями длины очереди и времени ожидания. Именно, если w_k^0 означает k-ю координату вектора $\boldsymbol{w}^0$, то при $k\geqslant m-1$ существуют

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n>k\}=\mathsf{P}\left\{w_1^e>\tau_1^e+\ldots+\tau_{k-m+1}^e\right\}.$$

Если $m>k\geqslant 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{q_n\geqslant m-k\}=\mathsf{P}\left\{w_{k+1}^0>0\right\}.$$

Здесь все случайные величины, стоящие под знаком вероятности, независимы.

Если, кроме того, распределение τ_j^e нерешетчато, то аналогичные формулы верны и для предельного распределения $q(t)$. Если $\{\tau_j^e\} \in E$, то

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = k\} = \lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) = k\}.$$

2) Если $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in E$, то можно указать явные формулы для предельных распределений q_n, $q(t)$, w_n. Пусть α — показатель распределения τ_j^s и $\alpha m \mathsf{E}\tau^e > 1$. Тогда числа

$$p_k = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = k\}$$

описываются как известного вида рациональные функции от значений μ и $\psi(-j\alpha)$, $j = 1, \ldots, m$, где μ — единственный корень в области $|\mu| < 1$ уравнения

$$\mu = \psi((\mu - 1) m\alpha), \quad \psi(\mu) = \mathsf{E}e^{\mu\tau^e}.$$

Если $k > m$, то

$$p_k = A\mu^{k-m},$$

причем A от k не зависит. Для предельного распределения времени ожидания

$$W(x) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{w_{n,1} > x\}$$

имеет место равенство

$$W(x) = \frac{Ae^{-m\alpha(1-\mu)x}}{1-\mu}.$$

Если τ_j^e — нерешетчатая случайная величина, то существуют

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) = k\} = P_k,$$

где

$$P_k = p_{k-1}/k\alpha\mathsf{E}\tau^e \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k < m,$$

$$P_k = p_{k-1}/m\alpha\mathsf{E}\tau^e \quad \text{при} \quad k \geqslant m.$$

В случае $\{\tau_j^e\} \in E$, $\{\tau_j^s\} \in E$

$$p_k = \frac{p_0}{k!m^k}\lambda^k \quad \text{при} \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

$$p_k = \frac{p_0}{m!m^m}\lambda^k \quad \text{при} \quad k \geqslant m,$$

где

$$\lambda = [\alpha m \mathsf{E}\tau^e]^{-1} < 1.$$

3) Теоремы устойчивости (о непрерывной зависимости стационарного распределения w^0 от распределений τ_j^e и τ_j^s) получены в менее общей форме, чем для одноканальных систем, и связаны с условием о существовании т. н. обновляющих событий. Однако в случае $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$, $\mathsf{E}(\tau_n^s - m\tau_n^e) < 0$ это условие с необходимостью выполнено. Если для таких систем в схеме серий распределения $\tau_j^{(n)e}$ и $\tau_j^{(n)s}$ слабо сходятся соответственно к распределениям τ_j^e и τ_j^s и, кроме того, $\mathsf{E}\tau_j^{(n)s} \to \mathsf{E}\tau_j^s$, то распределение $w^{(n)0}$ будет слабо сходится к распределению w^0.

4) Асимптотич. методы исследования многоканальных систем для больших нагрузок дают результаты, аналогичные соответствующим результатам для одноканальных систем.

Пусть в схеме серий для управляющих последовательностей $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$ выполнено условие

$$\delta = 1/\mathsf{E}\tau^e - m/\mathsf{E}\tau^s \to 0$$

(δ равно разности между средним количеством вызовов, поступивших в систему, и средним количеством вызовов, к-рое система может обслужить за единицу времени; если $\nu_j^e \not\equiv 1$, $\nu_j^s \not\equiv 1$, то в качестве параметра δ можно выбрать число $\mathsf{E}\nu^e/\mathsf{E}\tau^e - m\mathsf{E}\nu^s/\mathsf{E}\tau^s$, имеющее тот же смысл). Тогда если

$$\frac{\mathrm{D}\tau^e}{(\mathsf{E}\tau^e)^3} + m\frac{\mathrm{D}\tau^s}{(\mathsf{E}\tau^s)^3} \longrightarrow \sigma^2 > 0$$

и $\mathsf{E}|\tau^e|^{2+\varepsilon}$, $\mathsf{E}|\tau^s|^{2+\varepsilon}$ равномерно ограничены при нек-ром $\varepsilon > 0$, то для длины $q(t)$ очереди в момент времени t справедливы при $t \to \infty$, $\delta \to 0$ следующие соотношения:

при $\delta\sqrt{t} \to v$, $v \geqslant -\infty$,

$$\lim_{\delta \to 0} \mathsf{P}\{q(t) < x/|\delta|\} =$$

$$= \mathsf{P}\{w(u) < (x - u\,\mathrm{sign}\,\delta)/\sigma;\quad 0 \leqslant u \leqslant v^2\},$$

где $w(u)$ — стандартный винеровский процесс;
при $\delta\sqrt{t} \longrightarrow 0$

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) < x\sqrt{t}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x/\sigma} e^{-u^2/2}\,du;$$

при $\delta\sqrt{t} \longrightarrow \infty$, $\delta > 0$,

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) < \delta t + x\sqrt{t}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sigma} e^{-u^2/2}\,du.$$

Аналогичные соотношения верны для длины q_n очереди и для времени w_n ожидания.

Другое возможное направление асимптотич. исследований для многоканальных систем состоит в изучении систем с интенсивным входным потоком и неограниченно возрастающим (вместе с $\mathsf{E}(e(1) - e(0))$) числом каналов обслуживания.

5) Поведение многоканальных систем с бесконечным числом каналов обслуживания, управляемых последовательностью $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$, описывается так же, как поведение многоканальных систем с очередью, с той лишь разницей, что здесь всегда есть свободные каналы и, следовательно, время ожидания для любого вызова равно 0. В качестве характеристики состояния системы рассматривают число q_n занятых линий в момент прихода n-го вызова или число $q(t)$ занятых линий в момент времени t (как и везде выше q_n и $q(t)$ — длины очереди и $q_1 = 0$).

Пусть $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_S$ и, кроме того, последовательность $\{\tau_j^e\}$ метрически транзитивна. Тогда если $\mathsf{E}\tau_j^s < \infty$, то распределение последовательности $\{q_{n+k};\ k \geqslant 0\}$ при $n \to \infty$ монотонно сходится к распределению собственной стационарной последовательности

$$q^k = \sum_{l=0}^{\infty} I\{\tau_{k-l}^s > \tau_{k-l}^e + \ldots + \tau_{k-1}^e + \tau_k^e\}, \qquad (2)$$

где $I\{A\}$ индикатор события A. Условие $\mathsf{E}\tau_j^s < \infty$ близко к необходимому условию для конечности (2).

6) Для систем, у к-рых $m = \infty$, $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$, распределение стационарной длины q^k очереди можно описать с помощью уравнений. Для этого следует ввести величины

$$q^0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} I\{\tau_k^s > x + \tau_0^e + \ldots + \tau_k^e\}.$$

Число $q^0(x)$ указывает, сколько вызовов осталось в системе, работающей в стационарном режиме, спустя время x после прихода нек-рого вызова, но без учета данного вызова и всех вызовов, поступающих после него.

Обозначив

$$P_j(x) = \mathsf{P}\{q^0(x) = j\}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$
$$P(x) = \mathsf{P}\{\tau^s > x\}, \quad F(x) = \mathsf{P}\{\tau^e < x\},$$

получают

$$\mathsf{P}\{q^k = j\} = \mathsf{P}\{q^0(0) = j\} = P_j(0);$$

система функций $P_j(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$P_k(x) = \int_0^\infty dF(t)\, P(t+x)\, P_{k-1}(t+x) +$$
$$+ \int_0^\infty dF(t)\,(1 - P(t+x))\, P_k(t+x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Здесь $P_{-1}(x)$ следует положить, равной 0. Каждые из первых $k+1$ уравнений этой системы относительно $P_0(x), \ldots, P_k(x)$ имеют единственное решение в классе функций ограниченной вариации, обладающих свойствами

$$P_0(x) \longrightarrow 1, \quad P_i(x) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad i \geqslant 1, \; x \longrightarrow \infty.$$

Аналогичные утверждения справедливы для распределения процесса $q(t)$.

Если $\{\tau_j^e\} \in E$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$, то

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) = k\} = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = k\} = \frac{(a\alpha)^k}{k!}\, e^{-a\alpha},$$

где $a = \mathsf{E}\tau_j^s$, α — показатель распределения τ_j^e.

Если $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in E$, то

$$p_k = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = k\} = \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} C_j,$$

где

$$C_0 = 1, \quad C_j = \prod_{l=1}^{j} \frac{\psi(-l\alpha)}{1 - \psi(-l\alpha)},$$

$$j = 1, 2, \ldots, \quad \psi(\lambda) = \mathsf{E}e^{\lambda\tau^e},$$

α — показатель распределения τ_j^s. Если, кроме того, τ_j^e — нерешетчатые случайные величины, то

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) = k\} = p_{k-1}/k\alpha\, \mathsf{E}\tau^e, \quad k = 1, 2, \ldots$$

7) Теоремы устойчивости в случае $m = \infty$, как и в предыдущих разделах, выясняют условия, при к-рых малое изменение управляющих последовательностей влечет за собой малое изменение стационарного распределения числа q^k занятых линий.

Для схемы серий, когда система управляется стационарными последовательностями $\{\tau^{(n)l}, \tau^{(n)s}\}$, зависящими от параметра $n = 1, 2, \ldots$, пусть выполнены следующие условия.

(A) Существует последовательность $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_S$ такая, что $\{\tau_j^e\}$ метрически транзитивна, $\mathsf{E}\tau_j^s < \infty$ и конечномерные распределения $\{\tau_j^{(n)e}, \tau_j^{(n)s}\}$ сходятся при $n \to \infty$ к распределениям $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$.

(B) $\mathsf{E}\tau_j^{(n)s} \to \mathsf{E}\tau_j^s$ при $n \to \infty$.

(C) Распределения $\tau_{-j}^s - \sum_{k=-j}^{0} \tau_k^e$ при всех $j \geqslant 0$ непрерывны в точке 0.

Теорема устойчивости утверждает тогда, что при выполнении условий (A), (B), (C) распределения последовательностей $\{q^{(n)k}\}$ длин очередей (к-рые определяются равенством (2) с управляющими последовательностями $\{\tau_j^{(n)e}, \tau_j^{(n)s}\}$) сходятся при $n \to \infty$ к распределениям $\{q^k\}$.

Все три условия (A), (B), (C), присутствующие в этом утверждении, существенны; отказ хотя бы от одного из них сразу позволяет строить примеры, где сходимость распределений $\{q^{(n)k}\}$ отсутствует.

8) Асимптотич. анализ систем с бесконечным числом каналов обслуживания становится естественным и эффективным при изучении т. н. нагруженных систем, когда велика интенсивность входного потока. Несомненным преимуществом асимптотич. подхода является большая общность и универсальность установленных закономерностей.

Пусть входной поток $e(t)=e_T(t)$, означающий число вызовов, поступавших в систему к моменту времени t, зависит от параметра $T\to\infty$ (схема серий), так что $e_T(t)\to\infty$ при $T\to\infty$ для каждого фиксированного $t>0$, и, кроме того, существуют неубывающая функция $m(t)$, функция $B(T)\to\infty$ при $T\to\infty$ и непрерывный случайный процесс $\xi(t)$, заданный на $[0, t_0]$, такие, что распределения $f(\xi_T(t))$, где

$$\xi_T(t)=\frac{e_T(t)-Tm(t)}{B(t)}$$

слабо сходятся при $T\to\infty$ к распределению $f(\xi(t))$ для любого измеримого и непрерывного относительно равномерной метрики функционала f.

Если, напр., $\{\tau_j\}\in G_I$ и управление системой происходит с помощью последовательности $\tau_j^e=\tau_j/T$, то сформулированные условия будут выполнены при любом t_0, при этом

$$m(t)=t/\mathsf{E}\tau_j,\quad B^2(T)=T\mathsf{D}\tau_j/(\mathsf{E}\tau_j)^3,$$

$\xi(t)$ — стандартный винеровский процесс.

Относительно обслуживающего устройства предполагают, что $\{\tau_j^s\}\in G_I$. Тогда:

1) Если $B(T)/\sqrt{T}\to\infty$, то конечномерные распределения нормированного процесса очереди

$$z_1(t)=\frac{q(t)-TQ(t)}{B(t)},$$

$$Q(t)=\int_0^t G(t-u)\,dm(u),\quad G(t)=\mathsf{P}\{\tau_j^s\geqslant t\}$$

слабо сходятся при $T\to\infty$ к распределениям процесса

$$\zeta_1(t)=\int_0^t G(t-u)\,d\xi(u).$$

2) Если $B(T)/\sqrt{T}\to\sigma\geqslant 0$, то конечномерные распределения процесса

$$z_2(t)=\frac{q(t)-TQ(t)}{\sqrt{T}}$$

слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса

$$\zeta_2(t)=\theta(t)+\sigma\int_0^t G(t-u)\,d\xi(u),$$

где $\theta(t)$ — центрированный гауссовский процесс, не зависящий от $\xi(t)$, с ковариационной функцией

$$\mathsf{E}\Theta(t)\,\Theta(t+u)=\int_0^t G(t+u-v)\,(1-G(t-v))\,dm(v).$$

Если потребовать от функций $m(t)$ или $G(t)$ нек-рой гладкости, то сходимость процессов $z_i(t)$ к процессам $\zeta_i(t)$, $i=1, 2$, будет иметь место и в более сильном смысле (напр., сходимость распределений $f(z_i(t))$ к $f(\zeta_i(t))$ при $T\to\infty$ для всех функционалов, непрерывных относительно равномерной метрики).

Лит. см. при ст. *Массового обслуживания теория.*

А. А. Боровков.

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМА с отказами — система массового обслуживания, алгоритм к-рой предусматривает выбывание вызовов, в момент прихода к-рых все каналы оказались занятыми. Основные определения и обозначения см. в ст. *Массового обслуживания система.*

1) Естественными характеристиками состояния М. о. с. с отказами являются число q_n (или $q(t)$) занятых линий в момент прихода n-го вызова (в момент времени t). Однако, в отличие от систем с бесконечным числом каналов обслуживания, здесь всегда $q_n \leqslant m$, где m — число каналов в системе. Если в момент прихода n-го вызова оказывается $q_n = m$, то этот вызов получает отказ и выбывает из рассмотрения. Если же $q_n < m$, то вызов направляется на обслуживание в один из свободных каналов.

Предположив, что управляющая последовательность $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_S$ метрически транзитивна, $\mathsf{E}\tau_j^s < \infty$, можно сформулировать эргодич. теорему для систем с отказами, используя систему с бесконечным числом каналов обслуживания, управляемую той же последовательностью. Для такой системы существует собственная стационарная последовательность $\{Q^k\}$ длины очереди. Величину Q^0 можно представлять как число занятых линий стационарной системы в момент прихода нек-рого вызова. Обозначив условно номер этого вызова через γ, определяют Q_l^0 как число линий, занятых вызовами, пришедшими до вызова γ_0, в момент прихода вызова с номером $\gamma + l$, так что $Q_0^0 = Q^0$, $Q_l^0 \leqslant Q^0$. Тогда если вероятность события

$$A = \left\{ Q_k^0 \leqslant m - 1 - k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1 \right\}$$

положительна, то распределения последовательностей $\{q_{n+k};\ k \geqslant 0\}$ длин очереди для систем с отказами будут сходиться при $n \to \infty$ к распределению нек-рой стационарной последовательности $\{q^k;\ k \geqslant 0\}$. Смысл события A весьма прост: оно состоит в «обновлении» системы: после него в системе будут находиться лишь вызовы с номерами γ и выше.

Приведенная теорема есть частный случай более общего утверждения, использующего т. н. метод обновлений. Если $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in G_I$, то для выполнения сформулированных условий достаточно, чтобы

$$\mathsf{P}\left\{\tau_j^s \leqslant m\tau_j^e\right\} > 0, \quad \mathsf{E}\tau_j^s < \infty.$$

Утверждение, аналогичное сформулированному выше, будет иметь место и относительно сходимости при $t \to \infty$ процессов $\{q(t+u);\ u \geqslant 0\}$ к стационарному процессу $\{q^s(u);\ u \geqslant 0\}$ длины очереди. При этом помимо приведенных условий дополнительно требуется, чтобы входной процесс $e(t)$ (число поступивших вызовов к моменту времени t) был процессом со стационарными приращениями.

2) Если $\{\tau_j^e\} \in E$, $\{\tau_j^s\} \in G$, то справедливы формулы Эрланга

$$\mathsf{P}\{q^k = j\} = \mathsf{P}\{q^s(u) = j\} = c\frac{(\alpha a)^j}{j!},$$

где $a = \mathsf{E}\tau_j^s$, α — показатель распределения τ_j^e, а

$$c = \left[\sum_{j=0}^{m} \frac{(\alpha a)^j}{j}\right]^{-1}.$$

Если $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in E$, то последовательность q_n связана в простую однородную цепь Маркова с конечным числом $(m+1)$ состояний. В этом случае вероятности

$$p_j = \mathsf{P}\{q^0 = j\} = \lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = j\}$$

также можно найти в явном виде. Если, кроме того, распределение τ_j^e нерешетчато и $\mathsf{E}\tau_j^e < \infty$, то

$$\mathsf{P}\{q^s(0) = j\} = \lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{q(t) = j\} = \frac{p_{k-1}}{k\alpha\,\mathsf{E}\tau_j^e},$$

где α — показатель распределения τ_j^s.

Эти утверждения указывают условия существования и явный вид для стационарной вероятности отказа, равной

$$\mathsf{P}\{q^0 = m\} = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\{q_n = m\}.$$

3) Теоремы устойчивости для систем с отказами вполне аналогичны теоремам устойчивости для систем с бесконечным числом каналов. Пусть даны последовательности $\{\tau_j^{(n)e}, \tau_j^{(n)s}\}$, $n=1, 2, \ldots$, управляющие системами с отказами и удовлетворяющие следующему условию:

(A) существует последовательность $\{\tau_j^e, \tau_j^s\}$, к распределениям к-рой сходятся при $n \to \infty$ конечномерные распределения $\{\tau_j^{(n)e}, \tau_j^{(n)s}\}$. Кроме того, все названные последовательности удовлетворяют условиям (см., напр., п. 1), обеспечивающим существование стационарных последовательностей длины очереди. Чтобы имела место сходимость распределений этих стационарных последовательностей длины очереди, к-рые обозначены $\{q^{(n)k};\ k \geqslant 0\}$ и $\{q^k;\ k \geqslant 0\}$, следует ввести еще два условия:

(*B*) $\quad \mathsf{E}\tau^{(n)s} \longrightarrow \mathsf{E}\tau^s$ при $n \longrightarrow \infty$;

(*C*) распределения

$$\tau_{-j}^s = \sum_{k=-j}^{0} \tau_k^e$$

при всех $j \geqslant 0$ непрерывны в точке 0.

При выполнении условий (A), (B), (C) конечномерные распределения последовательностей $\{q^{(n)k};\ k \geqslant 0\}$ слабо сходятся к распределениям $\{q^k;\ k \geqslant 0\}$.

4) Асимптотич. методы исследования систем с отказами могут быть эффективными также при изучении систем с интенсивным входным потоком или с большим числом каналов обслуживания.

Исследование систем с интенсивным входом связано с получением результатов в предположениях, близких к тем, к-рые рассматриваются при асимптотич. анализе систем с бесконечным числом каналов обслуживания. Изучение систем с большим числом каналов проводится как путем асимптотич. анализа явных формул, к-рые становятся малоэффективными при больших m, так и с помощью изучения близости распределения q^k к распределению числа занятых линий в аналогичной системе, но с бесконечным числом каналов обслуживания.

Напр., для систем с последовательностями $\{\tau_j^e\} \in G_I$, $\{\tau_j^s\} \in E$ стационарная вероятность отказа равна

$$p_m = \left(\sum_{j=0}^{m} A_j \right)^{-1},$$

где

$$A_0 = 1, \quad A_j = \binom{m}{j} \prod_{k=1}^{j} \frac{1 - \varphi(k/m)}{\varphi(k, m)}, \quad \varphi(t) = \mathsf{E}e^{-tm\alpha\tau_j^e},$$

α — показатель распределения τ_j^s. Эти соотношения при больших m становятся малопригодными для отыскания числовых значений p_m. В то же время оказывается, что при $m \to \infty$ действуют достаточно простые формулы, к-рые устанавливают асимптотич. поведение p_m и к-рые, следовательно, можно использовать для приближенных вычислений вероятности отказа. При этом определяющую роль играет параметр $\rho = \mathsf{E}m\alpha\tau_j^e$, характеризующий отношение среднего числа $1/\mathsf{E}\tau_j^e$ вызовов, поступивших в систему, к среднему числу вызовов $m/\mathsf{E}\tau_j^s = m\alpha$, к-рое может обслужить система за единицу времени. Если $\rho < 1$, то система обычно полностью загружена, если $\rho > 1$, то система недогружена. Если $\rho < 1 - \varepsilon$ при $m \to \infty$ и нек-ром $\varepsilon > 0$, то $p_m/(1-\rho) \to 1$. Если $\mathsf{E}(m\alpha\tau_j^e)^2 < c < \infty$ при $m \to \infty$, то при-

веденное соотношение для p_m сохраняется и при $\rho \to 1$, если только $(1-\rho)\sqrt{m} \to \infty$. Если же $(1-\rho)\sqrt{m} \to$ $\to$ const, то p_m ведет себя асимптотически как $b/\sqrt{m}$, где постоянная b найдена в явном виде. Найдено также асимптотич. поведение p_m и в случае $(1-\rho)\sqrt{m} \to -\infty$.

5) Несколько более полно могут быть изучены одноканальные системы с отказами (когда $m=1$). Пусть, напр., $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_I$. Случайную величину η определяют равенством

$$\eta = \max\,(k : X_k \geqslant \tau_1^s),$$

где $X_k = \tau_1^e + \ldots + \tau_k^e$. Тогда, для того чтобы при любом начальном условии существовал предел

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\,\{q_m = 1\} = p_1,$$

необходимо и достаточно, чтобы наибольший общий делитель возможных значений η равнялся 1. При этом $p_1 = 1 - 1/\mathsf{E}\eta$. Если τ^e нерешетчата, то всегда существует

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\,\{q\,(t) = 1\} = \frac{\mathsf{E}\tau^s}{\mathsf{E}\tau^e \mathsf{E}\eta}\,.$$

При более широком понимании вероятности отказа как предела отношения $\pi_n = r_n/n$, где r_n — число необслуженных вызовов среди первых n поступивших, условия существования $\lim \pi_n$ будут более широкими. Напр., для случая $\{\tau_j^e, \tau_j^s\} \in G_I$ предел π_n существует всегда и равен $1 - 1/\mathsf{E}\eta$.

Лит. см. при ст. *Массового обслуживания теория.*

А. А. Боровков.

МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТЕОРИЯ, теория очередей,— раздел теории вероятностей, изучающий математич. модели разного рода реальных *массового обслуживания систем*. Эти модели представляют собой случайные процессы специального вида, к-рые наз. иногда процессами обслуживания. Чаще всего используется описательное определение этих процессов, поскольку формальное их построение оказывается весьма сложным и не всегда эффективным.

М. о. т. использует главным образом аппарат теории вероятностей. Основные задачи М. о. т. обычно состоят в том, чтобы на основании «локальных» свойств рассматриваемых случайных процессов изучить их стационарные характеристики (если таковые существуют) или поведение этих характеристик за большой промежуток времени. Одна из главных конечных целей исследований в этой области состоит в выборе наиболее разумной организации систем массового обслуживания.

Напр., для такого типичного объекта М. о. т., как автоматические телефонные станции (см. *Массового обслуживания система* с отказами), одной из основных характеристик является доля вызовов получивших отказ, т. е. предел p при $t \to \infty$ (если он существует) отношения $r(t)/e(t)$ числа $r(t)$ вызовов, получивших отказ за время t, к общему числу $e(t)$ вызовов, поступивших за это время. При этом предполагаются известными распределение интервалов времени $\tau_1^e, \tau_2^e, \ldots$ между поступлениями вызовов и распределение времени обслуживания $\tau_1^s, \tau_2^s, \ldots$ этих вызовов. Задание распределения случайной (управляющей) последовательности $\{\tau_j^e, \tau_j^s;\ j \geqslant 1, \ldots\}$ вместе с описанием алгоритма, по к-рому происходит эволюция системы массового обслуживания, и составляют исходные данные, характеризующие «локальные свойства» процесса обслуживания.

Аналогичным образом для *массового обслуживания систем* с ожиданием многоканальных изучаются предельные при $n \to \infty$ распределения вероятностей $\mathsf{P}\{w_n < x\}$ и $\mathsf{P}\{q_n < x\}$ для времени w_n, к-рое n-й по счету вызов, поступивший в систему, ожидал начала своего обслуживания с момента прихода, и для длины

q_n очереди в момент появления в системе n-го вызова. Рассматриваются также предельные распределения $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{q(t)<x\}$ для длины очереди в момент времени t и др. При этом исходным опять является задание управляющей последовательности случайных величин (распределение интервалов и времени обслуживания) и алгоритм, определяющий работу системы массового обслуживания.

Для сравнительно простых систем массового обслуживания и при нек-рых предположениях относительно управляющей последовательности случайных величин удается найти требуемые характеристики аналитич. методами. Однако число таких систем не велико. Характер условий, накладываемых на управляющие последовательности, можно продемонстрировать на примере системы массового обслуживания с отказами (автоматические телефонные станции). Пусть: 1) случайные величины τ_j^e показательно распределены:

$$\mathsf{P}\{\tau_j^e > x\} = e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0,$$

т. е. входящий поток является пуассоновским; 2) величины τ_j^s независимы, одинаково распределены и не зависят от $\{\tau_j^e\}$. Тогда определенная выше вероятность отказа p существует и равна

$$p = \rho^n/n! \left(\sum_{k=0}^{n} \rho^k/k!\right)^{-1},$$

где ρ равно отношению математич. ожиданий

$$\rho = \mathsf{E}\tau_j^s/\mathsf{E}\tau_j^e = \alpha\mathsf{E}\tau_j^s.$$

Для рассматриваемой системы отказ от одного из условий 1) — 2) значительно усложняет или делает невозможным отыскание явных формул для числа p.

В основе аналитич. подхода в поисках явных выражений для искомых характеристик лежит прием, связанный с построением марковских процессов, описывающих состояние системы. Этот тип процессов достаточно хорошо изучен, и решение задачи в этом случае сводится к составлению и решению соответствующих уравнений для стационарных распределений (инвариантной меры). Такой подход часто используется в модифицированном виде, когда строятся полумарковские процессы или вложенные марковские процессы (свойство марковости выполняется лишь в нек-рые случайные моменты времени).

Для более сложных систем массового обслуживания точные аналитич. методы, как правило, не эффективны и приходится использовать асимптотич. методы исследования или моделировать соответствующие случайные процессы с помощью *Монте-Карло метода*. Асимптотич. методы уместны в тех случаях, когда рассматриваемая система близка (в смысле ее локальных свойств) к другой системе, к-рая либо достаточно хорошо изучена и допускает вычисление нужных характеристик, либо эта система является в каком-то смысле критической. Направление асимптотич. исследований в первом случае описывается теоремами устойчивости (или непрерывности). Во втором случае стационарные характеристики часто не существуют, но для них удается устанавливать «собирательные» предельные теоремы, т. е. такие, в к-рых предельное поведение определяется не индивидуальными свойствами управляющих последовательностей, а лишь несколькими их числовыми параметрами. Примером второго типа асимптотич. результатов могут служить т. н. теоремы о нагруженных одноканальных системах с ожиданием. Они устанавливают следующее. Пусть интервалы τ_j^e, $j=1, 2, \ldots$, между поступлениями вызовов и временем обслуживания τ_j^s, $j=1, 2, \ldots$, образуют независимые друг от друга

последовательности независимых одинаково распределенных величин и пусть математич. ожидание

$$a = \mathsf{E}\,(\tau_j^s - \tau_j^e)$$

разности случайных величин τ_j^s и τ_j^e положительно. Тогда существует невырожденное предельное распределение

$$w(x) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\,\{w_n \geqslant x\}$$

для времени w_n ожидания n-го вызова. Кроме того, пусть случайные величины τ_j^e, τ_j^s меняются так, что $a \to 0$, оставаясь положительным, дисперсия $\mathsf{D}(\tau_j^s - \tau_j^e)$ сходится к положительному пределу $\sigma^2 < \infty$, а математич. ожидание $\mathsf{E}[\tau_j^s - \tau_j^e]^{2+\gamma}$ равномерно ограничено при нек-ром $\gamma > 0$. Тогда при каждом фиксированном z

$$w(z/a) \longrightarrow e^{-2z/\sigma^2}. \qquad (*)$$

Это соотношение дает возможность приближенно вычислять $w(x)$ при малых значениях a. Предельная система, соответствующая значению $a=0$, является критической в том смысле, что для нее не существует невырожденного предельного распределения $w(x)$, и для каждого $x>0$ выполняется $w(x)-1$ (время ожидания n-го клиента неограниченно растет с ростом n). Соотношение $(*)$ может быть распространено на широкий класс систем обслуживания с ожиданием при очень общих предположениях на управляющие последовательности.

Возникновение М. о. т. было вызвано интересом к новым математич. задачам, возникающим в организации телефонных сетей. Первые публикации по этому поводу принадлежат А. Эрлангу (A. Erlang) и относятся к 20-м гг. 20 в. Дальнейшее развитие М. о. т. получила в 40—50-е гг. в работах К. Пальма (C. Palm), Ф. Поллачека (F. Pollaczek), А. Я. Хинчина и др. Последнему принадлежит и термин «массового обслуживания теория». В СССР эти работы по М. о. т. были продолжены Б. В. Гнеденко с группой его учеников и др.

Развитие М. о. т. стимулируется как расширением круга ее приложений, так и математич. содержательностью возникающих при этом задач. Являясь формально частью теории случайных процессов, М. о. т. выделилась в самостоятельную область исследований со своим кругом проблем и своими подходами к их решению.

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; [2] Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966; [3] Боровков А. А., Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, М., 1972; [4] его же, Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980.

А. А. Боровков.

МАССОВЫЙ ОПЕРАТОР, оператор массы,— оператор, учитывающий взаимодействие частицы с ее собственным полем и другими полями. Пусть состояние системы описывается величиной

$$\Psi(x) = \Psi_0(x)\,\psi(x),$$

где $\psi(x)$ — оператор поля, действующий на волновую функцию Ψ_0 (вектор состояния), x — четырехмерная координата. Если $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$[L(x) + M(x)]\,\Psi(x) = 0, \qquad (*)$$

где оператор $L(x)$ соответствует свободной частице, а $M(x)$ учитывает ее взаимодействие с собственным полем и др. полями, то оператор $M(x)$ наз. массовым оператором. М. о. является интегральным оператором с ядром $M(x, x')$:

$$M(x)\,\Psi(x) = \int M(x, x')\,\Psi(x')\,dx'.$$

М. о. тесно связан с одночастичной *Грина функцией* $G(x, x')$, к-рая является решением уравнения, подоб-

ного (*), но с δ-образным источником в правой части

$$[L(x)+M(x)]G(x,\ x')=\delta(x-x'),$$

где $\delta(x-x')$ — четырехмерная дельта-функция.

Лит.: [1] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957; [2] Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962.

А. Б. Иванов.

МАСШТАБНЫЙ ПАРАМЕТР — один из т. н. параметров расположения, многообразием значений к-рых описывается семейство распределений вероятностей одного типа. Если распределение в $\mathbb{R}$ с функцией распределения $F(x)$ принадлежит тому же типу, что и фиксированное распределение с функцией распределения $F_0(x)$, то $F(x)=F_0\left(\frac{x-b}{a}\right)$. Здесь $a>0$ — М. п., а b — параметр сдвига (или центрирующий параметр). Смысл М. п. разъясняется следующим образом: если F_0 и F — функции распределения случайных величин X_0 и X соответственно, то переход от X_0 к $X=aX_0$ (при $b=0$) представляет собой изменение единицы измерения.

А. В. Прохоров.

МАТЕМАТИКА — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. В неразрывной связи с запросами техники и естествознания запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., непрерывно расширяется, так что это общее определение М. наполняется все более богатым содержанием.

Ясное понимание самостоятельного положения М. как особой науки стало возможным только после накопления достаточно большого фактич. материала и возникло впервые в Др. Греции в 6—5 вв. до н. э. Развитие М. до этого времени естественно отнести к периоду зарождения математики, а к 6—5 вв. до н. э. приурочить начало периода элементарной математики. В течение этих двух первых периодов математич. исследования имеют дело почти исключительно с весьма ограниченным запасом основных понятий, возникших еще на очень ранних ступенях историч. развития в связи с самыми простыми запросами хозяйственной жизни. Первые задачи механики и физики могли еще удовлетворяться этим же запасом основных математич. понятий.

В 17 в. новые запросы естествознания и техники заставляют математиков сосредоточить свое внимание на создании методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразования геометрич. фигур. С употребления переменных величин в аналитич. геометрии и создания дифференциального и интегрального исчисления начинается период математики переменных величин.

Дальнейшее расширение круга количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., привело в нач. 19 в. к необходимости отнестись к процессу расширения предмета математич. исследований сознательно, поставив перед собой задачу систематич. изучения с достаточно общей точки зрения возможных типов количественных отношений и пространственных форм. Создание «воображаемой геометрии» Лобачевского было первым значительным шагом в этом направлении. Развитие подобного рода исследований внесло в М. столь важные новые черты, что М. 19 и 20 вв. естественно отнести к особому периоду современной математики.

1. Зарождение математики. Счет предметов на самых ранних ступенях развития культуры привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Только на основе разработанной системы устного счисления возникают письменные системы счисления и постепенно вырабатываются приемы выполнения над

натуральными числами четырех арифметич. действий. Потребности измерения (количества зерна, длины дороги и т. п.) приводят к появлению названий и обозначений простейших дробных чисел и к разработке приемов выполнения арифметич. действий над дробями. Таким образом накапливается материал, складывающийся постепенно в древнейшую математич. науку — *арифметику*. Измерение площадей и объемов, потребности строительной техники, а несколько позднее астрономии вызывают развитие начатков *геометрии*. Эти процессы шли у многих народов в значительной степени независимо и параллельно. Особенное значение для дальнейшего развития науки имело накопление арифметич. и геометрич. знаний в Египте и Вавилонии. В Вавилонии на основе развитой техники арифметич. вычислений появились также начатки *алгебры*, а в связи с запросами астрономии — начатки *тригонометрии*.

2. Период элементарной математики. Только после накопления большого конкретного материала в виде разрозненных приемов арифметич. вычислений, способов определения площадей и объемов и т. п. возникает М. как самостоятельная наука с ясным пониманием своеобразия ее метода и необходимости систематич. развития ее основных понятий и предложений в достаточно общей форме. В применении к арифметике и алгебре указанный процесс начался уже в Вавилонии. Однако вполне определилось это новое течение, заключавшееся в систематическом и логически последовательном построении основ математич. науки, в Др. Греции. Созданная древними греками система изложения элементарной геометрии на два тысячелетия вперед сделалась образцом дедуктивного построения математич. теории. Из арифметики постепенно вырастает *чисел теория*. Создается систематич. учение о величинах и измерении. Процесс формирования (в связи с задачей измерения величин) понятия действительного числа (см. *Число*) оказывается весьма длительным. Дело в том, что понятия иррационального и отрицательного чисел относятся к более сложным математич. абстракциям, к-рые, в отличие от понятий натурального числа, дроби или геометрич. фигуры, не имеют достаточно прочной опоры в донаучном общечеловеческом опыте. Создание алгебры как буквенного исчисления завершается лишь в конце рассматриваемого периода. Период элементарной математики заканчивается (в Зап. Европе в нач. 17 в.), когда центр тяжести математич. интересов переносится в область М. переменных величин.

3. Период создания математики переменных величин. С 17 в. начинается существенно новый период развития М. Круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых теперь М., уже не исчерпывается числами, величинами и геометрич. фигурами. В основном это было обусловлено явным введением в М. идей движения и изменения. Уже в алгебре в скрытом виде содержится идея зависимости между величинами (значение суммы зависит от значений слагаемых и т. д.). Однако чтобы охватить количественные отношения в процессе их изменения, надо было самые зависимости между величинами сделать самостоятельным объектом изучения. Поэтому на первый план выдвигается понятие *функции*, играющее в дальнейшем такую же роль основного и самостоятельного предмета изучения, как ранее понятия величины или числа. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит далее к основным понятиям математич. анализа, вводящим в М. в явном виде идею бесконечного, к понятиям предела, производной, дифференциала и интеграла. Создается анализ бесконечно малых, в первую очередь в виде *дифференциального исчисления* и *интегрального исчисления*, позволяющий связывать конечные изменения переменных величин с их поведением в непосредственной близости отдельных принимаемых ими зна-

чений. Основные законы механики и физики записываются в форме дифференциальных уравнений, и задача интегрирования этих уравнений выдвигается в качестве одной из важнейших задач М. Разыскание неизвестных функций, определенных условиями другого рода (условиями минимума или максимума нек-рых связанных с ними величин), составляет предмет *вариационного исчисления*. Таким образом, наряду с уравнениями, в к-рых неизвестными являются числа, появляются уравнения, в к-рых неизвестны и подлежат определению функции.

Предмет изучения геометрии также существенно расширяется с проникновением в геометрию идей движения и преобразования фигур. Геометрия начинает изучать движения и преобразования сами по себе. Напр., в *проективной геометрии* одним из основных объектов изучения являются сами проективные преобразования плоскости или пространства. Впрочем, сознательное развитие этих идей относится лишь к кон. 18 и нач. 19 вв. Гораздо раньше, с созданием в 17 в. *аналитической геометрии*, принципиально изменилось отношение геометрии к остальной М.: был найден универсальный способ перевода вопросов геометрии на язык алгебры и анализа и решения их чисто алгебраич. и аналитич. методами, а с другой стороны, открылась широкая возможность изображения (иллюстрирования) алгебраич. и аналитич. фактов геометрически, напр. при графич. изображении функциональных зависимостей.

4. Современная математика. Все созданные в 17 и 18 вв. разделы математич. анализа продолжали с большой интенсивностью развиваться в 19 и 20 вв. Чрезвычайно расширился за это время и круг их применения к задачам, выдвигаемым естествознанием и техникой. Однако помимо этого количественного роста с кон. 18 и в нач. 19 вв. в развитии М. наблюдается и ряд существенно новых черт.

Накопленный в 17 и 18 вв. огромный фактич. материал привел к необходимости углубленного логич. анализа и объединения его с новых точек зрения. Связь М. с естествознанием, оставаясь по существу не менее тесной, приобретает теперь более сложные формы. Большие новые теории возникают не только в результате непосредственных запросов естествознания и техники, но также из внутренних потребностей самой М. Таково в основном было развитие *функций комплексного переменного теории*, занявшей в нач. и сер. 19 в. центральное положение во всем математич. анализе. Другим замечательным примером теории, возникшей в результате внутреннего развития самой М., явилась *Лобачевского геометрия*.

В более непосредственной и непрерывной зависимости от запросов механики и физики происходило формирование векторного и тензорного исчислений. Перенесение векторных и тензорных представлений на бесконечномерные величины происходит в рамках *функционального анализа* и тесно связывается с потребностями современной физики.

Таким образом, в результате как внутренних потребностей М., так и новых запросов естествознания круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., чрезвычайно расширяется; в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, все разнообразие форм пространств любого числа измерений и т. п.

Существенная новизна начавшегося в 19 в. этапа развития М. состоит в том, что вопросы необходимого расширения круга подлежащих изучению количественных отношений и пространственных форм становятся предметом сознательного и активного интереса математиков. Если прежде, напр., введение в употребление отрицательных и комплексных чисел и точная формули-

ровка правил действий с ними требовали длительной работы, то теперь развитие М. потребовало выработки приемов сознательного и планомерного создания новых геометрич. и алгебраич. систем.

Чрезвычайное расширение предмета М. привлекло в 19 в. усиленное внимание к вопросам ее «обоснования», т. е. критич. пересмотру ее исходных положений (аксиом), построению строгой системы определений и доказательств, а также критич. рассмотрению логич. приемов, употребляемых при этих доказательствах. Стандарт требований к логич. строгости, предъявляемых к практич. работе математиков над развитием отдельных математич. теорий, сложился только к кон. 19 в. Глубокий и тщательный анализ требований к логич. строгости доказательств, строения математич. теорий, вопросов алгоритмич. разрешимости и неразрешимости математич. проблем составляет предмет *математической логики*.

В нач. 19 в. происходит новое значит. расширение области приложений математич. анализа. Если до этого времени основными отделами физики, требовавшими большого математич. аппарата, оставались механика и оптика, то теперь к ним присоединяются электродинамика, теория магнетизма и термодинамика. Получают широкое развитие важнейшие разделы механики непрерывных сред. Быстро растут и математич. запросы техники. В качестве основного аппарата новых областей механики и математич. физики усиленно разрабатывается теория *дифференциальных уравнений обыкновенных*, *дифференциальных уравнений с частными производными* и *математической физики уравнений*.

Теория дифференциальных уравнений послужила отправным пунктом исследований по топологии многообразий. Здесь получили свое начало «комбинаторные», «гомологические» и «гомотопические» методы *алгебраической топологии*. Другое направление в топологии возникло на почве *множеств теории* и функционального анализа и привело к систематич. построению теории общих *топологических пространств*.

Существенным дополнением к методам дифференциальных уравнений при изучении природы и решении технич. задач являются методы *вероятностей теории*. Если в нач. 19 в. главными потребителями вероятностных методов были теория артиллерийской стрельбы и теория ошибок, то в кон. 19 и в нач. 20 вв. теория вероятностей получает много новых применений благодаря созданию теории случайных процессов и развитию аппарата *математической статистики*.

Теория чисел, представлявшая собрание отдельных результатов и идей, с 19 в. развивалась в различных направлениях как стройная теория (см. *Алгебраическая теория чисел*, *Аналитическая теория чисел*, *Диофантовы приближения*).

Центр тяжести алгебраич. исследований переносится в новые области алгебры: теорию групп, полей, колец, общих алгебраич. систем. На границе между алгеброй и геометрией возникает теория непрерывных групп, методы к-рой позднее проникают во все новые области М. и естествознания.

Элементарная и проективная геометрия привлекают внимание математиков гл. образом под углом зрения изучения их логич. и аксиоматич. основ. Но основными отделами геометрии, где сосредоточиваются наиболее значительные научные силы, становятся *дифференциальная геометрия*, *алгебраическая геометрия*, *риманова геометрия*.

В результате систематич. построения математич. анализа на основе строгой арифметич. теории иррациональных чисел и теории множеств возникла *функций действительного переменного теория*.

Практич. использование результатов теоретического математич. исследования требует получения ответа на

поставленную задачу в числовой форме. Между тем даже после исчерпывающего теоретич. разбора задачи это часто оказывается весьма трудным делом. Зародившиеся в кон. 19 и в нач. 20 вв. численные методы анализа и алгебры выросли в связи с созданием и использованием ЭВМ в самостоятельную ветвь М.— *вычислительную математику*.

Отмеченные основные особенности современной М. и перечисленные основные направления исследований М. по разделам сложились в нач. 20 в. В значительной мере это деление на разделы сохраняется, несмотря на стремительное развитие М. в 20 в. Однако потребности развития самой М., «математизация» различных областей науки, проникновение математич. методов во многие сферы практич. деятельности, быстрый прогресс вычислит. техники привели к перемещению основных усилий математиков внутри сложившихся разделов М. и к появлению целого ряда новых математич. дисциплин (см., напр., *Автоматов теория*, *Информации теория*, *Игр теория*, *Исследование операций*, а также *Кибернетика*, *Математическая экономика*). На основе задач теории *управляющих систем*, комбинаторного анализа, теории графов, теории кодирования возник *дискретный анализ*. Вопросы о наилучшем (в том или ином смысле) управлении физич. или механич. системами, описываемыми дифференциальными ур-ниями, привели к созданию *оптимального управления математической теории*.

Исследования в области общих проблем управления и связанных с ними областях М. в соединении с прогрессом вычислит. техники дают основу для автоматизации новых сфер человеческой деятельности.

По материалам статьи А. Н. Колмогорова [1].

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Математика, в кн.: Большая Советская Энциклопедия, 2 изд., т. 26, М., 1954; [2] Виноградов И. М., Математика и научный прогресс, в кн.: Ленин и современная наука, кн. 2, М., 1970; [3] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [4] Математика, ее содержание, методы и значение, т. 1—3, М.,1956; [5] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1—3, М., 1970—72; [6] Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978; [7] Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций, М., 1981; [8] Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 3 изд., М., 1978; [9] Марджанишвили К. К., Математика в Академии наук СССР, «Вестн. АН СССР», 1974, № 6; [10] Weyl H., A Half-century of mathematies, «Amer. Math. Monthly», 1951, v. 58, № 8.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ — метод доказательства математич. утверждений, основанный на принципе математической индукции: утверждение $A(x)$, зависящее от натурального параметра x, считается доказанным, если доказано $A(1)$ и для любого натурального n из предположения, что верно $A(n)$, выведено, что верно также $A(n+1)$.

Доказательство утверждения $A(1)$ составляет первый шаг (или базис) индукции, а доказательство $A(n+1)$ в предположении, что верно $A(n)$, наз. индукционным переходом. При этом x наз. параметром индукции, а предположение $A(n)$ при доказательстве $A(n+1)$ наз. индуктивным предположением. Принцип М. и. является также основанием для *индуктивных определений*. Простейшим примером такого определения является определение свойства: «быть словом длины n в данном алфавите

$$\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k\}». \qquad (*)$$

Базис индукции: каждая буква алфавита (*) есть слово длины 1. Индукционный переход: если E — слово длины n, то каждое слово Ea_i, где $1 \leqslant i \leqslant k$, есть слово длины $n+1$. Индукция может начинаться с нулевого шага.

Часто бывает так, что $A(1)$ и $A(n+1)$ доказываются аналогичными рассуждениями. В таких случаях удобно пользоваться следующей эквивалентной формой

принципа М. и. Если для всякого n из предположения: $A(x)$ верно при любом натуральном $x<n$ — следует, что $A(x)$ верно также при $x=n$, то утверждение $A(x)$ верно при любом натуральном x. В такой форме принцип М. и. может быть применен для доказательства утверждений $A(x)$, в к-рых параметр x пробегает то или иное множество, вполне упорядоченное по нек-рому трансфинитному типу (*трансфинитная индукция*). В качестве простых примеров трансфинитной индукции отметим индукцию по параметру, пробегающему множество всех слов в данном алфавите, упорядоченное лексикографически, и индукцию по построению формул в данном логико-математич. исчислении.

Иногда для доказательства нек-рого утверждения $A(n)$ индукцией по n приходится одновременно с $A(n)$ доказывать индукцией по n ряд других утверждений, без к-рых индукцию для $A(n)$ не удается провести. В формальной арифметике можно указать такие утверждения $A(n)$, для к-рых в рамках рассматриваемого исчисления индукция не может быть проведена без добавления новых вспомогательных утверждений, зависящих от n (см. [3]). В таких случаях мы имеем дело с доказательством ряда утверждений совместной математической индукцией. Все эти утверждения формально можно объединить в одну конъюнкцию, однако практически такое объединение только усложнило бы рассмотрение, т. к. при этом исчезла бы возможность неформальных осмысленных ссылок на определенные индуктивные предположения.

В нек-рых конкретных математич. исследованиях число понятий и утверждений, определяемых и доказываемых сложной совместной индукцией, исчисляется трехзначной цифрой (см. [4]). В этом случае ввиду наличия в индуктивном доказательстве большого числа перекрестных ссылок на индуктивные предположения, для содержательного (неформального) понимания любого (даже самого простого) определения или утверждения при данном достаточно большом значении параметра индукции читатель должен быть знаком с содержанием всех вводимых совместной индукцией понятий и многих свойств этих понятий для меньших значений параметра индукции. По-видимому, единственным корректным с логич. точки зрения выходом из возникающего здесь логич. круга является аксиоматич. изложение всей рассматриваемой системы понятий. Таким образом, большое число понятий, определяемых совместной индукцией, приводит к необходимости применения *аксиоматического метода* в индуктивном определении и доказательстве. Это — наглядный пример необходимости аксиоматич. метода для решения конкретных математич. задач, а не только вопросов, относящихся к основаниям математики.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Цинман Л. Л., «Матем. сб.», 1968, т. 77, № 1, с. 71—104; [4] Адян С. И., Проблема Бернсайда и тождества в группах, М., 1975.

С. И. Адян.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА — математическая дисциплина, предметом к-рой является разработка и изучение понятий, образующих основу формального аппарата для описания строения естественных языков (т. е. метаязыка лингвистики). Возникновение М. л. можно отнести приблизительно к 50-м гг. 20 в.; она была вызвана к жизни прежде всего внутренними потребностями теоретич. лингвистики, в к-рой к этому времени назрела необходимость уточнения основных понятий, а также задачами, связанными с автоматизацией переработки языковой информации (см. *Автоматический перевод*). В М. л. широко используются методы теории алгоритмов, теории автоматов и алгебры. Сохраняя свое прикладное значение, М. л. постоянно эволюционирует по пути превращения в тео-

ретическую математич. дисциплину, являющуюся по сути дела одним из ответвлений математич. логики. В то же время круг приложений М. л. расширился — ее методы нашли применение в теории программирования.

Лингвистич. концепции, лежащие в основе формальных методов описания строения языка, принадлежат *структурной лингвистике*. Главнейшая из этих концепций — представление о языке как о «системе чистых отношений», сближающее язык с абстрактными системами, изучаемыми в математике. Это представление конкретизируется в концепции функционирования языка как преобразования нек-рых абстрактных объектов — «смыслов» — в объекты другой природы — «тексты» и обратно. Такая концепция приводит к мысли об изучении указанного преобразования (после уточнения понятий «смысла» и «текста») математич. средствами. Использование этого подхода затруднительно, если пытаться рассматривать преобразование «в целом», ввиду его чрезвычайной сложности, а также ввиду трудности формализации понятия «смысла». Однако содержательные соображения подсказывают расчленение преобразования на этапы. Напр., при одном из наиболее грубых членений нек-рый этап может состоять в переходе от «смыслов» предложений к «синтаксическим структурам без линейного порядка» — наборам элементов предложений, соединенных «синтаксическими связями», но еще не расположенных в линейные последовательности; на следующем этапе получаются линейные последовательности слов, потом они превращаются в цепочки звуков. При более тонких членениях вводятся синтаксич. структуры нескольких уровней, все более отдаляющиеся от «смыслового» и приближающиеся к «текстовому»; «послесинтаксические» этапы также подвергаются дальнейшему расчленению. Такие этапы уже легче описывать математически, уточняя представления об объектах промежуточных уровней и моделируя переходы от одних уровней к другим эффективными отображениями. Правда, рассматриваемое преобразование неоднозначно, и таковы же все или почти все (в зависимости от способа членения) промежуточные этапы; это связано с одной из важнейших особенностей языка — наличием в нем явления с и н о н и м и и, т. е. возможности выражать одно и то же содержание разными способами. Поэтому приходится строить не детерминированные эффективные системы (алгоритмы), а недетерминированные (исчисления), позволяющие либо для данного объекта нек-рого уровня перечислять отвечающие ему объекты соседнего уровня или объекты (того же уровня), ему синонимичные, либо перечислять множество «правильных» объектов заданного уровня (т. е. таких, к-рые известным регулярным способом сопоставляются объектам предыдущего уровня), либо перечислять множество пар отвечающих друг другу объектов двух заданных соседних уровней (напр., «предложение + его синтаксическая структура») и т. п. Такого рода исчисления известны как *грамматики* формальные. Одновременно с формальными грамматиками, моделирующими преобразования языковых объектов, возникают конструкции, предназначенные для формального описания самих этих объектов. Кроме того, на множествах объектов одного уровня возникают классификации и отношения, во многом сходные с категориями традиционной грамматики (такими, как часть речи, род, падеж и т. п.) и в ряде случаев совпадающие с ними; без введения таких классификаций и отношений реальное построение формальных грамматик для естественных языков фактически невозможно.

Таким образом, можно выделить три аспекта формального описания языка: описание строения языковых объектов различных уровней, описание нек-рых специальных отношений и классификаций на множествах

этих объектов и описание преобразований одних объектов в другие, а также строения множеств «правильных» объектов. Этим аспектам отвечают три основных раздела М. л.: 1) разработка и изучение способов описания строения отрезков речи; 2) изучение лингвистически значимых отношений и классификаций на множествах языковых объектов (построенные для этой цели формальные системы обычно называют *аналитическими моделями языка*); 3) теория формальных грамматик.

Для описания строения отрезков речи используются синтаксич. структуры, представляющие собой графы или биграфы специального вида, обычно с помеченными вершинами и/или дугами. Лучше всего разработана теория описания «поверхностных» уровней (т. е. наиболее далеких от «смыслового»); на этих уровнях структуры обычно являются деревьями. Интенсивно разрабатываются способы описания более «глубинных» уровней. Для этого, в частности, предложен аппарат т. н. лексических функций, играющих при описании смысловой сочетаемости слов роль, сходную с той, к-рую традиционные категории рода, падежа, числа и т. п. играют при описании синтаксич. сочетаемости. Средств строгого описания «смыслового» уровня пока нет, но многим исследователям представляется вероятным, что на таком пути «последовательного приближения» можно надеяться выработать подход к формальному описанию смысла. Это не исключает и иных подходов; в частности, много исследований посвящено способам выражения в естественных языках предикатов, пропозициональных связок, кванторов, «переводу» с формально-логич. языков на естественные и обратно. Сюда же примыкают работы по конструированию так наз. семантических языков, в к-рых смыслы сопоставляются текстам простыми и строго формальными способами.

Аналитич. модели языка важны, в частности, ввиду того, что они позволяют уточнить логич. природу многих понятий и категорий традиционного языковедения. Эти модели не всегда носят характер эффективных процедур, поскольку в них могут входить такие понятия, как (бесконечное) множество грамматически правильных предложений нек-рого языка, считающееся заданным. Однако в ряде моделей все исходные данные представляют собой конечные множества и финитные отношения; в этих случаях входящие в модель процедуры эффективны. К теории аналитич. моделей языка примыкает теория лингвистической дешифровки: ее предметом является построение процедур, применяемых, подобно аналитич. моделям, к «неупорядоченным» эмпирич. данным о языке, но всегда эффективных и позволяющих получать не только абстрактные определения, но и конкретные сведения о строении конкретных языков (напр., алгоритмы, осуществляющие автоматич. разбиение множества фонем языка на классы гласных и согласных без использования каких-либо сведений о языке, кроме нек-рого достаточно длинного текста).

Теория формальных грамматик занимает в М. л. центральное место, т. к. она позволяет моделировать наиболее существенный аспект функционирования языка — переработку смыслов в тексты и обратно — и благодаря этому служит связующим звеном между остальными разделами М. л. По характеру своего аппарата теория формальных грамматик во многом близка к теории алгоритмов и теории автоматов. Более других разработаны те типы формальных грамматик, к-рые служат для характеризации множества грамматически правильных предложений языка и приписывания этим предложениям синтаксич. структур. Предложения при этом моделируются цепочками (словами) в конечном алфавите, элементы к-рого интерпретируются как слова ес-

тественного языка (поэтому в М. л. термин «цепочка» предпочитают термину «слово», а алфавит часто называют также словарем), и моделью множества грамматически правильных предложений служит нек-рый формальный язык. К этому типу относятся, в частности, *грамматики порождающие*. Порождающая грамматика представляет собой по существу частный случай исчисления Поста: она состоит из конечного алфавита, разделенного на две части — основной и вспомогательный алфавиты, конечного множества правил вывода, представляющих собой правила подстановки вида $\varphi \to \psi$ (φ, ψ — цепочки) и одной аксиомы (обычно состоящей из одного вспомогательного символа, называемого начальным). (Формальный) язык, порождаемый такой грамматикой,— это множество цепочек в основном алфавите, выводимых из аксиомы. Наиболее важный для лингвистич. приложений класс порождающих грамматик — *грамматики составляющих*, у к-рых каждое правило имеет вид $\xi_1 A \xi_2 \to \xi_1 \theta \xi_2$, где ξ_1, ξ_2, θ — цепочки в объединении основного и вспомогательного алфавитов, A — вспомогательный символ и θ непуста. Грамматика составляющих позволяет естественным образом сопоставлять цепочкам порождаемого ею языка размеченные системы составляющих. Этот класс грамматик наиболее важен и в чисто математич. отношении, т. к. языки, порождаемые грамматиками составляющих, представляют собой простой и весьма важный подкласс класса примитивно рекурсивных множеств. Среди грамматик составляющих в свою очередь особенно важны как в теоретическом, так и в прикладном аспектах *грамматики бесконтекстные*, у к-рых правила имеют вид $A \to \theta$, где A — вспомогательный символ. К бесконтекстным грамматикам близки *грамматики доминационные*, также порождающие формальные языки, но сопоставляющие цепочкам этих языков деревья подчинения, и *грамматики категориальные*, характеризующиеся особым способом задания информации о синтаксич. свойствах слов. Принципиально иной тип формальных грамматик представляют собой *грамматики трансформационные*; они служат для осуществления преобразований синтаксич. структур, не «привязанных», вообще говоря, к цепочкам; эти грамматики представляются наиболее перспективными для описания строения естественных языков, т. к. позволяют рассматривать синтаксические и линейные отношения между словами раздельно, что лучше отражает языковую реальность.

Теория формальных грамматик наряду с «традиционными» для нее лингвистич. приложениями нашла применение в теории программирования для описания языков программирования и трансляторов. Особенно широко применяются для этих целей бесконтекстные грамматики, но используются и грамматики более общего вида.

Лит.: [1] Хомский Н., в кн.: Новое в лингвистике, в. 2, М., 1962, с. 412—527; [2] Гладкий А. В., Мельчук И. А., Элементы математической лингвистики, М., 1969.

А. В. Гладкий.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, теоретическая логика, символическая логика,— раздел математики, посвященный изучению математич. доказательств и вопросов оснований математики.

Исторический очерк. Идея построения универсального языка для всей математики и формализации на базе такого языка математич. доказательств выдвигалась в 17 в. Г. Лейбницем (G. Leibniz). Но только в сер. 19 в. появились первые научные работы по алгебраизации аристотелевой логики [Дж. Буль (G. Boole, 1847) и О. де Морган (A. de Morgan, 1858)]. После того как Г. Фреге (G. Frege, 1879) и Ч. Пирс (C. Peirce, 1885) ввели в язык алгебры логики предикаты, предметные переменные и кванторы, возникла реальная

возможность применить этот язык к вопросам оснований математики.

С другой стороны, создание в 19 в. неевклидовой геометрии сильно поколебало уверенность математиков в абсолютной надежности геометрич. интуиции, на к-рой была основана евклидова геометрия. Сомнениям в надежности геометрич. интуиции способствовало также то, что в результате развития исчисления бесконечно малых математики натолкнулись на неожиданные примеры всюду непрерывных функций без производных. Появилась потребность отделить понятие действительного числа от неясного понятия «величины», к-рое было основано на геометрич. интуиции. Эта задача была решена разными путями в работах К. Вейерштрасса (K. Weierstraβ), Р. Дедекинда (R. Dedekind) и Г. Кантора (G. Cantor). Они показали возможность «арифметизации» анализа и теории функций, в результате чего в качестве фундамента всей классич. математики стала рассматриваться арифметика целых чисел. Затем была предпринята аксиоматизация арифметики [Р. Дедекинд (1888) и Дж. Пеано (G. Peano, 1891)]. При этом Дж. Пеано создал более удобную символику для логич. языка. Позже этот язык был усовершенствован в совместном труде Б. Рассела (B. Russell) и А. Уайтхеда (A. Whitehead) «Принципы математики» (1910), где была предпринята попытка сведения всей математики к логике. Но эта попытка не увенчалась успехом, т. к. оказалось невозможным вывести из чисто логич. аксиом существование бесконечных множеств. Хотя логистич. программа Фреге — Рассела в основаниях математики так и не достигла своей главной цели — сведения математики к логике, в их работах был создан богатый логич. аппарат, без к-рого оформление М. л. как полноценной математич. дисциплины было бы невозможно.

На рубеже 19—20 вв. были обнаружены *антиномии*, связанные с основными понятиями теории множеств. Наиболее сильное впечатление на современников произвела опубликованная в 1903 антиномия Рассела. Пусть M есть множество всех таких множеств, каждое из к-рых не является своим собственным элементом. Легко убедиться, что M является своим элементом тогда и только тогда, когда M не является своим элементом. Конечно, можно пытаться выйти из создавшегося противоречия, сделав заключение, что такого множества M не бывает. Однако, если не может существовать множество, состоящее в точности из всех элементов, удовлетворяющих такому четко определенному условию, к-рое мы имеем в приведенном выше определении множества M, то где гарантия того, что в нашей повседневной работе мы не столкнемся с множествами, к-рые также не могут существовать? И каким, вообще, условиям должно удовлетворять определение множества для того, чтобы оно существовало? Ясно было одно: нужно как-то ограничить канторовскую теорию множеств.

Л. Брауэр (L. Brouwer, 1908) выступил против применения правил классич. логики к бесконечным множествам. В выдвинутой им интуиционистской программе предлагалось отказаться от рассмотрения *абстракции актуальной бесконечности*, т. е. бесконечных множеств как завершенных совокупностей. Допуская существование сколь угодно больших натуральных чисел, интуиционисты выступают против рассмотрения натурального ряда как завершенного множества. Они считают, что в математике всякое доказательство существования того или иного объекта должно быть конструктивным, т. е. должно сопровождаться построением этого объекта. Если предположение о том, что искомый объект не существует, приведено к противоречию, то это, по мнению интуиционистов, не может рассматриваться как доказательство существования. Особой критике со стороны интуиционистов подвергся *исключенного*

третьего закон. Ввиду того, что этот закон первоначально рассматривался применительно к конечным множествам и, учитывая, что многие свойства конечных множеств не выполняются для бесконечных множеств (напр., что всякая собственная часть меньше целого), интуиционисты считают неправомерным применение этого закона к бесконечным множествам. Так, напр., чтобы утверждать, что проблема Ферма имеет положительное решение или имеет отрицательное решение, интуиционист должен указать соответствующее решение этой проблемы. А пока проблема Ферма не решена, эта дизъюнкция считается неправомерной. Такое же требование предъявляется к пониманию всякой дизъюнкции. Это требование интуиционистов может создать затруднения и в случае рассмотрения задач, связанных с конечными множествами. Представим себе, что кто-то, закрыв глаза, достает шар из урны, в к-рой имеются три черных и три белых шара, и тут же бросает этот шар обратно. Если никто не видел этот шар, то мы не имеем возможности узнать, какого он был цвета. Однако вряд ли можно всерьез оспаривать достоверность утверждения, что этот шар был либо черного, либо белого цвета.

Интуиционисты построили свою математику, имеющую интересные своеобразные особенности. Но она оказалась более сложной и громоздкой, чем классич. математика. Положительный вклад интуиционистов в исследование вопросов оснований математики выразился в том, что они еще раз решительным образом подчеркнули различие между конструктивным и неконструктивным в математике, они провели тщательный анализ многих трудностей, с к-рыми столкнулась математика в своем развитии, и тем самым способствовали их преодолению.

Д. Гильберт (D. Hilbert, см. добавления VII—X в [9]) наметил другой путь преодоления трудностей, возникших в основаниях математики на рубеже 19—20 вв. Этот путь, основанный на применении аксиоматич. метода рассмотрения формальных моделей содержательной математики и на исследовании вопросов непротиворечивости таких моделей надежными финитными средствами, получил в математике название финитизма Гильберта. Признавая ненадежность геометрич. интуиции, Д. Гильберт прежде всего предпринимает тщательный пересмотр евклидовой геометрии, освобождая ее от обращения к интуиции. Результатом такой переработки явились его «Основания геометрии» (1899).

Вопросы непротиворечивости различных теорий по существу рассматривались и до Д. Гильберта. Так, построенная Ф. Клейном (F. Klein, 1871) проективная модель неевклидовой геометрии Лобачевского сводит вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского к непротиворечивости евклидовой геометрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии аналогично можно свести к непротиворечивости анализа, т. е. теории действительных чисел. Однако не видно было, какими средствами можно строить модели анализа и арифметики для доказательства их непротиворечивости. Заслуга Д. Гильберта состоит в том, что он указал прямой путь для исследования этого вопроса. Непротиворечивость данной теории означает, что в ней не может быть получено противоречие, т. е. не может быть доказано нек-рое утверждение A и его отрицание $\neg A$. Д. Гильберт предложил представить рассматриваемую теорию в виде формальной аксиоматич. системы, в к-рой будут выводимы все те и только те утверждения, к-рые являются теоремами нашей теории. Тогда для доказательства непротиворечивости достаточно установить невыводимость в рассматриваемой теории нек-рых утверждений. Таким образом, математич. теория, непротиворечивость к-рой мы хотим доказать, становится

предметом изучения нек-рой математич. науки, к-рую Д. Гильберт назвал метаматематикой, или теорией доказательств.

Д. Гильберт писал, что парадоксы теории множеств вызваны не законом исключенного третьего, а «скорее тем, что математики пользуются недопустимыми и бессмысленными образованиями понятий, к-рые в моей теории доказательств исключаются сами собой. ...Отнять у математиков закон исключенного третьего — это то же, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксерам использовать кулаки» (см. [9] с. 383). Д. Гильберт предлагает различать «действительные» и «идеальные» предложения классич. математики. Первые имеют содержательный смысл, а вторые не обязаны иметь содержательный смысл. Предложения, соответствующие употреблению актуальной бесконечности, идеальны. Идеальные предложения присоединяются к действительным для того, чтобы простые правила логики были применимы и к рассуждениям о бесконечных множествах. Это существенно упрощает структуру всей теории подобно тому, как при рассмотрении проективной геометрии на плоскости добавляется бесконечно удаленная прямая, пересекающая любые две параллельные прямые в нек-рой точке.

Выдвинутая Д. Гильбертом программа обоснования математики и его энтузиазм вдохновили современников на интенсивную разработку *аксиоматического метода*. Именно с предпринятой в начале 20 в. Д. Гильбертом и его последователями разработкой теории доказательств на базе развитого в работах Г. Фреге, Дж. Пеано и Б. Рассела логич. языка следует связывать становление М. л. как самостоятельной математич. дисциплины.

Предмет и основные разделы математической логики, связь с другими областями математики. Предмет современной М. л. разнообразен. Прежде всего следует отметить исследование логич. и логико-математич. исчислений, из к-рых основным является классич. исчисление предикатов. Еще в 1930 К. Гёдель (K. Gödel) доказал теорему о полноте исчисления предикатов, согласно к-рой множество всех чисто логич. утверждений математики совпадает с множеством всех выводимых в исчислении предикатов формул (см. *Гёделя теорема о полноте*). Эта теорема показала, что исчисление предикатов является той логич. системой, на базе к-рой можно формализовать математику. На базе исчисления предикатов строятся различные логико-математич. теории (см. *Логико-математические исчисления*), представляющие собой формализацию содержательных математич. теорий — арифметики, анализа, теории множеств, теории групп и др. Наряду с *элементарными теориями* рассматриваются также теории высших порядков, в к-рых допускаются также кванторы по предикатам, предикаты от предикатов и т. д. Традиционными вопросами, к-рые исследуются для тех или иных формальных логич. систем, являются исследования структуры выводов в этих системах, выводимость тех или иных формул, вопросы непротиворечивости и полноты рассматриваемых систем.

Доказанная в 1931 *Гёделя теорема о неполноте* арифметики поколебала оптимистич. надежды Д. Гильберта на полное решение вопросов оснований математики на указанном пути. Согласно этой теореме, если формальная система, содержащая арифметику, непротиворечива, то утверждение о ее непротиворечивости, выразимое в этой системе, не может быть доказано средствами, формализуемыми в ней. Это означает, что с вопросами оснований математики дело обстоит не так просто, как хотелось или казалось Д. Гильберту вначале. Но уже К. Гёдель заметил, что непротиворечивость арифметики можно доказывать, пользуясь достаточно надежными конструктивными средствами, хотя и выходящими

за рамки средств, формализуемых в арифметике. Аналогичные доказательства непротиворечивости арифметики были получены Г. Генценом (G. Gentzen, 1936) и П. С. Новиковым (1943).

В результате анализа канторовской теории множеств и связанных с ней парадоксов были построены различные системы *аксиоматической теории множеств*, в к-рых принимается то или иное ограничение на образование множеств, чтобы исключить возникновение известных антиномий. В этих аксиоматич. системах могут быть развиты довольно обширные разделы математики. Вопрос о непротиворечивости достаточно богатых аксиоматич. систем теории множеств остается открытым. Из наиболее значительных результатов, полученных в аксиоматич. теории множеств, следует отметить результат К. Гёделя о непротиворечивости *континуум-гипотезы* и *выбора аксиомы* в системе Бернайса — Гёделя Σ (1939) и результат П. Коэна (P. Cohen, 1963) о независимости этих аксиом от аксиом системы Цермело—Френкеля ZF. Отметим, что эти две системы аксиом Σ и ZF равнонепротиворечивы. Для доказательства своих результатов К. Гёдель ввел важное понятие конструктивного множества (см. *Конструктивное по Гёделю множество*) и показал существование модели системы Σ, состоящей из таких множеств. Метод К. Гёделя был использован П. С. Новиковым для доказательства непротиворечивости нек-рых других утверждений дескриптивной теории множеств (1951). Для построения моделей теории множеств ZF, в к-рых выполняются отрицания континуум-гипотезы или аксиомы выбора, П. Коэн ввел так наз. *вынуждения метод*, к-рый впоследствии был усовершенствован и стал основным методом построения моделей теории множеств, удовлетворяющих тем или иным свойствам.

Одним из наиболее замечательных достижений М. л. явилась разработка понятия *общерекурсивной функции* и формулировка *Чёрча тезиса*, утверждающего, что понятие общерекурсивной функции является уточнением интуитивного понятия *алгоритма*. Из других эквивалентных уточнений понятия алгоритма наибольшее распространение получили понятия *Тьюринга машины* и *нормального алгорифма* Маркова. По существу вся математика связана с теми или иными алгоритмами. Но только после уточнения понятия алгоритма появилась возможность обнаружить существование неразрешимых *алгоритмических проблем* в математике. Неразрешимые алгоритмич. проблемы были обнаружены во многих разделах математики (алгебра, теория чисел, топология, теория вероятностей и др.), причем оказалось, что они могут быть связаны с очень распространенными и фундаментальными понятиями математики. Исследование алгоритмич. проблем в той или иной области математики, как правило, сопровождается проникновением идей и методов М. л. в эту область, что приводит к решению также и других проблем, уже не имеющих алгоритмич. характера.

Разработка точного понятия алгоритма дала возможность уточнить понятие эффективности и развивать на базе такого уточнения конструктивное направление в математике (см. *Конструктивная математика*), воплотившее в себе нек-рые черты интуиционистского направления, но существенно отличающееся от последнего. Были созданы основы конструктивного анализа, конструктивной топологии, конструктивной теории вероятностей и др.

В самой теории алгоритмов можно выделить исследования в области рекурсивной арифметики, куда входят различные классификации рекурсивных и рекурсивно-перечислимых множеств, степени неразрешимости рекурсивно-перечислимых множеств, исследования сложности записи алгоритмов и сложности алгоритмич. вычислений (по времени и по зоне, см. *Алгоритма слож-*

кость). Обширным развивающимся разделом теории алгоритмов является теория *нумераций*.

Как отмечалось выше, аксиоматич. метод оказал большое влияние на развитие многих разделов математики. Особенно значительным было проникновение этого метода в алгебру. Так, на стыке М. л. и алгебры возникла общая теория *алгебраических систем*, или *моделей теория*. Это направление было заложено в работах А. И. Мальцева, А. Тарского (A. Tarski) и их учеников. Здесь можно отметить исследования по элементарным теориям классов моделей, в частности вопросы разрешимости этих теорий, аксиоматизируемость классов моделей, изоморфизм моделей, вопросы категоричности и полноты классов моделей.

Важное место в теории моделей занимает исследование нестандартных моделей арифметики и анализа. Еще на заре развития дифференциального исчисления в работах Г. Лейбница (G. Leibniz) и И. Ньютона (I. Newton) бесконечно малые и бесконечно большие величины рассматривались как числа. Позже появилось понятие переменной величины, и математики отказались от употребления бесконечно малых чисел, модуль к-рых отличен от нуля и меньше любого положительного действительного числа, т. к. их употребление потребовало бы отказа от аксиомы Архимеда. И только через три столетия в результате развития методов М. л. удалось установить, что (нестандартный) анализ с бесконечно малыми и бесконечно большими числами непротиворечив относительно обычного (стандартного) анализа действительных чисел.

Не обошлась без влияния аксиоматич. метода и интуиционистская математика. Так, еще в 1930 А. Гейтинг (A. Heyting) ввел в рассмотрение формальные системы *интуиционистской логики* высказываний и предикатов (конструктивные исчисления высказываний и предикатов). Позже были введены формальные системы интуиционистского анализа (см., напр., [8]). Многие исследования по интуиционистской логике и математике имеют дело с формальными системами. Подвергались специальному изучению также так наз. *промежуточные логики* (или суперинтуиционистские), т. е. логики, лежащие между классической и интуиционистской логиками. Понятие реализуемости формул по Клини представляет одну из попыток интерпретировать понятие интуиционистской истинности с точки зрения классич. математики. Однако оказалось, что не всякая реализуемая формула исчисления высказываний выводима в интуиционистском (конструктивном) исчислении высказываний.

Подверглась формализации также и *модальная логика*. Однако, несмотря на наличие большого числа работ по формальным системам модальной логики и по их семантике (*Крипке модели*), можно сказать, что здесь происходит процесс накопления пока еще разрозненных фактов.

М. л. имеет большое прикладное значение; с каждым годом растет глубокое проникновение идей и методов М. л. в кибернетику, в вычислительную математику, в структурную лингвистику.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [2] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; [3] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; [4] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, М., 1979; [6] Шенфилд Д. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; [7] Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977; [8] Клини С. К., Весли Р., Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций, пер. с англ., М., 1978; [9] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М., 1948; [10] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [11] Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978;

[12] Mostowski A., Thirty years of foundational studies, Hels., 1965.

См. также лит. при статьях об отдельных разделах М. л.

С. И. Адян.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ — приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математич. символики. М. м.— мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления. Анализ М. м. позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений. Процесс математического моделирования, т. е. изучения явления с помощью М. м., можно подразделить на 4 этапа.

Первый этап — формулирование законов, связывающих основные объекты модели. Этот этап требует широкого знания фактов, относящихся к изучаемым явлениям, и глубокого проникновения в их взаимосвязи. Эта стадия завершается записью в математич. терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели.

Второй этап — исследование математич. задач, к к-рым приводят М. м. Основным вопросом здесь является решение прямой задачи, т. е. получение в результате анализа модели выходных данных (теоретич. следствий) для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений. На этом этапе важную роль приобретают математич. аппарат, необходимый для анализа М. м., и вычислительная техника — мощное средство для получения количественной выходной информации как результата решения сложных математич. задач. Часто математич. задачи, возникающие на основе различных М. м. явлений, бывают одинаковыми (напр., основная задача *линейного программирования* отражает ситуации различной природы). Это дает основание рассматривать такие типичные математич. задачи, как самостоятельный объект, абстрагируясь от изучаемых явлений.

Третий этап — выяснение того, удовлетворяет ли принятая (гипотетическая) модель критерию практики, т. е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретич. следствиями модели в пределах точности наблюдений. Если модель была вполне определена — все параметры ее были заданы, то определение уклонений теоретич. следствий от наблюдений дает решение прямой задачи с последующей оценкой уклонений. Если уклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята. Часто при построении модели нек-рые ее характеристики остаются неопределенными. Задачи, в к-рых определяются характеристики модели (параметрические, функциональные) таким образом, чтобы выходная информация была сопоставима в пределах точности наблюдений с результатами наблюдений изучаемых явлений, наз. обратными задачами. Если М. м. такова, что ни при каком выборе характеристик этим условиям нельзя удовлетворить, то модель непригодна для исследования рассматриваемых явлений. Применение критерия практики к оценке М. м. позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению (гипотетической) модели. Этот метод является единственным методом изучения недоступных нам непосредственно явлений макро- и микромира.

Четвертый этап — последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели. В процессе развития науки и техники данные об изучаемых явлениях все более и более уточняются и наступает момент, когда выводы, получаемые на основании принятой М. м., не соответствуют нашим знаниям о явлении. Таким образом, возникает необходимость построения новой, более совершенной М. м.

Типичным примером, иллюстрирующим характерные этапы в построении М. м., является модель Солнечной системы. Наблюдения звездного неба начались в глубокой древности. Первичный анализ этих наблюдений позволил выделить планеты из всего многообразия небесных светил. Таким образом, первым шагом было выделение объектов изучения. Вторым шагом явилось определение закономерностей их движений. (Вообще, определения объектов и их взаимосвязей являются исходными положениями — «аксиомами» — гипотетич. модели.) Модели Солнечной системы в процессе своего развития прошли через ряд последовательных усовершенствований. Первой была модель Птолемея (2 в. н. э.), исходившая из положения, что планеты и Солнце совершают движения вокруг Земли (геоцентрич. модель), и описывавшая эти движения с помощью правил (формул), многократно усложнявшихся по мере накопления наблюдений.

Развитие мореплавания поставило перед астрономией новые требования к точности наблюдений. Н. Коперником (N. Kopernik) в 1543 была предложена принципиально новая основа законов движения планет, полагавшая, что планеты вращаются вокруг Солнца по окружностям (гелиоцентрич. система). Это была качественно новая (но не математически) модель Солнечной системы. Однако не существовало параметров системы (радиусов окружностей и угловых скоростей движения), приводящих количественные выводы теории в должное соответствие с наблюдениями, так что Н. Коперник был вынужден вводить поправки в движения планет по окружностям (эпициклы).

Следующим шагом в развитии модели Солнечной системы были исследования И. Кеплера (I. Kepler, нач. 17 в.), к-рый сформулировал законы движения планет. Положения Н. Коперника и И. Кеплера давали кинематич. описание движения каждой планеты обособленно, не затрагивая еще причин, обусловливающих эти движения.

Принципиально новым шагом были работы И. Ньютона (I. Newton), предложившего во 2-й пол. 17 в. динамич. модель Солнечной системы, основанную на законе всемирного тяготения. Динамич. модель согласуется с кинематич. моделью, предложенной И. Кеплером, т. к. из динамич. системы двух тел «Солнце — планета» следуют законы Кеплера.

К 40-м гг. 19 в. выводы динамич. модели, объектами к-рой были видимые планеты, вошли в противоречие с накопленными к тому времени наблюдениями. Именно, наблюдаемое движение планеты Уран уклонялось от теоретически вычисляемого движения. У. Леверье (U. Le Verrier) в 1846 расширил систему наблюдаемых планет новой гипотетич. планетой, названной им Нептуном, и, пользуясь новой моделью Солнечной системы, определил массу и закон движения новой планеты так, что в новой системе противоречие в движении Урана было снято. Планета Нептун была открыта в месте, указанном У. Леверье. Аналогичным методом, используя расхождения в теоретической и наблюдаемой траектории Нептуна, в 1930 была открыта планета Плутон.

Метод математич. моделирования, сводящий исследование явлений внешнего мира к математич. задачам, занимает ведущее место среди других методов исследования, особенно в связи с появлением ЭВМ. Он позволяет проектировать новые технич. средства, работающие в оптимальных режимах, для решения сложных задач науки и техники; проектировать новые явления. М. м. проявили себя как важное средство управления. Они применяются в самых различных областях знания, стали необходимым аппаратом в области экономич. планирования и являются важным элементом автоматизированных систем управления.

А. Н. Тихонов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА — раздел математики, посвященный математич. методам систематизации, обработки и использования статистич. данных для научных и практич. выводов. При этом статистич. данными наз. сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

Предмет и метод математической статистики. Статистич. описание совокупности объектов занимает промежуточное положение между индивидуальным описанием каждого из объектов совокупности, с одной стороны, и описанием совокупности по ее общим свойствам, совсем не требующим ее расчленения на отдельные объекты, с другой. По сравнению с первым способом статистич. данные всегда в большей или меньшей степени обезличены и имеют лишь ограниченную ценность в случаях, когда существенны именно индивидуальные данные (напр., учитель, знакомясь с классом, получит лишь весьма предварительную ориентировку о положении дела из одной статистики числа выставленных его предшественником отличных, хороших, удовлетворительных и неудовлетворительных оценок). С другой стороны, по сравнению с данными о наблюдаемых извне суммарных свойствах совокупности статистич. данные позволяют глубже проникнуть в существо дела. Напр., данные гранулометрич. анализа породы (т. е. данные о распределении образующих породу частиц по размерам) дают ценную дополнит. информацию по сравнению с испытанием нерасчлененных образов породы, позволяя в нек-рой мере объяснить свойства породы, условия ее образования и пр.

Метод исследования, опирающийся на рассмотрение статистич. данных о тех или иных совокупностях объектов, наз. с т а т и с т и ч е с к и м. Статистич. метод применяется в самых различных областях знания. Однако черты статистич. метода в применении к объектам различной природы столь своеобразны, что было бы бессмысленно объединять, напр., социально-экономич. статистику, физич. статистику, звездную статистику и т. п. в одну науку.

Общие черты статистич. метода в различных областях знания сводятся к подсчету числа объектов, входящих в те или иные группы, рассмотрению распределения количественных признаков, применению выборочного метода (в случаях, когда детальное исследование всех объектов обширной совокупности затруднительно), использованию теории вероятностей при оценке достаточности числа наблюдений для тех или иных выводов и т. п. Эта формальная математич. сторона статистич. методов исследования, безразличная к специфич. природе изучаемых объектов, и составляет предмет М. с.

Связь математической статистики с теорией вероятностей. Связь М. с. с теорией вероятностей имеет в разных случаях различный характер. *Вероятностей теория* изучает не любые массовые явления, а явления случайные и именно «вероятностно случайные», т. е. такие, для к-рых имеет смысл говорить о соответствующих им распределениях вероятностей. Тем не менее теория вероятностей играет определенную роль и при статистич. изучении массовых явлений любой природы, к-рые могут не относиться к категории вероятностно случайных. Это осуществляется через основанные на теории вероятностей теорию *выборочного метода* и *ошибок теорию*. В этих случаях вероятностным закономерностям подчинены не сами изучаемые явления, а приемы их исследования.

Более важную роль играет теория вероятностей при статистич. исследовании вероятностно случайных явлений. Здесь в полной мере находят применение такие основанные на теории вероятностей разделы М. с., как *статистических гипотез проверка*, *статистическое оценивание* распределений вероятностей и входящих в них

параметров и т. д. Область же применения этих более глубоких статистич. методов значительно уже, т. к. здесь требуется, чтобы сами изучаемые явления были подчинены достаточно определенным вероятностным закономерностям. Напр., статистич. изучение режима турбулентных водных потоков или флюктуаций в радиоприемных устройствах производится на основе теории стационарных случайных процессов. Однако применение той же теории к анализу экономических временных рядов может привести к грубым ошибкам в виду того, что входящее в определение стационарного процесса допущение наличия сохраняющихся в течение длительного времени неизменных распределений вероятностей в этом случае, как правило, совершенно неприемлемо.

Вероятностные закономерности получают статистич. выражение (вероятности осуществляются приближенно в виде частот, а математич. ожидания — в виде средних) в силу закона больших чисел.

Простейшие приемы статистического описания. Изучаемая совокупность из n объектов может по какому-либо качественному признаку A разбиваться на классы $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Соответствующее этому разбиению статистич. распределение задается при помощи указания численностей (частот) $n_1, n_2, \ldots, n_r$ (где $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$) отдельных классов. Вместо численностей n_i часто указывают соответствующие относительные частоты (частости) $h_i = n_i/n$ (удовлетворяющие, очевидно, соотношению $\sum_{i=1}^{r} h_i = 1$). Если изучению подлежит нек-рый количественный признак, то его распределение в совокупности из n объектов можно задать, перечислив непосредственно наблюденные значения признака: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, напр., в порядке их возрастания. Однако при больших n такой способ громоздок и в то же время не выявляет отчетливо существенных свойств распределения. При сколько-либо больших n на практике обычно совсем не составляют полных таблиц наблюденных значений x_i, а исходят во всей дальнейшей работе из таблиц, содержащих лишь численность классов, получающихся при группировке наблюденных значений по надлежаще выбранным интервалам.

Обычно группировка по 10—20 интервалам, в каждый из к-рых попадает не более 15—20% значений x_i, оказывается достаточной для довольно полного выявления всех существенных свойств распределения и надежного вычисления по групповым численностям основных характеристик распределения (см. о них ниже). Составленная по таким группированным данным *гистограмма* наглядно изображает распределение. Гистограмма, составленная на основе группировки с маленькими интервалами, обычно многовершинная и не отражает наглядно существенных свойств распределения.

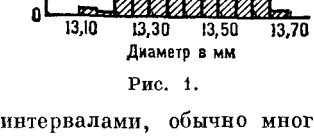


Рис. 1.

В качестве примера на рис. 1 дана гистограмма распределения 200 диаметров нек-рой детали (в мм), обнаруженного при статистич. исследовании массовой продукции при длине интервала группировки 0,05 мм, а на рис. 2 — гистограмма того же распределения при интервале 0,01 мм. С другой стороны, группировка по слишком крупным интервалам может привести к потере ясного представления о характере распределения и к грубым ошибкам при вычислении среднего и других характеристик распределения (см. соответствующую гистограмму на рис. 3).

В пределах М. с. вопрос об интервалах группировки может быть рассмотрен только с формальной стороны:

полноты математич. описания распределения, точности вычисления средних по сгруппированным данным и т. д.

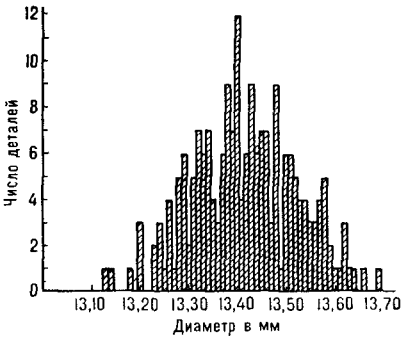


Рис. 2.

Простейшими сводными характеристиками распределения одного количественного признака являются среднее

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

и среднее квадратичное отклонение

$$D = S/\sqrt{n},$$

где

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2.$$

При вычислении $\overline{x}$, S^2 и D по группированным данным пользуются формулами

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{r} n_k a_k = \sum_{k=1}^{r} h_k a_k,$$

$$S^2 = \sum_{k=1}^{r} n_k (a_k - \overline{x})^2 = \sum_{k=1}^{r} n_k a_k^2 - n\overline{x}^2$$

или

$$D^2 = \sum_{k=1}^{r} h_k a_k^2 - \overline{x}^2,$$

где r — число интервалов группировки, a_k — их середины. Если материал сгруппирован по слишком крупным интервалам, то такой подсчет дает слишком грубые результаты. Иногда в таких случаях полезно прибегать к специальным поправкам на группировку. Однако эти поправки имеет смысл вводить лишь при условии выполнения определенных вероятностных предположений.

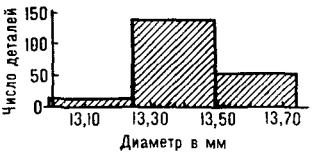


Рис. 3.

О совместных распределениях двух и большего числа признаков см. статьи *Корреляция*, *Регрессия*.

Связь статистических распределений с вероятностными. Оценка параметров. Проверка вероятностных гипотез. Выше были изложены лишь нек-рые избранные простейшие приемы статистич. описания, представляющего собой довольно обширную дисциплину с хорошо разработанной системой понятий и техникой вычислений. Приемы статистич. описания интересны, однако не сами по себе, а в качестве средства для получения из статистич. материала выводов о закономерностях, к-рым подчиняются изучаемые явления, и о причинах, приводящих в каждом отдельном случае к тем или иным наблюденным статистич. распределениям.

Напр., данные, нанесенные на графики на рис. 1, 2, 3, собраны с целью установления точности изготовления деталей, расчетный диаметр к-рых равен 13,40 мм, при нормальном ходе производства. Простейшим допущением, к-рое может быть в этом случае обосновано нек-рыми теоретич. соображениями, является предположение, что диаметры отдельных деталей можно рассматривать как случайные величины X, подчиненные нормальному распределению вероятностей:

$$\mathsf{P}\{X < x\} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2}dt. \qquad (1)$$

Если это допущение верно, то параметры a и σ^2 — среднее и дисперсию вероятностного распределения — можно с достаточной точностью оценить по соответствующим характеристикам статистич. распределения (т. к. число наблюдений $n=200$ достаточно велико). В качестве оценки для теоретич. дисперсии σ^2 предпочитают не статистич. дисперсию

$$D^2 = S^2/n,$$

а *несмещенную оценку*

$$s^2 = S^2/(n-1).$$

Для теоретич. среднего квадратичного отклонения σ не существует общего (пригодного при любом распределении вероятностей) выражения несмещенной оценки. В качестве оценки (вообще говоря, смещенной) для σ чаще всего употребляют s. Точность оценок $\bar{x}$ и s для a и σ указывается соответствующими дисперсиями, к-рые в случае нормального распределения (1) имеют вид

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \sigma^2/n \sim s^2/n,$$

$$\sigma^2_{s^2} = 2\sigma^4/(n-1) \sim 2s^4/n,$$

$$\sigma^2_s \sim \sigma^2/2n \sim s^2/2n,$$

где знак $\sim$ обозначает приближенное равенство при больших n. Таким образом, уславливаясь прибавлять к оценкам со знаком $\pm$ их среднее квадратичное отклонение, имеем при больших n в предположении нормального распределения (1):

$$a = \bar{x} \pm s/\sqrt{n}, \quad \sigma = s \pm s/\sqrt{2n}. \qquad (2)$$

Объем выборки $n=200$ достаточен для законности пользования этими формулами теории больших выборок.

Дальнейшие сведения об оценке параметров теоретич. распределений вероятностей см. в статьях *Статистическая оценка*, *Доверительное оценивание*.

Все основанные на теории вероятностей правила статистич. оценки параметров и проверки гипотез действуют лишь с определенным *значимости уровнем* $\omega<1$, т. е. могут приводить к ошибочным результатам с вероятностью $\alpha=1-\omega$. Напр., если в предположении нормального распределения и известной теоретич. дисперсии σ^2 производить оценку a по $\bar{x}$ по правилу

$$\bar{x} - k\sigma/\sqrt{n} < a < \bar{x} + k\sigma/\sqrt{n},$$

то вероятность ошибки будет равна α, связанному с k соотношением:

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_k^\infty e^{-x^2/2}dx.$$

Вопрос о рациональном выборе уровня значимости в данных конкретных условиях (напр., при разработке правил статистического контроля качества массовой продукции) является весьма существенным. При этом желанию применять правила лишь с высоким (близким к единице) уровнем значимости противостоит то обстоятельство, что при ограниченном числе наблюдений такие правила позволяют сделать лишь очень бедные вы-

воды (не дают возможности установить неравенство вероятностей даже при заметном неравенстве частот и т. д.).

Дальнейшие задачи математической статистики. Упоминавшиеся выше способы оценки параметров и проверки гипотез основаны на предположении, что число наблюдений, необходимых для достижения заданной точности выводов, определяют заранее (до проведения испытаний). Однако часто априорное определение числа наблюдений нецелесообразно, т. к., не фиксируя число опытов заранее, а определяя его в ходе эксперимента, можно уменьшить его математич. ожидание. Сначала это обстоятельство было подмечено на примере выбора одной из двух гипотез по последовательности независимых испытаний. Соответствующая процедура (впервые предложенная в связи с задачами приемочного статистического контроля) состоит в следующем: на каждом шаге по результатам уже проведенных наблюдений решают а) провести ли следующее испытание, или б) прекратить испытания и принять первую гипотезу, или в) прекратить испытания и принять вторую гипотезу. При надлежащем подборе количественных характеристик подобной процедуры можно добиться (при той же точности выводов) сокращения числа наблюдений в среднем почти вдвое по сравнению с процедурой выборки фиксированного объема (см. *Последовательный анализ*). Развитие методов последовательного анализа привело, с одной стороны, к изучению *управляемых случайных процессов*, с другой — к появлению *статистических решений теории*. Эта теория исходит из того, что результаты последовательно проводимых наблюдений служат основой принятия нек-рых решений (промежуточных — продолжать испытания или нет, и окончательных — в случае прекращения испытаний). В задачах оценки параметров окончательные решения суть числа (значение оценок), в задачах проверки гипотез — принимаемые гипотезы. Цель теории — указать правила принятия решений, минимизирующих средний риск или убыток (риск зависит и от вероятностных распределений результатов наблюдений, и от принимаемого окончательного решения, и от расходов на проведение испытаний и т. п.).

Вопросы целесообразного распределения усилий при проведении статистич. анализа явлений рассматриваются в теории планирования эксперимента, ставшей важной частью современной М. с.

Наряду с развитием и уточнением общих понятий М. с. развиваются и ее отд. разделы, такие как *дисперсионный анализ*, *ковариационный анализ*, *многомерный статистический анализ*, *статистический анализ случайных процессов*, *факторный анализ*. Появились новые оценки в регрессионном анализе (см. также *Стохастическая аппроксимация*). Большую роль в задачах М. с. играет *бейесовский подход* к статистич. задачам.

Историческая справка. Первые начала М. с. можно найти уже в сочинениях создателей теории вероятностей — Я. Бернулли (J. Bernoulli), П. Лапласа (P. Laplace) и С. Пуассона (S. Poisson). В России методы М. с. в применении к демографии и страховому делу развивал на основе теории вероятностей В. Я. Буняковский (1846). Решающее значение для всего дальнейшего развития М. с. имели работы русской классич. школы теории вероятностей 2-й пол. 19 — нач. 20 вв. (П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, С. Н. Бернштейн). Многие вопросы теории статистич. оценок были по существу разработаны на основе теории ошибок и метода наименьших квадратов [К. Гаусс (C. Gauss) и А. А. Марков]. Работы А. Кетле (A. Quételet), Ф. Гальтона (F. Galton) и К. Пирсона (K. Pearson) имели большое значение, но по уровню использования достижений теории вероятностей отставали от работ русской школы. К. Пирсоном была широко раз-

вернута работа по составлению таблиц функций, необходимых для применения методов М. с. Эта важная работа была продолжена во многих научных центрах (в СССР она велась усилиями Е. Е. Слуцкого, Н. В. Смирнова и Л. Н. Большева). В создании теории малых выборок, общей теории статистич. оценок и проверки гипотез (освобожденной от предположений о наличии априорных распределений), последовательного анализа весьма значительна роль представителей англо-американской школы [Стьюдент (Student, псевд. У. С. Госсета, W. S. Gosset), Р. Фишер (R. Fisher), Э. Пирсон (E. Pearson), Ю. Нейман (J. Neyman)], деятельность к-рых началась в 20-х гг. 20 в. В СССР значительные результаты в области М. с. получены В. И. Романовским, А. Н. Колмогоровым, Е. Е. Слуцким, к-рому принадлежат важные работы по статистике связанных стационарных рядов, Н. В. Смирновым, заложившим основы теории непараметрич. методов М. с., Ю. В. Линником, обогатившим аналитич. аппарат М. с. новыми методами. На основе М. с. особенно интенсивно разрабатываются статистич. методы исследования и контроля массового производства, статистич. методы в области физики, гидрологии, климатологии, звездной астрономии, биологии, медицины и др.

Лит.: [1] Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [2 изд.], М., 1968; [3] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., (2 изд.), М., 1975; [5] Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, пер. с англ., М., 1956; [6] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [7] их же, Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [8] их же, Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

См. также лит. при статьях о разделах М. с.

А. Н. Колмогоров, Ю. В. Прохоров.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА — теория математических моделей физических явлений; занимает особое положение и в математике, и в физике, находясь на стыке этих наук.

М. ф. тесно связана с физикой в той части, к-рая касается построения математич. модели, и в то же время М. ф.— раздел математики, поскольку методы исследования моделей являются математическими. В понятие методов М. ф. включаются те математич. методы, к-рые применяются для построения и изучения математич. моделей, описывающих большие классы физических явлений.

Методы М. ф. как теории математич. моделей физики начали интенсивно разрабатываться в трудах И. Ньютона (I. Newton) по созданию основ классич. механики, всемирного тяготения, теории света. Дальнейшее развитие методов М. ф. и их успешное применение к изучению математич. моделей огромного круга различных физич. явлений связаны с именами Ж. Лагранжа (J. Lagrange), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Фурье (J. Fourier), К. Гаусса (C. Gauss), Б. Римана (B. Riemann), М. В. Остроградского и многих др. ученых. Большой вклад в развитие методов М. ф. внесли А. М. Ляпунов и В. А. Стеклов.

Начиная со 2-й пол. 19 в. методы М. ф. успешно применялись для изучения математич. моделей физич. явлений, связанных с различными физич. полями и волновыми процессами в электродинамике, акустике, теории упругости, гидро- и аэродинамике и ряде других направлений исследования физич. явлений в сплошных средах. Математич. модели этого класса явлений наиболее часто описываются при помощи дифференциальных уравнений с частными производными, получивших название *математической физики уравнений*.

Помимо дифференциальных уравнений М. ф., при описании математич. моделей физики применение на-

ходят интегральные уравнения и интегро-дифференциальные уравнения, вариационные и теоретико-вероятностные методы, теория потенциала, методы теории функций комплексного переменного и ряд других разделов математики. В связи с бурным развитием вычислительной математики особое значение для исследования математич. моделей физики приобретают прямые численные методы, использующие ЭВМ (конечноразностные методы и др. вычислительные алгоритмы краевых задач), что позволило методами М. ф. эффективно решать новые задачи газовой динамики, теории переноса, физики плазмы, в том числе и обратные задачи этих важнейших направлений физич. исследований.

Теоретич. исследования в области квантовой физики и теории относительности, широкое использование ЭВМ в различных областях М. ф., включая и обратные (некорректно поставленные) задачи, потребовали значительного расширения используемого М. ф. арсенала математич. методов. Наряду с традиционными разделами математики стали широко применяться теория операторов, теория обобщенных функций, теория функций многих комплексных переменных, топологич. и алгебраич. методы. Это интенсивное взаимодействие теоретич. физики, математики и использования ЭВМ в научных исследованиях привело к значительному расширению тематики, созданию новых классов моделей и подняло на новый уровень современную М. ф. Все это внесло большой вклад в развитие научно-технич. прогресса.

Постановка задач М. ф. заключается в построении математич. моделей, описывающих основные закономерности изучаемого класса физич. явлений. Такая постановка состоит в выводе уравнений (дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных или алгебраических), к-рым удовлетворяют величины, характеризующие физич. процесс. При этом исходят из основных физич. законов, учитывающих только наиболее существенные черты явления, отвлекаясь от ряда его второстепенных характеристик. Такими законами являются обычно законы сохранения, напр., количества движения, энергии, числа частиц и т. д. Это приводит к тому, что для описания процессов различной физич. природы, но имеющих общие характерные черты, оказываются применимыми одни и те же математич. модели. Напр., математич. задачи для простейшего уравнения гиперболич. типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

полученного первоначально Ж. Д'Аламбером (J.D'Alembert, 1747) для описания свободных колебаний однородной струны, оказываются применимыми и для описания широкого круга волновых процессов акустики, гидродинамики, электродинамики и других областей физики. Аналогично, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

краевые задачи для к-рого первоначально изучались П. Лапласом (P. Laplace, кон. 18 в.) в связи с построением теории тяготения, в дальнейшем нашло применение при решении многих проблем электростатики, теории упругости, задач установившегося движения идеальной жидкости и т. д. Каждой математич. модели физики соответствует целый класс физич. процессов.

Для М. ф. характерно также то, что многие общие методы, используемые для решения задач М. ф., развились из частных способов решения конкретных физич. задач и в своем первоначальном виде не имели строгого математич. обоснования и достаточной завершенности. Это относится к таким известным методам решения задач М. ф., как методы Ритца и Галеркина, к методам

теории возмущений, преобразований Фурье и многим другим, включая метод разделения переменных. Эффективное применение всех этих методов для решения конкретных задач является одной из причин для их строгого математич. обоснования и обобщения, приводящего в ряде случаев к возникновению новых математич. направлений.

Воздействие М. ф. на различные разделы математики проявляется в том, что развитие М. ф., отражающее требования естественных наук и запросы практики, влечет за собой переориентацию направленности исследований в нек-рых уже сложившихся разделах математики. Постановка задач М. ф., связанная с разработкой математич. моделей реальных физич. явлений, привела к изменению основной проблематики теории дифференциальных уравнений с частными производными. Возникла теория *краевых задач*, позволившая впоследствии связать дифференциальные уравнения с частными производными с интегральными уравнениями и вариационными методами.

Изучение математич. моделей физики математич. методами не только позволяет получить количественные характеристики физич. явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реальных процессов, но и дает возможность глубокого проникновения в самую суть физич. явлений, выявления скрытых закономерностей, предсказания новых эффектов. Стремление к более детальному изучению физич. явлений приводит к все большему усложнению описывающих эти явления математич. моделей, что в свою очередь делает невозможным применение аналитич. методов исследования этих моделей. Это объясняется, в частности, тем, что математич. модели реальных физич. процессов являются, как правило, нелинейными, т. е. описываются нелинейными уравнениями М. ф. Для детального исследования таких моделей успешно применяются прямые численные методы с использованием ЭВМ. Для типичных задач М. ф. применение численных методов сводится к замене уравнений М. ф. для функций непрерывного аргумента алгебраич. уравнениями для сеточных функций, заданных на дискретном множестве точек (на сетке). Иными словами, вместо непрерывной модели среды вводится ее дискретный аналог. Применение численных методов в ряде случаев позволяет заменить сложный, трудоемкий и дорогостоящий физич. эксперимент значительно более экономичным математическим (численным) экспериментом. Достаточно полно проведенный математич. эксперимент является основой для выбора оптимальных условий реального физич. эксперимента, выбора параметров сложных физич. установок, определения условий проявления новых физич. эффектов и т. д. Таким образом, численные методы необычайно расширяют область эффективного использования математич. моделей физич. явлений.

Математич. модель физич. явления, как всякая модель, не может передать всех черт явления. Установить адекватность принятой модели исследуемому явлению можно только при помощи критерия практики, сопоставляя результаты теоретич. исследований принятой модели с данными экспериментов.

Во многих случаях об адекватности принятой модели можно судить на основании решения обратных задач М. ф., когда о свойствах изучаемых явлений природы, недоступных для непосредственного наблюдения, делаются заключения по результатам их косвенных физич. проявлений.

Для М. ф. характерно стремление строить такие математич. модели, к-рые не только дают описание и объяснение уже установленных физич. закономерностей изучаемого круга явлений, но и позволяют предсказать еще не открытые закономерности. Классич. примером такой модели является теория всемирного тяготения

Ньютона, позволившая не только объяснить движение известных к моменту ее создания тел Солнечной системы, но и предсказать существование новых планет. С другой стороны, появляющиеся новые экспериментальные данные не всегда могут быть объяснены в рамках принятой модели. Для их объяснения требуется усложнение модели.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981 [3] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [4] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [5] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1958

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, А. Г. Свешников.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА — математическая дисциплина, предметом к-рой являются модели экономич. объектов и процессов и методы их исследования. Однако понятия, результаты, методы М. э. удобно и принято излагать в тесной связи с их экономич. происхождением, интерпретацией и практич. приложениями. Особенно существенна связь с экономич. наукой и практикой.

М. э. как часть математики начала развиваться только в 20 в. Ранее были лишь эпизодич. исследования, к-рые нельзя в строгом смысле отнести к математике.

Особенности экономико-математического моделирования. Особенность экономич. моделирования состоит в исключительном разнообразии и разнородности предмета моделирования. В экономике присутствуют элементы управляемости и стихийности, жесткой определенности и существенной неоднозначности и свободы выбора, процессы технич. характера и социальные процессы, где на первый план выдвигается поведение человека. Разные уровни экономики (напр., цех и народное хозяйство) требуют существенно различного описания. Все это приводит к большой разнородности моделей математич. аппарата. Тонким вопросом является форма отражения типа социально-экономич. системы, к-рая моделируется, учет общественного строя. Нередко оказывается, что абстрактная математич. модель того или иного экономич. объекта или процесса с успехом применима и к капиталистической, и к социалистической экономике. Все дело в способе использования, интерпретации результатов анализа.

Производство, эффективное производство. Экономика имеет дело с благами, или продуктами, к-рые понимаются в М. э. чрезвычайно широко. Для них применяется общий термин ингредиенты. Ингредиентами являются услуги, природные ресурсы, отрицательно воздействующие на человека факторы окружающей среды, характеристика комфортности от имеющейся системы безопасности и т. д. Обычно считается, что число ингредиентов конечно и пространство продуктов есть $\mathbb{R}^l$ — евклидово пространство, где l — число ингредиентов. Точка z из $\mathbb{R}^l$ при надлежащих условиях может рассматриваться как «производственный» способ, положительные компоненты указывают объемы выпуска соответствующих ингредиентов, а отрицательные — затраты. Слово «производственный» взято в кавычки, поскольку производство понимается в самом широком смысле. Множество наличных (заданных, существующих) производственных возможностей есть $Z \subset \mathbb{R}^l$. Способ производства $\bar{z} \in Z$ эффективен, если не существует $z \in Z$ такой, что $z \geqslant \bar{z}$ и хотя бы для одной компоненты выполняется строгое неравенство. Задача выявления эффективных способов — одна из важнейших в экономике. Обычно предполагается, и это во многих случаях хорошо согласуется с действительностью, что Z — выпуклый компакт. С помощью расширения пространства продуктов задача анализа эффективных способов при этом может быть сведена к случаю, когда Z — выпуклый замкнутый конус.

Типичной задачей выявления эффективного способа является основная задача производственного планирования. Задано множество производственных способов $Z \subset \mathbb{R}^l$ и вектор потребностей и ресурсных ограничений $b \in \mathbb{R}^{l-1}$. Требуется найти способ $\bar{z} = (b, \bar{\mu}) \in Z$ такой, что $\bar{\mu} \geqslant \mu$ для всех $(b, \mu) \in Z$. Если Z — выпуклый замкнутый конус, то это есть общая задача *выпуклого программирования*. Если Z задан конечным числом образующих (так наз. базисных способов), то это общая задача *линейного программирования*. Решение $\bar{z}$ лежит на границе Z. Пусть π — коэффициенты *опорной гиперплоскости* для Z в точке $\bar{z}$, т. е. $\pi z \leqslant 0$ для всех $z \in Z$ и $\bar{z}\pi = 0$. Основная теорема выпуклого программирования находит условия, при к-рых $\pi_l > 0$. Напр., достаточно условия: существует вектор $(b, \mu) \in \operatorname{int} Z$ (так наз. условие Слейтера). Коэффициенты π, характеризующие эффективный способ $\bar{z}$, имеют важный экономич. смысл. Они интерпретируются как цены, соизмеряющие эффективность затрат и выпуска отдельных ингредиентов. Способ эффективен тогда и только тогда, когда стоимость выпуска равна стоимости затрат. Данная теория эффективных способов производства и их характеризации с помощью π оказала революционизирующее влияние на теорию и практику планирования социалистич. экономики. Она легла в основу объективных количественных методов определения цен и общественных оценок ресурсов, дающих возможность выбора наиболее эффективных экономич. решений в условиях социалистич. хозяйства. Теория естественным образом обобщается на бесконечное число ингредиентов. Тогда пространство ингредиентов оказывается подходящим образом выбранным функциональным пространством.

Эффективный рост. Ингредиенты, относящиеся к разным моментам или интервалам времени, формально можно считать различными. Поэтому описание производства в динамике в принципе укладывается в изложенную выше схему, состоящую из объектов $\{X, Z, b\}$, где X — пространство ингредиентов, Z — множество производственных возможностей, b — задания требований и ограничений на экономику. Однако изучение собственно динамич. аспекта производства требует более специальных форм описания производственных возможностей.

Производственные возможности достаточно общей модели экономич. динамики задаются с помощью точечно-множественного отображения (многозначной функции) $a : \mathbb{R}^l_+ \to 2^{\mathbb{R}^l_+}$. Здесь $\mathbb{R}^l_+$ — (фазовое) пространство экономики, $x \in \mathbb{R}^l_+$ интерпретируется как состояние экономики в тот или иной момент времени, где x_k — количество продукта k, имеющегося в наличии в этот момент. Множество $a(x)$ состоит из всех состояний экономики, в к-рые она может перейти за единичный временной интервал из состояния x. Будем называть

$$Z = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^{2l}_+ \mid y \in a(x)\}$$

графиком отображения a. Точки (x, y) — допустимые производственные процессы.

Рассматриваются различные варианты задания возможных траекторий развития экономики. В частности, потребление населения учитывается либо в самом отображении a, либо выделяется в явном виде. Напр., во втором случае допустимой траекторией является последовательность $(X,\ C) = (x(t),\ c(t+1))_{t=0}^{\infty}$ такая, что $x(t+1) + c(t+1) \in a(x(t))$, $c(t) \geqslant 0$ для всех t. Изучаются различные понятия эффективности траекторий. Траектория $(\bar{X}, \bar{C})$ эффективна по потреблению, если не существует другой допустимой траекто-

рии (X, C), выходящей из того же начального состояния, для к-рой $C \geqslant \overline{C}$. Траектория $(\overline{X}, \overline{C})$ внутренне эффективна, если не существует другой допустимой траектории (X, C), выходящей из того же начального состояния, момента времени t_0 и числа $\lambda > 1$, что

$$\lambda \overline{x}(t_0) = x(t_0).$$

Оптимальность траектории обычно определяется в зависимости от функции полезности $u : \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}_+$ и коэффициента приведения полезности во времени $\mu \geqslant 1$ (о функции полезности см. ниже). Траектория $(\overline{X}, \overline{C})$ наз. (u, μ)-оптимальной, если

$$\lim_{t \to \infty} \left(\sum_{\tau=0}^{t} u(\overline{c}(\tau)) \mu^{-\tau} - \sum_{\tau=0}^{t} u(c(\tau)) \mu^{-\tau} \right) \geqslant 0$$

для любой допустимой траектории (X, C), выходящей из того же начального состояния. Имеется ряд довольно общих теорем существования для соответствующих траекторий.

Эффективные в различных смыслах траектории характеризуются последовательностью цен точно так же, как эффективный способ $\overline{z}$ характеризовался ценами (коэффициентами опорной гиперплоскости) π. Т. е. если для эффективного способа стоимость затрат равна стоимости выпуска в оптимальных ценах, то на эффективной траектории стоимость состояний постоянна и максимальна, а на всех других допустимых траекториях не может возрастать.

Все приведенные определения легко обобщаются на случай, когда производственное отображение a, функция u и коэффициент μ зависят от времени. Само время может быть непрерывным или вообще параметр t может пробегать множество довольно произвольного вида.

С экономич. точки зрения интерес представляют траектории, на к-рых достигается максимально возможный темп роста экономики, к-рый она может выдержать сколь угодно долго. Оказывается, что при неизменных во времени a и u такие траектории являются стационарными, т. е. имеют вид

$$x(t) = x(0) \alpha^t, \quad c(t) = c(0) \alpha^t,$$

где α — темп роста (расширения) экономики. Стационарные эффективные в том или ином смысле, а также стационарные оптимальные траектории наз. магистралями.

При весьма широких предположениях имеют место теоремы о магистрали, утверждающие, что всякая эффективная траектория, независимо от начального состояния, с течением времени приближается к магистрали. Имеется большое число различных теорем о магистрали, различающихся определением эффективности или оптимальности, способом измерения расстояния до магистрали, типом сходимости, наконец, конечным или бесконечным временным интервалом.

Модель экономич. динамики, у к-рой производственные возможности задаются многогранным выпуклым конусом, наз. моделью Неймана. Частным случаем модели Неймана является замкнутая модель Леонтьева, или (по другой терминологии) замкнутый динамический межотраслевой баланс (термин «замкнутый» используется здесь как характеристика свойства экономики, состоящего в отсутствии невоспроизводимых продуктов), к-рый задается тремя матрицами с неотрицательными элементами Φ, A и B порядка $l \times l$. Процесс $(x, y) \in Z$ тогда и только тогда, когда найдутся векторы v, $w \in \mathbb{R}_+^l$ такие, что выполнены неравенства:

$$x \leqslant v\Phi, \quad v \geqslant vA + wB, \quad y \leqslant v\Phi + w.$$

Модель межотраслевого баланса получила большое распространение из-за удобства получения исходной информации для ее построения.

Модели экономич. динамики рассматриваются также в непрерывном времени. Одними из первых стали изучать как раз модели с непрерывным временем. В частности, ряд работ был посвящен простейшей однопродуктовой модели, задаваемой уравнением

$$\dot{x} = f(x) - c,$$

где x — объем фондов, приходящихся на единицу трудовых ресурсов, c — потребление на душу населения, f — производственная функция (возрастающая, вогнутая). Неотрицательные функции $(x(t), c(t))_{t=0}^{\infty}$, удовлетворяющие этому уравнению, характеризуют допустимую траекторию. Для заданной функции полезности u и коэффициента дисконтирования μ определяется оптимальная траектория. Оптимальные траектории (и только они) удовлетворяют аналогу уравнения Эйлера

$$u'(c)\dot{x} = u(\bar{c})\,u'(c),$$

где $\bar{c}$ — максимальное число, удовлетворяющее условию $f(x) - c = x$.

Модель Леонтьева также была сначала сформулирована в непрерывном времени в виде системы дифференциальных уравнений

$$X = AX + B\dot{X} + C,$$

где X — потоки продуктов, A и B — матрицы текущих и капитальных затрат соответственно, C — потоки конечного потребления.

Эффективные и оптимальные траектории в моделях с непрерывным временем изучаются с помощью методов вариационного исчисления, оптимального управления, математич. программирования в бесконечномерных пространствах. Рассматриваются также модели, допустимые траектории в к-рых задаются дифференциальными включениями вида $\dot{x} \in a(x)$, где a — производственное отображение.

Рациональное поведение потребителей. Вкусы и цели потребителей, к-рые определяют их рациональное поведение, даются в виде нек-рой системы предпочтений в пространстве продуктов. А именно, для каждого потребителя i определено точечно-множественное отображение $P_i : Z \to 2^X$, где Z — нек-рое пространство ситуаций, в к-рых может оказаться потребитель в процессе выбора, X — множество векторов, доступных потребителю, $X \subset \mathbb{R}^l$. В частности, Z может включать в себя в качестве подпространства $\mathbb{R}^l$. Содержательно множество $P_i(z|x)$ состоит из всех векторов $\tilde{x} \in X$, к-рые (строго) предпочитаются вектору x в ситуации z. Напр., отображение P_i может быть задано в виде функции полезности u, где $u(x)$ показывает полезность от потребления набора продуктов x. Тогда

$$Z = \mathbb{R}^l_+, \quad P_i(z) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid u(\tilde{x}) > u(x)\}.$$

Пусть в описание ситуации z входят цены π на все продукты и денежный доход потребителя d. Тогда $B_i(z) = \{x \in X \mid x\pi \leqslant d\}$ есть множество наборов, к-рые потребитель может приобрести в ситуации z. Это множество наз. бюджетным. Рациональность поведения потребителя заключается в том, что он выбирает такие наборы x из $B_i(z)$, для к-рых $P_i(z|x) \cap B_i(z) = \varnothing$. Пусть $D(z)$ — множество наборов продуктов, выбираемых потребителем i в ситуации z; D_i наз. отображением (или функцией в случае, когда $D_i(z)$ состоит из одной точки) спроса. Имеется ряд исследований, посвященных выяснению свойств отображений P_i, B_i, D_i. В частности, довольно подробно изучен случай, когда отображения P_i могут быть заданы в виде функций. Определены условия, при к-рых отображения

B_i и D_i являются непрерывными. Особый интерес представляет изучение свойств функции спроса D_i. Дело в том, что иногда удобнее считать в качестве первичных именно функции спроса D_i, а не предпочтения P_i, поскольку их легче построить по имеющейся информации о поведении потребителей. Напр., в экономике (торговая статистика) могут наблюдаться величины, приближенно оценивающие частные производные

$$\frac{\partial D_{ik}(z)}{\partial \pi_\rho}, \quad \frac{\partial D_{ik}(z)}{\partial d},$$

где π_ρ — цена на продукт ρ, d — доход.

К теории рационального поведения потребителей примыкает теория группового выбора, имеющая дело, как правило, с дискретными вариантами. Обычно предполагается, что имеется конечное число участников группы и конечное число, напр., альтернативных вариантов. Задача состоит в выборе группового решения о выборе одного из вариантов при заданных отношениях предпочтения между вариантами для каждого участника. Групповой выбор обеспечивает различные схемы голосования, рассматриваются также аксиоматический и теоретико-игровой подходы.

Согласование интересов. Носителями интересов являются отдельные части экономич. системы, а также общество в целом. В качестве таких частей выступают потребители (группы потребителей): предприятия, министерства, территориальные органы управления, плановые и финансовые органы и т. п. Различают два взаимно переплетающихся подхода к проблеме согласования интересов — аналитический, или конструктивный, и синтетический, или дескриптивный. Согласно первому подходу в качестве исходного принимается глобальный критерий оптимальности (формализация интересов всего общества в целом). Задача состоит в том, чтобы вывести локальные (частные) критерии из общего, учитывая при этом частные интересы. При втором подходе исходными являются как раз частные интересы и задача заключается в объединении их в единую непротиворечивую систему, функционирование к-рой приводит к результатам, удовлетворительным с точки зрения всего общества в целом.

К первому подходу впрямую относятся декомпозиционные методы математич. программирования. Пусть, напр., в экономике имеется m производителей и каждый производитель j задается множеством производственных возможностей Y_j, где $Y_j \subset \mathbb{R}^l$ и является выпуклым компактом. Задана целевая функция V всего общества в целом, где $V: \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}_+$ — вогнутая функция. Экономика должна быть организована таким образом, чтобы решалась задача выпуклого программирования: найти $\bar{y}$ из условий $y \geqslant 0$, $y \in \sum_j Y_j$, $V(y) \to \max$. По теореме о характеристике эффективных способов производства существуют цены $p \in \mathbb{R}^l_+$ $(p \neq 0)$ такие, что

$$\bar{y}^{(j)} p = \max_{y^{(j)} \in Y_j} y^{(j)} p \quad \text{для всех } j, \quad \bar{y} = \sum_j \bar{y}^{(j)}.$$

Величина $y^{(j)}p$ интерпретируется как прибыль j-го производителя при ценах p. Отсюда следует, что критерий максимизации прибыли у каждого из производителей не противоречит общей цели, если действующие цены определены соответствующим образом. Схемы, относящиеся ко второму подходу, получили большое развитие в рамках моделей экономич. равновесия.

Экономическое равновесие. Предполагается, что экономика состоит из отдельных частей, являющихся носителями собственных интересов: производителей, занумерованных индексами $j=1, \ldots, m$, и потребителей, занумерованных индексами $i=1, \ldots, n$. Производитель j описывается множеством производственных

возможностей $Y_j \subset \mathbb{R}^l$ и отображением $F_j : Z \to 2^{Y_j}$, задающим его систему предпочтений. Здесь Z — множество возможных состояний экономики, конкретизируемое ниже. Потребитель i описывается множеством возможных наборов продуктов, доступных для потребления, $X_i \subset \mathbb{R}^l$, начальным запасом продуктов $w^{(i)} \in \mathbb{R}^l_+$, предпочтением $P_i : Z \to 2^{X_i}$ и, наконец, функцией $\alpha_i : Z \to \mathbb{R}$ распределения доходов, где $\alpha_i(z)$ показывает количество денег, поступающих потребителю i в состоянии z. Множество возможных цен в экономике есть Q. Тогда множество возможных состояний есть $Z = \prod_i X_i \times \prod_j Y_j \times Q$. Бюджетное отображение B_i определяется здесь так:

$$B_i(z) = \{\tilde{x}^{(i)} \in X_i \mid \tilde{x}^{(i)} p \leqslant \alpha_i(z) + w^{(i)} p\}.$$

Состояние равновесия описанной экономики есть $\bar{z} \in Z$, удовлетворяющее условиям

$$\sum_i \bar{x}^{(i)} = \sum_j \bar{y}^{(j)} + \sum_i w^{(i)},$$

$$\bar{x}^{(i)} \in B_i(\bar{z}), \quad B_i(\bar{z}) \cap P_i(\bar{z}) = \varnothing, \quad Y_j \cap F_j(\bar{z}) = \varnothing.$$

По существу состояние равновесия экономики совпадает с определением решения *бескоалиционной игры* многих лиц в смысле Неймана — Нэша с дополнительным условием, чтобы выполнялся баланс по всем продуктам.

Существование состояния равновесия доказано при весьма общих условиях для исходной экономики. Гораздо более жесткие условия необходимо накладывать для того, чтобы состояние равновесия было оптимальным, т. е. доставляло решение нек-рой глобальной оптимизационной задаче с целевой функцией, зависящей от интересов потребителей. Напр., пусть P_i задано вогнутой непрерывной функцией $u_i : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}_+$, а F_j задано функцией $py^{(j)}$,

$$\alpha_i(z) = \sum_j \theta_{ij} y^{(j)} p, \quad \theta_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_j \theta_{ij} = 1,$$

$$Q = \left\{ p \in \mathbb{R}^l_+ \;\middle|\; \sum_{k=1}^{l} p_k = 1 \right\},$$

где Y_j, X_i — выпуклые компакты, $0 \in Y_j$, $w^{(i)} \in \operatorname{int} X_i$. Любое подмножество $S = \{i_1, \ldots, i_r\}$ индексов потребителей образует подэкономику исходной экономики, в к-рой каждому потребителю i_s из S соответствует (один и только один) производитель, множество производственных возможностей к-рого есть

$$\hat{Y}_{i_s} = \sum_{j=1}^{m} \theta_{i_s, j} Y_j.$$

Функции распределения доходов при этом имеют вид

$$\alpha_{i_s}(z) = y^{(i_s)} p.$$

Состояние $z \in Z$ наз. с б а л а н с и р о в а н н ы м, если

$$\sum_i x^{(i)} \leqslant \sum_j y^{(j)} + \sum_i w^{(i)}.$$

Говорят, что сбалансированное состояние z исходной экономики блокируется коалицией потребителей S, если в подэкономике, определяемой коалицией S, существует такое сбалансированное состояние $\bar{z}^{(s)}$, что $u_{i_s}(\bar{x}^{(i_s)}) \geqslant u_{i_s}(x^{(i_s)})$ для $s = 1, \ldots, r$ и хотя бы для одного индекса имеет место строгое неравенство. Я д р о м э к о н о м и к и наз. множество всех сбалансированных состояний, к-рые не блокируются никакой коалицией потребителей. Для экономики с описанными свойствами имеет место теорема: всякое состояние равновесия принадлежит ядру. Обратное неверно, однако най-

ден ряд достаточных условий, при к-рых множество состояний равновесия и ядро близки друг к другу или вообще совпадают. В частности, если число потребителей стремится к бесконечности и влияние каждого потребителя на состояние экономики становится все более малым, то множество состояний равновесия стремится к ядру. Совпадение ядра и множества состояний равновесия имеет место в экономике с бесконечным (континуальным) числом потребителей (теорема Аумана).

Пусть экономика является моделью рынка (т. е. отсутствуют производители), множество участников (потребителей) к-рой является замкнутым единичным отрезком [0, 1], обозначаемым далее T. Состояние экономики есть $z=(x, p)$, где $p \in \{p \in \mathbb{R}_+^l \mid \sum_k p_k = 1\}$, x есть функция, отображающая T в $\mathbb{R}_+^l$, каждая компонента к-рой интегрируема по Лебегу на отрезке T. Начальное распределение продуктов между участниками задано функцией w, $\int_T w > 0$, таким образом сбалансированное состояние z таково, что $\int x = \int w$. Коалиция участников — это измеримое по Лебегу подмножество множества T. Если подмножество имеет меру 0, то соответствующая коалиция наз. нулевой. Ядро — это множество всех сбалансированных состояний, к-рые не блокируются ни одной ненулевой коалицией. Состояние $\bar{z}=(\bar{x}, \bar{p})$ является равновесием, если для почти каждого участника t

$$u_t(\bar{x}(t)) = \max u_t(x(t)),$$
$$x(t) \in \{x \mid xp \leqslant pw(t)\}.$$

Теорема Аумана утверждает, что в описанной экономике ядро и множество состояний равновесия совпадают.

Интерес представляет вопрос о структуре множества состояний равновесия, в частности когда это множество конечно или состоит из одной точки. Здесь имеет место теорема Дебре. Пусть множество моделей рынка $W=\{(w^{(i)}, D_i)_{i=1}^n\}$, где $w^{(i)} \in \mathbb{R}_+^l$ суть начальные запасы продуктов у участника i, вектор $w=(w^{(1)}, \ldots, w^{(n)})$ является параметром, определяющим конкретную модель из множества W, $w \in \mathbb{R}_+^{n \cdot l}$. Отображение $D_i : Q \times M \to \mathbb{R}_+^l$ представляет собой функцию спроса для i-го участника. Функции $D_1, \ldots, D_n$ заданы (не меняются) для всего множества экономик W. Пусть W_0, $W_0 \subset W$,— совокупность экономик, у к-рых множество состояний равновесия бесконечно. Теорема Дебре утверждает, что если функции $D_1, \ldots, D_n$ непрерывно дифференцируемы и отсутствуют точки насыщения хотя бы для одного из участников, то замыкание множества W_0 имеет (лебегову) меру нуль в пространстве W.

О численных методах. М. э. имеет тесную связь с вычислительной математикой. Линейное программирование, линейные экономич. модели оказали большое влияние на вычислительные методы линейной алгебры. По существу благодаря линейному программированию неравенства в вычислительной математике стали столь же употребительны, как и уравнения.

Трудным и многоплановым вопросом является вычисление экономич. равновесия. Напр., много работ посвящено условиям сходимости к равновесию системы дифференциальных уравнений

$$\dot{p} = F(p), \qquad (*)$$

где p — вектор цен, F — функция избыточного спроса, т. е. разность функций спроса и предложения. Равновесные цены $\bar{p}$, по определению, обеспечивают равенство спроса и предложения: $F(\bar{p})=0$. Функция избыточ-

ного спроса F задается либо непосредственно, либо через более первичные понятия соответствующей модели равновесия. С. Смейлом [8] изучена существенно более общая динамич. система, чем (*), применительно к модели рынка; наряду с изменением во времени цен p рассмотрено изменение состояния x; при этом допустимая траектория $(p(t), x(t))_{t=0}^{\infty}$ удовлетворяет некрым дифференциальным включениям вида $\dot{p} \in K(p)$, $\dot{x} \in C(p)$, где $K(p)$ и $C(p)$ — множества возможных направлений изменения p и x, определенные через модель рынка.

Экономич. равновесие, решение игры, решение той или иной экстремальной задачи могут быть определены как неподвижные точки подходящим образом сформулированного точечно-множественного отображения. В рамках исследований по М. э. разрабатываются численные методы поиска неподвижных точек разных классов отображений. Наиболее известен метод Скарфа, к-рый является комбинацией идей леммы Шпернера и симплекс-метода решения задач линейного программирования.

Смежные вопросы. М. э. тесно связана со многими математич. дисциплинами. Иногда трудно определить, где границы между М. э. и математич. статистикой или выпуклым анализом, функциональным анализом, топологией и т. д. Можно указать, напр., на развитие теории положительных матриц, положительных линейных (и однородных) операторов, спектральных свойств суперлинейных точечно-множественных отображений под влиянием потребностей М. э.

Лит.: [1] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [2] Канторович Л. В., Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М., 1959; [3] Никайдо Х., Выпуклые структуры и математическая экономика, пер. с англ., М., 1972; [4] Макаров В. Л., Рубинов А. М., Математическая теория экономической динамики и равновесия, М., 1973; [5] Миркин Б. Г., Проблема группового выбора [информации], М., 1974; [6] Scarf H., The Computation of Economic Equilibria, L., 1973; [7] Данциг Дж., Линейное программирование, его применения и обобщения, пер. с англ., М., 1966; [8] Smale S., «J. math. Economics», 1976, №2, p. 107—20.

Л. В. Канторович, В. Л. Макаров.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — часть математики, в к-рой *функции* и их обобщения изучаются методом *пределов*. Понятие предела тесно связано с понятием бесконечно малой величины, поэтому можно также сказать, что М. а. изучает функции и их обобщения методом бесконечно малых.

Название «М. а.» — сокращенное видоизменение старого названия этой части математики — «Анализ бесконечно малых»; последнее полнее раскрывает содержание, но оно — тоже сокращенное (название «Анализ посредством бесконечно малых» охарактеризовало бы предмет более точно). В классическом М. а. объектами изучения (анализа) являются прежде всего функции. «Прежде всего» потому, что развитие М. а. привело к возможности изучения его методами более сложных образований, чем функция,— функционалов, операторов и т. д.

В природе и технике всюду встречаются движения, процессы, к-рые описываются функциями; законы явлений природы также обычно описываются функциями. Отсюда объективная важность М. а. как средства изучения функций.

М. а. в широком понимании этого термина охватывает весьма большую часть математики. В него входят *дифференциальное исчисление*, *интегральное исчисление*, *функций действительного переменного теория*, *функций комплексного переменного теория*, *приближения теория*, теория *дифференциальных уравнений обыкновенных*, теория *дифференциальных уравнений с частными производными*, теория *интегральных уравнений*, *дифференциальная геометрия*, *вариационное исчисление*,

функциональный анализ и нек-рые другие математич. дисциплины. Современные *чисел теория* и *вероятностей теория* применяют и развивают методы М. а.

Все же термин М. а. часто употребляется для наименования только основ математического анализа, объединяющих в себе теорию *действительного числа*, теорию пределов, теорию *рядов*, дифференциальное и интегральное исчисление и их непосредственные приложения, такие как теория максимумов и минимумов, теория *неявных функций*, *Фурье ряды*, *Фурье интегралы*.

Функция. В М. а. исходят из определения функции по Лобачевскому и Дирихле. Если каждому числу x из нек-рого множества F чисел в силу к.-л. закона приведено в соответствие число y, то этим определена функция

$$y=f(x)$$

от одного переменного x. Аналогично определяется функция

$$f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$$

от n переменных, где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного пространства; рассматривают также функции

$$f(x)=f(x_1, x_2, \ldots)$$

от точек $x=(x_1, x_2, \ldots)$ нек-рого бесконечномерного пространства, к-рые, впрочем, чаще называют функционалами.

Элементарные функции. Фундаментальное значение в М. а. играют *элементарные функции*. На практике в основном оперируют с элементарными функциями, ими приближают функции более сложной природы. Элементарные функции можно рассматривать не только для действительных, но и комплексных x; тогда представления об этих функциях становятся в определенном смысле законченными. В связи с этим возникла важная ветвь М. а., наз. теорией функций комплексного переменного, или теорией *аналитических функций*.

Действительное число. Понятие функции существенно базируется на понятии действительного (рационального и иррационального) числа. Оно окончательно сформировалось только в конце 19 в. В частности, установлена логически безупречная связь между числами и точками геометрич. прямой, к-рая привела к формальному обоснованию идей Р. Декарта (R. Descartes, сер. 17 в.), к-рый ввел в математику прямоугольные системы координат и представление в них функций графиками.

Предел. В М. а. методом изучения функций является предел. Различают предел последовательности и предел функции. Эти понятия окончательно сформировались только в 19 в., хотя представление о них имели еще др.-греч. ученые. Достаточно сказать, что Архимед (3 в. до н. э.) умел вычислять площадь сегмента параболы при помощи процесса, к-рый мы назвали бы предельным переходом (см. *Исчерпывания метод*).

Непрерывные функции. Важный класс функций, изучаемых в М. а., образуют *непрерывные функции*. Одно из возможных определений этого понятия: функция $y=f(x)$ от одного переменного x, заданная на интервале (a, b), наз. непрерывной в точке x, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x+\Delta x)-f(x)]=0.$$

Функция непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна во всех его точках; тогда ее график представляет собой кривую, непрерывную в житейском понимании этого слова.

Производная и дифференциал. Среди непрерывных функций следует выделить функции, имеющие *производную*. Производная от функции

$$y=f(x), \quad a<x<b,$$

в точке x есть скорость изменения ее в этой точке, т. е. предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x). \qquad (1)$$

Если y есть координата точки, движущейся по оси ординат в момент времени x, то $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x.

По знаку производной $f'(x)$ судят о характере изменения $f(x)$: если $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) на интервале (c, d), то функция f возрастает (убывает) на этом интервале. Если же функция f в точке x достигает локального экстремума (максимума или минимума) и имеет в этой точке производную, то последняя равна нулю в этой точке $f'(x_0)=0$.

Равенство (1) можно заменить эквивалентным равенством

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x), \quad \varepsilon(\Delta x) \longrightarrow 0, \quad \Delta x \longrightarrow 0,$$

или

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \Delta x\,\varepsilon(\Delta x),$$

где $\varepsilon(\Delta x)$ есть бесконечно малая, когда $\Delta x \to 0$; т. е. если функция f имеет производную в точке x, то приращение ее в этой точке разлагается на два слагаемых. Из них первое

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (2)$$

есть линейная функция от Δx (пропорциональная Δx), второе — стремится к нулю быстрее, чем Δx.

Величина (2) наз. *дифференциалом* функции, соответствующим приращению Δx. При малых Δx можно считать Δy, приближенно равным dy:

$$\Delta y \approx dy.$$

Приведенные рассуждения о дифференциале характерны для М. а. Они распространяются на функции многих переменных и на функционалы.

Напр., если функция

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x)$$

от n переменных имеет непрерывные *частные производные* в точке $x=(x_1, \ldots, x_n)$, то ее приращение Δz, соответствующее приращениям Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n независимых переменных, можно записать в виде

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k^2}\,\varepsilon(\Delta x), \qquad (3)$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть если все $\Delta x_k \to 0$. Здесь первый член в правой части (3) есть дифференциал dz функции f. Он линейно зависит от $\Delta x=(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, а второй член стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ быстрее, чем Δx.

Пусть задан функционал (см. ст. *Вариационное исчисление*)

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, x')dt,$$

распространенный на классы $\mathfrak{M}$ функций $x(t)$, имеющих на отрезке $[t_0, t_1]$ непрерывную производную и удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, где x_0, x_1 — данные числа; пусть, далее, $\mathfrak{M}_0$ — класс функций $h(t)$, имеющих непрерывную производную на $[t_0, t_1]$ и таких, что $h(t_0)=h(t_1)=0$. Очевидно, если $x(t)\in\mathfrak{M}$ и $h(t)\in\mathfrak{M}_0$, то $x(t)+h(t)\in\mathfrak{M}$.

В вариационном исчислении доказывается, что при известных условиях на L приращение функционала $J(x)$ может быть записано в виде

$$J(x+h)-J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right) h(t)\,dt + o(\|h\|) \qquad (4)$$

при $\|h\| \to 0$, где

$$\|h\| = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |h(t)| + \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |h'(t)|,$$

и, таким образом, второй член правой части (4) стремится к нулю быстрее, чем $\|h\|$, а первый член линейно зависит от $h \in \mathfrak{M}_0$. Первый член в (4) наз. вариацией функционала и обозначается $\delta J(x, h)$.

Интеграл. Наряду с производной интеграл имеет фундаментальное значение в М. а. Различают неопределенный и определенный интегралы.

Неопределенный интеграл тесно связан с первообразной функцией. Функцию $F(x)$ наз. *первообразной от функции f на интервале (a, b), если на* этом интервале $F'(x) = f(x)$.

Определенный интеграл (Римана) от функции f на отрезке $[a, b]$ есть предел

$$\lim \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = \int_a^b f(x)\,dx$$

при $\max(x_{j+1} - x_j) \to 0$; здесь $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$.

Если функция f положительна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл от нее на этом отрезке равен площади фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$.

Класс интегрируемых по Риману функций содержит все непрерывные на $[a, b]$ функции и нек-рые разрывные функции. Но все они необходимо ограничены. Для неограниченных функций, растущих не очень быстро, а также для нек-рых функций, заданных на бесконечных интервалах, вводят так наз. *несобственные интегралы*, требующие для своего определения двойного перехода к пределу.

Понятие интеграла Римана для функции одного переменного распространяется на функции многих переменных (см. *Кратный интеграл*).

С другой стороны, потребности М. а. привели к обобщению интеграла совсем в другом направлении, имеется в виду *Лебега интеграл* или более общий *Лебега—Стилтьеса интеграл*. Существенным в определении этих интегралов является введение для нек-рых множеств, называемых измеримыми, понятия их меры и на этом основании — понятия измеримой функции. Для измеримых функций и вводится интеграл Лебега — Стилтьеса. При этом рассматривается широкий диапазон разных мер и соответствующих им классов измеримых множеств и функций. Это дает возможность приспособить тот или иной интеграл к определенной конкретной задаче.

Формула Ньютона — Лейбница. Между производной и интегралом имеется связь, выражаемая формулой (теоремой) Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Здесь $f(x)$ непрерывная на $[a, b]$ функция, а $F(x)$ — ее первообразная.

Формула и ряд Тейлора. Наряду с производной и интегралом важнейшим понятием (орудием исследования) в М. а. являются *Тейлора формула* и *Тейлора ряд*. Если функция $f(x)$, $a < x < b$, имеет в окрестности точки x_0 непрерывные производные до порядка n включительно, то ее можно приблизить в этой окрестности многочленом

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

наз. ее многочленом Тейлора (степени n) *по степеням $x - x_0$*:

$$f(x) \approx P_n(x)$$

(формула Тейлора); при этом ошибка приближения

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

стремится к нулю при $x \to x_0$ быстрее, чем $(x-x_0)^n$:

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Таким образом, функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 может быть приближена с любой степенью точности весьма простой функцией (многочленом), требующей для своего вычисления только арифметич. операций — сложения, вычитания и умножения.

Особенно важными являются так наз. аналитические в определенной окрестности x_0 функции, имеющие бесконечное число производных, такие, что для них в этой окрестности $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$; они могут быть представлены в виде бесконечного степенного ряда Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

Разложения Тейлора при определенных условиях возможны и для функций многих переменных, а также функционалов и операторов.

Историческая справка. До 17 в. М. а. представлял собой совокупность решений разрозненных частных задач; напр., в интегральном исчислении — это задачи на вычисление площадей фигур, объемов тел с кривыми границами, работы переменной силы и т. д. Каждая задача или частная группа задач решалась своим методом, подчас сложным и громоздким (о предыстории М. а. см. статью *Бесконечно малых исчисление*). М. а. как единое и систематич. целое сложился в трудах И. Ньютона (I. Newton), Г. Лейбница (G. Leibniz), Л. Эйлера (L. Euler), Ж. Лагранжа (J. Lagrange) и др. ученых 17—18 вв., а его база — теория пределов — была разработана О. Коши (A. Cauchy) в нач. 19 в. Глубокий анализ исходных понятий М. а. был связан с развитием в 19—20 вв. теории множеств, теории меры, теории функций действительного переменного и привел к разнообразным обобщениям.

Лит.: [1] Ла Валле-Пуссен Ш.-Ж. де, Курс анализа бесконечно малых, пер. с франц., т. 1-2, М., 1933; [2] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; 2 изд., ч. 2, М., 1980; [3] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., Математический анализ, М., 1979; [4] Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1—2, М., 1973; [5] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [6] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ., ч. 1—2, 2 изд., М., 1962—63; [7] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 1—2, М., 1970; 5 изд., т. 3, М., 1970.

С. М. Никольский.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ, программное обеспечение, — совокупность программ и программных комплексов, посредством к-рых происходит преобразование алгоритмов программы пользователя, записанных на алгоритмич. языках высокого уровня, в последовательность команд, понимаемых электроникой ЭВМ, организуется автоматич. прохождение задач пользователей на ЭВМ, обеспечивается эффективное использование оборудования ЭВМ (см. [1] — [4]).

Появление М. о. было вызвано необходимостью повышения производительности труда программистов и специалистов, эксплуатирующих ЭВМ. Действительно, команды вычислительной машины представляют собой с точки зрения возможности записи алгоритма весьма элементарные операции, и запись алгоритма (программирование) в виде последовательности этих команд является трудоемкой работой. Это стимулировало создание средств *автоматизации программирования*. Происходило укрупнение операций, понимаемых электроникой машины, но это не решило проблемы. Даже у сов-

ременных ЭВМ команды, как правило, представляют собой элементарные операции. Существенно больший успех был достигнут на пути создания программных средств, облегчающих программирование. Первым шагом было создание М. о., позволяющего программировать на автокоде. Программа на автокоде фактически представляет собой ту же последовательность команд ЭВМ, но записанных символическими обозначениями — в мнемоническом виде. Преобразование мнемонич. кода программы в команды машины осуществляют специальные программы — *ассемблеры*. Затем появились *макроассемблеры*, к-рые дали возможность использовать в текстах программ макрооператоры, обеспечивающие выполнение группы команд машины.

Следующим этапом автоматизации программирования было создание *алгоритмических языков* высокого уровня. Имеется свыше тысячи алгоритмич. языков различного назначения, применение к-рых существенно сокращает затраты на разработку и создание программ. Первым, получившим широкое распространение, стал язык *фортран*. Затем появились языки *алгол*, *алгамс*, а в СССР и язык *альфа*, предназначенные в основном для проведения научно-технич. расчетов. Для записи алгоритмов обработки экономич. информации был создан язык *кобол*. Алголоподобный язык паскаль имеет средства для описания структуры данных. Для работы с текстовой информацией предназначены языки *лисп*, снобол, амбит, сдл и др. Для описания алгоритмов проведения аналитич. преобразований на ЭВМ получила широкое распространение система Reduce, а в СССР и язык аналитик (см. [5]). Как развитие и обобщение языков фортран, алгол и кобол появились языки *ПЛ/1* и *алгол-68*.

Параллельно с развитием языковых средств велись работы по созданию библиотек стандартных программ. Имеются тысячи подпрограмм, программ и программных комплексов, в к-рых реализованы алгоритмы общего и специального назначения с использованием методов вычислительной математики. Среди них: вычисление элементарных и специальных функций, линейная алгебра, счет интегралов, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, метод наименьших квадратов и др. Стандартные программы организованы в виде библиотек подпрограмм, записанных на магнитные ленты или диски, так что они легко доступны. Для вызова подпрограммы достаточно поставить в программе оператор обращения к ней. Наиболее часто применяемые подпрограммы хранятся в виде стандартных модулей загрузки на языке, весьма близком к кодам ЭВМ. Как правило, трансляторы с алгоритмич. языков выдают результат своей работы в виде последовательности отдельных подпрограмм и процедур, к-рые сразу же после трансляции записываются во временную библиотеку в виде стандартных модулей загрузки. Последующее объединение отдельных подпрограмм в рабочую программу в кодах ЭВМ с соответствующей настройкой осуществляет загрузчик либо перед началом счета (статич. загрузчик), либо во время счета в момент вызова конкретной подпрограммы (динамич. загрузчик). В нек-рых системах объединение отдельных оттранслированных ранее частей программ в единую программу осуществляет т. н. редактор связей, а загрузчик только располагает готовую программу в памяти машины.

Наряду с пополнением библиотеки стандартных подпрограмм все большее распространение получает практика создания пакетов прикладных программ, рассчитанных на решение не отдельной задачи, а целого класса задач. Пакет программ представляет собой совокупность подпрограмм, работающих под управлением головной программы. Режим работы пакета задается посредством специализированного *проблемно-ориенти-*

рованного языка, чаще всего являющегося подмножеством обычного профессионального языка или жаргона.

Современные ЭВМ наряду со средствами, облегчающими написание и отладку программ, оснащаются также программными комплексами, обеспечивающими эффективное использование самих ЭВМ путем организации автоматич. прохождения задач (управление заданиями), управления данными, динамич. распределения памяти, внешних устройств (управления ресурсами). Совокупность этих программных средств наз. операционной системой (ОС) ЭВМ (см. [1]—[4], [6]). ОС стали неотъемлемой частью вычислительных систем. Без ОС невозможно функционирование ЭВМ, т. к. управление работой внешних устройств, обмен информацией, организация взаимодействия отдельных элементов ЭВМ в значительной мере осуществляются посредством программ, входящих в ОС. Под управлением ОС функционируют трансляторы с алгоритмич. языков, системы программ, облегчающих программирование и отладку (в том числе и в диалоговом режиме), а также обеспечивающих работу с графич. информацией. ОС предоставляют средства для работы с большими массивами данных, для ведения файлов (последовательность групп данных, как правило, одинаковой структуры), создания баз данных и различного рода информационно-поисковых систем. ОС обеспечивает использование ЭВМ в составе многомашинных комплексов, в сетях ЭВМ. Кроме языковых средств, облегчающих программирование, пользователю также предоставляется возможность управления работой ОС посредством управляющих операторов (перфокарт), к-рые вводятся в ЭВМ вместе с программой.

В зависимости от режима работы, к-рый обеспечивается ОС, различают три типа использования ЭВМ.

1) Пакетная обработка программ заключается в автоматич. прохождении (решении) потоков задач на ЭВМ, в том числе и в мультипрограммном режиме. Примерами ОС, обеспечивающих такой режим работы, являются ОС ЕС и ДОС ЕС для машин единой серии (см. [1], [8]) и машин фирмы ИБМ; системы ОС ДУБНА и ОС ДИСПАК для БЭСМ-6 (см. [9]); система NOS/BE для машин фирмы Control Data.

2) Режим разделения времени дает возможность одновременно обслуживать многих пользователей, работающих с терминалов, связанных с ЭВМ, в том числе находящихся на больших расстояниях от нее. В качестве примеров ОС, обеспечивающих работу в таком режиме, можно назвать одну из ранних экспериментальных систем MULTICS и систему TSS/360 для машин ИБМ. В крупных вычислительных системах режим разделения времени, как правило, обеспечивается операционными системами, к-рые одновременно ведут счет и в режиме пакетной обработки. При этом взаимодействие с ОС происходит посредством специальных подсистем, работающих под управлением основной ОС. В NOS/BE это — система Intercom, в ОС ДУБНА — мультитайп, в ОС ДИСПАК — система ДИМОН (см. [10]), в ОС ЕС — ДУУВЗ и СРВ (см. [11]).

При работе с терминалов на ЭВМ, ведущей счет в пакетном режиме, пользователям предоставляются в режиме разделения времени только средства для набора, редактирования программ и их запуска на счет. Трансляция программ и счет идут в обычном режиме пакетной обработки, как правило, с высшим приоритетом. Пользователи имеют возможность просмотреть результат прохождения задач и, если необходимо, заново их отредактировать и вновь запустить на счет. Программа может обращаться к терминалу и в реальном времени, как к внешнему устройству ЭВМ, для ввода-вывода информации в режиме диалога.

Системы режима разделения времени часто оснащаются трансляторами, работающими в режиме интерпре-

тации, когда отдельная инструкция (оператор языка) преобразуется в коды ЭВМ и выполняется сразу же после ее набора на терминале.

3) Операционные системы реального времени обеспечивают функционирование ЭВМ на линии с внешним оборудованием, к-рое в произвольные моменты времени может посылать в ЭВМ информацию, требующую оперативной обработки в момент ее поступления. ОС такого типа предназначены для управления экспериментальными и технологич. установками, работающими на линии с ЭВМ (см. [12], [13], [14], [15]). Нередко в роли ОС реального времени выступают соответствующим образом доработанные ОС пакетного режима. ЭВМ, предназначенные для работы на линии с оборудованием (управляющие ЭВМ), имеют технические и программные средства, облегчающие создание программ и их функционирование в реальном времени.

Понятия и терминология в области М. о. и системного программирования еще не четко установились. Ранее в состав ОС включались трансляторы, теперь большинство исследователей относят их к прикладным программам, работающим под управлением ОС. Разными учеными название компонент ОС, а часто и разбиение ОС на отдельные компоненты делается по-разному. Это связано главным образом с быстрым развитием этой области науки и непрерывным появлением новых понятий.

Кроме рассмотренного выше М. о. ЭВМ общего назначения (операционные системы и прикладные пакеты общего назначения), имеется и продолжает активно создаваться М. о., нацеленное на решение конкретных проблем в различных отраслях науки, техники и народного хозяйства. Программные проблемно-ориентированные комплексы создаются с использованием языковых средств и других возможностей, предоставляемых ОС ЭВМ. Объем этого М. о. намного превосходит объем М. о. ЭВМ общего назначения.

В крупных институтах ядерной физики и физики высоких энергий используются десятки (иногда более сотни) ЭВМ разного класса в основном для управления и съема информации с экспериментальных установок. Для каждой такой установки созданы специализированные ОС реального времени или разделения времени (см. [16]). Специализированные ОС обеспечивают функционирование не только ЭВМ, но и сложных электронно-механич. систем. Большие комплексы программ под управлением этих ОС контролируют правильность работы аппаратуры, съем информации, ее обработку, сжатие и накопление. Экспериментатору предоставляются богатые средства диалогового графич. взаимодействия с системой.

Часть систем работает в режиме автоматич. опознавания событий и их изображений. Кроме специализированных ОС, в состав М. о. экспериментов также входят большие комплексы программ, предназначенные для обработки экспериментальной информации. Система программ для обработки фильмовой информации имеет объем в десятки тысяч операторов фортрана, она создана в рамках модульной системы программирования ГИДРА (см. [17]). Система ГИДРА предоставляет пользователю средства для редактирования, организации хранения различных версий программ, для создания версий программ для конкретной трековой камеры, эксперимента и типа доступной электронной машины. В системе нашли воплощение все современные достижения программирования: модульный принцип, структурное программирование, самодокументирование, динамич. распределение оперативной памяти, удобные средства генерации. Создание конкретной версии программы сводится к написанию последовательности строк, указывающих тип измерительного устройства, этап об-

работки и форму выдачи информации, и к заданию числовой информации, описывающей параметры трековой камеры (константы оптич. системы, карта магнитного поля) и топологию изучаемых событий. Результатом работы системы является текст программы на фортране, сгенерированный из модулей, хранящихся в системе или введенных пользователем.

Не только для ядерной физики, но и для многих других отраслей науки и техники созданы большие проблемно-ориентированные комплексы программ (см. [18]). Среди них комплексы программ для обработки информации в молекулярной биологии и кристаллофизике (см. [19]), электро- (ЭПАК) и сейсморазведке (СЕЙСПАК) полезных ископаемых (см. [20]), программные комплексы для автоматизации проектирования (см. [21]), для автоматизированных систем управления(АСУ) в народном хозяйстве и многие др. Как правило, создание программы для решения той или другой задачи с использованием проблемно-ориентированных систем сводится к подготовке ее описания на языке, являющемся управляющим, входным языком системы и построенным на основе определений и понятий, используемых в данной области науки, техники.

Таким образом, М. о. ЭВМ можно представить в виде двух уровней.

Первый уровень — комплекс программ, входящих в ОС или работающих под ее непосредственным управлением, к-рый является общим М. о., поставляемым вместе с вычислительной системой. Кроме программ собственно ОС, в общее М. о. входят в первую очередь трансляторы с машинно-ориентированных и широко распространенных процедурно-ориентированных алгоритмич. языков, а также библиотеки стандартных подпрограмм общего назначения.

Второй уровень представлен проблемно-ориентированными программными комплексами. Они являются, как правило, надстройкой над общим М. о. первого уровня и создаются с использованием языковых средств и др. возможностей, представляемых М. о. первого уровня. Проблемно-ориентированное М. о. по общей организации и назначению можно разбить на два типа. Первый — это программные комплексы, создаваемые на универсальных ЭВМ общего назначения с использованием средств, представляемых М. о. Они предназначены для решения определенных классов задач или обработки данных. С точки зрения связи с ОС ЭВМ эти комплексы являются обычными прикладными программами. Второй тип представлен специализированными ОС реального времени или управляющими программами, к-рые создаются как с использованием средств, предоставляемых стандартными ОС ЭВМ, так и без их использования. Это М. о. управляет сложными электронными и электромеханич. системами, в к-рых ЭВМ составляют только часть из всего оборудования системы.

Лит.: [1] Королев Л. Н., Структуры ЭВМ и их математическое обеспечение, 2 изд., М., 1978; [2] Криницкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Г. Д., Программирование и алгоритмические языки, 2 изд., М., 1979; [3] Флорес А., Программное обеспечение, пер. с англ., М., 1971; [4] Донован Дж., Системное программирование, пер. с англ., М., 1975; [5] Глушков В. М. [и др.], «Кибернетика», 1971, № 3, с. 102—34; [6] Катцан Г. (мл.), Операционные системы, пер. с англ., М., 1976; [7] Вельбицкий И. В., Технология производства программ на базе *R*-метаязыка, в кн.: Системное и теоретическое программирование, т. 1, Киш., 1974; [8] Система математического обеспечения ЕС ЭВМ, М., 1974; [9] Мазный Г. Л., Программирование на БЭСМ-6 в системе «Дубна», М., 1978; [10] Усов С. А., Диалоговый монитор Димон, М., 1979; [11] Пеледов Г. В., Райков Л. Д., в кн.: Вычислительная техника социалистических стран, в. 2, М., 1977, с. 78—82; [12] Глушков В. М., Автоматизированные системы управления, в кн.: Тр. Всесоюзной конференции по программированию «ВКП-2», Новосиб., 1970; [13] Виленкин С. Я., Трахтенгерц Э. А., Математическое обеспечение управляющих вычислительных машин, М., 1972; [14] Мартин Дж., Программирование для вычислительных систем реального времени, пер. с англ., М., 1975; [15] Тезисы докла-

дов [1-го Всесоюзного симпозиума по математическому обеспечению вычислительных систем, работающих в реальном масштабе времени], К., 1972; [16] Говорун Н. Н., Иванченко З. М., «Программирование», 1976, №4, с. 52—65; [17] Говорун Н. Н. [и др.], «Физика элементарных частиц и атомного ядра», 1975, т. 6, в. 3, с. 742—75; [18] Сергиенко И. В., Парасюк Й. Н., Тукалевская Н. И., Автоматизированные системы обработки данных, К., 1976; [19] Рентгеновский структурный анализ, в кн.: БСЭ, 3 изд., т. 22, с. 23—27; [20] Безрук И. А., Сафонов А. С., в кн.: Прикладная геофизика, в. 98, М., 1980; [21] Глушков В. М., Капитонова Ю. В., Летичевский А. А., «Кибернетика», 1970, № 4, с. 1—6.

Н. Н. Говорун.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, среднее значение, случайной величины — числовая характеристика распределения вероятностей случайной величины. Самым общим образом М. о. случайной величины $X(\omega)$, $\omega\in\Omega$, определяется как интеграл Лебега по отношению к *вероятностной мере* P в исходном *вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$:

$$\mathsf{E}X(\omega)=\int_\Omega X(\omega)\,\mathsf{P}(d\omega). \qquad (*)$$

М. о. может быть вычислено и как интеграл Лебега от x по *распределению вероятностей* P_X величины X:

$$\mathsf{E}X(\omega)=\int_{\mathfrak{X}} xP_X(dx),$$

где $\mathfrak{X}$ — множество всех возможных значений X. М. о. функций от случайной величины X выражается через распределение P_X: напр., если X — случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^1$ и $f(x)$ — однозначная борелевская функция x, то

$$\mathsf{E}f(X)=\int_\Omega f(X(\omega))\,\mathsf{P}(d\omega)=\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\,P_X(dx).$$

Если $F(x)$ — функция распределения X, то М. о. представимо интегралом Лебега — Стилтьеса (или Римана — Стилтьеса)

$$\mathsf{E}X=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x),$$

при этом интегрируемость X в смысле (*) равносильна конечности интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x).$$

В частных случаях, если X имеет дискретное распределение с возможными значениями x_k, $k=1, 2, \ldots$, и соответствующими вероятностями $p_k=\mathsf{P}\{\omega: X(\omega)=x_k\}$, то

$$\mathsf{E}X=\sum\nolimits_k x_kp_k;$$

если X имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью вероятности $p(x)$, то

$$\mathsf{E}X=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx;$$

при этом существование М. о. равносильно абсолютной сходимости соответствующего ряда или интеграла.

Основные свойства М. о.:

а) $\mathsf{E}X_1\leqslant\mathsf{E}X_2$, если $X_1(\omega)\leqslant X_2(\omega)$, $\omega\in\Omega$;

б) $\mathsf{E}C=C$ для любого действительного C;

в) $\mathsf{E}(\alpha X_1+\beta X_2)=\alpha\mathsf{E}X_1+\beta\mathsf{E}X_2$ для любых действительных α и β;

г) $\mathsf{E}(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{E}X_n$, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{E}|X_n|$;

д) $g(\mathsf{E}X)\leqslant\mathsf{E}g(X)$ для выпуклых функций $g(x)$;

е) любая ограниченная случайная величина имеет конечное М. о.

Кроме того,

ж) $\mathsf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathsf{E}X_k$ для взаимно независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$.

Естественным образом можно определить понятие случайной величины с бесконечным М. о. Типичным примером служат времена возвращения в нек-рых случайных блужданиях (см., напр., *Бернулли блуждание*).

С помощью М. о. определяются многие числовые и функциональные характеристики распределения (как М. о. соответствующих функций от случайной величины), напр. *производящая функция*, *характеристическая функция*, *моменты* любого порядка, в частности *дисперсия*, *ковариация*.

М. о. есть характеристика расположения значений случайной величины (среднее значение ее распределения). В этом качестве М. о. служит нек-рым «типичным» параметром распределения и его роль аналогична роли статич. момента — координаты центра тяжести распределения массы — в механике. От прочих характеристик расположения, с помощью к-рых распределение описывается в общих чертах,— *медиан*, *мод*, М. о. отличается тем большим значением, к-рое оно и соответствующая ему характеристика рассеяния — дисперсия — имеют в предельных теоремах теории вероятностей. С наибольшей полнотой смысл М. о. раскрывается *больших чисел законом* (см. также *Чебышева неравенство*) и *больших чисел усиленным законом*. В частности, для последовательности взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ с конечными М. о. $a=\mathsf{E}X_k$ при $n\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-a\right|>\varepsilon\right)\longrightarrow 0,$$

и, более того,

$$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\longrightarrow a\longrightarrow \text{с вероятностью единица.}$$

Понятие М. о. как ожидаемого значения случайной величины впервые наметилось в 18 в. в связи с теорией азартных игр. Первоначально термин «М. о.» был введен как ожидаемый выигрыш игрока, равный $\sum x_k p_k$ для возможных выигрышей $x_1, \ldots, x_n$ и соответствующих вероятностей $p_1, \ldots, p_n$. Особые заслуги в обобщении и использовании понятия М. о. в современном его значении имеет П. Л. Чебышев.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., тт. 1—2, М., 1967; [3] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *А. В. Прохоров.*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах конечномерного векторного пространства, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами). М. п.— раздел науки об *исследовании операций*, охватывающий широкий класс задач управления, математич. моделями к-рых являются конечномерные экстремальные задачи. Задачи М. п. находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий, напр. при решении многочисленных проблем управления и планирования производственных процессов, в задачах проектирования и перспективного планирования. Наименование «М. п.» связано с тем, что целью решения задач является выбор программы действий.

Математич. формулировка задачи М. п.: минимизировать скалярную функцию векторного аргумента $\varphi(x)$ на множестве

$$X=\{x: q_i(x)\geqslant 0,\ i=1, 2, \ldots, k;\ h_j(x)=0,\ j=1, 2, \ldots, m\},$$

где $q_i(x)$ и $h_j(x)$ — скалярные функции. Функцию $\varphi(x)$ наз. целевой функцией, функцией

цели, а также критерием качества, множество X — допустимым множеством, или множеством планов, решение x^* задачи М. п.— оптимальной точкой (вектором), точкой глобального минимума, а также оптимальным планом.

В М. п. принято выделять следующие разделы. *Линейное программирование*: целевая функция $\varphi(x)$ и ограничения $q_i(x)$ и $h_j(x)$ линейны; *квадратичное программирование*: целевая функция квадратична и выпукла, допустимое множество определяется линейными равенствами и неравенствами; выпуклое программирование: целевая функция и допустимое множество выпуклы; *дискретное программирование*: решение ищется лишь в дискретных, напр. целочисленных, точках множества X; стохастическое программирование: в отличие от детерминированных задач здесь входная информация носит элемент неопределенности. Напр., в стохастич. задачах о минимизации линейной функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

либо все величины c_j, a_{ij}, b_i, либо часть из них случайны. Задачи линейного, квадратичного и выпуклого программирования обладают общим свойством: всякая точка локального минимума является оптимальной точкой. Значительно более сложными и менее изученными являются так. наз. многоэкстремальные задачи — задачи, для к-рых указанное свойство не выполняется.

В основе теории выпуклого программирования, и в частности линейного и квадратичного, лежит теорема Куна — Такера о необходимых и достаточных условиях существования оптимальной точки x^*: для того чтобы точка x^* была оптимальной, т. е.

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in X} \varphi(x),$$

$$X = \{x : f_i(x) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k\},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая точка $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*)$, чтобы пара точек x^*, y^* образовывала седло функции Лагранжа

$$L(x, y) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{k} y_i f_i(x).$$

Последнее означает, что

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*)$$

для любых x и всех $y \geqslant 0$. Если ограничения $f_i(x)$ нелинейны, то теорема справедлива при нек-рых дополнительных предположениях о допустимом множестве, напр. в предположении существования такой точки $x \in X$, что $f_i(x) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$,— условия регулярности Слейтера.

Если функции $\varphi(x)$ и $f_i(x)$ дифференцируемы, то следующие соотношения определяют седловую точку

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_j} x_j = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial y_i} \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k;$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial y_i} y_i = 0; \quad y_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом, задача выпуклого программирования сводится к решению системы уравнений и неравенств.

На основе теоремы Куна — Такера разработаны различные итерационные методы минимизации, сводящиеся к поиску седловой точки функции Лагранжа.

В М. п. одно из главных мест принадлежит вычислительным методам решения экстремальных задач. Широкое распространение среди этих методов получил метод возможных направлений. В этом методе последовательность $\{x_m\}$ точек множества X строится по формуле $x_{p+1}=x_p+\alpha_p s_p$. На каждой итерации для вычисления точки x_{p+1} решаются задачи выбора направления (вектора) s_p и длины шага (числа) α_p. В качестве s_p выбирают то из возможных направлений (направлений в точке x_p, малое перемещение вдоль каждого из к-рых не выводит из множества X), к-рое составляет острый угол с направлением $g(x_p)$ скорейшего убывания целевой функции (с вектором $g(x_p)=-\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_p}$, если $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция). Таким образом, вдоль этого направления функция $\psi_p(\alpha)=\varphi(x_p+\alpha s_p)$ убывает. Число α_p выбирают так, чтобы выполнялись условия $x_{p+1}\in X$ и $\varphi(x_{p+1})<\varphi(x_p)$. Для вычисления s_p в точке x_p определяют конус возможных направлений, к-рый задается системой линейных неравенств, и формулируют задачу (линейного программирования) отыскания такого возможного направления, по к-рому целевая функция убывает быстрее всего. Решение этой задачи без труда получают, напр., по стандартной программе симплексного метода. Величину шага α_p вычисляют, решая задачу минимизации одномерной функции $\psi_p(\alpha)$. При весьма общих предположениях доказано, что расстояние между точками x_p и множеством стационарных точек исходной задачи (т. е. множеством точек, в к-рых выполняются необходимые условия локального минимума функции $\varphi(x)$ на множестве X) стремится к нулю при $p\to\infty$. В случае, если исходная задача является задачей выпуклого программирования, то x_p при $p\to\infty$ стремится к множеству решений (оптимальных точек) исходной задачи. Метод возможных направлений допускает приближенное решение указанных задач определения s_p и α_p, и в этом смысле он устойчив по отношению к погрешностям вычислений.

Для допустимых множеств специальной структуры (с точки зрения простоты решения задачи выбора направления s_p) находят применение методы минимизации, отличные от метода возможных направлений. Так, в методе проекции градиента в качестве направления спуска в точке x_p выбирают $s_p=-y_p-x_p$, где y_p — проекция точки $v_p=x_p+g(x_p)$, $g(x_p)=-\left.\frac{d\varphi(x)}{dx}\right|_{x=x_p}$, на множество X.

Если множество X задано линейными ограничениями, весьма перспективным является метод условного градиента: в точке x_p линеаризуют целевую функцию, строя функцию $l(x)=\varphi(x_p)+\langle g(x_p), x_p-x\rangle$, затем, минимизируя $l(x)$ на множестве X, находят точку ее минимума y_p, после чего полагают $s_p=y_p-x_p$.

Успешно разрабатываются методы минимизации негладких функций. Одним из представителей этого класса методов является метод обобщенного градиента. Обобщенным градиентом в точке x_p наз. любой вектор $\tilde{g}(x_p)$, удовлетворяющий для любой точки $y\in X$ неравенству $\varphi(y)-\varphi(x_p)\geqslant\langle\tilde{g}(x_p), y-x_p\rangle$. Этот метод отличается от метода проекции градиента тем, что в качестве проектируемой точки выбирают точку $v_p=x_p-\tilde{g}(x_p)$.

Весьма распространены также стохастические методы минимизации. В простейшем варианте метода случайного спуска в качестве s_p выбирают случайную точку на n-мерной единичной сфере с центром в начале координат, и если s_p является возможным направлением и, кроме того,

функция $\varphi(x)$ убывает вдоль этого направления, то осуществляют шаг, т. е. переходят к точке x_{p+1}. В противном случае процедуру выбора s_p повторяют.

Характерной особенностью вычислительной стороны методов решений задач М. п. является то, что применение этих методов неразрывно связано с использованием ЭВМ, в первую очередь потому, что задачи М. п., формализующие ситуации управления реальными системами, являются задачами большого объема, недоступными для ручного счета.

Одним из распространенных методов исследования задач М. п. является *штрафных функций метод*. Суть этого метода состоит в замене исходной задачи М. п. такой последовательностью параметрич. задач безусловной минимизации, что при стремлении параметра к бесконечности (в иных случаях — к нулю) решения этих задач стремятся к решению исходной задачи М. п. Заметим, что в задачах безусловной минимизации любое направление является возможным, вследствие чего отыскание вектора s_p сопряжено с меньшей затратой усилий по сравнению с аналогичной задачей в методе возможных направлений (напр., в методе скорейшего спуска выбирают $s_p = -\frac{d\varphi(x)}{dx}\Big|_{x=x_p}$). То же самое относится и к задаче отыскания числа α_p.

Важным направлением исследований в М. п. являются проблемы устойчивости. Здесь существенное значение имеет изучение класса устойчивых задач — задач, для к-рых малые возмущения (погрешности) в исходной информации влекут за собой малые возмущения и в решении. В случае неустойчивых задач большая роль отводится процедуре аппроксимации неустойчивой задачи последовательностью устойчивых задач — так наз. процессу регуляризации.

Наряду с конечномерными задачами М. п. рассматриваются также задачи М. п. в бесконечномерных пространствах. К этим задачам относятся различные экстремальные задачи математич. экономики, техники, задачи оптимизации физич. характеристик ядерных реакторов и др. В терминах М. п. в соответствующих функциональных пространствах формулируются зазадачи *вариационного исчисления* и *оптимального управления*.

М. п. как наука сформировалось в 50—70-х гг. 20 в. Это в первую очередь связано с развитием ЭВМ, а следовательно, с возможностью проводить математич. обработку больших потоков информации и на этой основе решать задачи управления и планирования, где применение математич. методов связано в первую очередь с построением математич. моделей и соответствующих им экстремальных задач, в том числе задач М. п.

Лит.: [1] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М., Методы оптимизации, М., 1978; [2] Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1975; [3] Полак Э., Численные методы оптимизации. Единый подход, пер. с англ., М., 1974; [4] Ермольев Ю. М., Методы стохастического программирования, М., 1976.

В. Г. Карманов.

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ УРАВНЕНИЯ — уравнения, описывающие математические модели физических явлений. М. ф. у.— часть предмета *математической физики*. Многие явления физики и механики (гидро- и газодинамики, упругости, электродинамики, оптики, теории переноса, физики плазмы, квантовой физики, теории гравитации и т. д.) описываются краевыми задачами для дифференциальных уравнений. Эти задачи составляют весьма широкий класс М. ф. у.

Для полного описания эволюции физич. процесса, помимо уравнений, необходимо, во-первых, задать картину процесса в нек-рый фиксированный момент времени (начальные условия) и, во-вторых, задать режим на границе той среды, где протекает

этот процесс (граничные условия). Начальные и граничные условия образуют краевые условия, а дифференциальные уравнения вместе с соответствующими краевыми условиями — краевую задачу математич. физики.

Ниже приведены нек-рые примеры уравнений и соответствующих краевых задач.

Уравнение колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x, t) \tag{1}$$

описывает малые колебания струн, стержней, мембран, акустические и электромагнитные колебания. В уравнении (1) пространственные переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$ изменяются в области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, где развивается рассматриваемый физич. процесс; при этом в соответствии с физич. смыслом входящих величин должно быть $\rho > 0$, $p > 0$ и $q \geqslant 0$. Кроме того, полагают ρ, $q \in C(\bar{G})$ и $p \in C^1(\bar{G})$. При этих условиях уравнение (1) — *гиперболического типа уравнение*.

При $\rho = 1$, $p = a^2 = \text{const}$ и $q = 0$ уравнение (1) превращается в *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, t), \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Уравнение диффузии

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x, t) \tag{3}$$

описывает процессы диффузии частиц и распространения тепла в среде. Уравнение (3) — *параболического типа уравнение*. При $\rho = 1$, $p = a^2 = \text{const}$ и $q = 0$ уравнение (3) превращается в *теплопроводности уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t). \tag{4}$$

Для стационарных процессов, когда отсутствует зависимость от времени t, уравнения колебаний (1) и диффузии (3) принимают вид

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f(x). \tag{5}$$

Уравнение (5) — *эллиптического типа уравнение*. При $p = 1$ и $q = 0$ уравнение (5) наз. *Пуассона уравнением*:

$$\Delta u = -f(x), \tag{6}$$

а при $f = 0$ — *Лапласа уравнением*

$$\Delta u = 0. \tag{7}$$

Уравнениям (6) и (7) удовлетворяют различного рода потенциалы: ньютонов (кулонов) потенциал, потенциал течения несжимаемой жидкости и т. д.

Если в волновом уравнении (2) внешнее возмущение f — периодическое с частотой ω,

$$f(x, t) = a^2 f(x) e^{i\omega t},$$

то амплитуда $u(x)$ периодич. решения с той же частотой ω

$$u(x, t) = u(x) e^{i\omega t}$$

удовлетворяет *Гельмгольца уравнению*

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \omega^2 / a^2. \tag{8}$$

К уравнению Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию).

Для полного описания процесса колебаний необходимо задать начальное возмущение и начальную скорость

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \bar{G}, \tag{9}$$

а для процесса диффузии — только начальное возмущение

$$u\,|_{t=0}=u_0(x), \quad x\in\overline{G}. \tag{10}$$

Кроме того, на границе S области G необходимо удовлетворить заданному режиму. В простейших случаях физически осмысленные граничные условия для уравнений (1), (3), (5) описываются соотношением

$$k\frac{\partial u}{\partial n}+hu\Big|_S=v(x,\ t), \quad t>0, \tag{11}$$

где k и h — заданные неотрицательные функции, не обращающиеся в нуль одновременно, n — внешняя нормаль к поверхности S и v — заданная функция.

Напр., для струны условие

$$u\,|_{x=x_0}=0$$

означает, что конец струны x_0 закреплен, а условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=0$$

означает, что конец x_0 свободен. Для теплопроводности условие

$$u\,|_S=v_0(x,\ t) \tag{12}$$

означает, что на границе S области G поддерживается заданный температурный режим, а условие

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=v_1(x,\ t) \tag{13}$$

задает поток тепла через S. В случае неограниченных областей, напр. внешности ограниченной области, кроме условия на границе задается также условие на бесконечности. Так, для уравнения Пуассона (6) в пространстве ($n=3$) таким условием является условие

$$u(x)=o(1), \quad |x|\longrightarrow\infty, \tag{14}$$

а на плоскости ($n=2$) — условие

$$u(x)=O(1), \quad |x|\longrightarrow\infty. \tag{15}$$

Для уравнения Гельмгольца (8) на бесконечности задаются *излучения условия* Зоммерфельда

$$u(x)\quad O(|x|^{-1}),$$
$$\frac{\partial u(x)}{\partial |x|}\mp iku(x)-o(|x|^{-1}),\ |x|\longrightarrow\infty, \tag{16}$$

причем знак «—» соответствует расходящимся, а знак «+»— сходящимся волнам.

Краевая задача, к-рая содержит только начальные условия (и стало быть, не содержит граничных условий, так что область G — все пространство $\mathbb{R}^n$), наз. *Коши задачей*. Для уравнения колебаний (1) задача Коши (1), (9) ставится следующим образом: найти функцию $u(x,\ t)$ класса $C^2(t>0)\cap C^1(t\geqslant 0)$, удовлетворяющую уравнению (1) при $t>0$ и начальным условиям (9) на плоскости $t=0$. Аналогично ставится и задача Коши (3), (10) для уравнения диффузии (3).

Если в краевой задаче присутствуют и начальные и граничные условия, то такая задача наз. с м е ш а н н о й з а д а ч е й. Для уравнения колебаний (1) смешанная задача (1), (9), (11) ставится так: найти функцию $u(x,\ t)$ класса

$$C^2(G\times(0,\ \infty))\cap C^1(\overline{G}\times[0,\ \infty)),$$

удовлетворяющую уравнению (1) в цилиндре $G\times(0,\ \infty)$, начальным условиям (9) на его нижнем основании $\overline{G}\times\{0\}$ и граничному условию (11) на его боковой поверхности $S\times[0,\ \infty)$. Аналогично ставится смешанная задача (3), (10), (11) для уравнения диффузии (3). Существуют и другие постановки краевых задач, напр. *Гурса задача*, *Трикоми задача*.

Для стационарного уравнения (5) начальные условия отсутствуют и соответствующая краевая задача ставится так: найти функцию $u(x)$ класса $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$, удовлетворяющую уравнению (5) в области G и граничному условию на границе S области G:

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + hu\Big|_S = v(x). \tag{11'}$$

Для уравнения (5) краевая задача с граничным условием

$$u|_S = v_0(x) \tag{12'}$$

наз. *Дирихле задачей*, а с граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = v_1(x) \tag{13'}$$

— *Неймана задачей*. Различают внешние и внутренние краевые задачи Дирихле и Неймана. Для внешних задач кроме граничных условий необходимо задавать условия на бесконечности типа (14), (15), (16).

К краевым задачам для уравнения (5) относятся также задачи на собственные значения: найти те значения параметра λ (собственные значения), при к-рых однородное уравнение

$$Lu \equiv -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda \rho u \tag{17}$$

имеет нетривиальные решения (собственные функции), удовлетворяющие однородному граничному условию

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + hu\Big|_S = 0. \tag{18}$$

Если G — ограниченная область с достаточно гладкой границей S, то существует счетное число неотрицательных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ задачи (17), (18) ($0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \lambda \to \infty$), каждое λ_k — конечной кратности, соответствующие собственные функции $u_k(x)$, $Lu_k = \rho u_k$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют полную ортонормированную систему функций в $L_2(G; \rho)$; при этом всякая функция класса $C^2(\overline{G})$, удовлетворяющая граничному условию (18), разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по системе собственных функций $\{u_k\}$.

Изложенные постановки краевых задач предполагают достаточную гладкость решения как внутри области, так и вплоть до границы. Такие постановки краевых задач наз. к л а с с и ч е с к и м и. Однако во многих физически интересных задачах приходится отказываться от таких требований гладкости. Внутри области решение может быть *обобщенной функцией* и удовлетворять уравнению в смысле обобщенных функций, краевые условия могут удовлетворяться в каком-либо обобщенном смысле (почти везде, в L_p, в слабом смысле и т. д.). Такие постановки краевых задач наз. о б о б щ е н н ы м и п о с т а н о в к а м и, а соответствующие решения — о б о б щ е н н ы м и р е ш е н и я м и. Напр., обобщенная задача Коши для волнового уравнения ставится следующим образом. Пусть u — классич. решение задачи Коши (2), (9). Функции u и f продолжаются нулем на $t<0$ и обозначаются через $\tilde{u}$ и $\tilde{f}$ соответственно. Тогда функция $\tilde{u}$ будет удовлетворять в смысле обобщенных функций во всем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \tilde{u} + u_0(x) \times \delta'(t) + u_1(x) \times \delta(t) + \tilde{f}(x, t). \tag{19}$$

При этом начальные возмущения u_0 и u_1 играют роль мгновенно действующих внешних источников типа двойного слоя, $u_0(x) \times \delta'(t)$, и простого слоя, $u_1(x) \times \delta(t)$. Сказанное позволяет ввести следующее определение. О б о б щ е н н о й з а д а ч е й К о ш и для волнового уравнения с источником $F \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$, $F = 0$ при $t<0$, наз. задача об отыскании тех обобщен-

ных решений $u(x,\ t)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + F(x,\ t), \qquad (19')$$

к-рые обращаются в нуль при $t<0$. Аналогично ставится обобщенная задача Коши и для уравнения теплопроводности (4).

Поскольку краевые задачи математич. физики описывают реальные физич. процессы, то они должны удовлетворять следующим естественным требованиям, сформулированным Ж. Адамаром (J. Hadamard).

1) Решение должно существовать в нек-ром классе функций M_1.

2) Решение должно быть единственным в, возможно, другом классе функций M_2.

3) Решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (начальных и граничных данных, свободных членов, коэффициентов уравнения и т. д.). Требование непрерывной зависимости решения возникает в связи с тем, что данные физич. задачи, как правило, определяются из эксперимента приближенно, и поэтому необходимо быть уверенным в том, что решение задачи не будет существенно зависеть от погрешностей измерений этих данных.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям 1)—3), наз. корректно поставленной, а множество функций $M_1 \cap M_2$ — классом корректности. Хотя требования 1)—3) на первый взгляд кажутся естественными, их, тем не менее, необходимо доказывать в рамках принятой математич. модели. Доказательство корректности — это первая апробация математич. модели,— модель непротиворечива, не содержит паразитных решений и мало чувствительна к погрешностям измерений.

Нахождение корректных постановок краевых задач математич. физики и методов построения их решений (точных или приближенных) и составляет одно из главных содержаний предмета М. ф. у. Известно, что все перечисленные выше краевые задачи поставлены корректно.

Пример. Задача Коши $y'=f(x,\ y)$, $y(x_0)=y_0$ поставлена корректно, если $f\in C^1$.

Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из условий 1)—3), наз. *некорректной задачей*. Некорректные задачи приобретают в современной математич. физике все возрастающее значение: сюда в первую очередь относятся обратные задачи, а также задачи, связанные с обработкой и интерпретацией результатов наблюдений.

Примером некорректно поставленной задачи может служить задача Коши для уравнения Лапласа (пример Адамара):

$$\Delta u(x,\ y)=0, \quad u|_{y=0}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=\frac{\sin kx}{k}.$$

Решение

$$u(x,\ y)=\frac{1}{k^2}\sin kx\ \mathrm{sh}\ ky \overset{x}{\not\Rightarrow} 0, \quad k\longrightarrow\infty,$$

однако

$$\frac{\sin kx}{k}\overset{x}{\Rightarrow}0, \quad k\longrightarrow\infty.$$

Для приближенного решения некорректных задач существует *регуляризации метод*, использующий дополнительную информацию о решении и сводящийся к решению ряда корректно поставленных задач.

Важную роль в М. ф. у. играет понятие *Грина функции*. Функцией Грина линейного дифференциального оператора

$$L(x,\ t;\ D)=\sum\nolimits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x,\ t)\,D^\alpha,$$

$$D=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial x_n},\ \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

с заданными (однородными) краевыми условиями на границе области изменения переменных $(x,\ t)$ наз. функция $G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$, удовлетворяющая при каждом $(\xi,\ \tau)$ из этой области уравнению

$$L\ (x,\ t;\ D)\ G\ (x,\ t;\ \xi,\ \tau) = \delta\ (x-\xi,\ t-\tau). \qquad (20)$$

В физич. ситуациях функция Грина $G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$ описывает возмущение от точечного (в точке ξ) мгновенного (в момент τ) источника интенсивности 1 (с учетом неоднородности среды и краевого эффекта). В случае постоянных коэффициентов и отсутствия границы функция Грина при $\xi=0$ и $\tau=0$ наз. фундаментальным решением и обозначается $E(x,\ t)$,

$$L\ (D)\ E\ (x,\ t) = \delta\ (x,\ t). \qquad (20')$$

Доказано существование фундаментального решения из D' и S' для любого оператора $L(D)\not\equiv 0$.

Примеры фундаментальных решений. Волновое уравнение

$$E_1\ (x,\ t) = \frac{\theta\ (at-|\ x\ |)}{2a}, \quad E_2\ (x,\ t) = \frac{\theta\ (at-|\ x\ |)}{2\pi a\ \sqrt{a^2t^2-|\ x\ |^2}},$$

$$E_3\ (x,\ t) = \frac{1}{2\pi a}\ \delta_+\ (a^2t^2-|\ x\ |^2),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда: $\theta(t)=0$ при $t<0$; $\theta(t)\ \ 1$ при $t\geqslant 0$.

Уравнение теплопроводности:

$$E_n\ (x,\ t)\ \ \frac{\theta\ (t)}{(2a\ \sqrt{\pi t})^n}\ e^{-|\ x\ |^2/4a^2t}.$$

Уравнение Лапласа:

$$E_1\ (x) = -\frac{1}{2}\ |\ x\ |, \quad E_2\ (x) = \frac{1}{2\pi}\ \ln |\ x\ |, \quad E_3\ (x) = -\frac{1}{4\pi\ |\ x\ |}.$$

С помощью фундаментального решения $E(x,\ t)$ решение $u(x,\ t)$ уравнения

$$L\ (D)\ u = F\ (x,\ t) \qquad (21)$$

с произвольной правой частью $F\in D'$ выражается во всем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ сверткой

$$u = F * E, \qquad (22)$$

если она существует в D'.

В физич. ситуациях смысл формулы (22) следующий: это есть суммарное наложение элементарных возмущений $F(\xi,\ \tau)E(x-\xi,\ t-\tau)$ от точечных источников $F(\xi,\ \tau)\delta(x-\xi,\ t-\tau)$, на к-рые разлагается источник $F(x,\ t)$ в силу тождества $F=F*\delta$. При этом свертка $F*E$ играет роль соответствующего потенциала с источником (плотностью) F. В этом состоит сущность метода точечного источника решения линейных задач математич. физики.

В частности, решения обобщенной задачи Коши для волнового уравнения (и уравнения теплопроводности) выражается волновым (тепловым) потенциалом

$$u = F * E_n. \qquad (22')$$

Из формулы (22') при надлежащих предположениях о гладкости источника

$$F\ (x,\ t) = u_0\ (x)\ \delta'\ (t) + u_1\ (x)\ \delta\ (t) + f\ (x,\ t)$$

следуют классич. формулы решения задач Коши. Напр., для волнового уравнения в пространстве — *Кирхгофа формула*:

$$u\ (x,\ t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\ x-\xi\ |\ <\ at} f\left(\xi,\ t-\frac{|\ x-\xi\ |}{a}\right) \frac{d\xi}{|\ x-\xi\ |} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|\ x-\xi\ |\ =\ at} u_1\ (\xi)\ dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|\ x-\xi\ |\ =\ at} u_0\ (\xi)\ dS\right]. \qquad (23)$$

Для уравнения теплопроводности — *Пуассона формула*:

$$u(x,\ t)=\int_0^t\int\frac{f(\xi,\ \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n}\,e^{-|x-\xi|^2/4a^2(t-\tau)}\,d\xi\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int u_0(\xi)\,e^{-|x-\xi|^2/4a^2t}\,d\xi. \qquad (24)$$

Таким же путем, строя функцию Грина для уравнения Лапласа для шара, получают решение внутренней задачи Дирихле для (трехмерного) шара $|x|<R$ в виде *Пуассона интеграла*:

$$u(x)=\frac{1}{4\pi R}\int_{|\xi|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^3}\,u_0(\xi)\,dS_\xi. \qquad (25)$$

Для исследования и приближенного решения смешанных задач используется *Фурье метод* (разделения переменных) при условии, что коэффициенты в уравнении и в граничном условии не зависят от времени t. Идея метода, применительно, напр., к задаче (3), (10), (18) состоит в следующем: искомое решение $u(x,\ t)$ и правая часть $f(x,\ t)$ разлагаются в ряд Фурье по собственным функциям $\{u_k\}$ краевой задачи (17), (18)

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)\,u_k(x),\quad f(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(t)\,u_k(x). \qquad (26)$$

Подставляя формально эти ряды в уравнение (3), для неизвестных функций $b_k(t)$ получают уравнение:

$$b_k'(t)+\lambda_k b_k(t)=c_k(t),\quad k=1,\ 2,\ \ldots \qquad (27)$$

При этом, чтобы ряд (26) для u удовлетворял начальному условию (10), необходимо положить

$$b_k(0)=\int_G\rho(x)\,u_0(x)\,u_k(x)\,dx=a_k. \qquad (28)$$

Решая задачу Коши (27), (28), получают формальное решение задачи (3), (10), (18) в виде ряда:

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_ke^{-\lambda_kt}+\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}c_k(\tau)\,d\tau\right]u_k(x). \qquad (29)$$

Возникает задача обоснования метода Фурье: когда формальный ряд (29) даст классическое или обобщенное решение задачи (3), (10), (18)?

При обосновании метода Фурье и, вообще, при установлении корректности смешанной задачи для уравнения диффузии (3) используется *максимума принцип*.

Аналогично метод Фурье применяется и к смешанной задаче (1), (9), (18) для уравнения колебаний. В этом случае оказывается полезным метод *энергии интеграла*.

Метод разделения переменных находит применение также и для решения краевых задач для уравнения эллиптич. типа (5), в частности для вычисления собственных функций и собственных значений при условии, что область G обладает достаточной симметрией.

Для исследования и приближенного решения краевых задач для уравнения (5) широко используются вариационные методы. Так, напр., для задачи на собственные значения (17), (18) (при $\rho=1$) собственные значения λ_k удовлетворяют вариационному принципу:

$$\lambda_k=\inf_{(u,\ u_i)=0,\ i=1,\ \ldots,\ k-1}\frac{(Lu,\ u)}{\|u\|^2}, \qquad (30)$$

где функции сравнения $u(x)$ предполагаются из класса $C^2(\bar{G})$ и удовлетворяют граничному условию (18); при этом inf в (30) реализуется на любой собственной функции, соответствующей собственному значению λ_k, и только на них.

При исследовании краевых задач для уравнения (5) (в частности, для гармонич. функций) применяется принцип максимума.

Перечисленные краевые задачи далеко не исчерпывают все многообразие краевых задач математич. физики — это есть простейшие классич. примеры краевых задач. Краевые задачи, описывающие реальные физич. процессы, могут быть весьма сложными: это могут быть системы уравнений, уравнения высших порядков, нелинейные уравнения. Сюда в первую очередь относятся: уравнение Шрёдингера, уравнения гидродинамики, переноса, магнитной гидродинамики, уравнения Максвелла, теории упругости, уравнения Дирака, уравнения Эйнштейна, уравнения Янга — Миллса и др.

В связи с поисками нетривиальных моделей, описывающих взаимодействие квантовых полей, возрос интерес к классическим нелинейным уравнениям:

$$u_t' - 6uu_x' + u_{xxx}''' = 0 \qquad (31)$$

— *Кортевега — де Фриса уравнение*;

$$u_{tt}'' - u_{xx}'' \quad gf(u), \quad g > 0,$$

— нелинейное волновое уравнение (Лиувилля при $f = e^u$; Sine-Гордона при $f = -\sin u$);

$$iu_t' + u_{xx}'' + \nu |u|^2 u = 0, \quad \nu > 0,$$

— нелинейное уравнение Шрёдингера.

Характерной чертой таких уравнений является наличие решений типа «уединенной волны» (*солитонов*). Напр., для уравнения (31) таким решением является

$$u(x, t) = \frac{a}{2\operatorname{ch}^2\left[\frac{\sqrt{a}}{2}(x - at - x_0)\right]}, \quad a > 0, \ x_0 — \text{любые}.$$

Это решение обладает конечной энергией.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [2] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [3] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974; [4] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [5] Адамар Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, пер. с франц., М., 1978; [6] Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; [7] Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, М., 1976; [8] Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики, М., 1973; [9] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., 2 изд., т. 2, М.—Л., 1951; [10] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979. *В. С. Владимиров.*

МАТРИЦ АЛГЕБРА, матричная алгебра,— подалгебра полной матричной алгебры F_n всех $(n \times n)$-матриц над полем F. Операции в F_n определяются следующим образом:

$$\lambda a = \|\lambda a_{ij}\|, \quad a + b = \|a_{ij} + b_{ij}\|,$$

$$ab = c = \|c_{ij}\|, \quad c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}$$

для $\lambda \in F$, $a = \|a_{ij}\|$, $b = \|b_{ij}\| \in F_n$. Алгебра F_n изоморфна алгебре всех эндоморфизмов n-мерного линейного пространства над F. Размерность F_n над F равна n^2. Любая ассоциативная алгебра с единицей, размерность к-рой над F не больше n, изоморфна нек-рой подалгебре в F_n. Ассоциативная алгебра без единицы, размерности меньше n над F, также изоморфно вкладывается в F_n. В силу теоремы Веддербёрна алгебра F_n проста, т. е. имеет лишь тривиальные двусторонние идеалы. Центр алгебры F_n состоит из всех скалярных $(n \times n)$-матриц над F. Группа обратимых элементов алгебры F_n есть полная линейная группа $\mathrm{GL}(n, F)$. Каждый автоморфизм h алгебры F_n является внутренним:

$$h(x) = txt^{-1}, \quad x \in F_n, \quad t \in \mathrm{GL}(n, F).$$

Неприводимая М. а. проста. Если М. а. A абсолютно неприводима (напр., когда поле F алгебраически замкнуто), то $A=F_n$ при $n>1$ (теорема Бёрнсайда). М. а. полупроста тогда и только тогда, когда она вполне приводима.

С точностью до сопряженности в F_n имеется единственная максимальная нильпотентная подалгебра — алгебра всех верхних треугольных матриц с нулевой диагональю. В алгебре F_n тогда и только тогда имеется коммутативная подалгебра размерности r, когда

$$r \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]+1$$

(теорема Шура). Для поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ множество классов сопряженных максимальных коммутативных подалгебр алгебры $\mathbb{C}_n$ при $n\leqslant 6$ конечно, а при $n>6$ бесконечно.

В алгебре F_n выполняется стандартное тождество степени $2n$:

$$\sum\nolimits_{\sigma\in S_{2n}} \pm x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}=0,$$

где S_{2n} — симметрич. группа, и никакое тождество меньшей степени не выполняется.

Лит.: [1] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [4] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [5] Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И., Перестановочные матрицы, Минск, 1966.

Д. А. Супруненко.

МАТРИЦ КОЛЬЦО, полное кольцо матриц,— кольцо всех квадратных матриц фиксированного порядка над кольцом R. Кольцо $(n\times n)$-матриц над R обозначается R_n или $M_n(R)$. Всюду ниже R — ассоциативное кольцо с единицей 1.

Кольцо R_n изоморфно кольцу $\mathrm{End}\,M$ всех эндоморфизмов свободного правого R-модуля M, обладающего n-элементным базисом. Матрица $E_n=\mathrm{diag}\,[1, \ldots, 1]$ — единица в R_n. Ассоциативное кольцо A с единицей 1 тогда и только тогда изоморфно R_n, когда в A есть множество из n^2 элементов e_{ij}, $i, j=1, \ldots, n$, подчиненное следующим условиям:

1) $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$, $\sum_{i=1}^{n} e_{ii}e_{ii}=1$,

2) централизатор множества элементов e_{ij} в A изоморфен кольцу R.

Центр кольца R_n совпадает с $Z(R)E_n$, где $Z(R)$ — центр R; при $n>1$ кольцо R_n некоммутативно.

Мультипликативная группа кольца R_n (группа всех обратимых элементов) наз. полной линейной группой и обозначается $\mathrm{GL}(n, R)$. Матрица из R_n обратима в R_n тогда и только тогда, когда ее столбцы составляют базис свободного правого модуля всех $(n\times 1)$-матриц над R. Если R коммутативно, то обратимость матрицы a в R_n равносильна обратимости ее определителя $\det a$ в R. Имеет место равенство $(R_m)_n=R_{mn}$.

Кольцо R_n тогда и только тогда просто, когда просто R, ибо двусторонние идеалы в R_n имеют вид k_n, где k — двусторонний идеал в R. Артиново кольцо тогда и только тогда просто, когда оно изоморфно М. к. над телом (теорема Веддерберна — Артина). $J(M_n(R))=M_n(J(R))$, где $J(R)$ — радикал *Джекобсона кольца* R. Следовательно, для полупростого кольца R М. к. над R также полупросто. Если R регулярно (т. е. для любого $a\in R$ в R есть такое b, что $aba=a$), то и R_n регулярно. Если R — кольцо с инвариантным базисным числом, т. е. число базисных элементов каждого свободного R-модуля не зависит от выбора базиса, то R_n также кольцо с инвариантным базисным числом. Кольца R и R_n эквивалентны в смысле Мориты (см. *Мориты эквивалентность*): кате-

гория R-модулей эквивалентна категории R_n-модулей. Однако из того, что проективные R-модули свободны, еще не следует, что будут свободны и проективные R_n-модули. Так, если R — поле, а $n>1$, то существуют несвободные конечно порожденные проективные R_n-модули.

Лит.: [1] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [2] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [3] Бокуть Л. А., Ассоциативные кольца, ч. 1, Новосиб., 1977.

Д. А. Супруненко.

МАТРИЦА — прямоугольная таблица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

состоящая из m строк и n столбцов, элементы к-рой a_{ij} принадлежат нек-рому множеству K. Таблица (1) наз. также $(m\times n)$-м а т р и ц е й н а д K, или м а т р и ц е й р а з м е р а $m\times n$ н а д K. Пусть $M_{m,n}(K)$ — совокупность всех $(m\times n)$-матриц над K. Если $m=n$, то (1) наз. к в а д р а т н о й м а т р и ц е й п о р я д к а n. Множество $M_n(K)$ — совокупность всех квадратных М. порядка n над K.

Для М. пользуются также обозначениями

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \|a_{ij}\|.$$

В наиболее важных случаях в качестве K выступают поле действительных чисел, поле комплексных чисел, произвольное поле, кольцо многочленов, кольцо целых чисел, кольцо функций, произвольное ассоциативное кольцо. Операции сложения и умножения, определенные на K, естественным образом переносятся на М. над K и возникает м а т р и ч н о е и с ч и с л е н и е — предмет теории М.

Понятие М. впервые появилось в середине 19 в. в работах У. Гамильтона (W. Hamilton) и А. Кэли (A. Cayley). Фундаментальные результаты в теории М. принадлежат К. Вейерштрассу (K. Weierstrass), К. Жордану (C. Jordan), Г. Фробениусу (G. Frobenius). И. А. Лаппо-Данилевский развил теорию аналитич. функций многих матричных переменных и применил ее к изучению систем линейных дифференциальных уравнений.

Действия над матрицами. Пусть K — ассоциативное кольцо, $A=\|a_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|\in M_{m,n}(K)$. Тогда с у м м а М. A и B, по определению, равна

$$A+B=\|a_{ij}+b_{ij}\|.$$

При этом $A+B\in M_{m,n}(K)$ и сложение М. ассоциативно и коммутативно. Н у л е в о й М. из $M_{m,n}(K)$ наз. М. 0, все элементы к-рой равны нулю. Для всякой $A\in M_{m,n}(K)$

$$A+0=0+A=A.$$

Пусть $A=\|a_{ij}\|\in M_{m,k}(K)$, $B=\|b_{ij}\|\in M_{k,n}(K)$. П р о и з в е д е н и е М. A и B определяется по правилу

$$AB=\|c_{\mu\nu}\|\in M_{m,n}(K),$$

где

$$c_{\mu\nu}=\sum_{j=1}^{k} a_{\mu j}b_{j\nu}.$$

Произведение двух М. из $M_n(K)$ всегда определено и принадлежит $M_n(K)$. Умножение М. ассоциативно: если $A\in M_{m,k}(K)$, $B\in M_{k,n}(K)$, $C\in M_{n,p}(K)$, то

$$(AB)C=A(BC)$$

и $ABC\in M_{m,p}(K)$. Верен и дистрибутивный закон: для $A\in M_{m,n}(K)$, B, $C\in M_{n,m}(K)$

$$A(B+C)=AB+AC, \quad (B+C)A=BA+CA. \qquad (2)$$

В частности, (2) верно и для A, B, $C \in M_n(K)$. Следовательно, $M_n(K)$ — ассоциативное кольцо. Если K — кольцо с единицей 1, то М.

$$E_n = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

будет единицей кольца $M_n(K)$:

$$E_n A = A E_n = A$$

для всех $A \in M_n(K)$. Умножение М. некоммутативно: при $n \geqslant 2$ для любого ассоциативного кольца K с единицей найдутся такие М. A и B в $M_n(K)$, что $AB \neq BA$.

Пусть $\alpha \in K$, $A = \|a_{ij}\| \in M_{m,n}(K)$; произведение М. A на элемент (число) α, по определению, равно $\alpha A = \|\alpha a_{ij}\|$. Тогда

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,\ \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,\ \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B.$$

Пусть K — кольцо с единицей. М. e_{ij} определяется как М. в $M_{m,n}(A)$, единственный ненулевой элемент к-рой равен 1 и расположен на позиции (i, j), $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Для любой $A = \|a_{ij}\|$ из $M_{m,n}(K)$

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}.$$

Если K — поле, то $M_{m,n}(K)$ — векторное пространство над K размерности mn, а М. e_{ij} составляют один из базисов этого пространства.

Клеточная матрица. Пусть $m = m_1 + \dots + m_k$, $n = n_1 + \dots + n_l$, где m_μ и n_ν — целые положительные числа. Тогда М. $A \in M_{m,n}(K)$ можно записать в виде

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1l} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kl} \end{Vmatrix}, \qquad (3)$$

где $A_{\mu\nu} \in M_{m_\mu, n_\nu}(K)$, $\mu = 1, \dots, k$, $\nu = 1, \dots, l$; М. (3) наз. клеточной. Пусть $B \in M_{n,p}(K)$, $p = p_1 + \dots + p_t$, $p_i > 0$ и B записана в виде

$$B = \begin{Vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{l1} & \dots & B_{lt} \end{Vmatrix}, \quad B_{ij} \in M_{n_\nu, p_j}(K).$$

Тогда

$$AB = C = \begin{Vmatrix} C_{11} & \dots & C_{1t} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{k1} & \dots & C_{kt} \end{Vmatrix}, \quad C_{\mu j} = \sum_{i=1}^{l} A_{\mu i} B_{ij}.$$

Напр., если $n = kl$, то $M_n(K)$ можно рассматривать как $M_n(\Sigma)$, где $\Sigma = M_l(K)$.

М. A из $M_n(K)$ вида

$$\begin{Vmatrix} A_1 & 0_{12} & \dots & 0_{1k} \\ 0_{21} & A_2 & \dots & 0_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{k1} & 0_{k2} & \dots & A_k \end{Vmatrix},$$

где $a_i \in M_{n_i}(K)$, а 0_{ij} — нулевая М. из $M_{n_i, n_j}(K)$, обозначается $\operatorname{diag}[A_1, \dots, A_k]$ и наз. клеточно-диагональной. Причем

$$\operatorname{diag}[A_1, \dots, A_k] + \operatorname{diag}[B_1, \dots, B_k] = \operatorname{diag}[A_1 + B_1, \dots, A_k + B_k],$$

$$\operatorname{diag}[A_1, \dots, A_k] \operatorname{diag}[B_1, \dots, B_k] = \operatorname{diag}[A_1 B_1, \dots, A_k B_k],$$

если порядки A_i и B_i совпадают для $i = 1, \dots, k$.

Квадратные матрицы над полем. Пусть K — поле, $A \in M_n(K)$, $\det A$ — *определитель* матрицы A. М. A

наз. невырожденной, если $\det A \neq 0$. М. $A^{-1} \in M_n(K)$ наз. обратной к A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$. Обратимость A в $M_n(K)$ равносильна невырожденности и

$$A^{-1} = \| c_{ij} \|, \quad c_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A},$$

где A_{ji} — *алгебраическое дополнение* элемента a_{ji}; $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. Для A и B из $M_n(K)$

$$AB = E_n \Longleftrightarrow BA = E_n.$$

Совокупность всех обратимых М. из $M_n(K)$ образует группу относительно умножения, к-рая наз. полной линейной группой и обозначается $\mathrm{GL}(n, K)$. Степени М. A определяются следующим образом:

$$A^0 = E_n; \ A^k = A^{k-1}A$$

для $k > 0$, а если A обратима, то $A^{-k} = (A^{-1})^k$. Для многочлена

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_t x^t, \ f(x) \in K[x],$$

определяется матричный многочлен

$$f(A) = \alpha_0 E_n + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_t A^t.$$

Всякая М. из $M_n(K)$ задает нек-рое линейное преобразование n-мерного векторного пространства V над K. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ базис в V, а $\sigma : V \to V$ — линейное преобразование пространства V. Тогда σ однозначно определяется последовательностью векторов

$$u_1 = \sigma(v_1), \ \ldots, \ u_n = \sigma(v_n).$$

При этом

$$\left.\begin{aligned} \sigma(v_1) &= v_1 a_{11} + \ldots + v_n a_{n1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma(v_n) &= v_1 a_{1n} + \ldots + v_n a_{nn}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $a_{ij} \in K$. Матрица $A = \|a_{ij}\|$ наз. М. преобразования σ в базисе $v_1, \ldots, v_n$. При фиксированном базисе М. $A + B$ будет М. преобразования $\sigma + \tau$, а AB — М. преобразования $\sigma\tau$, где B — М. линейного преобразования τ. Равенства (4) можно записать в виде

$$[\sigma(v_1), \ \ldots, \ \sigma(v_n)] = [v_1, \ \ldots, \ v_n] A.$$

Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — тоже базис в V. Тогда $[w_1, \ldots, w_n] = [v_1, \ldots, v_n] T$, $T \in \mathrm{GL}(n, K)$, а $T^{-1}AT$ — М. σ в базисе $w_1, \ldots, w_n$. М. A и B из $M_n(K)$ наз. подобными, если в $\mathrm{GL}(n, K)$ найдется такая М. T, что $B = T^{-1}AT$. При этом $\det A = \det T^{-1}AT$ и *ранги* матриц A и B совпадают. Линейное преобразование σ наз. невырожденным, если $\sigma(V) = V$; σ тогда и только тогда невырождено, когда его М. невырождена. Если V трактовать как пространство столбцов $M_{n,1}(K)$, то линейное преобразование пространства V представляет собой умножение столбцов $v \in V$ на М. A из $M_n(K)$ слева: $\sigma(v) = Av$, и М. преобразования σ в базисе

$$v_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \ \ldots, \ v_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

совпадает с A. М. $A \in M_n(K)$ тогда и только тогда вырождена, когда в $M_{n,1}(K)$ существует такой столбец $v \neq 0$, что $Av = 0$.

Транспонирование и матрицы специального вида. Пусть $A = \|a_{ij}\| \in M_{m,n}(K)$. Тогда М. $A^{\top} = \|a_{ij}^{\top}\| \in$

$\in M_{n,m}(K)$, где $a_{ij}^{\top}=a_{ji}$, наз. транспонированной к A. Матрица $A^{\top}$ обозначается также ${}^tA$ и A'. Пусть $A=\|a_{ij}\|\in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Тогда М. $\overline{A}=\|\overline{a_{ij}}\|$, где $\overline{a_{ij}}$ — число, комплексно-сопряженное с a_{ij}, наз. комплексно-сопряженной с A. Матрица $A^*=\overline{A}^{\top}$, где $A\in M_n(\mathbb{C})$, наз. эрмитово-сопряженной с A. Многие М., используемые в приложениях, имеют специальные названия.

Название матрицы	Определяющее условие	Название матрицы	Определяющее условие
Симметрическая	$A^{\top}=A$.	Унипотентная	$(A-E_n)^n=0$.
Кососимметрическая	$A^{\top}=-A$.	Стохастическая	$A=\|a_{ij}\|\in M_n(\mathbb{R})$, $a_{ij}\geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$, $i=1,\ldots,n$.
Ортогональная	$A^{\top}=A^{-1}$.		
Эрмитова	$A^*=A$.		
Унитарная	$A^*=A^{-1}$.	Двояко-стохастическая (0,1)-матрица	М. A и $A^{\top}$ стохастические. Каждый элемент A равен либо 0, либо 1.
Нормальная	$A^*A=AA^*$.		

Полиномиальные матрицы. Пусть K — поле, $K[x]$ — кольцо всех многочленов от x с коэффициентами из K. М. над $K[x]$ наз. полиномиальной. Для М. из кольца $M_n(K[x])$ вводятся элементарные операции: 1) умножение строки или столбца М. на ненулевой элемент поля K, 2) прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца) М., умноженной на многочлен из $K[x]$. М. A и B из $M_n(K[x])$ наз. эквивалентными ($A\sim B$), если B можно получить из A с помощью конечного числа элементарных операций.

Пусть

$$N=\operatorname{diag}[f_1(x),\ \ldots,\ f_r(x),\ 0,\ \ldots,\ 0]\in M_n(K[x]),$$

где: 1) $f_i(x)\neq 0$, 2) $f_j(x)$ делится на $f_i(x)$ при $j>i$, 3) коэффициенты старших членов многочленов $f_i(x)$ равны 1. Тогда N наз. канонической полиномиальной М. В каждом классе эквивалентных М. кольца $M_n(K[x])$ содержится единственная канонич. М. Многочлены

$$f_1(x),\ \ldots,\ f_r(x),$$

где

$$N=\operatorname{diag}[f_1(x),\ \ldots,\ f_r(x),\ 0,\ \ldots,\ 0]$$

— каноническая М., а $A\sim N$, наз. инвариантными множителями М. A; число r совпадает с рангом М. A. Матрица A из $M_n(K[x])$ тогда и только тогда имеет обратную в $M_n(K[x])$, когда $A\sim E_n$. В свою очередь $A\sim E_n \Longleftrightarrow \det A\in K\setminus 0$. Матрицы A и B из $M_n(K[x])$ тогда и только тогда эквивалентны, когда

$$B=PAQ,$$

где $P,\ Q\in M_n(K[x])$, $P\sim Q\sim E_n$.

Пусть $A\in M_n(K)$. Матрица

$$xE_n-A\in M_n(K[x])$$

наз. характеристической матрицей матрицы A, а $\det(xE_n-A)$ — характеристическим многочленом М. A. Для любого многочлена вида

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_{n-1}x^{n-1}+x^n\in K[x]$$

в $M_n(K)$ существует М. F, для к-рой

$$\det(xE_n-F)=f(x).$$

Такова, напр., матрица

$$F=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{Vmatrix}$$

Характеристич. многочлены двух подобных М. совпадают. Однако из совпадения характеристич. многочленов двух М. еще не вытекает подобие этих М. К р и т е р и й п о д о б и я: A и B из $M_n(K)$ тогда и только тогда подобны, когда полиномиальные М. xE_n-A и xE_n-B эквивалентны. Множество всех M. из $M_n(K)$, имеющих заданный характеристич. многочлен $f(x)$, разбивается на конечное число классов подобных М., это множество состоит из одного класса тогда и только тогда, когда $f(x)$ не имеет кратных множителей в $K[x]$.

Пусть $A\in M_n(K)$, $v\in M_{n,1}(K)$, $v\neq 0$ и $Av=\lambda v$, где $\lambda\in K$. Тогда v наз. с о б с т в е н н ы м в е к т о р о м М. A, а λ — с о б с т в е н н ы м з н а ч е н и е м. Элемент λ из K тогда и только тогда является собственным значением М. A, когда λ — корень характеристич. многочлена М. A. Совокупность всех столбцов $u\in M_{n,1}(K)$ таких, что $Au=\lambda u$, где λ — фиксированное собственное значение М. A, является подпространством пространства $M_{n,1}(K)$. Размерность этого подпространства равна д е ф е к т у d М. λE_n-A ($d=n-r$, где r — ранг М. λE_n-A). Число d не превышает кратности корня λ, но не обязательно совпадает с ней. Матрица A из $M_n(K)$ тогда и только тогда подобна нек-рой диагональной М., когда A имеет n линейно независимых собственных векторов. Если для $A\in M_n(K)$

$$\det(xE_n-A)=(x-\lambda_1)^{n_1}\dots(x-\lambda_t)^{n_t},\quad \lambda_j\in K,$$

и λ_j различны, то верно следующее: A тогда и только тогда подобна диагональной М., когда для каждого λ_j, $j=1,\dots,t$, дефект М. λ_jE_n-A совпадает с n_j. В частности, М., имеющая n различных собственных значений, подобна диагональной. Для алгебраически замкнутого поля любая М. из $M_n(K)$ подобна нек-рой треугольной М. из $M_n(K)$. Т е о р е м а Г а м и л ь т о н а — К э л и: пусть $f(x)$ — характеристич. многочлен М. A, тогда $f(A)$ — нулевая М.

М и н и м а л ь н ы м м н о г о ч л е н о м М. $A\in M_n(K)$ наз. многочлен $m(x)\in K[x]$ такой, что: 1) $m(A)=0$, 2) коэффициент старшего члена $m(x)$ равен 1, 3) если $0\neq\psi(x)\in K[x]$, а степень $\psi(x)$ меньше степени $m(x)$, то $\psi(A)\neq 0$. Всякая М. обладает единственным минимальным многочленом. Если $g(x)\in K[x]$ и $g(A)=0$, то $g(x)$ делится на минимальный многочлен $m(x)$ М. A. Минимальный многочлен М. A совпадает с последним инвариантным множителем М. xE_n-A, а характеристич. многочлен — с произведением всех инвариантных множителей. Минимальный многочлен М. равен

$$\frac{\det(xE_n-A)}{d_{n-1}(x)},$$

где $d_{n-1}(x)$ — наибольший общий делитель миноров порядка $n-1$ М. xE_n-A. М. A из $M_n(K)$ тогда и только тогда подобна диагональной М. над полем K, когда ее минимальный многочлен есть произведение различных линейных множителей из кольца $K[x]$.

М. $A\in M_n(K)$ наз. н и л ь п о т е н т н о й, если $A^k=0$ для нек-рого целого k. М. нильпотентна тогда и только тогда, когда $\det(xE_n-A)=x^n$. Любая нильпотентная М. из $M_n(K)$ подобна нек-рой треугольной М. с нулевой диагональю.

Лит.: [1] В о е в о д и н В. В., Линейная алгебра, М., 1974; [2] Г а н т м а х е р Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967; [3] К о с т р и к и н А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [4]

Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [5] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 3 изд., М., 1970; [6] Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра, 2 изд., М., 1965; [7] Тышкевич Р. И., Феденко А. С., Линейная алгебра и аналитическая геометрия, 2 изд., Минск, 1976; [8] Беллман Р., Введение в теорию матриц, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; [9] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [10] Ланкастер П., Теория матриц, пер. с англ., М., 1978; [11] Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972.

Д. А. Супруненко.

МАТРИЦАНТ — фундаментальная матрица $X(t)$ решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (*)$$

нормированная в точке t_0. М. является единственным непрерывным решением матричной начальной задачи

$$\dot{X} = A(t)X, \quad X(t_0) = I$$

(I — единичная матрица), если матричная функция $A(t)$ локально суммируема на нек-ром интервале $J \subset \mathbb{R}$, $t \in J$.

Для любой матрицы $M(t)$, составленной из столбцов-решений $x_1, \ldots, x_m$ системы $(*)$, где m — натуральное число, справедливо представление $M(t) = X(t)M(t_0)$. В частности, любое решение $x(t)$ системы $(*)$ записывается в виде $x(t) = X(t)x(t_0)$.

Для М. справедливы разложение

$$X(t) = I + \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} A(s) \int_{t_0}^{s} A(r)\,dr\,ds + \ldots,$$

сходящееся абсолютно для всякого $t \in J$ и равномерно на каждом конечном отрезке из J, и *Лиувилля — Остроградского формула*

$$\det X(t) = \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{sp} A(s)\,ds.$$

Если матрица $A(t)$ удовлетворяет условию Лаппо-Данилевского

$$A(t) \cdot \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds \cdot A(t),$$

то

$$X(t) = \exp \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds.$$

В частности, если $A(t) \equiv A$ — постоянная матрица, то

$$X(t) = e^{A(t - t_0)}.$$

Если $X_A(t)$ есть М. системы $(*)$ с матрицей $A(t)$, то

$$X_{A+B}(t) = X_A(t)\,X_D(t),$$

где

$$D(t) = [X_A(t)]^{-1} B(t)\,X_A(t).$$

М. позволяет записать любое решение неоднородной системы

$$\dot{x} = A(t)\,x + b(t)$$

с локально суммируемой на J функцией $b(t)$ по формуле Коши:

$$x(t) = X(t)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} C(t, s)\,b(s)\,ds, \quad t \in J,$$

при этом

$$C(t, s) = X(t)\,[X(s)]^{-1}$$

наз. матрицей Коши системы $(*)$. Матрица Коши $C(t, s)$ непрерывна по совокупности аргументов на $J \times J$ и для любых t, s, r из J обладает свойствами:

1) $C(t, s) = C(t, t_0)\,[C(s, t_0)]^{-1}$;

2) $C(t, s) = C(t, r)\,C(r, s)$;

3) $C(s, t) = [C(t, s)]^{-1}$;

4) $C(t, t) = I$;

5) $|C(t, s)| \leqslant \exp \int_s^t |A(r)|\, dr, \quad s \leqslant t$,

где $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$;

6) если $H(t, s)$ — матрица Коши сопряженной системы

$$\dot{x} = -A^*(t)\, x,$$

то

$$H(t, s) \quad [C^*(t, s)]^{-1}.$$

Лит.: [1] Бурбаки Н., Функции действительного переменного. Элементарная теория, пер. с франц., М., 1965; [2] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [3] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [4] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972. *Ю. В. Комлец ко.*

МАТРИЧНАЯ ГРУППА — группа квадратных $(n \times n)$-матриц с элементами из ассоциативного кольца с единицей относительно обычного умножения матриц. См. *Линейная группа.*

МАТРИЧНАЯ ИГРА — *антагонистическая игра*, в к-рой каждый игрок имеет конечное число чистых стратегий. Если игрок I имеет m стратегий, а игрок II имеет n стратегий, то М. и. может быть задана $(m \times n)$-матрицей $A = \|a_{ij}\|$, где a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, есть выигрыш игрока I, если он выбирает стратегию i, а игрок II — стратегию j. Согласно общему принципу оптимальности в антагонистич. играх (см. также *Минимакса принцип*), игрок I стремится выбрать такую стратегию i_0, на к-рой достигается

$$\max_i \min_j a_{ij} = \underline{v};$$

а игрок II стремится выбрать стратегию j_0, на к-рой достигается

$$\min_j \max_i a_{ij} = \bar{v}.$$

Если $\underline{v} = \bar{v}$, то пара (i_0, j_0) составляет *седловую точку* игры; число $a_{i_0 j_0}$ есть значение игры, а стратегии i_0, j_0 суть оптимальные чистые стратегии. Если $\underline{v} \neq \bar{v}$ (т. е. решения в чистых стратегиях нет), то всегда $\underline{v} < \bar{v}$. В этом случае оптимальные стратегии игроков следует искать среди их смешанных *стратегий*. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ (соответственно $Y \subset \mathbb{R}^n$) — множество смешанных стратегий игрока I (соответственно игрока II). Тогда игрок I будет стремиться к стратегии x^*, на к-рой достигается

$$\underline{v}^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} xAy^\top,$$

а игрок II — к стратегии y^*, на к-рой достигается

$$\bar{v}^* = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} xAy^\top$$

(символом $^\top$ обозначено транспонирование). Основная теорема теории М. и. (теорема Неймана о минимаксе) утверждает, что $\underline{v}^* = \bar{v}^* = v$, т. е. для любой М. и. существуют оптимальные смешанные стратегии x^*, y^* и значение игры v.

Для численного решения М. и. (т. е. нахождения оптимальных стратегий и значения игры) чаще всего используют возможность сведения М. и. к задаче *линейного программирования*. Менее эффективен итеративный метод Брауна — Робинсон, к-рый состоит в фиктивном «разыгрывании» М. и., причем игроки на каждом шаге выбирают наилучшие чистые стратегии в условиях «накопленной» смешанной стратегии противника. М. и., в к-рых один

из игроков имеет только две стратегии, просто решаются графич. методом.

М. и. могут служить математич. моделями многих простейших конфликтных ситуаций из области экономики, математич. статистики, военного дела, биологии. В приложениях в качестве одного из игроков нередко рассматривают «природу», под к-рой понимается вся совокупность внешних обстоятельств, неизвестных принимающему решение лицу (другому игроку).

Лит.: [1] Матричные игры. Сб. статей, М., 1961; [2] Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; [3] Оуэн Г., Теория игр, пер. с англ., М., 1971; [4] Воробьев Н. Н., Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков, Л., 1974.

А. А. Корбут.

МАТРИЧНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, неизвестной в к-ром является функциональная матрица, входящая в уравнение вместе со своей производной.

Пусть рассматривается линейное М. д. у. вида

$$X' = A(t)\,X, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $A(t)$ есть $(n \times n)$-матрица-функция с локально интегрируемыми по Лебегу элементами, и пусть $X(t)$ — абсолютно непрерывное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $X(t_0) = I$, I — единичная матрица. Тогда вектор-функция $x(t) = X(t)h$, $h \in \mathbb{R}^n$, является решением линейной системы

$$x' = A(t)\,x, \tag{2}$$

удовлетворяющим условию $x(t_0) = h$. Обратно, если $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}^n$ и $x_i(t)$ — решение системы (2), удовлетворяющее условию $x_i(t_0) = h_i$, $i = 1, \ldots, n$, то функциональная матрица $X(t)$, столбцами к-рой служат решения $x_i(t)$, является решением М. д. у. (1). Если при этом векторы $h_1, \ldots, h_n$ линейно независимы, то $\det X(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Уравнение (1) является частным случаем следующего М. д. у. (возникающего в теории устойчивости)

$$X' = A(t)X - XB(t) + C(t). \tag{3}$$

Решение М. д. у. (3) с начальным условием $X(t_0) = X_0$ дается равенством

$$X(t) = U(t, t_0)\,X_0 V(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t, s)\,C(s)\,V(s, t)\,ds,$$

где $U(t, s)$ — решение М. д. у. (1) с условием $X(s, s) = I$, а $V(t, s)$ — решение М. д. у. $X' = B(t)X$ с условием $X(s, s) = I$.

В различных прикладных задачах (теории стабилизации, оптимального управления, фильтрации управляемых систем и др.) большую роль играет т. н. матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$X' = A(t)X - XB(t) + C(t) + XD(t)X.$$

Напр., если матричное уравнение Риккати

$$X' = -(F(t) + \lambda I)^{\top} X - X(F(t) + \lambda I) - I + XG(t)\,G^{\top}(t)\,X,$$

где $^{\top}$ означает транспонирование, имеет при $\lambda \geqslant 0$ ограниченное на прямой $\mathbb{R}$ решение $X(t)$ и для всех $h \in \mathbb{R}^n$, всех $t \in \mathbb{R}$ и нек-рого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $h^{\top} X(t) h \geqslant \varepsilon h^{\top} h$, то любое решение управляемой системы

$$x' = F(t)\,x + G(t)\,u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

замкнутой обратной связью $u = -\frac{1}{2} G^{\top}(t) X(t) x$, удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| \leqslant M\,|x(s)|\exp[-\lambda(t-s)], \quad s \leqslant t,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, а постоянная M не зависит от s.

Лит.: [1] Лаппо-Данилевский И. А., Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1957; [2] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [3] Аткинсон Ф. В., Дискретные и непрерывные граничные задачи, пер. с англ., М., 1968; [4] Reid W. T., Riccati differential equations, N. Y.—L., 1972 (Math. Sci. and Eng., v. 86); [5] Захаров И. К., Иткин М. Х., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 3, с. 83—120.

Е. Л. Тонков.

МАТРИЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ МЕТОД, метод матричной прогонки,— метод решения конечноразностных систем, аппроксимирующих краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в одномерных задачах и для уравнений эллиптич. типа в двумерных задачах.

Решение трехточечной разностной схемы

$$A_i Y_{i-1} - C_i Y_i + B_i Y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

где $Y_i = \{y_{1,i}, y_{2,i}, \ldots, y_{n,i}\}$ — искомая сеточная вектор-функция, F_i — вектор правой части, A_i, B_i, C_i — заданные квадратные матрицы, при краевых условиях

$$-C_0 Y_0 + B_0 Y_1 = -F_0, \quad A_N Y_{N-1} - C_N Y_N = -F_N$$

ищется так же, как в скалярном случае, в виде

$$Y_i = R_{i+1} Y_{i+1} + Q_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (*)$$

Прогоночные коэффициенты, матрица R_{i+1} и вектор Q_{i+1} определяются рекуррентными соотношениями («прямая прогонка»)

$$R_{i+1} = (C_i - A_i R_i)^{-1} B_i,$$

$$Q_{i+1} = (C_i - A_i R_i)^{-1} (A_i Q_i + F_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

а R_1, Q_1 — левым краевым условием:

$$R_1 = C_0^{-1} B_0, \quad Q_1 = C_0^{-1} F_0.$$

Y_i считаются по формуле (*) («обратная прогонка»), а

$$Y_N = (C_N - A_N R_N)^{-1} (A_N Q_N + F_N).$$

Устойчивость этого метода по отношению к ошибкам округления имеет место при условиях

$$\|C_0^{-1} B_0\| < 1, \quad \|C_N^{-1} A_N\| < 1, \quad \|C_i^{-1} B_i\| + \|C_i^{-1} A_i\| < 1,$$
$$i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

из к-рых следует, что $\|R_i\| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$ (см. [1]). Имеется другая форма условий устойчивости (см. [2], [3]). М. ф. м. применяется и к двухточечным разностным схемам (см. [3]). Используется вариант, в к-ром обращение матриц заменено ортогонализацией (см. [4]).

Лит.: [1] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [2] Огнева В. В., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1967, т. 7, № 4, с. 803—12; [3] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [4] Годунов С. К., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1962, т. 2, № 6, с. 972—82.

Т. А. Гермогенова.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов суммирования ряда и последовательности с помощью бесконечной матрицы. Посредством бесконечной матрицы $\|a_{nk}\|$, $n, k = 1, 2, \ldots$, данная последовательность $\{s_n\}$ преобразуется в последовательность $\{\sigma_n\}$:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k.$$

Если ряд справа сходится для всех $n = 1, 2, \ldots$ и последовательность $\{\sigma_n\}$ имеет предел s при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = s,$$

то последовательность $\{s_n\}$ наз. суммируемой методом, определенным матрицей $\|a_{nk}\|$, или просто суммируемой матрицей $\|a_{nk}\|$, а число s — ее пределом в смысле этого метода

суммирования. Если $\{s_n\}$ рассматривается как последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{1}$$

то этот ряд наз. суммируемым к сумме s матрицей $\|a_{nk}\|$.

М. м. с. для ряда может быть также определен и непосредственным преобразованием ряда (1) в последовательность $\{\gamma_n\}$:

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{\infty} g_{nk} u_k, \tag{2}$$

где $\|g_{nk}\|$ — данная матрица. В этом случае ряд (1) наз. суммируемым к сумме s, если для всех $n = 1, 2, \ldots$ сходится ряд справа в (2) и

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = s.$$

Менее распространены М. м. с., определенные преобразованием ряда (1) в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \tag{3}$$

где

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} u_k,$$

и преобразованием последовательности $\{s_n\}$ в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n, \tag{4}$$

где

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} s_k, \; n = 1, 2, \ldots,$$

при помощи соответственно матриц $\|\alpha_{nk}\|$ и $\|\beta_{nk}\|$. В этих случаях ряд (1) с частичными суммами s_n суммируем к сумме s, если ряд (3) сходится к s или соответственно ряд (4) сходится к s.

Матрицу метода суммирования, все элементы к рой неотрицательны, наз. положительной матрицей. К М. м. с. относятся, напр., *Вороного метод суммирования*, *Чезаро метод суммирования*, *Эйлера метод суммирования*, *Рисса метод суммирования* (R, p_n), *Хаусдорфа метод суммирования* и другие (см. *Суммирования методы*).

Лит.: [1] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [2] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960; [3] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 5—70; [4] Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, 2 изд., Таллин, 1977. *И. И. Волков.*

МАТРОИД — *гиперграф* специального вида. М. определяется заданием множества V элементов и семейства $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots\}$ подмножеств множества V, называемых независимыми множествами, для к-рых выполняются следующие аксиомы: 1) пустое множество независимо; 2) каждое подмножество независимого множества независимо; 3) для всякого подмножества $A \subseteq E$ все независимые множества М., содержащиеся в A и являющиеся максимальными по включению относительно A, имеют одинаковое число элементов.

Примеры. 1) Множество V строк произвольной прямоугольной матрицы и семейство $\mathcal{E}$ всех подмножеств множества V, составленных из линейно независимых строк, образуют М. 2) Пусть $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots\}$ — множество всех остовных лесов (см. *Дерево*) графа G, а $R(L_i)$ — множество ребер леса L_i, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда множество ребер V графа G и семейство $\mathcal{E} = \{R(L_i), i = 1, 2, \ldots\}$ образуют М. 3) Пусть G — *граф двудольный* с долями W', W''. Подмножество $V \subseteq W'$ вершин, для к-рого существует паросочетание P графа G такое, что каждая вершина $v \in V$ инцидентна **нек**-рому

ребру паросочетания P, наз. трансверсалью. Множество V и множество всех трансверсалей графа G образуют т. н. трансверсальный матроид.

М. можно задать также множеством V элементов и семейством $C=\{C_1, C_2, \ldots\}$ непустых подмножеств $C_i \subseteq V$, называемых циклами и удовлетворяющих следующим аксиомам: никакое собственное подмножество цикла не является циклом; если $v \in C_i \cap C_j$, то $C_i \cup C_j \setminus \{v\}$ содержит цикл. Независимыми множествами этого М. являются подмножества $E \subseteq V$, не содержащие циклов.

Если G — граф, то множество его ребер и семейство простых циклов образуют т. н. циклический матроид. Если в качестве циклов М. взять коциклы (разрезы, см. *Графа связность*) графа G, то полученный таким образом М. наз. коциклическим. М. двух последних типов наз. графическими. Понятие «М.» используется в теории графов и комбинаторике при доказательстве нек-рых утверждений о *покрытиях и упаковках*, паросочетаниях.

Лит.: [1] Whitney H., «Amer. J. Math.», 1935, v. 57, p. 509—33; [2] Tutte W. T., «J. Res. Nat. Bur. Standards. Sec. B», 1965, v. 69, № 1—2, p. 1—47; [3] Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973. *А. А. Сапоженко.*

МАТЬЁ ГРУППА — конечная группа, изоморфная одной из пяти групп, открытых Э. Матьё [1]. Серия М. г. состоит из групп, обозначаемых

$$M_{11},\ M_{12},\ M_{22},\ M_{23},\ M_{24};$$

они представимы как группы подстановок на множествах из 11, 12, 22, 23, 24 элементов соответственно. Группы M_{12} и M_{24} являются пятикратно транзитивными. M_{11} реализуется естественным образом как стабилизатор в M_{12} элемента множества, на к-ром действует M_{12}, M_{23} — как стабилизатор элемента в M_{24}, M_{22} — как стабилизатор элемента в M_{23}. Порядки М. г. равны соответственно

7 920, 95 040, 443 520, 10 200 960, 244 823 040.

При рассмотрении М. г. часто пользуются (см. [2]) представлением ее в виде группы автоморфизмов соответствующей системы Штейнера $S(l, m, n)$, т. е. множества из n элементов, в к-ром выделена система $\binom{n}{l}/\binom{m}{l}$ подмножеств, называемых блоками, состоящих из m элементов множества, причем каждые l элементов содержатся в одном и только в одном блоке. Автоморфизмом системы Штейнера наз. подстановка множества ее элементов, переводящая блок в блок. Группа M_{11} является группой автоморфизмов системы Штейнера $S(4, 5, 11)$, группа M_{12} — системы $S(5, 6, 12)$, группа M_{22} — системы $S(3, 6, 22)$, группа M_{23} — системы $S(4, 7, 23)$, группа M_{24} — системы $S(5, 8, 24)$.

М. г. были первыми (и на протяжении более 80 лет единственными) известными спорадическими конечными простыми группами.

Лит.: [1] Mathieu É., «J. math. pures et appl.», 1861, t. 6, p. 241—323; 1873, t. 18, p. 25—46; [2] Witt E., «Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg», 1938, Bd 12, S. 256—64, 265—75; [3] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 5—56. *С. П. Струнков.*

МАТЬЁ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a + b\cos 2z)\,u = 0,\quad z \in \mathbb{R},$$

с действительными коэффициентами. Введено Э. Матьё [1] при исследовании колебаний эллиптич. мембраны; частный случай *Хилла уравнения*.

Фундаментальная система решений М. у. имеет вид

$$u_1(z) = e^{\alpha z}\varphi(z),\ u_2(z) = u_1(-z) \qquad (*)$$

при $\alpha \neq ni$, n — целое, где $\varphi(z)$ есть π-периодическая функция, а *Ляпунова характеристический показатель* α либо действительный, либо чисто мнимый. При

Im $\alpha=0$ одно из решений неограниченно возрастает, а другое стремится к нулю для $z\to+\infty$ (зоны неустойчивости на плоскости ab параметров), при Re $\alpha=0$ эти решения ограничены (зоны устойчивости). На границе этих зон (случай, исключенный в (*)) одна из функций фундаментальной системы решений М. у. либо π-периодична, либо 2π-периодична (последняя наз. *Матьё функцией*), а вторая получается из первой умножением на z. Зоны неустойчивости имеют вид криволинейных треугольников с вершинами в точках $a=n^2$, $b=0$, $n=0, 1, 2, \ldots$ (см. [2], [4]).

М. у. имеет и другую форму (см. [3]).

Лит.: [1] Mathieu É., Cours de physique mathématique, P., 1873; [2] Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, пер. с нем., Хар.—К., 1935; [3] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [4] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972.

В. М. Старжинский.

МАТЬЁ ФУНКЦИИ — 2π-периодические решения *Матьё уравнения*

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(a+16q\cos 2z)\,u=0,\quad z\in\mathbb{R}.$$

к-рые существуют только тогда, когда точка $(a,\ q)$ на плоскости параметров лежит на границе зон устойчивости. М. ф. четна или нечетна и единственна с точностью до множителя; второе линейно независимое решение линейно растет по z при $|z|\to\infty$, если $q\neq0$. Четные М. ф.— собственные функции интегрального уравнения

$$G(z)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos z\cos t}G(t)\,dt,\quad k=\sqrt{32q}.$$

Аналогичное уравнение имеется для нечетных М. ф. Обозначения М. ф.:

$$\mathrm{ce}_0(z,\ q),\ \mathrm{ce}_1(z,\ q),\ \ldots;\ \mathrm{se}_1(z,\ q),\ \mathrm{se}_2(z,\ q),\ \ldots$$

При $q\to0$ эти функции приводятся к тригонометрич. системе

$$1,\ \cos z,\ \ldots;\ \sin z,\ \sin 2z,\ \ldots$$

и обладают теми же свойствами ортогональности на интервале $(-\pi,\ \pi)$. М. ф. разлагаются в ряды Фурье, к-рые сходятся при малых $|q|\leqslant r_n$; коэффициенты рядов — сходящиеся ряды по степеням q, напр.

$$\mathrm{ce}_0(z,\ q)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[2^{n+1}q^n/(n!)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{n\,(3n+4)\,2^{n+3}q^{n+2}}{((n+1)!)^2}+O\left(q^{n+4}\right)\right]\cos 2nz.$$

Лит.: [1] Уиттекер Э.-Т., Ватсон Д.-Н., Курс современного анализа, пер. с англ., 2 изд., ч. 2, М., 1963; [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, пер. с англ., М., 1967; [3] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1, М., 1953; [4] Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, пер. с нем., Хар.—К., 1935; [5] Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функций Матье, пер. с англ., М., 1953.

М. В. Федорюк.

МАУРЕРА — КАРТАНА ФОРМА — левоинвариантная 1-форма на группе Ли G, т. е. дифференциальная форма ω степени 1 на G, удовлетворяющая условию $l_a^*\omega=\omega$ для любого левого сдвига $l_g: x\to gx$, $g,\ x\in G$. М.— К. ф. на G находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными формами на касательном пространстве $T_e(G)$ в точке e; точнее, соответствие, сопоставляющее каждой М.— К. ф. ω ее значение ω_e из $T_e(G)^*$, является изоморфизмом пространства М.— К. ф. на $T_e(G)^*$. Дифференциал М.— К. ф. есть левоинвариантная 2-форма на G, определяемая формулой

$$d\omega(X,\ Y)=-\omega([X,\ Y]),\qquad(1)$$

где X, Y — любые левоинвариантные векторные поля на G. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — базис в $T_e(G)$ и пусть ω_i, $i=1, \ldots, n$,— такая М.— К. ф., что

$$(\omega_i)_e(X_j)=\delta_{ij}, \quad j=1, \ldots, n.$$

Тогда

$$d\omega_i=-\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}^{i}\,\omega_j\wedge\omega_k, \qquad (2)$$

где c_{jk}^{i} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, состоящей из левоинвариантных векторных полей на G, в базисе $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ таком, что

$$(\tilde{X}_i)_e \quad X_i, \quad i=1, \ldots, n.$$

Равенства (2) (или (1)) наз. уравнениями Маурера — Картана. Первым их получил (в иной, но эквивалентной форме) Л. Маурер [1]. Формы ω_i были введены Э. Картаном в 1904 (см. [2]).

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — канонич. координаты в окрестности точки e на G, определенные базисом $X_1, \ldots, X_n$. Тогда формы ω_i записываются в виде

$$\omega_i=\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\,dx_j,$$

причем матрица

$$A(x_1, \ldots, x_n)=(A_{ij}(x_1, \ldots, x_n))$$

вычисляется по формуле

$$A(x_1, \ldots, x_n)=\frac{1-e^{-\operatorname{ad} X}}{\operatorname{ad} X},$$

где $X=\sum_{i=1}^{n} x_i\tilde{X}_i$, ad — присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Далее, пусть θ есть $\mathfrak{g}$-значная 1-форма на G, сопоставляющая каждому касательному вектору к G единственное левоинвариантное векторное поле, содержащее этот вектор (каноническая левая дифференциальная форма). Тогда

$$\theta=\sum_{i=1}^{n}\tilde{X}_i\omega_i$$

и

$$d\theta+\frac{1}{2}[\theta, \theta]=0,$$

что является еще одной записью уравнений Маурера — Картана.

Лит.: [1] Maurer L., «Sitzungsber. math. physik. Kl. Bayerischen Akad. Wiss.» (München), 1899, Bd 18, S. 103—50; [2] Cartan E., Œuvres complètes, pt. 2, vol. 2, P., 1953, p. 571—624; [3] Шевалле К., Теория групп Ли, т. 1, М., 1948; [4] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [5] Helgason S., Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, N. Y.— San Fr. — L., 1978.

А. Л. Онищик.

МАХА ПРИНЦИП — утверждение, согласно к-рому инертные свойства каждого физич. тела определяются всеми остальными физич. телами во Вселенной. В классич. механике, напротив, считается, что инертные свойства тела, напр. его масса, не зависят от наличия или отсутствия других тел. М. п. был сформулирован Э. Махом (E. Mach, 1896, см. [1]) при критич. анализе оснований классич. механики, однако им не была приведена точная математич. формулировка этого принципа. Имеется ряд неэквивалентных математич. формулировок М.п.

Лит.: [1] Мах Э., Механика, пер. с нем., СПБ, 1909; [2] Эйнштейн А., Собр. научных трудов, т. 4, М., 1967.

Д. Д. Соколов.

МАХА ЧИСЛО — один из основных критериев аэродинамич. подобия, когда нельзя пренебрегать сжимаемостью газа. М. ч. $M=v/a$ равно отношению скорости течения газа v к скорости звука a в той же точке потока (или отношению скорости тела в газе к скорости звука в этой среде). М. ч. наз. по имени Э. Маха (E. Mach).

По материалам БСЭ-3.

МАХАЛАНОБИСА РАССТОЯНИЕ — величина

$$\rho(X,\ Y \mid A) = \{(X-Y)^T A\,(X-Y)\}^{1/2},$$

где X, Y — векторы, A — матрица (^{T} — транспонирование). М. р. используется в многомерном статистич. анализе, в частности при проверке гипотез и классификации наблюдений. Введено П. Махаланобисом [1], к-рый использовал в качестве расстояния между двумя нормальными распределениями с математич. ожиданиями μ_1 и μ_2 и общей ковариационной матрицей Σ величину

$$\rho(\mu_1,\ \mu_2 \mid \Sigma^{-1}).$$

М. р. между двумя выборками (из распределений с одинаковыми ковариационными матрицами) или между выборкой и распределением определяется путем замены соответствующих теоретич. моментов выборочными. В качестве оценки М. р. между распределениями применяется М. р. между извлеченными из них выборками, а в случае использования линейной дискриминантной функции — статистика $\Phi^{-1}(\alpha)+\Phi^{-1}(\beta)$, где α — частота правильной классификации в первой совокупности, β — во второй, Φ — функция нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Лит.: [1] Mahalanobis P. C., «J. Asiatic Soc. of Bengal», 1930, v. 26, p. 541—88; [2] его же, «Proc. Nat. Inst. Sci. India (Calcutta)», (1936), v. 12, p. 49—55; [3] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [4] Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В., Классификация многомерных наблюдений, М., 1974.

А. И. Орлов.

МАЦУСИМЫ КРИТЕРИЙ: однородное пространство G/H, где G — аффинная редуктивная алгебраич. группа, определенная над алгебраически замкнутым полем k, а H — ее замкнутая подгруппа, является аффинным алгебраич. многообразием тогда и только тогда, когда H — редуктивная группа. Впервые найден И. Мацусимой [1] для случая, когда k — поле комплексных чисел. Позже появились доказательства, пригодные для любого алгебраически замкнутого поля нулевой характеристики (см. [2]—[4]). В случае, когда характеристика k положительна, доказательство М. к. было получено лишь после доказательства *Мамфорда гипотезы* (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Matsushima Y., «Nagoya Math. J.», 1960, v. 16, p. 205—18; [2] Bialynicki-Birula A., «Amer. J. Math.», 1963, v. 85, p. 577—82; [3] Luna D., «Bull. Soc. math. France», 1973, mém. 33, p. 81—105; [4] Borel A., Harish-Chandra, «Ann. Math.», 1962, v. 75, p. 485—535; [5] Нисневич Е. А., «Функц. анализ и его прилож.», 1977, т. 11, № 1, с. 73—74; [6] Richardson R. W., «Bull. London Math. Soc.», 1977, v. 9, p. 38—41.

В. Л. Попов.

МАШИНА (в математике) — абстрактное устройство, осуществляющее переработку *информации*. Употребительны также термины «абстрактная машина», «автомат». Абстрактные М. являются частным случаем *управляющих систем*. Возникновение их связано с анализом понятия *алгоритма*, начавшегося в середине 30-х гг. 20 в., с развитием ЭВМ и с построением математич. моделей биологич. систем. Наибольшее распространение получили М., перерабатывающие дискретную информацию, типичными представителями к-рых являются *автомат конечный* и *Тьюринга машина*. Абстрактные М. обладают большой наглядностью, возможностью легко осуществлять различные композиции, элементарностью шагов работы. Изучение М. проводится в рамках *алгоритмов теории*, математич. *кибернетики* и преследует цели анализа и формализации понятия алгоритма, математич. моделирования реальных устройств и процессов. Существует плодотворная связь между абстрактными М. и реально существующими ЭВМ. Идеи построения ЭВМ, программирования на ЭВМ в значительной мере

опираются на соответствующие идеи из теории алгоритмов, математич. кибернетики. В свою очередь практика работы с ЭВМ ставит новые задачи, подсказывает модели М., наиболее удобные для их решения.

Общим для всех абстрактных М. является наличие конечного управляющего устройства, к-рое может находиться в одном из состояний $q_1, \ldots, q_k$. М. имеет потенциально неограниченную внешнюю память и устройства для считывания и записывания информации во внешнюю память. Считывание (записывание) информации происходит, как правило, локальным образом. Функционирование М. определяется программой, к-рая состоит из команд вида $q_i a \to q_j b$, где q_i, q_j — состояния управляющего устройства, a — упорядоченная информация локального характера из внешней памяти, b — запись изменений содержимого внешней памяти и положения считывающих устройств в ней. Работа М. протекает в дискретном времени. На каждом шаге t работы М. из внешней памяти в управляющее устройство с помощью считывающего устройства поступает информация a. Если на шаге t управляющее устройство М. находится в состоянии q_i и программа М. содержит команду $q_i a \to q_j b$, то на следующем шаге $t+1$ управляющее устройство будет находиться в состоянии q_j, а содержимое внешней памяти и положение считывающих устройств будет изменено согласно b. Обычно среди состояний управляющего устройства выделяются одно или несколько начальных и одно или несколько заключительных. Перед началом работы управляющее устройство приводится в начальное состояние, конец работы определяется заключительным состоянием.

Во многих случаях абстрактные М. конструируются для вычисления числовых (словарных) функций и предикатов. Вычислимость функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на машине M понимается следующим образом. Для произвольного набора аргументов $(x_1, \ldots, x_n)$ указывается начальная конфигурация $K_1(x_1, \ldots, x_n)$ машины M, к-рая представляет собой заполнение внешней памяти и положение читающих устройств в ней, отвечающие аргументам $x_1, \ldots, x_n$. Определяется, какие конфигурации машины M считать заключительными, т. е. соответствующими окончанию процесса вычисления функции f на машине M. Определяется, как по заключительным конфигурациям получить значения вычисляемой функции. Процесс вычисления значения $f(x_1, \ldots, x_n)$ состоит в серии переходов в соответствии с программой машины M от начальной конфигурации $K_1(x_1, \ldots, x_n)$ к непосредственно следующей $K_2(x_1, \ldots, x_n)$ и т. д. до тех пор, пока не будет достигнута заключительная конфигурация. Если значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ не определено, то машина M, отправляясь от начальной конфигурации $K_1(x_1, \ldots, x_n)$, никогда не попадет в заключительную конфигурацию. В этом случае процесс вычисления может происходить бесконечно долго.

Часто за основу определяемой абстрактной М. берется обычная машина Тьюринга, а отличия состоят в добавлении новых или ограничении имеющихся возможностей последней. Модификации машины Тьюринга обычно происходят по следующим трем направлениям.

1. **Организация внешней памяти.** Наибольшее распространение получило введение нескольких лент (многоленточные машины Тьюринга). Изучаются также М. с односторонними и многомерными лентами, с внешней памятью в виде бесконечного *графа* (напр., в виде бесконечного двоичного *дерева*). Другой подход состоит в замене традиционной ленты регистрами или счетчиками, способными содержать произвольные натуральные (целые) числа или слова произвольной длины. Так обстоит дело с машинами Шеферд-

сона — Стургиса [6], машиной Минского [3] и машиной с произвольным доступом к памяти.

2. **Хранение, преобразование и получение информации из внешней памяти.** Рассматриваются М., у к-рых часть информации из внешней памяти, не поступающая в управляющее устройство в течение нек-рого времени, зависящего от входа, становится в дальнейшем вообще недоступной для читающих устройств М. На близкой идее основано определение машин Тьюринга с лентами магазинного типа (магазинные автоматы).

Для М., к-рые воспринимают и преобразуют информацию из внешней памяти побуквенно, типичным ограничением является запрет печатать одни символы вместо нек-рых других. Таковы, в частности, нестирающие машины Тьюринга и двусторонние автоматы, эквивалентные конечным автоматам. Сюда же относят важный класс абстрактных М.— конечные автоматы. Однако более распространенными являются ограничения на объем внешней памяти, время работы и т. п. Напр., линейно ограниченные автоматы представляют собой обычные машины Тьюринга, у к-рых длина используемой в вычислении ленты ограничена линейной функцией от длины входа.

Часто получение информации из внешней памяти происходит с помощью нескольких головок. Более общий подход состоит в том, что на внешней памяти М. определяются общерекурсивные предикаты. Набор значений этих предикатов представляет собой информацию, к-рая поступает в управляющее устройство М. Эта идея используется в машинах Шефердсона — Стургиса, у к-рых вдобавок запись информации во внешнюю память может осуществляться с помощью произвольных общерекурсивных функций.

3. **Способ функционирования.** Здесь различают детерминированные, недетерминированные и вероятностные М. У детерминированных М. каждый шаг работы однозначно определяется состоянием управляющего устройства и информацией из внешней памяти, полученной с помощью читающих устройств. Программа недетерминированной М. может содержать различные команды с одинаковыми левыми частями. Поэтому для недетерминированной М. при заданном входе рассматривают не одно, а множество всех вычислений, согласованных с программой. Вероятностная М. представляет собой М., к-рая либо снабжена датчиком случайных чисел, либо имеет программу, в к-рой переходы от одних команд к другим осуществляются с заданными вероятностями.

В недетерминированном случае обычно рассматривают вычисления предикатов. Если недетерминированная машина M вычисляет предикат $p(x_1, \ldots, x_n)$, то $p(x_1, \ldots, x_n)$ истинен тогда и только тогда, когда среди всех возможных вычислений машины M, начинающихся с конфигурации $K_1(x_1, \ldots, x_n)$, существует вычисление, содержащее заключительную конфигурацию.

В целом вычислительные возможности детерминированных, недетерминированных и вероятностных машин представляются одинаковыми. Однако в отдельных узких классах М. недетерминированные и вероятностные М. могут оказаться мощнее детерминированных. Для многих типов абстрактных М. с ограничениями на объем внешней памяти или время работы проблема «детерминизации» недетерминированных машин является интересной открытой проблемой (1982).

См. также *Вычислительная машина абстрактная.*

Лит.: [1] Автоматы. Сб. статей под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, пер. с англ., М., 1956; [2] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [3] Минский М., Вычисления и автоматы, пер. с англ., М., 1971; [4] Проблемы математической логики. Сб. переводов, М., 1970; [5] Сложность вычислений и алгоритмов. Сб. переводов, М., 1974;

[6] Shepherdson J. C., Sturgis H. E., «J. Assoc. Comput. Machinery», 1963, v. 10, № 2, p. 217—55.

С. С. Марченков.

МАШИННО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ЯЗЫК — язык программирования, позволяющий при составлении программ учитывать особенности системы команд и представления информации в объектной вычислительной машине. М.-о. я., в отличие от универсальных *проблемно-ориентированных языков* программирования, осуществляющих отображение множества P входных программ во множество M машинных программ, стремятся отображать P на M.

Простейшими М.-о. я. являются ассемблеры, к-рые, полностью сохраняя структуру машинной программы, позволяют использовать символич. обозначения для команд и адресов памяти, а также собирать программы из нескольких отдельно написанных кусков. Дополнительные возможности по текстовым подстановкам и другим простым преобразованиям при сборке программного текста предоставляются макроассемблерами. М.-о. я. высокого уровня, аналогично универсальным языкам, имеют фразовую структуру, допуская составные объекты и определяемые операции, однако содержат дополнительно средства описания элементарных объектов и базовых операций в терминах машинных конструкций.

Лит.: [1] Джермейн К., Программирование на IBM/360, пер. с англ., 2 изд., М., 1973; [2] Браун П., Макропроцессоры и мобильность программного обеспечения, пер. с англ., М., 1977; [3] Катков В. Л., Рар А. Ф., *Программирование на языке* ЭПСИЛОН, Новосиб., 1972.

А. П. Ершов.

МАЯТНИКА КОЛЕБАНИЙ УРАВНЕНИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} = -a \sin x, \qquad (*)$$

где a — положительная константа. М. к. у. возникает при изучении свободных колебаний в поле тяжести математич. маятника — материальной точки, имеющей одну степень свободы и находящейся на конце нерастяжимого и несжимаемого невесомого подвеса, другой конец к-рого закреплен на шарнире, допускающем вращение маятника в вертикальной плоскости. Неизвестная функция $x(t)$ — это угол отклонения маятника в момент t от нижнего положения равновесия, выраженный в радианах;

$$a = g/l,$$

где l — длина подвеса, g — ускорение свободного падения. Уравнение малых колебаний маятника около нижнего положения равновесия имеет вид:

$$\ddot{x} = -ax.$$

Качественное изучение М. к. у. производится с помощью закона сохранения энергии, связывающего положение и скорость маятника:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - a \cos x = E,$$

где E -const — полная энергия маятника. Масштаб времени можно выбрать так, чтобы было $a=1$. При этом значению полной энергии $E<1$ соответствует колебательное движение маятника (скорость периодически меняет знак), а значению $E>1$ соответствует вращательное движение (скорость сохраняет знак). Решение $x(t)$ М. к. у. (*) с начальным условием $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=\alpha$ при $E=\alpha^2/2<1$ удовлетворяет соотношению

$$\sin \frac{1}{2} x(t) = \frac{\alpha}{2} \operatorname{sn} t,$$

где *Якоби эллиптическая функция* sn имеет модуль $\alpha/2$.

Большое прикладное значение имеют уравнения, близкие к М. к. у. Наличие малого трения, зависящего

от положения и скорости маятника, приводит к уравнению

$$\ddot{x} = -a \sin x + \varepsilon f(x, \dot{x});$$

малые колебания маятника с трением описываются уравнением:

$$\ddot{x} = -ax + \varepsilon f(x, \dot{x}),$$

частным случаем к-рого является *Ван дер Поля уравнение*. Колебание маятника при периодич. изменении длины подвеса (движение качелей) описывается *Хилла уравнением*, важный частный случай к-рого — *Матьё уравнение*.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 2 изд., М., 1975; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959.

Ю. С. Ильяшенко.

МГНОВЕННОЕ СОСТОЯНИЕ для однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний — состояние (напр., i), для к-рого плотность вероятности перехода

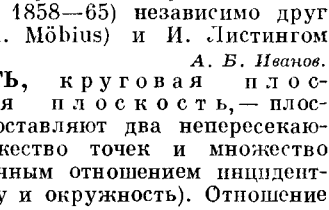
$$a_{ii} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h},$$

где $p_{ii}(h)$ — вероятность перехода из i в i за время h, равна $-\infty$. В противном случае состояние i наз. немгновенным, или задерживающим.

Лит.: [1] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 2, М., 1973.

А. Н. Ширяев.

МЁБИУСА ЛИСТ — неориентируемая поверхность, у к-рой эйлерова характеристика равна нулю, а край представляет собой замкнутую линию. М. л. может быть получен отождествлением двух противоположных сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ так, что точки A и B совмещаются соответственно с точками C и D (см. рис.). М. л. в евклидовом пространстве E^3 является односторонней поверхностью (см. *Односторонние и двусторонние поверхности*).



М. л. был рассмотрен (в 1858—65) независимо друг от друга А. Мёбиусом (A. Möbius) и И. Листингом (I. Listing).

А. Б. Иванов.

МЁБИУСА ПЛОСКОСТЬ, круговая плоскость, инверсная плоскость,— плоскость, элементы к-рой составляют два непересекающихся множества — множество точек и множество окружностей, с симметричным отношением инцидентности (связывающим точку и окружность). Отношение инцидентности удовлетворяет следующим аксиомам:

1) каждые три различные точки инцидентны одной и только одной окружности;

2) через точку, не инцидентную окружности, проходит одна и только одна окружность, пересекающая данную окружность в данной точке;

3) существуют по крайней мере четыре различные точки, не инцидентные одной окружности. Каждая окружность инцидентна по крайней мере трем различным точкам.

Из М. п. можно получить аффинную плоскость, если назвать одну из точек М. п. несобственной, а окружности, инцидентные этой точке,— прямыми.

В трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}_3$ точки *овоида* o и плоскости, пересекающей овоид в более чем одной точке, с тем же отношением инцидентности, что и в $\mathbb{P}_3$, образуют М. п. $M(o)$ (см. [1]). М. п. наз. овалоподобной, если она изоморфна $M(o)$ для нек-рого овоида o. Среди овалоподобных М. п. наиболее известна модель $M(S)$, где S — сфера в трехмерном евклидовом

пространстве, т. е. плоскость, изоморфная $M(c)$, где c — нелинейчатая квадрика в трехмерном проективном пространстве над полем действительных чисел.

М. п. наз. конечной, если она состоит из конечного числа точек и окружностей. На всех окружностях конечной М. п. лежит одинаковое число точек и через каждую точку плоскости проходит одинаковое число окружностей. Число, на единицу меньшее числа точек на окружности, наз. порядком плоскости. М. п. порядка n содержит n^2+1 точек и $n(n^2+1)$ окружностей; через каждую точку плоскости проходит $n(n+1)$ окружностей. Наиболее известна следующая модель М. п. порядка $n=p^h$. Точками плоскости являются элементы поля Галуа $\mathrm{GF}(p^{2h})$ и несобственная точка $\{\infty\}$, а окружностями — образы множества $K=\mathrm{GF}(p^h)\cup\{\infty\}$ относительно группы подстановок вида

$$x\longrightarrow\frac{x^{\alpha}a+c}{x^{\alpha}b+d},\quad a,\ b,\ c,\ d\in\mathrm{GF}(p^{2h}),\quad ad\neq bc,$$

$$\alpha\in\mathrm{aut\,GF}(p^{2h}).$$

Необходимым условием существования М. п. порядка n является существование конечной аффинной плоскости того же порядка. Доказана единственность М. п. порядка $n=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 11$ (см. [5]). Если М. п. порядка n содержит собственную подплоскость порядка m, то $m=n\pmod 2$ и $m^2+m\leqslant n$ (см. [2]).

Проводилась классификация М. п. (см. [3], [4]). М. п. названа по имени А. Мёбиуса (A. Möbius, 1855), заложившего основы теории окружностей.

Лит.: [1] Dembowski P., Finite geometries, B., 1968; [2] Dembowski P., Hughes D. R., «J. London Math. Soc.», 1965, v. 40, p. 171—82; [3] Hering Ch., «Math. Z.», 1965, Bd 87, S. 252—62; [4] Krier N., в кн.: Proceedings of International Conference on Projective Planes, Wash., 1973, p. 157—63; [5] Истомина Л. И., в сб.: Кибернетико-математические методы исследования процессов и структур, Пермь, 1976, с. 81—83.

В. В. Афанасьев.

МЁБИУСА РЯД — функциональный ряд вида

$$F(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{f(sx)}{s^n}. \qquad (*)$$

М. р. исследован А. Мёбиусом [1], к-рый нашел для ряда (*) формулу обращения:

$$f(x)=\sum_{s=1}^{\infty}\mu(s)\frac{F(sx)}{s^n},$$

где $\mu(s)$ — *Мёбиуса функция*. А. Мёбиус рассмотрел также формулы обращения для конечных сумм по делителям заданного натурального числа n:

$$F(n)=\sum_{d\mid n}f(d),\quad f(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right).$$

Другая формула обращения: если $P(n)$ — вполне мультипликативная функция, для к-рой $P(1)=1$, а $f(x)$ функция, определенная при всех действительных $x>0$, то из

$$g(x)=\sum_{n\leqslant x}P(n)f\left(\frac{x}{n}\right)$$

следует

$$f(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)P(n)g\left(\frac{x}{n}\right).$$

Лит.: [1] Möbius A. F., «J. reine und angew. Math.», 1832, Bd 9, S. 105—23; [2] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 8 изд., М., 1972; [3] Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967.

Б. М. Бредихин.

МЁБИУСА ФУНКЦИЯ — арифметическая функция натурального аргумента: $\mu(1)=1$, $\mu(n)=0$, если n делится на квадрат простого числа, в противном случае $\mu(n)=(-1)^k$, где k — количество простых множителей числа n. Введена А. Мёбиусом (A. Möbius, 1832).

М. ф.— мультипликативная функция; $\sum_{d\mid n}\mu(d)=0$, если $n>1$. М. ф. используется при изучении других

арифметич. функций, она содержится в формуле обращения (см., напр., *Мёбиуса ряд*). Для среднего значения М. ф. известна оценка [2]

$$\frac{1}{x}\left|\sum\nolimits_{n\leqslant x}\mu(n)\right|\leqslant \exp\left\{-c\ln^{3/5}x\,(\ln\ln x)^{-1/5}\right\},$$

где c — постоянная. Из стремления среднего значения к нулю при $x\to\infty$ следует асимптотич. закон *распределения простых чисел* в натуральном ряде.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; [2] Walfisz A., Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, B., 1963. *Н. И. Климов.*

МЕДИАНА треугольника — прямая (или ее отрезок внутри треугольника), соединяющая вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Три М. треугольника пересекаются в одной точке, к-рая называется центром тяжести треугольника, центроидом, или барицентром. Эта точка делит каждую М. на две части, отношение между к-рыми равно 2 : 1, считая первый отрезок от вершины. *П. С. Моденов.*

МЕДИАНА — одна из числовых характеристик распределения вероятностей, частный случай *квантили*. Для действительной случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ М. наз. число m, к-рое удовлетворяет условиям $F(m)\leqslant 1/2$ и $F(m+0)\geqslant 1/2$. Любая случайная величина имеет по крайней мере одну М. Если $F(x)=1/2$ при всех x из замкнутого интервала, то каждая точка этого интервала есть М. Если $F(x)$ строго монотонная функция, то М. единственна. В симметричном случае М., если она единственна, совпадает с математич. ожиданием, если последнее существует. Тот факт, что М. существует всегда, используется для центрирования случайных величин (см., напр., *Леви неравенство*). В математич. статистике для оценки М. распределения по независимым результатам наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ используют т. н. выборочную медиану — М. соответствующего вариационного ряда $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$: величину $X_{(k+1)}$, если $n=2k+1$ — нечетное, и $\frac{1}{2}[X_{(k)}+X_{(k+1)}]$, если $n=2k$ — четное.

Лит.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *А. В. Прохоров.*

МЕДИАНТА двух дробей a/b и c/d с положительными знаменателями — дробь $(a+c)/(b+d)$. М. двух дробей заключена между ними, т. е. если $(a/b)\geqslant(c/d)$, $b>0$, $d>0$, то $\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+c}{b+d}\leqslant\frac{c}{d}$. Конечная последовательность дробей, каждая промежуточная из к-рых является М. соседних с ней, наз. рядом Фарея. М. двух соседних подходящих дробей разложения действительного числа α в цепную дробь заключена между числом α и подходящей дробью меньшего порядка. Таким образом, если P_n/Q_n и P_{n+1}/Q_{n+1} — подходящие дроби порядков n и $n+1$ разложения числа α в цепную дробь, то

$$\left|\alpha-\frac{P_n}{Q_n}\right|>\left|\frac{P_n+P_{n+1}}{Q_n+Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right|=\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})}.$$

Лит.: [1] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М., 1978. *В. И. Нечаев.*

МЕЙЕРА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-xt/2}(xt)^{-\mu-1/2}W_{\mu+1/2,\,\nu}(xt)\,f(t)\,dt,$$

где $W_{\mu,\,\nu}(x)$ — *Уиттекера функция*. Формула обращения имеет вид

$$f(t)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(1-\mu+\nu)}{\Gamma(1+2\nu)}\times$$

$$\times\int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda}e^{xt/2}(xt)^{\mu-1/2}M_{\mu-1/2,\,\nu}(xt)\,F(x)\,dx,$$

где $M_{\mu,\,\nu}(x)$ — функция Уиттекера.

При $\mu=\pm\nu$ М. п. переходит в *Лапласа преобразование*; при $\mu=-1/2$ в K_ν-преобразование:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-xt/2}\,(xt)^{1/2}K_\nu(xt/2)\,f(t)\,dt,$$

где $K_\nu(x)$ — *Макдональда функция*.

К М. п. сводится преобразование Варма:

$$F(x)=\int_0^\infty (xt)^{\nu-1/2}\,e^{-xt/2}W_{\mu,\,\nu}(xt)\,f(t)\,dt.$$

Мейера K-преобразование (Мейера—Бесселя преобразование) — интегральное преобразование вида

$$F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty K_\nu(xt)\,\sqrt{xt}\,f(t)\,dt.$$

Если функция $f(t)$ локально интегрируема на $(0,\infty)$, имеет ограниченное изменение в окрестности точки $t=t_0>0$ и сходится интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\,|f(t)|\,dt,\quad \beta>\alpha\geqslant 0,$$

то имеет место формула обращения

$$\frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2}=\frac{1}{\pi i\sqrt{2\pi}}\int_{\beta-i\lambda}^{\beta+i\lambda}I_\nu(t_0\tau)\,(t_0x)^{1/2}F(x)\,dx.$$

При $\nu=\pm 1/2$ K-преобразование Мейера переходит в преобразование Лапласа.

М. п. введено К. Мейером [1], K-преобразование Мейера — им же [2].

Лит.: [1] Meijer C. S., «Proc. Konink. Nederl. acad. wet.», 1941, v. 44, p. 727—37; [2] его же, там же, 1940, v. 43, p. 599—608, 702—11; [3] Брычков Ю. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования обобщенных функций, М., 1977; [4] Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 7—82.

Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

МЕЙЕРА ТЕОРЕМА: пусть $f(z)$ — мероморфная функция в единичном круге $D=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$, тогда все точки окружности $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$, исключая, быть может, множество первой категории на Γ, являются либо точками Фату, либо точками Мейера. При этом точка $e^{i\theta}$ окружности Γ наз. точкой Фату для $f(z)$, если существует *угловое граничное значение* $\lim f(z)=A$ при $z\to e^{i\theta}$ по любому некасательному пути. Точка $e^{i\theta}$ наз. точкой Мейера (или обладает свойством Мейера), если: 1) полное *предельное множество* $C(e^{i\theta};f)$ функции $f(z)$ в точке $e^{i\theta}$ субтотально, т. е. не совпадает со всей расширенной комплексной плоскостью $\mathbb{C}$; 2) множество всех предельных значений вдоль любой хорды круга D, проведенной в точку $e^{i\theta}$, совпадает с $C(e^{i\theta};f)$. Теорема была доказана К. Мейером [1].

М. т. является аналогом в терминах категории множеств *Плеснера теоремы*, формулирующейся в терминах теории меры. Уточнение М. т. см. в [3].

Лит.: [1] Meier K., «Math. Ann.», 1961, Bd 142, S. 328—344; [2] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [3] Гаврилов В. И., Канатников А. Н., «Докл. АН СССР», 1977, т. 233, № 1, с. 15—17.

Е. Д. Соломенцев.

МЕЛЕРА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — наивысшей алгебраич. степени точности квадратурная формула для промежутка $[-1,1]$ и веса $1/\sqrt{1-x^2}$, имеющая вид

$$\int_{-1}^{1}\left(1/\sqrt{1-x^2}\right)f(x)\,dx\approx\frac{\pi}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right). \tag{1}$$

Узлы — корни многочлена Чебышева

$$T_N(x)=\cos N\arccos x,$$

коэффициенты одинаковы и равны π/N. Алгебраич. степень точности равна $2N-1$. Формула (1) установлена Ф. Мелером [1].

Квадратурная формула наивысшей алгебраич. степени точности с весом $1/\sqrt{1-x^2}$ и с $2N+1$ узлами, у к-рой N фиксированных узлов совпадают с узлами квадратурной формулы (1), такова:

$$\int_{-1}^{1} (1/\sqrt{1-x^2})\, f(x)\, dx \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{2N}\left[\frac{f(-1)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{2N-1} f\left(\cos\frac{k\pi}{2N}\right)\right]. \qquad (2)$$

Квадратурной формулой (2) пользуются для уточнения приближенного значения интеграла, полученного с помощью квадратурной формулы (1), при этом значения подинтегральной функции в узлах формулы (1) уже вычислены, так что необходимо вычислить ее значения лишь в $N+1$ дополнительных узлах. Квадратурная формула (2) представляет собой также наивысшей алгебраич. степени точности квадратурную формулу с весом $1/\sqrt{1-x^2}$, у к-рой фиксированными узлами являются концы промежутка $[-1, 1]$ и, следовательно, остальные узлы суть корни ортогонального относительно промежутка $[-1,1]$ и веса $\sqrt{1-x^2}$ многочлена степени $2N-1$ — многочлена Чебышева $U_{2N-1}(x)$ 2-го рода. Алгебраич. степень точности квадратурной формулы (2) равна $4N-1$.

Иногда формулу (1) наз. квадратурной формулой Эрмита.

Лит.: [1] Mehler F. G., «J. reine und angew. Math.», 1864, Bd 63, S. 152 -57; [2] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967. *И. П. Мысовских.*

МЕЛЕРА — ФОКА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — интегральное преобразование вида

$$F(x)=\int_0^\infty P_{i\tau-1/2}(x)\, f(\tau)\, d\tau,\ 1\leqslant x<\infty, \qquad (1)$$

где $P_\nu(x)$ — сферич. функция Лежандра 1-го рода. Если $f(\tau)\in L[0,\infty)$, $|f'(\tau)|$ — локально интегрируема на $[0,\infty)$ и $f(0)=0$, то имеет место формула обращения

$$f(\tau)=\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau\int_1^\infty P_{i\tau-1/2}(x)\, F(x)\, dx. \qquad (2)$$

Равенство Парсеваля. Пусть М.—Ф. п. определено равенствами

$$G(\tau)=\int_1^\infty \sqrt{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}\, P_{i\tau-1/2}(x)\, g(x)\, dx,$$

$$g(x)=\int_0^\infty \sqrt{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}\, P_{i\tau-1/2}(x)\, G(\tau)\, d\tau.$$

Если $g_i(x)$, $i=1$, 2,— произвольные действительные функции и выполняются условия

$$g_i(x)\, x^{-1/2}\ln(1+x)\in L(1,\infty),\ g_i(x)\in L_2(1,\infty),$$

то

$$\int_0^\infty G_1(\tau)\, G_2(\tau)\, d\tau=\int_1^\infty g_1(x)\, g_2(x)\, dx.$$

Обобщенное М.— Ф. п. и формула его обращения имеют вид

$$F(x)=\int_0^\infty P^{(k)}_{i\tau-1/2}(x)\, f(\tau)\, d\tau, \qquad (3)$$

$$f(\tau)=\frac{1}{\pi}\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-k-i\tau\right)\times$$

$$\times\int_1^\infty P^{(k)}_{i\tau-1/2}(x)\, F(x)\, dx, \qquad (4)$$

где $P^{(k)}_\nu(x)$ — присоединенные функции Лежандра 1-го рода. При $k=0$ формулы (3), (4) переходят в (1), (2), при $k=1/2$, $y=\mathrm{ch}\,\alpha$ формулы (3), (4) приводят к косинус-преобразованию Фурье, а при $k=-1/2$, $y=\mathrm{ch}\,\alpha$ к синус-преобразованию Фурье. Преобразования (1) и (2) введены Ф. Мелером [1], основные теоремы доказаны В. А. Фоком [2].

Лит.: [1] Mehler F. G., «Math. Ann.», 1881, Bd 18, S. 161—94; [2] Фок В. А., «Докл. АН СССР», 1943, т. 39, с. 279—283; [3] Итоги науки. Математический анализ. 1966, М., 1967, с. 7—82.
Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.

МЕЛЛИНА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — одно из интегральных преобразований. Оно определяется формулой

$$M(p)=\int_0^\infty f(t)\,t^{p-1}\,dt,\quad p=\sigma+i\tau,$$

сводится к Лапласа преобразованию подстановкой $t=e^{-z}$. М. п. применяется к решению определенного класса плоских задач на гармонич. функции в секториальной области, задач теории упругости и пр.

Теорема обращения. Пусть $\tau^{\sigma-1}f(\tau)\in L(0,\infty)$, причем функция $f(\tau)$ имеет ограниченное изменение в окрестности точки $\tau=t$. Тогда

$$\frac{1}{2}\,[f(t+0)-f(t-0)]=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda}M(s)\,t^{-s}ds.$$

Теорема представления. Пусть функция $M(\sigma+iu)$ суммируема по u на $(-\infty,+\infty)$ и имеет ограниченное изменение в окрестности точки $u=t$; тогда

$$\frac{1}{2}\,[M(\sigma+i(t+0))+M(\sigma+i(t-0))]=$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{1/\lambda}^{\lambda}f(x)\,x^{\sigma+it-1}\,dx,$$

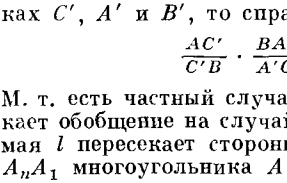
где

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}M(s)x^{-s}ds.$$

Лит.: [1] Mellin H., «Acta Soc. sci. fennica», 1896, v. 21, № 1, S. 1—115; [2] его же, «Acta math.», 1902, v. 25, S. 139—164; [3] Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье, пер. с англ., М.—Л., 1948; [4] Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974.
П. И. Лизоркин.

МЕНГЕРА КРИВАЯ — пример линии, содержащей топологич. образ любой линии (и, более того, любого одномерного метризуемого пространства счетного веса). Поэтому она наз. универсальной кривой. Построена К. Менгером [1] (конструкцию М. к. см. в ст. *Линия*). М. к. топологически характеризуется [3] как одномерный локально связный метризуемый континуум K, не имеющий локально разбивающих точек (т. е. для любой связной окрестности O любой точки $x\in K$ множество $O\setminus\{x\}$ связно) и не имеющий непустых открытых и вложимых в плоскость подмножеств.

Лит.: [1] Menger K., Kurventheorie, Lpz., 1932; [2] Пархоменко А. С., Что такое линия, М., 1954; [3] Anderson R., «Ann. Math.», 1958, v. 68, № 1, p. 1—16.
Б. А. Пасынков.



МЕНЕЛАЯ ТЕОРЕМА — теорема о соотношении между длинами отрезков на сторонах треугольника, пересеченного прямой. Именно, если прямая пересекает стороны треугольника ABC (или их продолжения) в точках C', A' и B', то справедливо соотношение

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB}{B'A}=-1.$$

М. т. есть частный случай *Карно теоремы*; она допускает обобщение на случай многоугольника. Пусть прямая l пересекает стороны A_1A_2, A_2A_3, . . ., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ соответственно в точках a_1, a_2, . . ., a_{n-1}, a_n. В таком случае справедливо соотношение

$$\frac{A_1a_1}{a_1A_2}\cdot\frac{A_2a_2}{a_2A_3}\cdot\ldots\cdot\frac{A_{n-1}a_{n-1}}{a_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_na_n}{a_nA_n}=\pm 1,$$

где знак минус соответствует случаю нечетного n, а знак плюс — четного n.

М. т. была доказана Менелаем (1 в. н. э.) и, повидимому, была известна Евклиду (3 в. до н. э.).

П. С. Моденов.

МЁНЬЕ ТЕОРЕМА: кривизна k кривой γ, лежащей на поверхности, кривизна k_N нормального сечения, плоскость к-рого проходит через касательную к кривой γ в данной ее точке P, и угол α между соприкасающейся плоскостью кривой γ в точке P и плоскостью N нормального сечения связаны соотношением

$$k_N = k \cos \alpha.$$

В частности, кривизна любого наклонного сечения поверхности выражается через кривизну нормального сечения с той же касательной.

Теорема доказана Ж. Мёнье в 1776 (опубл. в [1]).

Лит.: [1] Meusnier J., «Mém. prés. sav. étrangers. Ac. sci.», 1785, t. 10, p. 477—510.

Д. Д. Соколов.

МЕНЬШОВА ПРИМЕР НУЛЬ-РЯДА — первый нетривиальный пример тригонометрич. ряда, сходящегося к нулю всюду вне нек-рого совершенного множества меры нуль; построен Д. Е. Меньшовым [1]. Ряды такого типа наз. нуль-рядами. С этим понятием естественно связан вопрос о единственности разложения функции в тригонометрич. ряд (см. *Единственности множество*).

Лит.: [1] Меньшов Д. Е., «C. r. Acad. sci.», 1916, t. 163, p. 433—36; [2] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961, с. 804—06.

М. И. Войцеховский.

МЕНЬШОВА — РАДЕМАХЕРА ТЕОРЕМА — теорема о сходимости ортогональных рядов почти всюду: если система функций $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована на отрезке $[a, b]$, то при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2 n < \infty$$

ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \qquad (*)$$

сходится почти всюду на $[a, b]$. Эта теорема доказана независимо Д. Е. Меньшовым [1] и Х. Радемахером [2]. Д. Е. Меньшов доказал, что ее утверждение окончательно в следующем смысле. Если монотонно возрастающая последовательность положительных чисел $\omega(n)$ удовлетворяет условию $\omega(n) = o(\log^2 n)$, то найдется всюду расходящийся ортогональный ряд (*), коэффициенты к-рого удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega(n) < \infty.$$

Лит.: [1] Menchoff D., «Fundam. math.», 1923, t. 4, p. 82—105; [2] Rademacher H., «Math. Ann.», 1922, Bd 87, S. 112—38; [3] Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов, пер. с англ., М., 1963, с. 87, 94.

Б. И. Голубов.

МЕРА, мера множества,— обобщение понятия длины отрезка, площади фигуры, объема тела, интуитивно соответствующее массе множества при нек-ром распределении массы по пространству. Понятие М. множества возникло в теории функций действительного переменного в связи с изучением и усовершенствованием понятия интеграла.

Определения и общие свойства. Пусть X — нек-рое множество и $\mathcal{E}$ — нек-рый класс его подмножеств. Неотрицательная (не обязательно конечная) функция множеств λ, определенная на $\mathcal{E}$, наз. аддитивной, конечно аддитивной или счетно аддитивной, если

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i),$$

когда

$$E_i \in \mathcal{E}, \ \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{E}, \ E_i \cap E_j = \varnothing, \ i \neq j,$$

соответственно при $n = 2$, n — любом конечном и $n \leqslant \infty$.

Совокупность $\mathcal{P}$ подмножеств множества X наз. полукольцом множеств, если:

1) $\varnothing \in \mathcal{P}$,

2) $E_1, E_2 \in \mathcal{P} \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathcal{P}$,

3) $E, E_1 \in \mathcal{P}$, $E_1 \subset E \Rightarrow$

существует представление $E \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $E_i \in \mathcal{P}$, $i = 1, \ldots, n$, $n < \infty$. Совокупность $\mathcal{R}$ подмножеств множества X наз. кольцом множеств, если:

1) $\varnothing \in \mathcal{R}$,

2) $E_1, E_2 \in \mathcal{R} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathcal{P}$, $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{R}$.

Пример полукольца: $X = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{P}$ — совокупность интервалов вида

$$\{x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : a_i \leqslant x_i < b_i,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

Совокупность всевозможных конечных объединений таких интервалов является кольцом.

Совокупность $\mathcal{S}$ подмножеств множества X наз. σ-кольцом, если

1) $\varnothing \in \mathcal{S}$,

2) $E_1, E_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{S}$,

3) $E_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{S}$.

Всякое σ-кольцо является кольцом; всякое кольцо является полукольцом.

Конечно аддитивной мерой наз. неотрицательная конечно аддитивная функция множеств m такая, что $m(\varnothing) = 0$. Областью определения $\mathcal{E}_m$ конечно аддитивной М. может быть полукольцо, кольцо или σ-кольцо. В определении конечно аддитивной меры на кольце или σ-кольце условие конечной аддитивности можно ослабить до аддитивности — при этом получается то же понятие.

Если m — конечно аддитивная М. множества E, $E_1, \ldots, E_n$ принадлежат области ее определения и $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, то

$$m(E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Конечно аддитивная М. m_2 с областью определения $\mathcal{E}_{m_2}$ наз. продолжением конечно аддитивной меры М. m_1 с областью определения $\mathcal{E}_{m_1}$, если $\mathcal{E}_{m_2} \supset \mathcal{E}_{m_1}$ и $m_2(E) = m_1(E)$ при $E \in \mathcal{E}_{m_1}$.

Всякая конечно аддитивная М. m, определенная на полукольце $\mathcal{P}$, может быть однозначно продолжена до конечно аддитивной М. m' на наименьшем кольце $\mathcal{R}(\mathcal{P})$, содержащем $\mathcal{P}$. Это продолжение определяется следующим образом: любое $E \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ представимо в виде $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \in \mathcal{P}$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$; $m'(E)$ полагают равным

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Конечно аддитивная М., обладающая свойством счетной аддитивности, наз. мерой. Пример меры: пусть X произвольное ненустое множество, $\mathcal{E}_m$ — σ-кольцо, кольцо или полукольцо подмножеств X, $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное подмножество X, $p_1, p_2, \ldots$ — неотрицательные числа. Тогда функция

$$\mu(E) = \sum_n p_n \delta_{x_n}(E),$$

где $\delta_x(E) = 1$ при $x \in E$ и $\delta_x(E) = 0$ при $x \notin E$, является М., определенной на $\mathcal{E}_\mu$. Меры δ_x наз. элементарными, или вырожденными, мерами. Не всякая конечно аддитивная М. является М. Напр., если X есть множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$, $\mathcal{P}$ — полукольцо пересечений всевозможных

подинтервалов $[0, 1]$ с X и для любых $a, b, 0 \leqslant a \leqslant b < 1$,

$$m((a, b) \cap X) - m([a, b) \cap X) = m((a, b] \cap X) = \\ = m([a, b] \cap X) = b - a,$$

то m конечна, но не счетно аддитивна на $\mathscr{P}$.

(Конечно аддитивная) М. m с областью определения $\mathscr{E}_m$ наз. конечной (соответственно σ-конечной), если $m(E) < \infty$ для любого $E \in \mathscr{E}_m$ (соответственно, если для любого $E \in \mathscr{E}_m$ существует последовательность множеств $\{E_i\}$ из $\mathscr{E}_m$ такая, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $m(E_i) < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$). (Конечно аддитивная) М. m наз. вполне конечной (вполне σ-конечной), если она конечна (соответственно σ-конечна) и $X \in \mathscr{E}_m$.

Пара $(X, \mathscr{S})$, где X — множество и $\mathscr{S}$ есть σ-кольцо его подмножеств такое, что $\bigcup_{E \in \mathscr{S}} E = X$, наз. измеримым пространством. Тройка $(X, \mathscr{S}, \mu)$, где $(X, \mathscr{S})$ — измеримое пространство и μ есть М. на $\mathscr{S}$, наз. пространством с мерой. Пространство с вполне конечной М. μ, нормированной условием $\mu(X) = 1$, наз. вероятностным пространством. В абстрактной теории М., где исходным является измеримое пространство $(X, \mathscr{S})$ или пространство с М. $(X, \mathscr{S}, \mu)$, множества из $\mathscr{S}$ наз. измеримыми множествами.

Свойства пространства с мерой. Пусть $\{E_i\}$ — произвольная последовательность измеримых множеств, тогда

1) $\mu(\liminf_{i \to \infty} E_i) \leqslant \liminf_{i \to \infty} \mu(E_i)$,

2) если $\mu\left(\bigcup_{i=i_0}^{\sim} E_i\right) < \infty$

для нек-рого i_0, то

$$\mu\left(\limsup_{i \to \infty} E_i\right) \geqslant \limsup_{i \to \infty} \mu(E_i),$$

3) если $\lim_{i \to \infty} E_i$ существует и выполнено условие из 2), то

$$\mu\left(\lim_{i \to \infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(E_i).$$

Определенная на кольце конечно аддитивная М. является М. тогда и только тогда, когда

$$m\left(\lim_{i \to \infty} E_i\right) = \lim_{i \to \infty} m(E_i)$$

для любой монотонно возрастающей последовательности $\{E_i\}$ множеств из $\mathscr{R}$ такой, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{R}$.

Пусть $(X, \mathscr{S}_1, \mu_1)$ — пространство с М., $(X_2, \mathscr{S}_2)$ — измеримое пространство и T — измеримое отображение X_1 в X_2, т. е.

$$T^{-1}(E) = \{x \in X_1 : Tx \in E\} \in \mathscr{S}_1$$

для любого $E \in \mathscr{S}_2$. Мерой, порожденной отображением T (обозначается μT^{-1}), наз. М. на $\mathscr{S}_2$, определяемая соотношением

$$\mu T^{-1}(E) = \mu(T^{-1}E).$$

Пусть $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — измеримое пространство и $X_1 \subset X$. Пусть на множествах E из σ-кольца $\mathscr{S} \cap X_1 = \{E \cap X_1, E \in \mathscr{S}_1\}$

$$\mu_{X_1}(E) = \inf_{E \subset F \in \mathscr{S}} \mu(F).$$

Тогда $(X_1, \mathscr{S} \cap X_1, \mu_{X_1})$ есть измеримое пространство; М. μ_{X_1} наз. ограничением меры μ на X_1.

Атомом пространства с М. $(X, \mathscr{S}, \mu)$ (или меры μ) наз. всякое множество $E \in \mathscr{S}$ положительной меры такое, что если $F \subset E$, $F \in \mathscr{S}$, то $\mu(F) = 0$ либо $\mu(F) = \mu(E)$. Пространство с М., не содержащее атомов, наз. неатомическим, или непрерывным

(сама М. при этом тоже наз. неатомической, или непрерывной). Если $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — пространство с неатомич. σ-конечной М. и $E_1 \in \mathscr{S}$, то для любого $\alpha \leqslant \mu(E_1)$ (возможно, равного ∞) существует такой элемент $E_2 \in \mathscr{S}$, что $E_2 \subset E_1$ и $\mu(E_2) = \alpha$.

Пространство с М. $(X, \mathscr{S}, \mu)$ (или мера μ) наз. полным, если из $E \in \mathscr{S}$, $F \subset E$, $\mu(E) = 0$ следует, что $E \in \mathscr{S}$. Всякое пространство с М. $(X, \mathscr{S}, \mu)$ можно пополнить, если к $\mathscr{S}$ присоединить множества вида $E \cup N$, где $E \in \mathscr{S}$, $N \subset N'$, $N' \in \mathscr{S}$, $\mu(N') = 0$, и положив для них $\bar{\mu}(E \cup N) = \mu(E)$. Класс множеств указанного вида образует σ-кольцо, при этом μ — полная М. на нем. Множества нулевой М. наз. нулевыми множествами. Если множество точек из X, для к-рых нек-рое свойство Q не выполняется, является нулевым множеством, то говорят, что свойство Q выполняется почти всюду.

Продолжение мер. М. μ_2 есть продолжение M. μ_1, если μ_1 есть продолжение мер μ_1 в классе конечно аддитивных М. (см. выше). Всякую определенную на полукольце $\mathscr{P}$ М. можно однозначно продолжить до М. на кольце $\mathscr{R}(\mathscr{P})$, порожденном $\mathscr{P}$ (продолжение осуществляется с помощью той же конструкции, что и в случае конечно аддитивных М.). Далее, всякую М. μ, определенную на кольце $\mathscr{R}$, можно продолжить до М. μ' на порожденном $\mathscr{R}$ σ-кольце $\mathscr{S}(\mathscr{R})$; если μ σ-конечна, то это продолжение единственно и σ-конечно. Значение μ' на множестве $E \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$ можно задать формулой

$$\mu'(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E_i \in \mathscr{R}, \; i = 1, 2, \ldots, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}. \qquad (*)$$

Наследственным классом подмножеств множества X наз. всякий класс, содержащий вместе с каждым своим множеством любое его подмножество. Внешней мерой наз. функция множеств m^*, определенная на наследственном σ-кольце $\mathscr{H}$ (классе множеств, являющемся одновременно наследственным классом и σ-кольцом) и обладающая следующими свойствами:

1) $0 \leqslant m^*(E) \leqslant \infty$, $m^*(\varnothing) = 0$,

2) $E \subset F \Rightarrow m^*(E) \leqslant m^*(F)$,

3) $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$.

По М. μ на кольце $\mathscr{R}$ можно построить внешнюю М. μ^* на наследственном σ-кольце $\mathscr{H}(\mathscr{R})$, порожденном $\mathscr{R}$ ($\mathscr{H}(\mathscr{R})$ состоит из всех множеств, к-рые могут быть покрыты объединением счетного числа множеств из $\mathscr{R}$), по формуле

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E_i \in \mathscr{R}, \; i = 1, 2, \ldots, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}.$$

Внешняя М. μ^* наз. внешней мерой, индуцированной мерой μ.

Пусть m^* — внешняя М. на наследственном σ-кольце $\mathscr{H}$ подмножеств X. Множество $E \in \mathscr{H}$ наз. m^*-измеримым, если

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (X \setminus E))$$

для любого $A \in \mathscr{H}$. Совокупность $\mathscr{S}$ m^*-измеримых множеств образует σ-кольцо, содержащее все множества нулевой внешней М., а функция множеств $\bar{m}$ на $\mathscr{S}$, определяемая равенством $\bar{m}(E) = m^*(E)$, является полной мерой. М. $\bar{m}$ наз. мерой, индуцированной внешней мерой m^*.

Пусть μ есть М. на кольце $\mathscr{R}$, μ^* — внешняя М. на $\mathscr{H}(\mathscr{R})$, индуцированная М. μ. Пусть $\mathscr{S}$ — совокупность μ^*-измеримых множеств, $\bar{\mu}$ есть М. на $\mathscr{S}$, индуцированная внешней М. μ^*. Тогда М. $\bar{\mu}$ есть продолжение М. μ, и поскольку $\mathscr{S}(R)\subset\mathscr{S}$, то функция μ' на $\mathscr{S}(\mathscr{R})$, задаваемая формулой (*), тоже М., продолжающая μ. Если исходная М. μ на $\mathscr{R}$ σ-конечна, то пространство $(X, \mathscr{S}, \bar{\mu})$ является пополнением пространства $(X, \mathscr{S}(\mathscr{R}), \mu')$, см. (*). Если M. μ задана на σ-кольце $\mathscr{S}$, то индуцированная ею внешняя М. μ^* на наследственном σ-кольце $\mathscr{H}(\mathscr{S})$, порожденном $\mathscr{S}$, дается формулой

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F): E\subset F,\ F\in\mathscr{S}\}.$$

Наряду с внешней М. μ^* вводится понятие внутренней меры μ_*, индуцированной мерой μ на $\mathscr{S}$, именно:

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F): E\supset F,\ E\in\mathscr{S}\},\ E\in\mathscr{H}(\mathscr{S}).$$

Для всякого множества E из $\mathscr{H}(\mathscr{S})$ определяются его измеримое ядро E' и измеримая оболочка E'' как множества из $\mathscr{S}$ такие, что $E'\subset E\subset E''$ и $\mu(F')=\mu(F'')=0$ для любых F', $F''\in\mathscr{S}$ таких, что $F'\subset E\setminus E'$, $F''\subset E''\setminus E$. Измеримое ядро всегда существует, а измеримая оболочка существует всякий раз, когда E имеет σ-конечную внешнюю М.; при этом $\mu_*(E)=\mu(E')$, $\mu^*(E)=\mu(E'')$. Пусть μ есть М. на кольце $\mathscr{R}$ и μ' — ее продолжение на порожденное $\mathscr{R}$ σ-кольцо $\mathscr{S}(\mathscr{R})$. Внутреннюю М. μ'_* на подмножествах множества E конечной μ-меры можно выразить в терминах внешней М. μ^* (а стало быть, и μ):

$$\mu_*(A) = \mu(E) - \mu^*(E\setminus A),\ A\subset E.$$

Кроме того, множество F из наследственного σ-кольца $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ с конечной внешней μ^*-мерой μ^*-измеримо тогда и только тогда, когда $\mu^*(F)=\mu'_*(F)$. В случае, когда исходная М. μ на $\mathscr{R}$ вполне конечна, справедливо следующее необходимое и достаточное условие μ^*-измеримости множества $E\subset X$

$$\mu(X) = \mu^*(E) = \mu^*(X\setminus E).$$

Для вполне конечных мер на $\mathscr{R}$ это условие нередко берется в качестве определения μ^*-измеримости E.

Если $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — измеримое пространство с σ-конечной М. и $X_1, \ldots, X_n$ — конечное число множеств из наследственного σ-кольца $\mathscr{H}(\mathscr{S})$, порожденном $\mathscr{S}$, то на σ-кольце $\mathscr{S}$, порожденном $\mathscr{S}$ и множествами $X_1, \ldots, X_n$, можно определить М. $\tilde{\mu}$, совпадающую на $\mathscr{S}$ с μ.

Меры Жордана, Лебега и Лебега — Стилтьеса. Примером продолжения М. является мера Лебега в $\mathbb{R}^k$. Интервалы вида

$$I = \{(x_1, \ldots, x_n): a_i \leqslant x_i < b_i,\ i=1, \ldots, k\}$$

образуют полукольцо $\mathscr{P}$ в $\mathbb{R}^k$. Пусть для каждого такого интервала

$$\lambda(I) = \prod_{i=1}^{k}(b_i - a_i)$$

[$\lambda(I)$ совпадает с объемом I]. Функция λ σ-конечна и счетно аддитивна на $\mathscr{P}$ и однозначно продолжается до М. λ' на σ-кольце $\mathscr{S}$, порожденном $\mathscr{P}$, к-рое совпадает с σ-кольцом *борелевских множеств* (или множеств, измеримых по Борелю) в $\mathbb{R}^k$; М. λ' впервые была определена Э. Борелем (E. Borel, 1898) (см. *Бореля мера*). Пополнение $\bar{\lambda}$ М. λ' (определенное на $\mathscr{S}$) наз. мерой Лебега, введенной в 1902 А. Лебегом (H. Lebesgue) (см. *Лебега мера*). Множества из области определения $\mathscr{S}$ меры $\bar{\lambda}$ наз. измеримыми по

Лебегу. Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^k$ принадлежит $\bar{\mathscr{S}}$ тогда и только тогда, когда $\lambda(I) - \lambda^*(E) + \lambda^*(I \setminus E)$, где $I \in \mathscr{P}$ — какой-либо интервал, содержащий E, при этом $\bar{\lambda}(E) = \lambda^*(E)$. Множество $E \subset \mathbb{R}^k$ принадлежит $\bar{\mathscr{S}}$ тогда и только тогда, когда $E \cap \mathscr{S}_{r_n} \in \bar{\mathscr{S}}$ при всех n для нек-рой последовательности $\{r_n\}$, $r_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $r_n \to \infty$, где $\mathscr{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^k, \ \|x\| \leqslant r\}$. Мощность совокупности всех борелевских множеств в $\mathbb{R}$ есть $\mathfrak{c}$ (мощность континуума), а мощность совокупности всех множеств, измеримых по Лебегу, есть $2^{\mathfrak{c}}$, так что включение $\mathscr{S} \subset \bar{\mathscr{S}}$ строгое, т. е. есть множества, измеримые по Лебегу и неизмеримые по Борелю.

Мера Лебега $\bar{\lambda}$ инвариантна относительно ортогональных линейных преобразований A пространства $\mathbb{R}^k$ и относительно сдвигов на $x \in \mathbb{R}^k$, т. е. $\bar{\lambda}(AE + x) = \bar{\lambda}(E)$ для любого $E \in \mathscr{S}$.

Используя аксиому произвольного выбора, можно показать, что существуют множества, неизмеримые по Лебегу. Напр., на прямой таковым является множество, к-рое получится, если взять по одной точке из каждого класса смежности R по аддитивной подгруппе рациональных чисел.

Мерам Бореля и Лебега в $\mathbb{R}^k$ исторически предшествовала М., определенная К. Жорданом (K. Jordan, 1892) (см. *Жордана мера*). Определение меры Жордана идейно весьма близко к классич. определению площади и объема, восходящему к древним грекам: множество $E \subset \mathbb{R}^k$ наз. измеримым по Жордану, если найдутся множества, являющиеся конечными объединениями непересекающихся прямоугольников, одно — содержащееся в E, другое — содержащее E, разность объемов (определяемых очевидным образом) к-рых сколь угодно мала. Мерой Жордана такого множества E наз. нижняя грань объемов множеств — конечных объединений прямоугольников, накрывающих E. Множество, измеримое по Жордану, измеримо и по Лебегу, и его мера Жордана совпадает с его мерой Лебега. Область определения меры Жордана является кольцом, но не σ-кольцом, и это сильно сужает границы ее применимости.

Мера Лебега является частным случаем более общей меры Лебега — Стилтьеса. Последняя определяется посредством определенной на $\mathbb{R}^k$ действительной функции F такой, что

1) $-\infty < F < \infty$,

2) $\Delta_{b_1 - a_1} \ldots \Delta_{b_k - a_k} F(a_1, \ldots, a_k) \geqslant 0$

при $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, k$, где $\Delta_{b_i - a_i}$ — разностный оператор с шагом $b_i - a_i$, взятый в точке a_i применительно к i-й координате,

3) $F(a_1, \ldots, a_k) \uparrow F(b_1, \ldots, b_k)$ при $a_i \uparrow b_i$, $i = 1, \ldots, k$.

По заданной функции F М. μ_F интервала

$$I = \{(x_1, \ldots, x_k) : a_i \leqslant x_i < b; \ i = 1, \ldots, k\}$$

определяется формулой

$$\mu_F(I) = \Delta_{b_1 - a_1} \ldots \Delta_{b_k - a_k} F(a_1, \ldots, a_k),$$

оказывается счетно аддитивной на полукольце всех таких интервалов и продолжается на σ-алгебру борелевских множеств; пополнение этого продолжения и есть мера Лебега — Стилтьеса, отвечающая функции F. В частном случае, когда

$$F(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \ldots x_k,$$

получается мера Лебега.

Меры в произведениях пространств. Произведением измеримых пространств $(X_1, \mathscr{S}_1)$ и $(X_2, \mathscr{S}_2)$ наз. измеримое пространство, образованное

множеством $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$ (произведением множеств X_1 и X_2) и σ-кольцом $\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$ его подмножеств (произведением σ-колец $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{S}_2$), порожденным полукольцом $\mathscr{P}$ множеств вида

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in E_1 \in \mathscr{S}_1,\ x_2 \in E_2 \in \mathscr{S}_2\}.$$

Если $(X_1, \mathscr{S}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathscr{S}_2, \mu_2)$ — пространства с М., то формула

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\,\mu_2(E_2),\ E_1 \in \mathscr{S}_1,\ E_2 \in \mathscr{S}_2$$

определяет М. на $\mathscr{P}$; когда М. μ_1 и μ_2 σ-конечны, М. μ однозначно продолжается до М. на $\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$, обозначаемой $\mu_1 \times \mu_2$. Мера $\mu_1 \times \mu_2$ и пространство $(X_1 \times X_2, \mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ наз. соответственно произведением мер μ_1 и μ_2 и произведением пространств с мерой $(X_1, \mathscr{S}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathscr{S}_2, \mu_2)$. Пополнение произведения меры Лебега в $\mathbb{R}^k$ и меры Лебега в $\mathbb{R}^l$ есть мера Лебега в $\mathbb{R}^{k+l}$. Аналогично определяется произведение любого конечного числа пространств с М.

Пусть $(X_i, \mathscr{S}_i, \mu_i)$, $i \in I$, — произвольная совокупность пространств с М. таких, что $\mu_i(X_i) = 1$. Пространство-произведение $X = \prod_{i \in I} X_i$, по определению, есть множество всех функций на I, принимающих при каждом $i \in I$ значение $x_i \in X_i$. Измеримым прямоугольником в X наз. множество вида $\prod_{i \in I} E_i$, где $E_i \in \mathscr{S}_i$ и лишь конечное число E_i отлично от X_i. Семейство измеримых прямоугольников образует полукольцо $\mathscr{P}$. Порожденное $\mathscr{P}$ σ-кольцо обозначается $\prod_{i \in I} \mathscr{S}_i$ и наз. произведением σ-колец $\mathscr{S}_i$. Пусть μ — функция на $\mathscr{P}$, определенная равенством $\mu(E) = \prod_{i \in I} \mu_i(E_i)$ для $E = \prod_{i \in I} E_i$. Так, определенная функция μ является М., к-рая может быть однозначно продолжена до М., обозначаемой $\prod_{i \in I} \mu_i$, на $\prod_{i \in I} \mathscr{S}_i$. Пространство $\left(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \mathscr{S}_i, \prod_{i \in I} \mu_i\right)$ наз. произведением пространств $(X_i, \mathscr{S}_i, \mu_i)$, $i \in I$.

Произведение пространств с М. в произвольном числе является частным случаем следующей более общей схемы, играющей важную роль в теории вероятностей. Пусть $(X_i, \mathscr{S}_i)$, $i \in I$, — семейство измеримых пространств ($\mathscr{S}_i$ есть σ-алгебра) и пусть для каждого конечного множества $I_1 \subset I$ в измеримом пространстве $\left(\prod_{i \in I_1} X_i, \prod_{i \in I_1} \mathscr{S}_i\right)$ задана вероятностная М. μ_{I_1} (произведение М. соответствует тому случаю, когда $\mu_{I_1} = \prod_{i \in I_1} \mu_i$ для любого конечного $I_1 \subset I$). Пусть М. μ_{I_1} и μ_{I_2} согласованы в том смысле, что если $I_1 \subset I_2$ и p_{21} проекция $\prod_{i \in I_2} X_i$ на $\prod_{i \in I_1} X_i$, то $\mu_{I_1}(E) = \mu_{I_2} p_{21}^{-1}(E)$ для всех $E \subset \prod_{i \in I_1} \mathscr{S}_i$ (по определению, p_{21} есть такое отображение $\prod_{i \in I_2} X_i$ на $\prod_{i \in I_1} X_i$, что $(p_{21}(x))_i = x_i$ при всех $i \in I_1$). Существует ли вероятностная М. на $\prod_{i \in I} \mathscr{S}_i$ такая, что для любого конечного $I_1 \subset I$ и любого $E \in \prod_{i \in I_1} \mathscr{S}_i$ справедливо равенство $\mu_{I_1}(E) = \mu p^{-1}(E)$, где p — проекция $\prod_{i \in I} X_i$ на $\prod_{i \in I_1} X_i$? Оказывается, что такая М. существует не всегда, для ее существования нужны дополнительные условия. Одним из таких условий является совершенность М. μ_i (отвечающих одноточечным множествам $i \in I$). Понятие совершенной М. впервые было введено Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоровым [6]. Пространство с вполне конечной М. $(X, \mathscr{S}, \mu)$ и сама М. μ наз. совершенными, если для всякой $\mathscr{S}$-измеримой действительной функции f найдется такое борелевское множество $B \subset f(X)$, что $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(X)$. В рамках

совершенных М. невозможен целый ряд «патологических» явлений, возникающих в общей теории М.

Меры в топологических пространствах. При изучении М. в топологич. пространствах обычно рассматривают М., определенные на множествах, так или иначе связанных с топологией пространства. Один из типичных подходов состоит в следующем. Пусть X — произвольное топологич. пространство и $\mathfrak{Z}$ — класс множеств вида $f^{-1}(F)$, где f — действительная непрерывная функция на X и $F\in\mathbb{R}^1$ — замкнутое множество. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, порожденная классом $\mathfrak{Z}$, $\mathscr{B}$ есть σ-алгебра, порожденная $\mathfrak{Z}$ ($\mathscr{B}$ наз. σ-алгеброй бэровских множеств), и пусть $\mathfrak{M}$ — класс вполне конечных конечно аддитивных М. m на $\mathfrak{A}$, регулярных в том смысле, что

$$m(E)=\sup\{m(Z): Z\subset E,\ Z\in\mathfrak{Z}\}$$

для любого $E\in\mathfrak{A}$. В $\mathfrak{M}$ выделяют подмножества $\mathfrak{M}_\sigma$, $\mathfrak{M}_\tau$, $\mathfrak{M}_t$, образованные (конечно аддитивными) М., обладающими дополнительными свойствами гладкости. По определению, $\mu\in\mathfrak{M}_\sigma$, если $\mu(Z_n)\downarrow 0$ для любой последовательности $Z_n\downarrow\varnothing$, $Z_n\in\mathfrak{Z}$ (это свойство равносильно счетной аддитивности μ; М. из $\mathfrak{M}_\sigma$ могут быть однозначно продолжены на $\mathscr{B}$, и в дальнейшем они считаются заданными на $\mathscr{B}$), $\mu\in\mathfrak{M}_\tau$, если $\mu(Z_\alpha)\downarrow 0$ для любой сети $Z_\alpha\downarrow\varnothing$, $Z_\alpha\in\mathfrak{Z}$ и $\mu\in\mathfrak{M}_t$, если для любого $\varepsilon>0$ существует компакт K такой, что $\mu(E)<\delta$, когда $E\subset X\setminus K$, $E\in\mathfrak{A}$.

Имеют место включения $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{M}_\sigma\supset\mathfrak{M}_\tau\supset\mathfrak{M}_t$. М. из $\mathfrak{M}_\sigma$ наз. бэровскими мерами.

Существует тесная связь между М. из $\mathfrak{M}$ и линейными функционалами на пространстве $C(X)$ ограниченных непрерывных функций на X. Именно, формула

$$\Lambda(f)=\int_X f\,dm$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между М. $m\in\mathfrak{M}$ и неотрицательными линейными функционалами Λ на $C(X)$ (неотрицательность означает, что $\Lambda(f)\geqslant 0$, когда $f(x)\geqslant 0$, $x\in X$). Более того, для любого $Z\in\mathfrak{Z}$

$$m(Z)=\inf\{\Lambda(f):\chi_Z\leqslant f\leqslant 1\},$$

где χ_Z — индикатор множества Z. При этом М. из $\mathfrak{M}_\sigma$ отвечают σ-гладкие функционалы Λ (т. е. такие, что $\Lambda(f_n)\to 0$, когда $f_n\downarrow 0$ в $C(X)$), М. из $\mathfrak{M}_\tau$ отвечают τ-гладкие функционалы Λ (т. е. такие, что $\Lambda(f_\alpha)\to 0$ для любой сети $f_\alpha\downarrow 0$ в $C(X)$) и М. из $\mathfrak{M}_t$ соответствуют плотные функционалы Λ (т. е. такие, что $\Lambda(f_\alpha)\to 0$ для любой сети f_α в $C(X)$ такой, что $\|f_\alpha\|\leqslant 1$ при всех α и $f_\alpha\to 0$ равномерно на компактных подмножествах; здесь $\|\cdot\|$ — равномерная норма).

В пространстве $\mathfrak{M}$ обычно рассматривается слабая топология w; в этой топологии базисными окрестностями являются множества вида

$$U(m_0;\ f_1,\ \ldots,\ f_n,\ \varepsilon)=$$
$$=\left\{m:\left|\int_X f_k\,(dm-dm_0)\right|<\varepsilon,\right.$$
$$\left.k=1,\ \ldots,\ n,\ f_1,\ \ldots,\ f_n\in C(X)\right\}.$$

В топологии w $\mathfrak{M}$ есть вполне регулярное хаусдорфово пространство. Сходимость в топологии w обычно обозначается знаком $\Rightarrow$. Для сходимости сети $m_\alpha\Rightarrow m$ необходимо и достаточно, чтобы $m_\alpha(X)\to m(X)$ и $\limsup m_\alpha(Z)\leqslant m(Z)$ для всех $Z\in\mathfrak{Z}$. Другим необходимым и достаточным условием является $m_\alpha(E)\to m(E)$ для всех $E\in\mathfrak{A}$ таких, что существует Z_1, $Z_2\in\mathfrak{Z}$, для к-рых $X\setminus E\subset Z_1$, $E\subset Z_2$ и $m(Z_1\cap Z_2)=0$. Если пространство X вполне регулярно и хаусдорфово, то $\mathfrak{M}_\tau$ метризуемо

тогда и только тогда, когда метризуемо X. Если X — метрич. пространство, то $\mathfrak{M}_\tau$ метризуемо как сепарабельное метрич. пространство тогда и только тогда, когда X сепарабельно, и $\mathfrak{M}_\tau$ метризуемо как полное метрич. пространство тогда и только тогда, когда X метризуемо как полное метрич. пространство. Когда X метризуемо, $\mathfrak{M}_\sigma$ метризуемо тогда и только тогда, когда оно метризуемо *Леви — Прохорова метрикой*.

Пространство $\mathfrak{M}_\sigma$ секвенциально замкнуто в $\mathfrak{M}$ (теорема Александрова). Множество $A\subset\mathfrak{M}$ наз. плотным, если $\sup\{m(X): m\in A\}<\infty$ и если для любого $\varepsilon>0$ существует компакт K такой, что $m(E)<\delta$, когда $E\subset X\setminus K$, $m\in A$, $E\in\mathfrak{A}$. Если $A\subset\mathfrak{M}_\sigma$ плотно, то A относительно компактно в $\mathfrak{M}_\sigma$; обратно, если X метризуемо и топологически полно, $A\subset\mathfrak{M}_\sigma$ относительно компактно и каждая мера из A сосредоточена на нек-ром сепарабельном подмножестве, то A плотно (теорема Прохорова).

При определенных условиях М. из $\mathfrak{M}_\sigma$ могут быть продолжены до борелевских М., т. е. М., определенных на σ-алгебре борелевских множеств (см. *Борелевское множество*, *Бореля мера*). Так, если X — нормальное хаусдорфово счетно паракомпактное пространство, то каждая М. $\mu\in\mathfrak{M}_\sigma$ может быть однозначно продолжена до регулярной борелевской М. Если X — вполне регулярно и хаусдорфово, то всякая τ-гладкая (плотная) бэровская М. может быть однозначно продолжена до регулярной τ-гладкой (плотной) борелевской М.

Носителем бэровской (борелевской) М. наз. наименьшее множество Z из $\mathfrak{Z}$ (наименьшее замкнутое множество), М. к-рого совпадает с М. всего пространства. У τ-гладких М. носители всегда существуют.

Нередко при рассмотрении М. в топологич. пространствах (особенно — в локально компактных хаусдорфовых пространствах) борелевские и бэровские М. считают заданными на более узких классах множеств — на σ-кольцах, порожденных соответственно компактными множествами и компактными $G\delta$-множествами.

Пусть G — локально компактная хаусдорфова топологич. группа. Левой мерой Хаара в G наз. М., определенная на σ-кольце, порожденном всеми компактными множествами, не равная тождественно нулю и такая, что $\mu(xE)=\mu(E)$ для любых $x\in G$ и E из области определения μ. Правая мера Хаара определяется аналогично заменой условия $\mu(xE)=\mu(E)$ на условие $\mu(Ex)=\mu(E)$. В любой группе рассматриваемого типа существует и единственна (с точностью до мультипликативной положительной постоянной) левая мера Хаара. Всякая левая мера Хаара регулярна в том смысле, что $\mu(E)=\sup\{\mu(K): K\subset E\}$, где K — компактные множества. Аналогичными свойствами обладает и правая мера Хаара. Мера Лебега в $\mathbb{R}^k$ является частным случаем *Хаара меры*. См. также ст. *Мера* в топологическом векторном пространстве.

Изоморфизм пространств с мерой. Пусть $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — пространство с М. Назовем множества $E, E'\in\mathscr{S}$ μ-равными ($E=E'[\mu]$), если $\mu(E\Delta E')=0$ (здесь $E\Delta E'$ — симметрич. разность E и E'). Класс множеств $\mathscr{S}$ с таким определением равенства обозначим $\mathscr{S}_\mu$. В $\mathscr{S}_\mu$ корректно определены теоретико-множественные операции, проводимые в конечном (или счетном) числе; напр., если $E_1=E_1'[\mu]$ и $E_2=E_2'[\mu]$, то $E_1\cup E_2=E_1'\cup E_2'[\mu]$. Мера μ переносится очевидным образом на $\mathscr{S}_\mu$.

Пусть $\tilde{\mathscr{S}}_\mu$ — подмножество $\mathscr{S}_\mu$, состоящее из множеств конечной М. Функция $\rho(E, E')=\mu(E\Delta E')$ на $\tilde{\mathscr{S}}_\mu\times\tilde{\mathscr{S}}_\mu$ является метрикой. Пространство с М. $(X, \mathscr{S}, \mu)$ наз. сепарабельным, если $\tilde{\mathscr{S}}_\mu$ с метрикой ρ сепарабельно. Если $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — пространство с σ-конечной М. и σ-кольцо $\mathscr{S}$ имеет счетное число образующих (т. е.

существует счетное множество $\{E_n\} \subset \mathscr{S}$ такое, что $\mathscr{S}$ есть наименьшее содержащее его σ-кольцо), то метрич. пространство $\tilde{\mathscr{S}}_\mu$ сепарабельно.

Два пространства с М. $(X_1, \mathscr{S}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathscr{S}_2, \mu_2)$ наз. изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение φ из $(\mathscr{S}_1)_{\mu_1}$ на $(\mathscr{S}_2)_{\mu_2}$ такое, что

$$\varphi(E \setminus F) = \varphi(E) \setminus \varphi(F), \quad \varphi(E \cup F) = \varphi(E) \cup \varphi(F)$$

и $\mu_1(E) = \mu_2(\varphi(E))$ для любых E, $F \in (\mathscr{S}_1)_{\mu_1}$. Пусть теперь $(X, \mathscr{S}, \mu)$ — произвольное пространство с вполне конечной М. Существует разбиение X на непересекающиеся множества X_n, $n = 1, 2, \ldots$, из $\mathscr{S}$ такое, что ограничение μ на X_n изоморфно либо М., сосредоточенной в одной точке, либо М., с точностью до положительного множителя равной прямому произведению $\Pi_{i \in I}(U_i, \mathcal{U}_i, u_i)$, где $U_i = \{0, 1\}$, $u_i(\{0\}) = u_i(\{1\}) = 1/2$, а множество I может иметь произвольную мощность (теорема Магарам — Колмогорова). Если пространство $(X, \mathscr{S}, \mu)$ сепарабельно, неатомическое и $\mu(X) = 1$, то оно изоморфно пространству $\Pi_{i \in I}(U_i, \mathcal{U}_i, u_i)$, где I счетно, к-рое в свою очередь изоморфно единичному интервалу с мерой Лебега.

Наряду с теорией М. как функции подмножеств нек-рого множества развита также теория М. как функции элементов булева кольца (или *булевой алгебры*); эти теории во многом параллельны. Другая распространенная конструкция М. восходит к У. Юнгу (W. Young) и П. Даниелю (P. Daniell) (см. [12]). Помимо теории положительных М., имеются также развитые теории М., значения к-рых действительны, комплексны или, вообще, принадлежат нек-рым алгебраич. структурам.

Лит.: [1] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [2] Халмош П. Р., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [3] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [4] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [5] Невё Ж., Математические основы теории вероятностей, пер. с франц., М., 1969; [6] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949; [7] Варадарайн В. С., «Матем. сб.», 1961, т. 55, № 1, с. 35—100; [8] Parthasarathy K. R., Probability measures on metric spaces, N. Y.—L., 1967; [9] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [10] Сикорский Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969; [11] Владимиров Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; [12] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977; [13] Diestel J., Uhl J., Vector measures, Providence, 1977.

В. В. Сазонов.

МЕРА в топологическом векторном пространстве — термин, употребляемый применительно к мере, заданной в топологическом векторном пространстве, когда хотят подчеркнуть те свойства этой меры, к-рые связаны с линейной и топологич. структурой этого пространства. Общей проблемой при построении М. в топологич. векторном пространстве является задача продолжения *предмеры* до М. Пусть E — (действительное или комплексное) локально выпуклое пространство, $\mathfrak{A}(E)$ — алгебра его *цилиндрических множеств* и на алгебре $\mathfrak{A}(E)$ определена предмера. Задача состоит в продолжении этой предмеры до счетно аддитивной М., определенной на σ-алгебре $\mathfrak{B}_0(E)$ — наименьшей σ-алгебре, содержащей алгебру $\mathfrak{A}(E)$; $\mathfrak{B}_0(E)$ — самая узкая из всех σ-алгебр (слабоборелевской, борелевской и т. д.), естественно связанных с топологией E; для большого класса пространств E эти σ-алгебры совпадают. В частном, но наиболее важном случае, когда пространство $E = V'$, т. е. является сопряженным к нек-рому локально выпуклому пространству V, рассматриваемому в слабой $*$-топологии (так что $E' = V$), для продолжимости предмеры μ в V' до М. достаточно, чтобы ее характери-

стич. функционал (преобразование Фурье)

$$\chi(\varphi) = \int_{V'} \exp\{ix(\varphi)\}\, d\mu(x),\ x \in V',\ \varphi \in V,$$

был непрерывен в т. н. топологии Сазонова в пространстве V (т. е. топологии, порожденной всеми непрерывными гильбертовыми полунормами в V), и в ряде случаев, напр. когда V — *Фреше пространство*, необходимо, чтобы характеристич. функционал был непрерывен в исходной топологии V. Так, когда V — *ядерное пространство*, топология Сазонова совпадает с исходной топологией, и любая предмера на V' с непрерывным характеристич. функционалом продолжается до М. В случае, когда предмера определена в гильбертовом пространстве H, сформулированное выше достаточное условие ее продолжимости до М. является и необходимым. Кроме этого общего критерия продолжимости предмеры до М. существуют частные результаты такого рода, приложимые к тому или иному классу М. (или классу пространств). Напр., гауссова предмера на V', где V' — локально выпуклое пространство (т. е. предмера, сужение к-рой на любую σ-алгебру $\mathfrak{B}(L) \subset \mathfrak{B}(V')$, $L \subset V$, $\dim L < \infty$, является гауссовым распределением с корреляционным функционалом $B(\varphi_1, \varphi_2,)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in V$), продолжается до М., если существует выпуклая окрестность нуля в V, ε-энтропия к-рой в метрике, порожденной скалярным произведением $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \cdot B(\varphi_1, \varphi_2)$, меньше двух.

Для слабой сходимости последовательности (вероятностных) М. в сопряженном пространстве V' достаточны поточечная сходимость характеристич. функционалов этих М. (она же и необходима) и равностепенная непрерывность их в нуле относительно топологии Сазонова в V, а необходима равностепенная непрерывность этих функционалов относительно исходной топологии V. В случае, когда V — гильбертово пространство, известны необходимые и достаточные условия слабой компактности семейства М. в V', также выражающиеся в терминах их характеристич. функционалов. Вопрос о квазиинвариантности М. в топологическом векторном пространстве (см. *Квазиинвариантная мера*) относительно нек-рой совокупности сдвигов (множества квазиинвариантности) этого пространства (известно, что для ряда бесконечномерных векторных пространств множество квазиинвариантности ненулевой М. не может совпадать со всем пространством), а также вопрос о критериях абсолютной непрерывности одной М. относительно другой исследованы лишь (1982) для гауссовых М. Изучение М. в топологических векторных пространствах связано главным образом с *интегралами по траекториям*, а также с теорией обобщенных случайных полей и в значительной степени стимулируется приложениями этих теорий к физике и механике.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [2] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, пер. с франц., М., 1977; [3] Гихман И. И., Скороход А. В., Теория случайных процессов, т. 1, М., 1971; [4] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [5] Судаков В. Н., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1976, т. 141; [6] Смолянов О. Г., Фомин С. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4, с. 3–56.

Р. А. Минлос.

МЕРГЕЛЯНА ТЕОРЕМА — теорема о возможности равномерной полиномиальной аппроксимации функций комплексного переменного. Пусть K — компакт со связным дополнением на плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z. Тогда всякая функция f, непрерывная на K и голоморфная в его внутренних точках, равномерно на K приближается многочленами от z.

Эта теорема была доказана С. Н. Мергеляном (см. [1], [2]); она завершила большой цикл исследований

по теории приближений в комплексной плоскости и имеет много применений в различных разделах комплексного анализа.

В случае, когда K не имеет внутренних точек, это утверждение было доказано М. А. Лаврентьевым [3]; а для случая, когда K — замкнутая область со связным дополнением, соответствующая теорема доказана М. В. Келдышем [4].

Из М. т. вытекает следующее утверждение. Пусть K — произвольный компакт на плоскости $\mathbb{C}$. Для того чтобы функция f, непрерывная на K и голоморфная внутри K, равномерно приближалась многочленами от z, необходимо и достаточно, чтобы f голоморфно продолжалась во все ограниченные связные компоненты множества $\mathbb{C}\setminus K$.

Задача о приближении многочленами является частным случаем задачи о приближении рациональными функциями с полюсами вне K. С. Н. Мергелян доказал также несколько достаточных условий рациональной аппроксимации (см. [2]). Полное решение этой задачи (для компактов $K\subset\mathbb{C}$) получено в терминах *аналитических емкостей* (см. [5]).

К М. т. примыкает большой цикл работ о полиномиальных, рациональных и голоморфных приближениях в пространстве многих комплексных переменных $\mathbb{C}^n$. Здесь получены пока только частные результаты для специальных типов компактов.

Лит.: [1] Мергелян С. Н., «Докл. АН СССР», 1951, т. 78, № 3, с. 405—08; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 31—122; [3] Лаврентьев М. А., Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes, P., 1936; [4] Келдыш М. В., «Матем. сб.», 1945, т. 16, № 3, с. 249—57; [5] Витушкин А. Г., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 6, с. 141—99; [6] Некоторые вопросы теории приближений, пер. с англ., М., 1963; [7] Гамелин Т. В., Равномерные алгебры, пер. с англ., М., 1973. *Е. М. Чирка.*

МЕРОМОРФНАЯ ФУНКЦИЯ одного комплексного переменного в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ (или на римановой поверхности Ω) — голоморфная функция в области $\Omega\setminus\{a_1, a_2, \ldots\}$, к-рая в каждой особой точке a_ν имеет *полюс* (т. е. a_ν — изолированная точка множества $\{a_1, a_2, \ldots\}$, не имеющего предельных точек в Ω, и $\lim\limits_{z\to a_\nu}|f(z)|=\infty$). Совокупность $M(\Omega)$ всех М. ф. в Ω является полем относительно обычных поточечных операций с последующим доопределением в устранимых особенностях.

Отношение φ/ψ любых голоморфных в Ω функций, $\psi\not\equiv 0$, является М. ф. в Ω. Обратно, всякая М. ф. в области $\Omega\subset\mathbb{C}$ (и на некомпактной римановой поверхности Ω) представляется в виде $f=\varphi/\psi$, $\psi\not\equiv 0$, где φ, ψ голоморфны и не имеют общих нулей в Ω. Таким образом, на некомпактной римановой поверхности поле $M(\Omega)$ совпадает с полем отношений кольца $O(\Omega)$ голоморфных функций в Ω.

Всякая М. ф. $f\in M(\Omega)$ определяет непрерывное отображение $\tilde f$ области Ω в сферу Римана $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, к-рое является *голоморфным отображением* относительно стандартной комплексной структуры $\mathbb{C}\cup\{\infty\}\approx\mathbb{C}P_1$. Обратно, всякое голоморфное отображение $\tilde f\colon\Omega\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $\tilde f\not\equiv\infty$, определяет М. ф. f в Ω: множество полюсов f совпадает с дискретным множеством $\tilde f^{-1}(\infty)$ и $f(z)=\tilde f(z)\in\mathbb{C}$, если $z\in\Omega\setminus f^{-1}(\infty)$. Таким образом, М. ф. одного комплексного переменного можно отождествлять с голоморфными отображениями ($\not\equiv\infty$) в сферу Римана.

Основные задачи теории М. ф.— это вопросы существования (и построения) М. ф. с данными особенностями.

1. Задано замкнутое дискретное подмножество $a_1, a_2, \ldots\subset\Omega$ и в каждой точке a_ν — главная часть

разложения Лорана

$$f_\nu(z) = \sum_{j=1}^{n_\nu} c_{\nu j}\,(z-a_\nu)^{-j};$$

требуется найти М. ф. $f \in M(\Omega)$ с этими главными частями, т. е. такую, что f голоморфна в $\Omega \setminus \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $f-f_\nu$ голоморфна в окрестности a_ν для каждого ν. Если число точек a_ν конечно, то (в области $\Omega \subset \mathbb{C}$) задача решается тривиально функцией $\sum f_\nu$. В общем случае эту задачу решает теорема Миттаг-Леффлера: на всякой некомпактной римановой поверхности существует М. ф. с заданными главными частями f_ν, $\nu=1, 2, \ldots$ На компактной римановой поверхности (напр., на торе) эта задача в общем неразрешима — нужны дополнительные условия согласования главных частей.

Вторую основную задачу удобно формулировать в терминах *дивизоров*, т. е. отображений $D : \Omega \to \mathbb{Z}$ таких, что для всякого компакта $K \subset \Omega$ число точек $z \in K$, в к-рых $D(z) \neq 0$, конечно (число $D(z)$ наз. кратностью D в точке z). Дивизор наглядно можно записать в виде формальной суммы $\sum k_\nu a_\nu$, где $a_\nu \in \Omega$ — точки, в к-рых $D(a_\nu) =: k_\nu \neq 0$; в случае конечного числа слагаемых число $\sum k_\nu =: \deg D$ наз. степенью дивизора D. Для М. ф. f ее дивизор (f) равен 0 во всех точках, кроме нулей и полюсов f, где его кратность полагается равной соответственно порядку нуля или полюса (порядки полюсов отрицательны).

II. В точках замкнутого дискретного подмножества $\{a_1, a_2, \ldots\} \subset \Omega$ заданы «кратности» — целые числа $k_\nu \neq 0$. Требуется найти М. ф. с нулями и полюсами данных кратностей, т. е. такую, что f голоморфна в $\Omega \setminus \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $f(z)\,(z-a_\nu)^{-k_\nu}$ голоморфна и не равна нулю в окрестности a_ν, $\nu=1, 2, \ldots$ В случае конечного числа точек a_ν (и $\Omega \subset \mathbb{C}$) такой будет, напр., $f(z) = \prod (z-a_\nu)^{k_\nu}$. В общем случае задачу решает теорема Вейерштрасса: на некомпактной римановой поверхности Ω для любого заданного дивизора D существует М. ф. f, дивизор к-рой (f) совпадает с D. Для компактной римановой поверхности Ω голоморфное отображение в сферу Римана, определяемое непостоянной М. ф. f, является разветвленным накрытием, и поэтому каждое значение функция f принимает одинаково часто, в частности число нулей f равно числу ее полюсов (с учетом кратностей). Таким образом, условие $\deg(f)=0$ необходимо для разрешимости задачи II на компактной римановой поверхности. В общем оно не достаточно; необходимое и достаточное условие существования М. ф. с данным дивизором дает теорема Абеля (см. [2]).

Функции $f \in M(\Omega)$, удовлетворяющие условию $(f) + D \geqslant 0$ для данного дивизора D на компактной римановой поверхности Ω, образуют конечномерное линейное пространство O_D (над полем $\mathbb{C}$); если $\deg D < 0$, то $O_D = \{0\}$.

Теорема Римана — Роха утверждает, что

$$\dim O_D - \dim O_{K-D} = \deg D - g + 1,$$

где K — т. н. канонич. дивизор и g — род римановой поверхности Ω. Из этого соотношения получаются многие теоремы существования (если $\dim O_{K-D} + \deg D > g-2$, то $\dim O_D \geqslant 2$ и, значит, в O_D имеются непостоянные М. ф.). Напр., на всякой компактной римановой поверхности Ω рода g существует М. ф., осуществляющая не более чем $(g+1)$-листное разветвленное накрытие $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Большое место в теории М. ф. одного комплексного переменного занимает *распределения значений теория* (теория Неванлинны), изучающая распределение корней

уравнений $f(z)=a$, $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, при подходе к границе области.

Мероморфная функция нескольких комплексных переменных. Пусть Ω — область в $\mathbb{C}^n$ (или комплексное n-мерное многообразие) и $P\subset\Omega$ — (комплексное) аналитич. подмножество коразмерности 1 (или пустое). Голоморфная функция f, определенная в $\Omega\setminus P$, наз. мероморфной функцией в Ω, если для каждой точки $p\in P$ найдется сколь угодно малая окрестность $U\ni p$ в Ω и голоморфные в U функции φ, ψ без общих необратимых в $O(U)$ множителей такие, что $f=\varphi/\psi$ в $U\setminus P$. Множество $P=P_f$ наз. *полярным множеством* М. ф. f. Его подмножество $N=N_f$, к-рое локально определяется условием $\varphi=\psi=0$, наз. множеством (точек) неопределенности М. ф. f; это аналитич. подмножество Ω (комплексной) коразмерности $\geqslant 2$. В каждой точке $p\in N$ функция f не определена по существу: предельные значения $f(z)$ при $z\to p$, $z\in\Omega\setminus P$, заполняют всю сферу Римана $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. С другой стороны, в точках множества $P\setminus N$ существует $\lim\limits_{z\to p} f(z)=\infty$, и после доопределения $f(p)=\infty$ для $p\in P\setminus N$ получается голоморфное отображение Ω в сферу Римана. Обратно, если N — произвольное комплексное аналитич. подмножество Ω коразмерности $\geqslant 2$ (возможно, пустое), то любое голоморфное отображение $f:\Omega\setminus N\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ определяет М. ф. в Ω, равную f в $\Omega\setminus P$, где $P=N\cup f^{-1}(\infty)$ оказывается аналитич. подмножеством Ω коразмерности 1 или пустым. Таким образом, М. ф. f в Ω — это голоморфное отображение в сферу Римана, определенное вне аналитич. подмножества $N_f\subset\Omega$ коразмерности $\geqslant 2$.

Третье, полностью локализованное, определение М. ф. (эквивалентное приведенным выше) формулируется в терминах пучков. Пусть O — пучок ростков голоморфных функций на Ω и M_z для каждой точки $z\in\Omega$ есть поле отношений кольца O_z (слоя пучка O над точкой z). Тогда $M=\bigcup M_z$ естественно наделяется структурой пучка полей, к-рый наз. пучком ростков М. ф. в Ω. М. ф. в Ω определяется как глобальное сечение M, т. е. непрерывное отображение $f:z\to f_z$ такое, что $f_z\in M_z$ для всех $z\in\Omega$. Множества P_f и N_f определяются так: если $f_z=\varphi_z/\psi_z$, где φ_z, $\psi_z\in O_z$, $\psi_z\neq 0$, то можно считать, что φ_z и ψ_z взаимно просты, т. е. не имеют общих необратимых в O_z множителей; тогда $z\in P$, если $\psi_z(z)=0$, и $z\in N$, если $\psi_z(z)=\varphi_z(z)=0$. Значение так определенной М. ф. f в точке $z\notin P$, по определению, равно $\varphi_z(z)/\psi_z(z)$.

Как и в одномерном случае, совокупность всех М. ф. в Ω образует поле $M(\Omega)$ относительно поточечных алгебраич. операций с последующим доопределением в устранимых особенностях.

Замыкание $Z=Z_f$ множества нулей М. ф. f, т. е. множества $\{z\in\Omega\setminus P_f : f(z)=0\}$, является аналитич. подмножеством Ω коразмерности 1 (или пустым), множество неопределенности $N=Z\cap P$. На Z_f и P_f можно определить порядки (кратности) нулей и полюсов М. ф. f. Если p — регулярная точка аналитич. множества $Z\cup P$, то в нек-рой окрестности $U\ni p$ множество $(Z\cup P)\cap U$ связно и задается уравнением $g=0$, $g\in O(U)$, причем $dg\neq 0$ всюду в U. Поэтому существует максимальное целое число $k(p)$ такое, что функция $fg^{-k(p)}$ голоморфно продолжается в U; это число наз. порядком (нуля, если $p\in Z$, и полюса, если $p\in P$) М. ф. f в точке p. Функция $k(p)$ локально постоянна на множестве регулярных точек $Z\cup P$. Поэтому каждой М. ф. f в Ω можно сопоставить ее дивизор $(f)=\sum k_\nu A_\nu$, где A_ν — неприводимые компоненты $Z_f\cup P_f$ и k_ν — кратность (порядок) f в регулярных точках $Z\cup P$, принадлежащих A_ν (другие обозначения: $(f)=D_f-\Delta_f$ и т. п.). На компактном комплексном многообразии

М. ф. определяется своим дивизором однозначно с точностью до постоянного множителя.

Задачи, к-рые в одномерном случае решают теоремы Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса, в многомерном случае наз. соответственно первой (аддитивной) и второй (мультипликативной) *Кузена проблемами*. Ввиду сложности полярного множества P_f понятие главной части М. ф. f в общем не определено, и проблемы Кузена формулируются так.

I. Дано открытое покрытие $\{U_\nu\}$ многообразия Ω и в каждом U_ν задана М. ф. f_ν; требуется найти М. ф. $f \in M(\Omega)$ такую, что $f - f_\nu \in O(U_\nu)$ для всех ν.

II. Для данного дивизора $D = \sum k_\nu A_\nu$ на Ω найти М. ф. $f \in M(\Omega)$ такую, что $(f) = D$.

Условия разрешимости этих задач в многомерном случае гораздо более жесткие, чем в одномерном.

Задача о представлении М. ф. в виде отношения двух голоморфных функций наз. п р о б л е м о й П у а н к а р е. У с и л е н н а я п р о б л е м а П у а н к а р е — представимость М. ф. в виде отношения голоморфных функций, ростки к-рых в каждой точке $z \in \Omega$ взаимно просты в O_z. Проблема Пуанкаре неразрешима на связном компактном комплексном многообразии, если на нем есть непостоянные М. ф. Однако она разрешима в любой области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, более того, в любой области на *Штейна многообразии* (см. [7]). Разрешимость усиленной проблемы Пуанкаре следует из разрешимости проблемы II Кузена (обратное неверно).

Функции $f_1, \ldots, f_k \in M(\Omega)$ наз. а л г е б р а и ч е с к и з а в и с и м ы м и, если существует многочлен $F \not\equiv 0$ от k переменных с комплексными коэффициентами такой, что $F(f_1(z), \ldots, f_k(z)) \equiv 0$ в общей области определения функций f_ν. Максимальное число алгебраически независимых М. ф. на Ω наз. с т е п е н ь ю т р а н с ц е н д е н т н о с т и поля $M(\Omega)$. На любом компактном комплексном многообразии это число не превосходит его (комплексной) размерности (т е о р е м а З и г е л я), более того, это поле имеет конечное число образующих (см. [6]).

На конкретных комплексных многообразиях М. ф. могут обладать дополнительными свойствами. Так, в проективном комплексном пространстве $\mathbb{C}P_n$ множество неопределенности любой непостоянной М. ф. непусто. Всякая М. ф. на проективном алгебраич. многообразии рациональна, т. е. представляется в виде отношения p, q однородных многочленов от однородных координат. На алгебраич. многообразиях поле $M(\Omega)$ достаточно богато. С другой стороны, существуют комплексные многообразия (напр., нек-рые неалгебраич. торы), на к-рых всякая М. ф. постоянна. Многомерные обобщения теоремы Римана — Роха не столь эффективны, и теоремы существования различных классов М. ф. получаются лишь для нек-рых классов комплексных многообразий.

См. также *Вейерштрасса теорема*, *Миттаг-Леффлера теорема*, *Римана — Роха теорема*.

Лит.: [1] Н е в а н л и н н а Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [2] Ф о р с т е р О., Римановы поверхности, пер. с нем., М., 1980; [3] Х е й м а н У.-К., Мероморфные функции, пер. с англ., М., 1966; [4] Ш а б а т Б. В., Введение в комплексный анализ, ч. 1—2, М., 1976; [5] Х е р м а н д е р Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968; [6] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [7] K a j i w a r a J., S a k a i E., «Nagoya Math. J.», 1967, v. 29, p. 75—84.

Е. М. Чирка.

МЕРОМОРФНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ к о м п л е к с н ы х п р о с т р а н с т в — обобщение понятия *мероморфной функции*. Пусть X и Y — комплексные пространства, A — открытое подмножество в X такое, что $X \setminus A$ — нигде не плотное аналитич. подмножество, и пусть дано аналитич. отображение $f : A \to Y$. Отображение f наз. м е р о м о р ф н ы м о т о б р а ж е н и-

е м пространства X в Y, если замыкание Γ_f графика A^* отображения f в $X\times Y$ является аналитич. подмножеством в $X\times Y$, причем проекция $\pi:\Gamma_f\to X$ — собственное отображение. Множество Γ_f наз. г р а ф и к о м м е р о м о р ф н о г о о т о б р а ж е н и я f. Отображение $\pi:\Gamma_f\to X$ сюръективно и определяет биективное отображение множеств неприводимых компонент. Если $A_0^f\subset X$ — наибольшее открытое подмножество, на к-рое f можно продолжить в качестве аналитич. отображения, то $I_f=X\setminus A_0^f$ — аналитическое нигде не плотное подмножество пространства X, наз. м н о ж е с т в о м н е о п р е д е л е н н о с т и отображения f. Множество $\pi^{-1}(A_0^f)=A_0^{f*}$ открыто и плотно в Γ_f, причем $A^*\subseteq A_0^{f*}$ и $\Gamma_f\setminus A_0^{f*}$ аналитично и нигде не плотно в Γ_f. Ограничение $\pi:A_0^{f*}\to A_0^f$ есть изоморфизм аналитич. пространств. Если X — нормальное комплексное пространство, то $\operatorname{codim} I_f\geqslant 2$ и $\dim_x\pi^{-1}(x)>0$ тогда и только тогда, когда $z\in\pi^{-1}(x)$ и $x\in I_f$. Если X не нормально, то $\pi^{-1}(x)$ может состоять из конечного числа точек даже в случае, когда $x\notin I_f$. В случае $Y=\mathbb{C}P^1$ понятие М. о. сводится к понятию мероморфной функции.

Пусть $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, $k:X\to Z$ — мероморфные отображения комплексных пространств. Говорят, что композиция $g\circ f$ отображений f и g определена и равна k, если существует открытое всюду плотное подмножество U в X такое, что $U\subseteq A_0^f$, $f(U)\subset A_0^g$, $U\subset A_0^k$ и что $k|U=g\circ f|U$. Мероморфное отображение $f:X\to Y$ наз. б и м е р о м о р ф н ы м, если существует мероморфное отображение $g:Y\to X$ такое, что $f\circ g=1_Y$ и $g\circ f=1_X$. Композиция бимероморфных отображений $X\to Y$ и $Y\to Z$ всегда определена.

Лит.: [1] A n d r e o t t i A., S t o l l W., Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions, B. [a. o.], 1971; [2] R e m m e r t R., «Math. Ann.», 1957, Bd 133, № 3, S. 328—70.

Д. А. Пономарев.

МЕРСЕННА ЧИСЛО — простое число вида $M_n=2^n-1$, где $n=1, 2, 3, \ldots$. М. ч. рассматривались в 17 в. М. Мерсенном (M. Mersenne). Числа M_n могут быть простыми только при простых значениях n. При $n=2, 3, 5, 7$ получаются соответственно простые числа $M_n=3, 7, 31, 127$. Однако при $n=11$ число M_n будет составным. В дальнейшем при простых значениях n среди чисел M_n встречаются как простые, так и составные числа. Быстрый рост чисел M_n затрудняет их исследование. При рассмотрении конкретных чисел M_n было доказано, напр., что М. ч. являются числа M_{31} (Л. Эйлер, L. Euler, 1750) и M_{61} (И. М. Первушин, 1883). С помощью вычислительных машин был найден ряд других весьма больших М. ч., напр. число M_{11213} является М. ч. Остается нерешенной (1982) проблема о существовании бесконечного множества М. ч. Эта проблема тесно связана с вопросом о существовании совершенных чисел.

Лит.: [1] Х а с с е Г., Лекция по теории чисел, пер. с нем., М., 1953; [2] Б у х ш т а б А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966.

Б. М. Бредихин.

МЕРСЕРА ТЕОРЕМА: билинейный ряд

$$\sum_m \varphi_m(s)\,\overline{\varphi_m(t)}\,\lambda_m$$

эрмитова положительно определенного непрерывного в $D\times D$ ядра $K(s, t)$, где D — замыкание ограниченной области в евклидовом пространстве R_n, абсолютно и равномерно сходится в $D\times D$ к ядру $K(s, t)$. Здесь λ_m — характеристич. числа ядра $K(s, t)$, $\varphi_m(s)$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции. Интегральный оператор $T:L_2(D)\to L_2(D)$

$$Tf(s)=\int_D K(s, t)\,f(t)\,dt=\sum_m \frac{1}{\lambda_m}(f, \varphi_m)\,\varphi_m$$

с ядром K, удовлетворяющим условиям М. т.,— ядерный и его след $\sum_m 1/\lambda_m$ вычисляется по формуле:

$$\sum_m 1/\lambda_m = \int_D K(s, s)\, ds.$$

М. т. допускает обобщение на случай разрывных ограниченных ядер.

Теорема доказана Дж. Мерсером [1].

Лит.: [1] Mercer J., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.», 1909, v. 209, p. 415—46; [2] его же, «Proc. Roy. Soc. London. Ser. A», 1910, v. 83, p. 69—70; [3] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; [4] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960; [5] Красносельский М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966.

В. Б. Коротков.

МЕТАБЕЛЕВА ГРУППА — двуступенно *разрешимая группа*, т. е. группа, коммутант к-рой абелев. Все М. г. образуют многообразие (см. *Групп многообразие*), определяемое тождеством

$$[[x, y], [z, t]] = 1.$$

Особый интерес представляют конечно порожденные М. г. Все они финитно аппроксимируемы (см. *Финитно аппроксимируемая группа*) и удовлетворяют условию максимальности (см. *Обрыва цепей условие*) для нормальных подгрупп. Аналогичными свойствами обладают обобщения этих групп — конечно порожденные группы, у к-рых факторгруппа по абелевой нормальной подгруппе полициклическая (см. *Полициклическая группа*).

Иногда под М. г. понимают *нильпотентную группу* класса нильпотентности 2.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977.

А. Л. Шмелькин.

МЕТАЛОГИКА — логика, используемая в рассуждениях о формальной аксиоматич. теории в рамках нек-рой *метатеории*. В основаниях математики к метатеории часто предъявляются специфич. требования, связанные с отказом от нек-рых употребительных математич. абстракций с целью повышения философской убедительности метатеории. Примерами таких подвергающихся критике абстракций являются *абстракция актуальной бесконечности*, абстракция отчуждения, ответственная за появление *антиномий*, и др. Это, как правило, приводит к тому, что в метатеории используется логика, отличная от классической, напр. *модальная логика* или интуиционистская логика, если метатеория строится в рамках *интуиционизма*.

С другой стороны, в *доказательств теории* интуиционистские и другие неклассические логич. теории часто исследуются и традиционными математич. средствами без всяких специфич. ограничений, напр. средствами теории множеств. В этом случае в роли М. выступает классич. логика.

А. Г. Драгалин.

МЕТАМАТЕМАТИКА — совокупность математич. теорий, используемых при изучении формальных теорий (исчислений). М., относящаяся к изучению данной формальной теории, составляет то, что наз. *метатеорией* формальной теории.

В близком смысле термин «М.» используется как синоним *доказательств теории*.

А. Г. Драгалин.

МЕТАТЕОРЕМА – утверждение об изучаемой формальной аксиоматич. теории, полученное в рамках определенной *метатеории*.

А. Г. Драгалин.

МЕТАТЕОРИЯ — совокупность математич. средств и методов, предназначенных для описания и определения нек-рой формальной аксиоматич. теории, а также для исследования ее свойств. М. является важной составной частью метода формализации — одного из центральных методов математич. логики.

Суть этого метода можно кратко охарактеризовать следующим образом. Допустим, нас интересует нек-рая

содержательная математич. теория T_1. Это может быть сложная теория, *семантика* к-рой недостаточно интуитивно ясна (напр., это может быть теория множеств, математич. анализ, арифметика 2-го порядка и т. п.). Нас интересует, является ли T_1 непротиворечивой теорией или совместен ли с T_1 нек-рый математич. *принцип* (напр., *выбора аксиома*). С целью выяснения этого вопроса вначале формулируется точный логико-математич. язык Ω такой, что все интересующие нас утверждения T_1 записываются в виде формул языка Ω. Затем логич. принципы, употреблявшиеся в теории для получения новых фактов, формализуются в виде аксиом и чисто формальных правил вывода, позволяющих выводить новые формулы языка Ω из аксиом и уже выведенных формул. Таким образом, возникает ф о р м а л ь н а я с и с т е м а (или, иначе, ф о р м а л ь н а я а к с и о м а т и ч е с к а я т е о р и я, и с ч и с л е н и е) $\tilde{T}_1$, точно описывающая нек-рый интересующий нас фрагмент содержательной теории T_1. Существенно при этом, что формулировка $\tilde{T}_1$ не требует исчерпывающего проникновения в, быть может, весьма сложную семантику T_1. Исчисление $\tilde{T}_1$ строится по простым законам как чисто знаковая система и для понимания устройства этой знаковой системы нет нужды вникать в смысл выводимых в ней формул.

Такой подход открывает, во-первых, возможность строго математически сформулировать интересующие нас проблемы, относящиеся к выводимости нек-рых формул в $\tilde{T}_1$ и, во-вторых, исследовать $\tilde{T}_1$ средствами нек-рой содержательной теории T_2. В этой ситуации $\tilde{T}_1$ наз. п р е д м е т н о й т е о р и е й, а T_2 — ее м е т а т е о р и е й.

С точки зрения оснований математики важно, чтобы T_2 была в нек-ром отношении более надежной теорией, чем T_1, так что исследование $\tilde{T}_1$ средствами T_2 можно было бы рассматривать как действительное разъяснение и обоснование неясных деталей семантики T_1 с помощью более убедительной теории T_2. В этой связи особенное предпочтение отдается достаточно надежным М., отражающим финитные установки в математике, теориям, построенным в рамках интуиционизма или конструктивной математики. Впрочем, вне оснований математики это ограничение не является обязательным. Если нас интересует не столько вопрос об интуитивной ясности T_1, сколько просто факт о выводимости или невыводимости нек-рых формул в $\tilde{T}_1$, естественно исследовать $\tilde{T}_1$ средствами любой исторически сложившейся и убедительной для исследователя математич. теории T_2, не накладывая никаких априорных ограничений.

Можно далее исследовать аналогичным образом и метатеорию T_2, построив формальную систему $\tilde{T}_2$ и изучая уже $\tilde{T}_2$ средствами нек-рой м е т а м е т а т е о р и и T_3. Такого рода исследования характерны для *доказательств теории*.

Лит.: [1] К л и н и С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

А. Г. Драгалин.

МЕТАЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа, обладающая циклической нормальной подгруппой, факторгруппа по к-рой также циклическая. Всякая конечная группа, порядок к-рой свободен от квадратов (т. е. не делится на квадрат какого-либо числа), является М. г. Обобщением М. г. являются *полициклические группы*.

А. Л. Шмелькин.

МЕТАЯЗЫК — логико-математический язык, используемый для формулировки *метатеории*. В более широком смысле, М.— неформализованный язык, на к-ром формулируются утверждения *метаматематики*.

А. Г. Драгалин.

МЕТЕОРОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ задачи в области физики, химии и биологии атмосферы, решаемые с помощью математич. методов. Большинство М. м. з. метеорологии характеризуются сложностью и большим объемом перерабатываемой информации, поэтому для решения этих задач наряду с аналитич. методами широко используются методы численного моделирования на ЭВМ.

Математич. задачи физики атмосферы - преимущественно задачи гидротермодинамики стратифицированной жидкости с характерными особенностями, создаваемыми вращением Земли и неоднородностями рельефа и температуры поверхности Земли. Теоретич. основой математич. моделей являются законы сохранения массы, импульса и энергии, к-рые вместе с законами термодинамики и химии описывают процессы, протекающие в атмосфере, и взаимодействие атмосферы с океаном и поверхностью Земли. В математич. выражении — это системы многомерных нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, к-рые решаются в предположении, что внешним источником энергии является Солнце. Кроме функций, описывающих состояние и режим атмосферы (температура, давление, плотность, скорость ветра и др.), эти уравнения содержат ряд параметров. Под параметрами обычно понимаются коэффициенты уравнений, в нестационарных задачах — начальные значения функций, описывающих состояние атмосферы, характеристики поверхности Земли, внешние источники и др. Начальные условия определяются по результатам измерений в реальной физич. системе «атмосфера — Земля». Процесс математич. моделирования состоит из нескольких этапов: качественный анализ математич. модели (корректность постановки задачи, разрешимость ее в физически разумных классах функций и др.), построение дискретных ее аналогов, разработка вычислительных алгоритмов и программ для реализации дискретных моделей на ЭВМ, исследование чувствительности модели к вариациям параметров, оценка параметров по априорной информации и данным измерений и др. Структура математич. моделей зависит от пространственно-временных масштабов исследуемых процессов в атмосфере и способов их описания.

Численное моделирование является одним из основных средств для решения задач прогноза погоды и теории климата. Особенно большое значение приобретает проблема численного моделирования при изучении вариаций климата под влиянием естественных и антропогенных факторов и при оценке влияния деятельности человека на окружающую среду. Выбор и обоснование физич. моделей для данного класса задач тесно связаны с исследованием фундаментальных вопросов устойчивости, предсказуемости и чувствительности физич. системы, состоящей из атмосферы, океана, снежного покрова, континентов и биосферы, к-рую обычно наз. климатич. системой. Предсказуемость определяет возможности научно-детерминированного подхода к предсказанию физич. процессов и тем самым определяет возможности построения математич. моделей для описания и предсказания поведения климатич. системы или ее частей. Чувствительность характеризует степень устойчивости этой системы по отношению к вариациям внешних воздействий и внутренних параметров. Если воздействия антропогенных факторов интерпретировать как возмущения, вносимые в систему, то оценку их влияния можно рассматривать как один из прикладных аспектов теории чувствительности.

Задачей краткосрочного прогноза погоды (от нескольких часов до нескольких суток) является задача нахождения нестационарного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений гидротермодинамики

атмосферы с заданными краевыми и начальными условиями. В задачах долгосрочного прогноза погоды определяются нек-рые обобщенные или осредненные характеристики поведения атмосферы. Численный эксперимент по общей циркуляции атмосферы состоит в интегрировании соответствующих уравнений на длительный срок при идеализированных начальных данных. Нахождение стационарного решения или решения с годовым периодом есть численный эксперимент по климатич. фону.

Атмосферные процессы имеют волновую структуру. Построение отдельных типов атмосферных волн осуществляется методами нелинейной механики с использованием асимптотич. разложений в ряды по степеням малого параметра. Математич. теория атмосферных волн для линеаризованных моделей хорошо разработана. Среди решений уравнений гидродинамики выделено несколько классов волн (акустические, гравитационные, волны Росби). Среди нелинейных волн изучены лишь отдельные примеры (гравитационные волны Герстнера, нелинейные волны Росби и др.). Для выяснения структуры атмосферных движений широко используются численные методы решения задач на собственные значения и собственные функции для операторов гидротермодинамики и их дискретных аналогов. Математич. задачей атмосферной акустики является изучение распространения волн в слоистых средах. При этом используются аналитические (метод ВКБ и др.) и численные методы. Важную роль, особенно в связи с изучением и моделированием динамики циклонов и фронтов в атмосфере, имеют исследования гидродинамич. неустойчивости атмосферных волн и взаимодействие волн различных масштабов.

В области атмосферной оптики возникают специфические обратные задачи из класса условно-корректных задач. Типичным примером может быть задача восстановления параметров атмосферы по данным дистанционного зондирования со спутников. Процессы многократного рассеяния света в атмосфере исследуются различными асимптотическими и численными методами. Для решения уравнения переноса излучения в атмосфере используются численные методы. Особенно эффективным является метод Монте-Карло.

Многие теоретические и прикладные задачи метеорологии связаны с проблемой атмосферной турбулентности. Спектр масштабов турбулентности в атмосфере чрезвычайно широк. Турбулентность играет определяющую роль во взаимодействии атмосферы с океаном и с поверхностью Земли, в диффузии атмосферных примесей, в болтанке самолетов и других летательных аппаратов, в вибрации зданий под напором ветра, флуктуации световых и радиосигналов от наземных и космич. источников и т. д. Имеется несколько подходов к созданию математич. моделей турбулентности и способов ее параметризации.

При решении задач метеорологии возникает ряд проблем, характерных для сложных задач математич. физики. Это прежде всего подготовка входных данных (объективный анализ, статистич. обработка временных рядов на сетке измерений, пространственно-временной анализ и согласование метеорологич. полей), а также использование методов теории чувствительности и оптимизации для идентификации параметров моделей по данным измерений. Математич. модели в метеорологии имеют большое число степеней свободы, и поэтому возникает проблема их уменьшения (напр., посредством параметризации или за счет использования информативных обобщенных переменных).

К М. м. з. относятся задачи, связанные с изучением и оценкой влияния деятельности человека на атмосферу. Это — задачи моделирования микроклимата горо-

дов и индустриальных районов с учетом антропогенных факторов, оценка загрязнения атмосферы промышленными выбросами, оценка влияния изменений поверхности Земли на динамику и термич. режим атмосферы и др. Проблема выбора эффективной хозяйственной политики формализуется с помощью методов теории оптимизации, примененной к задачам метеорологии. В частности, задача оптимального размещения промышленных комплексов с учетом санитарно-допустимых норм загрязнения окружающей среды формулируется математически как вариационная задача с ограничениями.

Комплекс математич. задач, включающий практически все перечисленные выше, возникает в связи с проблемой мониторинга при реализации режима слежения за атмосферными процессами локального и глобального масштабов.

Лит.: [1] Белов П. Н., Практические методы численного прогноза погоды, 2 изд., Л., 1967; [2] Блинова Е. Н., «Докл. АН СССР», 1943, т. 39, № 7, с. 284—87; [3] Гандин Л. С., Объективный анализ метеорологических полей, Л., 1963; [4] Голицын Г. С., Введение в динамику планетных атмосфер, Л., 1973; [5] Кибель И. А., Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды, М., 1957; [6] Кондратьев К. Я., Актинометрия, Л., 1965; [7] Лайхтман Д. Л., Физика пограничного слоя атмосферы, 2 изд., Л., 1970; [8] Лоренц Э. Н., Природа и теория общей циркуляции атмосферы, пер. с англ., Л., 1970; [9] Малкевич М. С., Оптические исследования атмосферы со спутников, М., 1973; [10] Марчук Г. И., Численные методы в прогнозе погоды, Л., 1967; [11] Матвеев Л. Т., Основы общей метеорологии. Физика атмосферы, Л., 1965; [12] Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 1—2, М., 1965—67; [13] Нелинейные системы гидродинамического типа, М., 1974; [14] Томпсон Ф. Д., Анализ и предсказание погоды численными методами, пер. с англ., М., 1962; [15] Эккарт К., Гидродинамика океана и атмосферы, пер. с англ., М., 1963; [16] Юдин М. И., Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды, Л., 1963.

Г. И. Марчук.

МЕТРИЗУЕМОЕ ПРОСТРАНСТВО — пространство, топология к-рого порождается нек-рой метрикой по правилу: точка принадлежит замыканию множества в том и только в том случае, если она лежит на нулевом расстоянии от этого множества. Если такая метрика существует, то она не единственна — за исключением того случая, когда пространство пусто или состоит из одной лишь точки. В частности, топология каждого М. п. порождается нек-рой ограниченной метрикой. В М. п. выполняются сильные *отделимости аксиомы*: они нормальны и даже коллективно нормальны. Каждое М. п. паракомпактно. Все М. п. удовлетворяют первой аксиоме счетности. Но ни одно из названных условий, ни их совокупность недостаточны для метризуемости пространства. Достаточное условие метризуемости было найдено П. С. Урысоном (1923): каждое *нормальное пространство* (и даже каждое *регулярное пространство* — А. Н. Тихонов, 1925) со счетной *базой* метризуемо. Первый общий критерий метризуемости пространства был предложен в 1923 П. С. Александровым и П. С. Урысоном (см. [1]). На его основе были выработаны два следующих более совершенных критерия метризуемости: 1) пространство метризуемо в том и только в том случае, когда оно коллективно нормально и обладает счетным измельчающимся множеством открытых покрытий; 2) пространство метризуемо, если и только если оно обладает счетным фундаментальным множеством открытых покрытий и удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости (критерий Стоуна — Архангельского). При этом множество ξ открытых покрытий пространства X наз. фундаментальным, если для каждой точки $x \in X$, каждой ее окрестности Ox найдутся покрытие $\gamma \in \xi$ и окрестность O_1x точки x такие, что каждый элемент покрытия γ, пересекающийся с O_1x, содержится в Ox. Указанные критерии связаны со следующим принципиально важным свойством неограниченной делимости, или звездной нормальности, метризу-

емых пространств. В каждое открытое покрытие γ М. п. X можно вписать открытое покрытие γ' такое, что, какова бы ни была точка $x\in X$, найдется $U\in\gamma$, для к-рого $\bigcup\{W\in\gamma' : x\in W\}\subset U$.

На другой важной концепции — локальной конечности — основаны общие метризационные критерии. Критерий Нагаты — Смирнова: пространство X метризуемо в том и только в том случае, если оно регулярно и обладает базой, распадающейся на счетное множество *локально конечных семейств* множеств. Критерий Бинга аналогичен, но в нем вместо локально конечных фигурируют *дискретные семейства множеств*. Удобные варианты приведенных выше основных критериев метризуемости связаны с понятиями равномерной базы и регулярной базы. База $\mathscr{B}$ пространства X наз. регулярной (равномерной), если для всякой точки $x\in X$ и любой ее окрестности Ox найдется окрестность O_1x этой точки такая, что число элементов базы $\mathscr{B}$, пересекающих одновременно O_1x и дополнение к Ox, конечно (соответственно, если множество $\{U\in\mathscr{B} : U\ni x,\ U\not\subset Ox\}$ конечно). Пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда оно коллективно нормально и обладает равномерной базой. Наконец, для метризуемости T_1-пространства необходимо и достаточно, чтобы оно обладало регулярной базой. Регулярные базы удобны тем, что они вскрывают механизм паракомпактности произвольного М. п.: чтобы вписать в произвольное открытое покрытие γ пространства X, обладающего регулярной базой $\mathscr{B}$, локально конечное открытое покрытие, достаточно взять совокупность всех максимальных элементов семейства

$$\mathscr{B}_\gamma=\{U\in\mathscr{B}\text{: существует } W\in\gamma \text{ такое, что } U\subset W\}.$$

Метризационные критерии достигают простоты в ряде специальных классов пространств. Так, для метризуемости бикомпакта X любое из следующих четырех условий необходимо и достаточно: а) X обладает счетной базой; б) X обладает точечно-счетной базой; в) в X есть счетная *сеть*; г) диагональ в $X\times X$ имеет тип G_δ. Для метризуемости пространства топологич. группы необходимо и достаточно, чтобы в последнем выполнялась первая аксиома счетности — причем тогда пространство метризуемо инвариантной метрикой (напр., по отношению к умножению слева).

Характерным свойством М. п. является совпадение для них ряда мощностных характеристик. В частности, для М. п. совпадают число Суслина, число Линделёфа, плотность, протяженность, вес. Несовпадение этих чисел свидетельствует о неметризуемости соответствующих пространств.

Не всякое М. п. метризуемо полной метрикой; таково, напр., пространство рациональных чисел. Пространство метризуемо полной метрикой в том и только в том случае, если оно метризуемо и является множеством типа G_δ в нек-ром содержащем его бикомпакте. Важным топологич. свойством пространств, метризуемых полной метрикой, является свойство Бэра: пересечение любого счетного семейства всюду плотных открытых множеств всюду плотно.

К М. п. наиболее близки по свойствам т. н. моровские пространства — вполне регулярные пространства, обладающие счетным измельчающимся семейством открытых покрытий, и кружевные пространства.

Широкий спектр обобщений концепции М. п. получается, если варьировать аксиомы метрики, ослабляя их в том или ином отношении и рассматривая порожденные такими v-метриками топологии. На этом пути получаются симметризуемые пространства — путем отказа от аксиомы треугольника. В эту схему укладываются и моровские пространства. Дру-

гое важное обобщение концепции метризуемости связано с рассмотрением «метрик» со значениями в полуполях и других алгебраических образованиях общей природы.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [2] Engelking R., General topology, Warsz., 1977; [3] Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А., Метрические пространства над полуполями, Ташк., 1961.

А. В. Архангельский.

МЕТРИКА, расстояние на множестве X,— определенная на декартовом произведении $X\times X$ функция ρ с неотрицательными действительными значениями, удовлетворяющая при любых $x, y\in X$ условиям:

1) $\rho(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$ (аксиома тождества);

2) $\rho(x, y)+\rho(y, z)\geqslant\rho(x, z)$ (аксиома треугольника);

3) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ (аксиома симметрии).

Множество X, на к-ром может быть введена М., наз. метризуемым. Множество X, наделенное некоторой М., наз. метрическим пространством.

Примеры. 1) На любом множестве имеется дискретная метрика:

$$\rho=1\ (x\neq y)\ \text{и}\ \rho=0\ (x=y).$$

2) В пространстве $\mathbb{R}^n$ возможны разные М., среди них:

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum(x_i-y_i)^2},$$

$$\rho(x, y)=\sup_i|x_i-y_i|,$$

$$\rho(x, y)=\sum|x_i-y_i|,$$

здесь $\{x_i\}$, $\{y_i\}\in\mathbb{R}^n$.

3) В римановом пространстве М. определяется *метрическим тензором* или дифференциальной квадратичной формой (в нек-ром смысле это — аналог первой М. из примера 2)). Обобщение М. этого типа см. в ст. *Финслерово пространство.*

4) В функциональных пространствах над (би)компактом X также вводятся разные М., напр. равномерная метрика

$$\rho(f, g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$$

(аналог второй М., из примера 2)), интегральная метрика

$$\rho(f, g)=\int_X|f-g|\,dx.$$

5) В нормированном пространстве над $\mathbb{R}$ М. определяется через норму $|\cdot|$:

$$\rho(x, y)=|x-y|.$$

В нормированном кольце — более сложная формула:

$$\rho(x, y)=|x+y|-|xy|.$$

6) В метрич. пространстве вводится другая М.— т. н. *внутренняя метрика.*

7) В пространстве замкнутых подмножеств метрич. пространства определяется *хаусдорфова метрика.*

Следует заметить, что в традиционном определении М. условие 3) и требование неотрицательности излишни, т. е. вытекают уже из достаточности условия 1) и условия 2).

Если вместо 1) выполняется лишь условие:

1′) $\rho(x, y)=0$, если $x=y$ (так что при $\rho=0$ не всегда $x=y$), функция ρ наз. псевдометрикой [2], [3], или отклонением [4].

М. (и даже псевдометрика) позволяет определить ряд дополнительных структур на множестве X. Прежде все-

го, это — топология (см. *Топологическое пространство*), кроме того — равномерная (см. *Равномерное пространство*) или близостная (см. *Близости пространство*) структуры. Термин М. используется также и для обозначения более общих понятий, к-рые не обладают всеми свойствами 1) — 3), таковы, напр., *индефинитная метрика*, *симметрика* и т. д.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Келли Дж. Л., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [3] Куратовский К., Топология, [пер. с англ.], т. 1, М., 1966; [4] Бурбаки Н., Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь, пер. с франц., М., 1975.

М. И. Войцеховский.

МЕТРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ, оператор наилучшего приближения,— многозначное отображение $P_M: x \to P_M x$, ставящее в соответствие каждому элементу x метрич. пространства $X = (X, \rho)$ совокупность

$$P_M x = \{m \in M : \rho(x, m) = \rho(x, M)\}$$

наилучшего приближения элементов из множества $M \subset X$. Если M — *чебышевское множество*, то М. п.— однозначное отображение. Задачу построения элемента наилучшего приближения часто решают приближенно, т. е. находят элемент из множества

$$P_M^t x = \{m \in M : \rho(x, m) \leqslant t + \rho(x, M)\},$$

где $t > 0$ достаточно мало. По свойствам отображения $P_M^t : x \to P_M^t x$ иногда можно судить о множестве M. Так, если для любого элемента x нормированного пространства X существует число $t = t(x) > 0$ такое, что $P_M^t x$ выпукло (связно), то множество M выпукло (соответственно связно).

С точки зрения приложений полезно знать, обладает ли М. п. такими свойствами, как линейность, непрерывность, равномерная непрерывность и т. д. М. п. на чебышевское подпространство нормированного пространства X, вообще говоря, не линейна. Если М. п. на каждое подпространство фиксированной размерности является однозначной и линейной, то X линейно изометрично пространству с внутренним произведением. М. п. на непустое *аппроксимативно компактное множество* в метрич. пространстве полунепрерывна сверху, в частности, в нормированном пространстве М. п. на конечномерное чебышевское подпространство непрерывна; полунепрерывности снизу М. п. может не быть, если это подпространство не чебышевское. Существует рефлексивное строго выпуклое пространство и в нем бесконечномерное подпространство, М. п. на к-рое разрывна. Для М. п. на любое замкнутое выпуклое множество M гильбертова пространства выполняется условие Липшица

$$\| P_M x - P_M y \| \leqslant K \| x - y \|$$

с константой $K = 1$.

Свойство непрерывности М. п. и ее обобщений находит применение в некорректных задачах, задаче о выпуклости чебышевских множеств, при построении элементов наилучшего приближения и т. д.

Лит.: [1] Singer I., The theory of best approximation and functional analysis, Phil., 1974; [2] Власов Л. П., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 6, с. 3—66; [3] Бердышев В. И., в кн.: Теория приближения функций. Тр. Международной конференции по теории приближения функций. Калуга. 1975, М., 1977, с. 37—41.

В. И. Бердышев.

МЕТРИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ — числовая характеристика компакта, определяемая с помощью покрытия «эталонами меры», число к-рых и определяет М. р. Пусть F — компакт, $N_F(\varepsilon)$ — минимальное число множеств с диаметром, не превосходящим ε, необходимое для того, чтобы они покрывали F. Эта зависящая от метрики F функция принимает целочисленные значения для всех $\varepsilon > 0$ и неограниченно возрастает при

$\varepsilon \to 0$; она наз. функцией объема F. Метрическим порядком компакта F наз. число

$$k = \underline{\lim} \left(- \frac{\ln N_F(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right).$$

Эта величина не является еще топологич. инвариантом. Так, метрич. порядок жордановой дуги с евклидовой метрикой равен 1, а для жордановой дуги, проходящей через совершенно вполне несвязное множество в $\mathbb{R}^n$ положительной меры, эта величина равна n. Однако нижняя граница метрич. порядков для всех метрик компакта F (наз. метрической размерностью) равна его *Лебега размерности* (теорема Понтрягина — Шнирельмана, 1931, см. прил. к [1]).

Лит.: [1] Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ., М., 1948.

М. И. Войцеховский.

МЕТРИЧЕСКАЯ СВЯЗНОСТЬ — линейная связность в векторном расслоении $\pi : X \to B$, снабженном билинейной метрикой в слоях, при к-рой параллельное перенесение вдоль произвольно кусочно гладкой линии в B сохраняет метрику, т. е. скалярное произведение векторов остается постоянным при их параллельном перенесении. Если билинейная метрика задается тензорным полем $g_{\alpha\beta}$, а линейная связность — матрицей 1-форм ω_α^β, то эта связность является метрической, если

$$dg_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma + g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma.$$

В случае невырожденной симметрической билинейной метрики, когда $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, $\det |g_{\alpha\beta}| \neq 0$, М. с. является *евклидовой связностью*. В случае невырожденной кососимметрич. метрики М. с. наз. симплектической связностью в векторном расслоении.

При проективизации векторного расслоения, когда симметрическая билинейная метрика порождает нек-рую проективную метрику в каждом слое (как в проективном пространстве), роль М. с. играет проективнометрич. связность.

Ю. Г. Лумисте.

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ — то же, что *эргодическая теория*.

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ — раздел теории функций действительного переменного, в к-ром свойства функций изучаются на основе понятия *меры* множества.

Исследованиями многих математиков 19 в. была создана новая математич. дисциплина — теория функций действительного переменного. К кон. 19 в. четко выкристаллизовались нек-рые проблемы, требовавшие своего решения: проблема меры множества, длин кривых и площадей поверхностей, представления функций рядами (в частности, тригонометрическими), примитивной и интеграла, взаимосвязи интегрирования и дифференцирования, почленного интегрирования рядов и др. Решение этих проблем имело общематематич. значение; в этом направлении работали крупнейшие математики, чем, в частности, и объясняется бурное развитие М. т. ф. в 1-й трети 20 в. Основы М. т. ф. были заложены Э. Борелем (E. Borel), Р. Бэром (R. Baire), А. Лебегом (H. Lebesgue) и др.

В 1902 А. Лебег ввел чрезвычайно важное понятие меры множеств (*Лебега меры*). На основе этого понятия им была создана теория интеграла (*Лебега интеграла*). Эти два основных понятия — мера и интеграл — составляют фундамент М. т. ф., к-рая занимается изучением свойств функций, производных, интегралов, функциональных рядов (в частности, тригонометрич. рядов и общих ортогональных рядов), площадей поверхностей и т. п.

Многие основные свойства меры и интеграла Лебега были установлены в нач. 20 в. самим А. Лебегом (счетная аддитивность меры и интеграла, предельный переход под знаком интеграла, дифференцирование неопределенного интеграла и др.). Кроме того, А. Лебег дал

многочисленные приложения этих исследований к различным вопросам математич. анализа (площади поверхностей, разнообразные свойства тригонометрич. рядов, сингулярных интегралов и др.). Дж. Витали (G. Vitali, 1904) независимо открыл меру, тождественную мере Лебега, а несколько позже У. Юнг (W. Young, 1905) также построил интеграл и меру, эквивалентные интегралу и мере Лебега. Однако они не развили свою теорию и не дали ей в этот период существенных приложений. Начало развития М. т. ф. в России следует отнести к нач. 20 в., хотя первые крупные результаты в этой области были получены русскими математиками во 2-м десятилетии 20 в. (Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лузин), когда произошло становление нового крупного центра исследований по М. т. ф. Создателем и руководителем школы М. т. ф. в СССР был Н. Н. Лузин.

Развитие М. т. ф. можно охарактеризовать двумя большими направлениями. Первое направление: на базе меры множества и интеграла Лебега, а также их обобщений исследуются как общие свойства функций, интегралов, тригонометрич. рядов, ортогональных рядов и т. п., так и их более конкретные тонкие свойства, выявление и изучение к-рых при помощи методов классич. анализа было труднодоступным. Это направление и представляет, собственно, М. т. ф. Второе, не менее важное направление, состоит в проникновении методов М. т. ф. в другие разделы математики, а также в создании на базе ее идей других новых областей математики, к-рые в свою очередь оказывают стимулирующее влияние на теорию функций.

На базе М. т. ф. началось детальное изучение *граничных свойств аналитических функций*; была создана *метрическая теория чисел*, методы к-рой неразрывно связаны с М. т. ф. Велико влияние теории функций на создание функционального анализа.

Ниже отмечаются нек-рые характерные результаты по М. т. ф., каждый из к-рых знаменовал собой решение того или иного узлового вопроса, повлекшего в дальнейшем многочисленные исследования. Так, в 1911 Д. Ф. Егоров доказал, что всякая сходящаяся последовательность измеримых функций является равномерно сходящейся, если пренебречь нек-рым множеством сколь угодно малой меры (см. *Егорова теорема*). Н. Н. Лузин (1912) установил, что всякая измеримая функция становится непрерывной, если пренебречь некоторым множеством сколь угодно малой меры (см. *Лузина C-свойство*). Эти два результата трудно переоценить, т. к., с одной стороны, ими устанавливается определенная взаимосвязь между основными понятиями М. т. ф. и классич. анализа, а с другой — они являются фундаментом, на к-ром очень часто строятся многие исследования по теории функций.

Н. Н. Лузин доказал (1915) существование примитивных в классе измеримых функций. Именно, он показал, что для всякой конечной измеримой функции $f(x)$ существует непрерывная функция $F(x)$ такая, что $F'(x)=f(x)$ почти всюду. На основе этого утверждения он решил задачу Дирихле в классе измеримых функций. Это послужило началом активного развития московской школы теории функций комплексного переменного и, особенно, началом изучения граничных свойств аналитич. функций.

Интеграл Лебега не разрешает проблемы нахождения примитивной $F(x)$ по точной конечной производной $F'(x)=f(x)$. Эту проблему решил А. Данжуа (A. Denjoy, 1912) на основе специального интеграла (узкий интеграл Данжуа), к-рый естественно обобщает интеграл Лебега и не противоречит ему (см. *Данжуа интеграл*). В 1916 А. Данжуа и А. Я. Хинчин построили еще более общий интеграл, к-рый носит название интеграла Данжуа в широком смысле и к-рый связан с *аппроксимативной дифференцируемостью*.

В начале 3-го десятилетия 20 в. Д. Е. Меньшов и Х. Радемахер (H. Rademacher) установили, что последовательность $\log^2 n$ является множителем Вейля для сходимости почти всюду рядов по любым ортонормированным системам. Кроме того (и это является особенно важным и принципиальным), Д. Е. Меньшов доказал (1923), что указанное выше утверждение теряет силу, если последовательность $\{\log^2 n\}$ заменить на любую последовательность $\{\omega(n)\}$ с $\omega(n)=o(\log^2 n)$ при $n\to\infty$. Эти результаты стали тем фундаментом, на к-ром основывались и основываются многочисленные исследования по теории сходимости и суммируемости ортогональных рядов.

В 1926 А. Н. Колмогоров построил пример всюду расходящегося тригонометрич. ряда Фурье от суммируемой функции. В то же время длительный период оставалась нерешенной проблема сходимости почти всюду тригонометрич. рядов Фурье от функций $f\in L^2$, поставленная Н. Н. Лузиным в 1914. Положительное решение этой проблемы было дано Л. Карлесоном (L. Carleson) лишь в 1966 (см. *Карлесона теорема*). П. Дюбуа-Реймоном (P. du Bois-Reymond), А. Лебегом и Ш. Валле Пуссеном (Ch. la Vallée Poussin) был решен вопрос о восстановлении коэффициентов тригонометрич. рядов, сходящихся к суммируемым функциям. В 40-х гг. 20 в. А. Данжуа построил интеграл, при помощи к-рого им была решена проблема восстановления коэффициентов по сумме произвольных всюду сходящихся тригонометрич. рядов. В это же время Д. Е. Меньшов доказал, что всякая конечная измеримая функция представима нек-рым почти всюду сходящимся тригонометрич. рядом.

Г. Кантором (G. Cantor), У. Юнгом, Н. К. Бари и др. были заложены основы теории единственности тригонометрич. рядов.

Лит.: [1] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.—Л., 1934; [2] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1951; [3] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; [4] Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; [5] Халмош П. Р., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [6] Паплаускас А. Б., Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега, М., 1966; [7] Песин И. Н., Развитие понятия интеграла, М., 1966; [8] Меньшов Д. Е., Ульянов П. Л., «Вестн. Моск. ун-та. Матем., мех.», 1967, № 5, с. 24—36; [9] Колмогоров А. Н., Теория функций действительного переменного, в кн.: Наука в СССР за пятнадцать лет. Математика, М.—Л., 1932; [10] Метрическая теория функций действительного переменного, в кн.: Математика в СССР за тридцать лет, М.—Л., 1948; [11] Лозинский С. М., Натансон И. П., Метрическая и конструктивная теория функций вещественной переменной, в кн.: Математика в СССР за сорок лет, т. 1, М., 1959; [12] Ульянов П. Л., Метрическая теория функций, в кн.: История отечественной математики, т. 3, К., 1968; [13] Итоги науки. Математический анализ. 1970, М., 1971.

П. Л. Ульянов.

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — раздел теории чисел, в к-ром изучаются и метрически (т. е. на основе теории *меры*) характеризуются множества чисел, обладающих определенными арифметич. свойствами. М. т. ч. тесно связана с теорией вероятностей, что иногда дает возможность использовать ее методы и результаты для анализа теоретико-числовых моделей.

Многие задачи, касающиеся арифметич. свойств отдельных чисел, допускают также метрич. постановку; напр., наряду с вопросом о том, будет ли равномерно распределена последовательность дробных долей $\{\alpha n\}$, $n=1, 2, \ldots$, при $\alpha=\sqrt{2}$ или $\ln 3$, можно ставить вопрос о том, какова мера Лебега тех α из интервала $(0,1)$, для к-рых эта последовательность равномерно распределена. Такое метрич. обобщение задачи часто оказывается весьма полезным и даст возможность представить явление в целом. Иногда на основе метрич. рассуждений без особого труда удается доказать существование чисел с определенными арифметич. свойствами, тогда как прямое построение таких чисел бывает сложным (нормальные числа Бореля, числа с определенными свойствами аппроксимации и т. п.).

Наиболее значительные достижения М. т. ч. относятся к *диофантовых приближений метрической теории*, к теории равномерного распределения числовых последовательностей, к теории *цепных дробей* и др. областям теории чисел.

Одной из первых теорем М. т. ч. является теорема Бореля (E. Borel, 1909): почти все (в смысле меры Лебега) действительные числа α интервала (0, 1) нормальны в системе счисления с любым целым основанием g. В другой равносильной формулировке эта теорема утверждает, что дробные доли $\{\alpha g^n\}$, $n=1, 2, \ldots$, равномерно распределены на интервале (0, 1). Теорема Бореля обобщалась и углублялась многими математиками. Плодотворной оказалась точка зрения, основанная на том, что «цифры» $0, 1, \ldots, g-1$, встречающиеся в разложении α в системе счисления с основанием g (g-ичной системе), являются независимыми случайными величинами. Явно или неявно основываясь на этом обстоятельстве и применяя методы, разработанные в теории вероятностей для отыскания асимптотич. законов распределения сумм независимых и слабо зависимых случайных величин, были решены основные вопросы, касающиеся распределения «цифр» $0, 1, \ldots, g-1$, и произвольных групп «цифр» в g-ичном разложении чисел α, «случайно» выбираемых в интервале (0,1). Напр., полагая

$$\alpha=\frac{a_1}{g}+\frac{a_2}{g^2}+\ldots,$$

где a_i — числа ряда $0, 1, \ldots, g-1$, находят, что $a_i=a_i(\alpha)$ можно рассматривать как независимые случайные величины, определенные на интервале (0, 1) с мерой Лебега на этом интервале в качестве вероятностной меры. Если a — любое число ряда $0, 1, \ldots, g-1$, $k_n(\alpha)$ — число тех $i\leqslant n$, для к-рых $a_i(\alpha)=a$ при данном α, то

$$(k_n(\alpha)-n/g)\,g/\sqrt{n(g-1)}$$

распределяется асимптотически по нормальному закону, т. е. при любом действительном x мера множества тех α, для к-рых

$$k_n(\alpha)-n/g<\frac{x}{g}\sqrt{n(g-1)}$$

при $n\to\infty$ стремится к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt.$$

Г. Вейль (H. Weyl, 1916) доказал, что если a_n, $n=1, 2, \ldots$, — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, то для почти всех α дробные доли $\{\alpha a_n\}$ равномерно распределены на интервале (0, 1). В предположении, что a_n являются значениями нек-рой функции, определенной на бесконечном интервале $(1, \infty)$ и обладающей специальными аналитич. условиями, эта теорема допускает уточнения, касающиеся «качества» равномерного распределения. И. Коксма [8] доказал общую теорему о *распределении дробных долей* функции двух переменных $f(\alpha, n)$, где α — действительное переменное, принимающее почти все значения из интервала $(1, \infty)$, а $n=1, 2, \ldots$. Напр., дробные доли $\{\alpha^n\}$ для почти всех $\alpha>1$ равномерно распределены на интервале (0, 1).

Помимо вопросов, связанных с нормальными числами Бореля, одним из основных объектов М. т. ч. в начале ее развития была метрич. теория цепных дробей. Пусть α — действительное число из интервала (0, 1), $\alpha=[0, a_1, \ldots]$ — его разложение в цепную дробь, $r_n(\alpha)=[a_n, a_{n+1}, \ldots]$, $q_n(\alpha)$ — знаменатель n-й подходящей дроби $[0, a_1, \ldots, a_n]$. А. Я. Хинчин установил (1935), что для почти всех α при $n\to\infty$

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\to K=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)^{\ln k/\ln 2}=$$
$$=2{,}68545\ldots,$$

и существует такая абсолютная постоянная γ, что для почти всех α будет $\sqrt[n]{q_n(\alpha)} \to \gamma$ при $n \to \infty$. П. Леви (P. Lévy) нашел, что $\gamma = \exp(\pi^2/12 \ln 2)$. Кроме того, А. Я. Хинчин [5] использовал полученные им результаты о метрич. свойствах цепных дробей для доказательства теоремы о приближении чисел рациональными. Пусть $f(x)$ — положительная непрерывная функция положительного аргумента x, причем $xf(x)$ — невозрастающая функция. Тогда неравенство

$$|\alpha - p/q| < f(q)/q \qquad (*)$$

имеет для почти всех α бесконечное множество решений в целых p и q ($q>0$), если при нек-ром $c>0$ интеграл

$$\int_c^\infty f(x)\,dx$$

расходится; напротив, неравенство (*) имеет для почти всех α не более конечного числа решений в целых p и q ($q>0$), если интеграл сходится для всех $c>0$.

Эта теорема переосмысливалась и обобщалась с различных точек зрения. Она стала исходным пунктом интенсивного развития метрич. теории диофантовых приближений. П. Эрдёш [7], завершая серию работ своих предшественников, получил следующие результаты. Необходимое и достаточное условие того, что для почти всех α бесконечное число $q_i(\alpha)$ содержится в произвольной последовательности $n_1<n_2<\ldots$, есть

$$\sum_{i=1}^\infty \varphi(n_i)\, n_i^{-2} = \infty,$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. При этом же условии для почти всех α неравенство

$$|\alpha - m/n_i| < \varepsilon/n_i^2, \quad (m,\ n_i)=1,$$

где m — целое, $\varepsilon>0$ — любое, имеет бесконечное число решений. Эти результаты близки к гипотезе (1982): если $n_1<n_2<\ldots$ — произвольная последовательность целых чисел, $\delta_i>0$ — любые, то неравенство

$$|\alpha - m/n_i| < \delta_i/n_i, \quad (m,\ n_i)=1,$$

имеет бесконечное число решений для почти всех α тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{\delta_i \varphi(n_i)}{n_i} = \infty.$$

Р. О. Кузьмин доказал (1928), что при любом $x \in (0, 1)$ мера $m_n(x)$ множества тех α, для к-рых $r_n(\alpha) - a_n < x$, равна

$$\ln(1+x)/\ln 2 + O\left(e^{-\lambda\sqrt{n}}\right),$$

где $\lambda>0$ — абсолютная постоянная. Асимптотич. соотношение

$$m_n(x) \sim \ln(1+x)/\ln 2 \quad (n \to \infty)$$

было известно К. Гауссу (C. Gauss), но он не опубликовал его, а в одном из писем к П. Лапласу (P. Laplace) указывал, что было бы весьма желательно оценить разность $m_n(x) - \ln(1+x)/\ln 2$. Оценка Кузьмина $O(e^{-\lambda\sqrt{n}})$ была улучшена П. Леви (1929) до $O(e^{-\lambda n})$. Метод Кузьмина явился источником многих других метрич. теорем о цепных дробях.

Современная трактовка метрич. вопросов, связанных с нормальными числами Бореля и с теорией цепных дробей, использует идеи эргодич. теории. Это основано на том, что отображения интервала (0, 1) на себя $\alpha \to \{\alpha g\}$ и $\alpha \to \{1/\alpha\}$, тесно связанные с разложением α в g-ичную дробь и цепную дробь соответственно, являются сохраняющими меру и эргодическими: первое сохраняет меру Лебега, второе — меру $\mu(A)$, опреде-

ляемую для каждого измеримого множества A из $(0, 1)$ формулой

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{dx}{1+x}.$$

С этой точки зрения теорема Гаусса — Кузьмина без оценки остаточного члена непосредственно следует из индивидуальной эргодич. теоремы Биркгофа. Соображения эргодич. теории оказываются полезными и при оценке остатков в нек-рых предельных теоремах. Напр., результаты А. Я. Хинчина допускают (см. [10]) уточнение:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = K + O\left(n^{-1/2} (\ln n)^{3/2+\varepsilon}\right),$$

$$\sqrt[n]{q_n(\alpha)} = \exp\left(\pi^2/12 \ln 2\right) + O\left(n^{1/2} (\ln n)^{2+\varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно. Идеи эргодич. теории оказываются полезными и во многих других задачах М. т. ч. (линейные диофантовы приближения, распределение значений матричной показательной функции, алгоритм Якоби — Перрона и др.).

В нек-рых случаях метрич. характеристика числовых множеств, основанная на мере Лебега, оказывается слишком грубой, и тогда применяют более тонкие характеристики, напр. размерности Хаусдорфа. Такой подход оказывается особенно полезным в теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел. Напр., было установлено [6], что при любых фиксированных n и $w \geqslant n+1$ множество тех действительных чисел x, для к-рых неравенство

$$|x - \alpha| < h_\alpha^{-w}$$

имеет бесконечное число решений в алгебраич. числах α степени n и высоты h_α, имеет размерность Хаусдорфа, равную $(n+1)/w$. Если $w < n+1$, то соответствующее неравенство имеет бесконечное число решений для почти всех x, в то время как предполагается, что это верно для всех x (гипотеза Вирзинга). Аналогичные результаты известны для комплексных чисел. Они непосредственно связаны с фундаментальными вопросами классификации трансцендентных чисел [3].

С метрич. точки зрения анализируются не только задачи, касающиеся действительных и комплексных чисел, но также p-адических чисел, аделей, формальных степенных рядов и т. д. и вообще элементов всех пространств, в к-рых введена мера и в к-рых ставится «арифметическая» задача. В частности, для p-адических чисел верны аналоги многих метрич. теорем теории равномерного распределения и теории диофантовых приближений действительных чисел, несмотря на то, что область p-адических чисел отличается своей метрикой и топологией (см. [3], [9]).

Метрич. подход оказывается эффективным при решении «некорректно» поставленных задач, когда недостаток информации об объекте исследования компенсируется допущением «случайного» выбора этого объекта из нек-рого множества сходных объектов. При этом, конечно, не удается исследовать первоначальный объект, что иногда в принципе невозможно из-за недостатка информации о нем, но получаются выводы, что «почти все» объекты из рассматриваемого множества обладают определенными свойствами. Напр., пусть $A^* = \{1 < a_1^* < a_2^* < \dots\}$ — последовательность натуральных чисел, возрастающая не быстрее нек-рой степени, т. е. $a_i < i^\mu$, μ const. Ставится вопрос, существует ли такое число r, что любое натуральное число можно представить суммой не более чем r слагаемых из A^*. Ясно, что имеющейся информации о последовательности A^* недостаточно для решения задачи.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество последовательностей $A = \{1 < a_1 < a_2 < \dots\}$ целых чисел, где каждое a_i «слу-

чайно» выбирается из отрезка $[a_i^*, a_{i+1}^*)$. На $\mathfrak{A}$ можно определить меру Лебега и доказать, что для почти всех A существует искомое число $r<\infty$ (см. [4]).

Весьма содержательной и глубокой является связь между «глобальными» утверждениями М. т. ч. и их «индивидуальными» реализациями. Несмотря на то, что почти все элементы нек-рого множества обладают определенным свойством, бывает очень трудно установить, что данный конкретный элемент этого множества обладает этим же свойством. Напр., Э. Борель высказал предположение, что такие числа, как $\sqrt{2}$, e, π, $\ln 3$ и т. д., нормальны, и хотя почти все числа нормальны, до сих пор (1982) неизвестно, является ли нормальным хотя бы одно из этих чисел. Во многих случаях доказать метрич. теорему легче, чем подобную «индивидуальную». Однако это не означает, что в М. т. ч. нет глубоких проблем, т. к. многие проблемы М. т. ч. тесно связаны с нек-рыми «индивидуальными» проблемами, что иногда обнаруживается достаточно быстро. С другой стороны, решение «индивидуальных» проблем обнаруживает их связь с метрическими.

Идеи М. т. ч. играют фундаментальную роль во многих разделах аналитич. теории чисел, в особенности тогда, когда используется интегрирование по нек-рой мере. В этих случаях вывод какой-либо метрич. теоремы не является целью исследования, но метрич. соображения используются как промежуточный этап рассуждений. Они могут быть одним из главных принципов, лежащих в основе рассуждения, хотя окончательная формулировка результата не будет содержать никаких метрич. понятий. Примером систематич. использования такого рода рассуждений является метод Харди — Литлвуда — Виноградова, в к-ром существенную роль играют метрич. свойства приближения чисел рациональными дробями («большие» и «малые» дуги Харди — Литлвуда). Это обстоятельство позволило И. М. Виноградову формулировать свои новые теоремы об оценках сумм Вейля как нек-рые метрич. теоремы [1]. Кроме того, метод И. М. Виноградова оценок сумм Вейля носит ярко выраженный метрич. характер, где устанавливается связь между «глобальной» оценкой интеграла и «индивидуальной» оценкой конкретной суммы. Примеров такого рода в теории чисел мало.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, М., 1971; [2] Постников А. Г., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1966, т. 82, с. 3—111; [3] Спиджук В. Г., *Проблема Малера в метрической теории чисел*, Минск, 1967; [4] его же, «Известия АН БССР. Сер. Физ.-матем. наук», 1970, № 1, с. 5—14; [5] Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М., 1978; [6] Baker A., Schmidt W., «Proc. London Math. Soc.», (3), 1970, v. 21, p. 1—11; [7] Erdös P., «J. Number Theory», 1970, v. 2, p. 425—41; [8] Koksma J. F., Diophantische Approximationen, B., 1936; [9] Lutz E., Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques, P., 1955; [10] Philipp W., «Pacific J. Math.», 1967, v. 20, № 1, 109—27; Циглер И., Хельмберг Г., «Математика», 1963, т. 7, № 3, с. 3—46.

В. Г. Спиджук.

МЕТРИЧЕСКАЯ ТРАНЗИТИВНОСТЬ динамической системы $\{T_t\}$ с (квази) инвариантной мерой μ — свойство системы $\{T_t\}$, состоящее в том, что любое измеримое подмножество A фазового пространства W, инвариантное относительно T_t (в том смысле, что оно совпадает со всеми своими прообразами $(T_t)^{-1}A$), либо имеет меру нуль, либо с точностью до множества меры нуль совпадает с W. Формально более сильный вариант этого свойства получится, если в определении вместо инвариантных множеств говорить о множествах, инвариантных по mod 0 (такое множество A при любом t может отличаться от $(T_t)^{-1}A$ на множество меры нуль). Эти два варианта эквивалентны, если μ является σ-конечной и «время» t пробегает локально компактную группу со счетной базой (см. доказательство для потоков в [1]), но для произвольных групп преобразований это не так (см. пример, приведенный по другому поводу, в [2]).

Вместо М. т. говорят также о м е т р и ч е с к о й н е р а з л о ж и м о с т и, или эргодичности. Если у данной системы рассматривается несколько (квази) инвариантных мер и μ — одна из них, то, вместо того чтобы говорить о М. т. (эргодичности) системы по отношению к мере μ, говорят о М. т. (эргодичности) меры μ. Р а з л о ж и м о с т ь н о р м и р о в а н н о й и н в а р и а н т н о й м е р ы μ естественно понимать иначе — как возможность представления μ в виде $a_1\mu_1 + a_2\mu_2$, где μ_i — нормированные инвариантные меры, отличные от μ, и $a_i > 0$. Неразложимость μ эквивалентна второму (более сильному) варианту М. т. (см. [2], [3]).

Если в W введена топология, то при естественных предположениях (см. *обсуждение для потоков* в [1]) из М. т. следует, что для почти всех $w \in W$ траектория точки w всюду плотна (в этом смысле из М. т. следует *топологическая транзитивность*). Обратное неверно.

Начиная с Дж. Неймана [4], получен ряд результатов о разложении неэргодич. систем на эргодич. компоненты. Традиционный в чисто метрич. теории вариант (W — *Лебега пространство*, соответственно речь идет только об одной (квази) инвариантной мере) см. в [5], [6], [11]. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов [7] получили для топологич. потоков и каскадов с компактным метрическим W более сильные результаты двоякого рода (см. также [8], [9]): 1) разложение инвариантных нормированных мер, совместимых с топологией, на эргодич. меры; 2) «геометрическая» реализация сразу всех этих разложений посредством *эргодических множеств*. Относительно обобщения этих результатов на другие группы преобразований известно, что 1) справедливо в более широких предположениях, чем 2) (см. [2], [3]). Имеются также аналогичные результаты для динамич. систем (пока только каскадов и потоков) в подходящих *измеримых пространствах* и (или) для квазиинвариантных мер (см. [9] — [11]).

М. т. р а з б и е н и я ξ п р о с т р а н с т в а с м е р о й (W, μ) — свойство разбиения ξ, состоящее в том, что любое измеримое подмножество $A \subset W$, целиком состоящее из элементов ξ, либо имеет меру нуль, либо с точностью до множества меры нуль совпадает со всем W. Вместо М. т. говорят также об а б с о л ю т н о й н е и з м е р и м о с т и ξ. М. т. динамич. системы, образованной группой преобразований, так что траектории образуют разбиение фазового пространства, совпадает с М. т. этого разбиения. Если же преобразования, образующие динамич. систему, необратимы, то ее М. т. тоже сводится к М. т. нек-рого разбиения, хотя оно описывается сложнее: его элемент, содержащий нек-рую точку, состоит из всех ее образов и всех прообразов этих образов.

Лит.: [1] Х о п ф Э., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 113—82; [2] Ф о м и н С. В., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 3, с. 261—74; [3] Б о г о л ю б о в Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, с. 561—69; [4] N e u m a n n J., «Ann. Math.», 1932, v. 33, № 3, p. 587—642; № 4, p. 789—92; [5] Р о х л и н В. А., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 2, с. 57—128; [6] е г о ж е, «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 2, с. 235—49; [7] К р ы л о в Н. М., Б о г о л ю б о в Н. Н., в кн.: Б о г о л ю б о в Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969, с. 411—63; [8] Н е м ы ц к и й В. В., С т е п а н о в В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [9] О к с т о б и Д ж., «Успехи матем. наук», 1953, т. 8, в. 3, с. 75—97; [10] К и ф е р Ю. И., П и р о г о в С. А., там же, 1972, т. 27, в. 1, с. 77—80; [11] и х ж е, там же, в. 5, с. 239—40. *Д. В. Аносов.*

МЕТРИЧЕСКИЙ ИЗОМОРФИЗМ п р о с т р а н с т в с м е р о й $(X_1, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{B}_2, \mu_2)$ — биективное отображение $f : X_1 \to X_2$, при к-ром образы и прообразы измеримых множеств измеримы и имеют ту же меру (здесь $\mathfrak{B}_i$ — нек-рая булева σ-алгебра или σ-кольцо подмножеств пространства X_i, называемых измеримыми, а μ_i — заданная на $\mathfrak{B}_i$ мера). Более общее понятие — (м е т р и ч е с к и й) г о м о м о р ф и з м этих пространств, т. е. такое отображение $f : X_1 \to X_2$, что

прообразы измеримых множеств измеримы и имеют ту же меру. При $(X_1, \mathfrak{B}_1, \mu_1)-(X_2, \mathfrak{B}_2, \mu_2)$ вместо изоморфизма или гомоморфизма говорят о (м е т р и ч е с к о м) а в т о м о р ф и з м е или э н д о м о р ф и з м е.

В соответствии с обычной в теории меры тенденцией пренебрегать множествами меры нуль вводятся (и преимущественно используются) варианты всех этих понятий «по mod 0». Напр., пусть $N_i \subset X_i$, $\mu(N_i)=0$, $i=1, 2$, и $f: X_1 \setminus N_1 \to X_2 \setminus N_2$ — М. и.; тогда говорят, что f есть изоморфизм исходных пространств с мерой по mod 0. (Оговорку «по mod 0» часто опускают.)

Для ряда объектов, заданных в X_i (подмножеств, функций, преобразований, а также их систем), имеет смысл утверждение, что при М. и. f эти объекты переходят друг в друга. Тогда говорят, что f есть М. и. соответствующих объектов. Можно говорить также об их М. п. по mod 0. При этом подразумевается, что при нек-рых N_i меры нуль соответствующие объекты O_i могут рассматриваться как нек-рые объекты O_i' в $X_i \setminus N_i$ (для преобразований это означает, что $X_i \setminus N_i$ инвариантны относительно этих преобразований, а для подмножеств и функций это имеет смысл при любых N_i — надо взять пересечения рассматриваемых подмножеств с $X_i \setminus N_i$ и ограничения функций на $X_i \setminus N_i$) и что f есть М. и. объектов O_i'. Класс всех метрически изоморфных по mod 0 друг другу объектов называют (м е т р и ч е с к и м) т и п о м; говорят, что два объекта из этого класса имеют одинаковый тип.

С $(X_i, \mathfrak{B}_i, \mu_i)$ ассоциируются гильбертово пространство $L^2(X_i, \mu_i)$, в к-ром дополнительно к обычной структуре гильбертова пространства имеется еще операция обычного перемножения функций (определенная, правда, не всюду, ибо произведение функций из L^2 не всегда принадлежит L^2), и булева σ-алгебра с мерой $\mathfrak{M}_i$, получающаяся из $\mathfrak{B}_i$ отождествлением множеств, симметрич. разность к-рых имеет меру нуль (т. е. факторизацией по идеалу, состоящему из множеств меры нуль). М. и. mod 0 f индуцирует изоморфизм булевых σ-алгебр с мерой $\mathfrak{M}_i$ и унитарный изоморфизм гильбертовых пространств $L^2(X_i, \mu_i)$, к-рый м у л ь т и п л и к а т и в е н, т. е. переводит произведение (когда оно определено) в произведение образов сомножителей. Если $(X_i, \mathfrak{B}_i, \mu_i)$ — *Лебега пространство*, то верно и обратное: всякий изоморфизм булевых σ-алгебр с мерой $\mathfrak{M}_i$ или мультипликативный унитарный изоморфизм пространств $L^2(X_i, \mu_i)$ индуцируется нек-рым М. и. по mod 0.

Лит.: [1] Р о х л и н В. А., «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 1, с. 107—50.

Д. В. Аносов.

МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР, о с н о в н о й т е н з о р, ф у н д а м е н т а л ь н ы й т е н з о р,— поле дважды ковариантного симметрич. тензора $g-g(X, Y)$ на n-мерном дифференцируемом многообразии M^n, $n \geqslant 2$. Задание на M^n М. т. вводит в касательном к M^n в точке $p \in M^n$ векторном пространстве M_p^n скалярное произведение $\langle X, Y\rangle$ контравариантных векторов $X, Y \in M_p^n$, определяемое как билинейная функция $g_p(X, Y)$, где g_p — значение поля g в точке p. В координатной записи:

$$\langle X, Y\rangle = g_{ij}(p)\, X^i Y^j, \quad X = \{X^i\}, \quad Y = \{Y^j\}, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Метрика пространства M_p^n с введенным в нем скалярным произведением принимается в бесконечно малом за метрику многообразия M^n, что выражается в выборе дифференциальной квадратичной формы

$$ds^2 = g_{ij}(p)\, dx^i\, dx^j \qquad (*)$$

квадратом дифференциала длины дуги кривой M^n, исходящей из p в направлении $dx^1, \ldots, dx^n$. По ее геометрич. смыслу форму (*) наз. м е т р и ч е с к о й, или п е р в о й о с н о в н о й, ф о р м о й на M^n,

соответствующей М. т. g. Обратно, если на M^n задана симметрическая квадратичная форма вида (*), то ей сопоставляется поле дважды ковариантного тензора $g(X, Y)=g_{ij}X^i\otimes Y^j$, соответствующая метрич. форма к-рого совпадает с g. Таким образом, задание на M^n М. т. g равносильно заданию на M^n метрики с квадратом линейного элемента вида (*). М. т. полностью определяет внутреннюю геометрию M^n.

Совокупность М. т. g и определяемых ими метрик подразделяется на два класса — вырожденные метрики, когда $\det(g_{ij})=0$, и невырожденные, когда $\det(g_{ij})\neq 0$. Многообразие M^n с вырожденной метрикой (*) наз. изотропным. Среди невырожденных М. т., в свою очередь, различаются р и м а н о в М. т., для к-рого квадратичная форма (*) является положительно определенной, и п с е в д о р и м а н о в М. т., когда форма (*) является знакопеременной. Риманова (псевдориманова) метрика, вводимая на M^n через риманов (псевдориманов) М. т., определяет на M^n риманову (соответственно псевдориманову) геометрию.

Обычно под М. т. без специального на то указания понимается риманов М. т.; но если, рассматривая невырожденный М. т., хотят подчеркнуть, что речь идет именно о римановом, а не псевдоримановом М. т., то об этом М. т. говорят как о собственно римановом М. т. Собственно риманов М. т. может быть введен на любом паракомпактном дифференцируемом многообразии.

Лит.: [1] Э й з е н х а р т Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; [2] Р а ш е в с к и й П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [3] Г р о м о л Д., К л и н г е н б е р г В., М е й е р В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971.

И. Х. Сабитов.

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — множество X вместе с нек-рой *метрикой* ρ на нем. Теоретико-множественный подход к изучению фигур (пространств) основан на исследовании взаимного расположения составляющих их элементарных частей. Одной из фундаментальных характеристик взаимного расположения точек пространства является расстояние между ними. Этот подход к пространственным отношениям и приводит к понятию М. п., впервые выделенному М. Фреше [2] в связи с рассмотрением функциональных пространств. Оказалось, что естественную метрику несут на себе множества объектов самой разной природы. Как М.п. могут рассматриваться множества состояний, функций и отображений, любые подмножества евклидовых пространств и гильбертова пространства. Рассмотрение метрик важно при исследовании сходимости (рядов, функций), при решении вопросов аппроксимации.

Развитие теории М. п. шло по следующим важнейшим направлениям.

О б щ а я т е о р и я М. п. В ней исследуются свойства М. п., инвариантные относительно изометрий — взаимно однозначных отображений на, сохраняющих расстояние. К числу таких свойств относятся полнота, ограниченность, вполне ограниченность, диаметр. Свойства этого типа наз. м е т р и ч е с к и м и.

Т о п о л о г и ч е с к а я т е о р и я М. п. Предметом ее являются свойства М. п., сохраняющиеся при гомеоморфизмах. Среди них — компактность, сепарабельность, связность, свойство Бэра, нульмерность. Свойства этого типа наз. т о п о л о г и ч е с к и м и.

Т е о р и я п р о с т р а н с т в, н а к-р ы х з а д а н а м е т р и к а, согласованная с какой-либо дополнительной алгебраич. структурой (напр., векторного пространства или группы). Сюда относятся евклидовы пространства, предгильбертовы и *гильбертовы пространства* (любого веса), *банаховы пространства*, *банаховы алгебры*, банаховы решетки, счетно нормированные пространства. Имеющиеся здесь факты существенно связаны с рассмотрением важных в идейном отношении свойств метрик или норм, но по со-

держанию целиком принадлежат соответствующим областям алгебры и функционального анализа.

Рассмотрение специальных метрик играет важную роль при исследовании неевклидовых геометрий, в дифференциальной геометрии, механике и физике. Центральное место здесь занимает понятие римановой метрики риманова пространства (см. *Римановa геометрия*). Более широкий подход к изучению поверхностей и фигур, возникающих в дифференциальной геометрии, связан с концепцией G-пространства, получающейся добавлением к аксиомам метрики нек-рых условий (см. *Геодезических геометрия*), создающих основу для рассмотрения геодезических в G-пространстве, обеспечивая их существование и правильные свойства. Характерным здесь является отказ от пользования методами дифференциального исчисления, при этом обнаруживается, что многое в дифференциальной геометрии не связано с условиями дифференцируемости, а определяется только геометрич. аксиомами. Геометрия геодезических представляет интерес не только как обобщение римановой геометрии, но и как попытка заменить вычисления рассуждениями, сделать исследование геометрич. объектов более геометричным.

На каждом множестве X может быть определена метрика ρ_T по следующему правилу: $\rho_T(x, y)=0$, если $x=y$, и $\rho_T(x, y)=1$, если $x\neq y$. Эта метрика наз. т р и в и а л ь н о й. Каждая метрика ρ на множестве X позволяет естественным образом ввести на X топологию $\mathcal{T}_\rho$. Концепция топологич. пространства заключает в себе аксиоматизацию отношения абсолютной близости точки к множеству, тогда как концепцией М. п. формализуется отношение сравнительной близости между точками. Р а с с т о я н и е $\rho(x, A)$ от точки x до множества A в М. п. $\{X, \rho\}$ определяется как $\inf\{\rho(x, y) : y\in A\}$. Точка x объявляется абсолютно близкой ко множеству A, если $\rho(x, A)=0$. З а м ы к а н и е м $[A]$ множества A в $\{X, \rho\}$ наз. множество всех точек из X, абсолютно близких к A. Однозначно отвечающая этой операции топология на множестве X и наз. т о п о л о г и е й, п о р о ж д е н н о й на X м е т р и к о й ρ. Тривиальной метрике на X отвечает дискретная топология — все множества замкнуты.

В исследовании М. п. (особенно их топологич. свойств) важная роль принадлежит понятию сходящейся последовательности. Это объясняется тем, что топология каждого М. п. может быть полностью описана на языке последовательностей.

Пусть $\xi=\{x_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ — последовательность точек в М. п. $\{X, \rho\}$. Она наз. с х о д я щ е й с я к точке $x\in X$, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется целое число N такое, что $\rho(x, x_n)<\varepsilon$ при всех $n>N$. Последовательность ξ наз. ф у н д а м е н т а л ь н о й, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется целое число N такое, что $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$ при всех $m,\ n>N$.

Важным метрич. свойством является полнота — М. п. $\{X, \rho\}$ наз. п о л н ы м, если каждая фундаментальная последовательность в нем сходится к нек-рой его точке. Пространство $\{X, \rho_T\}$ полно. Полнота М. п. не является топологич. свойством: М. п., гомеоморфное полному М. п., может не быть полным, напр. действительная прямая $\mathbb{R}$ с обычной метрикой $\rho(x, y)=|x-y|$ гомеоморфна интервалу $(0, 1)=\{x\in\mathbb{R}: 0<x<1\}$, наделенному той же метрикой, однако первое М. п. полно, а второе — нет.

Примерами полных М. п. могут служить евклидовы и банаховы пространства. Важным свойством полных М. п., сохраняющимся при гомеоморфизмах, является *Бэра свойство*, в силу к-рого каждое полное М. п. без изолированных точек несчетно. Поэтому обычная топология пространства рациональных чисел не порождается никакой полной метрикой. Однако каждое М. п. может быть представлено как часть нек-рого полного

М. п. посредством стандартной конструкции пополнения. Две фундаментальные последовательности $\xi = \{x_n\}$ и $\eta = \{y_n\}$ в М. п. $\{X, \rho\}$ наз. эквивалентными, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0.$$

Пусть $\tilde{X}$ — множество всех возникающих классов эквивалентности. Метрика $\tilde{\rho}$ на $\tilde{X}$ вводится правилом: если $a', a'' \in \tilde{X}$ и $a' \ni \xi' = \{x_n'\}$, $a'' \ni \xi'' = \{x_n''\}$, то

$$\tilde{\rho}(a', a'') = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n', x_n'').$$

Для $x \in X$ пусть $i(x) = \{x_n\}$, где $x_n = x$ при всех n. Тогда $\{\tilde{X}, \tilde{\rho}\}$ — полное М. п. и $i\colon X \to \tilde{X}$ — изометрич. отображение пространства X, ρ на всюду плотное подпространство в $\{\tilde{X}, \tilde{\rho}\}$ (в связи с чем $\{\tilde{X}, \tilde{\rho}\}$ и наз. пополнением пространства $\{X, \rho\}$).

С рассмотрением пополнений связана *Лаврентьева теорема* о продолжении гомеоморфизмов. Из нее следует, что свойство М. п. быть множеством типа G_δ в своем пополнении топологически инвариантно (в отличие от неинвариантности самой метрич. полноты относительно гомеоморфизмов).

Метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X наз. топологически эквивалентными, если совпадают порожденные ими топологии $\mathcal{T}_{\rho_1}$ и $\mathcal{T}_{\rho_2}$. На конечном множестве все метрики эквивалентны — они порождают дискретную топологию. Теорема Александрова — Хаусдорфа: метрика ρ на множестве X топологически эквивалентна нек-рой полной метрике в том и только в том случае, если X является множеством типа G_δ в пополнении М. п. $\{X, \rho\}$. В частности, пространство иррациональных чисел с обычной метрикой (не полное относительно ее) гомеоморфно полному метрич. пространству Бэра, точками к-рого являются всевозможные бесконечные последовательности $\{n_i\}$ натуральных чисел, а расстояние задается правилом: $\rho(\{n_i\}, \{m_i\}) = 1/k$, где k таково, что $n_k \neq m_k$ и $n_i = m_i$ при всех $i < k$.

Важен следующий пример полного М. п.: пространство $C_{[0,1]}$, составленное из всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, и несущее на себе метрику, определенную правилом

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

для всех $f, g \in C_{[0,1]}$. Пространство $C_{[0,1]}$ сепарабельно — в нем есть счетное всюду плотное множество. Оказывается, каждое сепарабельное М. п. изометрично нек-рому подпространству $C_{[0,1]}$ (теорема Банаха — Мазура). Этот результат означает, в частности, что все метрики, порождающие сепарабельные топологии, оправданы (ибо изометричное пространство может быть получено сужением естественной метрики множества непрерывных функций).

Подмножество Y полного М. п. $\{X, \rho\}$, наделенное той же метрикой ρ (точнее, ее сужением на $Y \times Y$), является полным М. п., если и только если Y замкнуто в $\{X, \rho\}$.

Существует фундаментальная связь между понятиями полноты и компактности М. п. Компактность М. п. X, ρ равносильна любому из следующих условий: 1) любая последовательность в $\{X, \rho\}$ содержит сходящуюся предпоследовательность; 2) каждое счетное открытое покрытие пространства $\{X, \rho\}$ содержит конечное подпокрытие; 3) в любом открытом покрытии пространства $\{X, \rho\}$ найдется конечное подпокрытие; 4) каждая убывающая последовательность непустых замкнутых в $\{X, \rho\}$ множеств имеет непустое пересечение; 5) каждое замкнутое дискретное подпространство пространства $\{X, \rho\}$ конечно.

Простейшие примеры компактных М. п.: конечные дискретные пространства, любой отрезок (с концами), квадрат, окружность, сфера. Вообще, подпространство евклидова пространства E^n, взятое в обычной метрике, компактно в том и только в том случае, если оно замкнуто в E^n и ограничено.

Не все из перечисленных условий равносильны за пределами класса М. п. (см. *Бикомпактное пространство*). А. Лебег (H. Lebesgue, 1911) установил, что для каждого открытого покрытия γ компактного М. п. $\{X, \rho\}$ существует число $\delta>0$ такое, что всякое множество $A\subset X$ диаметра $\leqslant\delta$ содержится в некотором элементе покрытия γ. Отсюда следует фундаментальное свойство компактных М. п., характеризующее их в классе всех М. п.: всякое непрерывное отображение такого пространства в произвольное М. п. равномерно непрерывно. Далее, М. п. компактно в том и только в том случае, если каждая непрерывная действительная функция на нем ограничена (и достигает наименьшего и наибольшего значений).

Каждое компактное М. п. полно, но обратное неверно; простейшим примером служит бесконечное дискретное пространство, наделенное тривиальной метрикой. Но имеет место следующая характеристика: М. п. компактно в том и только в том случае, если всякое гомеоморфное ему М. п. полно.

Интуитивно очевидно, что компактность включает, помимо полноты, условие типа ограниченности, что подтверждается рассмотрением компактных подпространств в E^n. В общем случае М. п. $\{X, \rho\}$ наз. ограниченным, если существует действительное число a такое, что $\rho(x, y)<a$ для всех $x, y\in X$. Каждое компактное М. п. ограничено. Пространство $\{X, \rho_T\}$ полно и ограничено, но не компактно, если X бесконечно, так что полнота и ограниченность в совокупности недостаточны для компактности М. п. Вообще, всякая метрика на любом множестве топологически эквивалентна нек-рой ограниченной метрике — полной, если заданная метрика полна. В связи с этим получает важное значение понятие вполне ограниченности. М. п. $\{X, \rho\}$ наз. вполне ограниченным, если для каждого $\varepsilon>0$ существует конечное множество $A_\varepsilon\subset X$ такое, что $\rho(x, A_\varepsilon)<\varepsilon$ при всех $x\in X$. Множество A_ε наз. при этом ε-сетью в $\{X, \rho\}$. М. п. $\{X, \rho\}$ компактно, если и только если оно полно и вполне ограничено, и $\{X, \rho\}$ вполне ограничено в том и только в том случае, если оно изометрично подпространству нек-рого компактного М. п. Точнее, вполне ограниченность М. п. $\{X, \rho\}$ равносильна компактности его пополнения $\{\tilde{X}, \tilde{\rho}\}$. Каждое подпространство вполне ограниченного М. п. вполне ограничено. Все вполне ограниченные М. п. (в частности, все компактные М. п.) сепарабельны и обладают счетной базой. Компактность, вообще говоря, не наследуется подпространствами; множество $A\subset X$ компактно в М. п. $\{X, \rho\}$, если замыкание A в $\{X, \rho\}$ является компактным М. п. Если $\{X, \rho\}$ полно, то компактность множества $A\subset X$ в $\{X, \rho\}$ равносильна вполне ограниченности A, наделенного метрикой ρ.

Важную роль в функциональном анализе играет критерий компактности произвольного множества A непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, в М. п. $C_{[0,1]}$, заключенный в следующей теореме Арцела — Асколи: множество A компактно в $C_{[0,1]}$, если и только если выполняются условия: 1) существует число M такое, что $|f(x)|<M$ при всех $x\in[0, 1]$ и всех $f\in A$; 2) для каждого $\varepsilon>0$ найдется $\gamma>0$ такое, что $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ для всех $f\in A$ и всех $x', x''\in[0, 1]$, для к-рых $|x'-x''|<\delta$.

Отображение f М. п. $\{X, \rho\}$ в себя наз. сжимающим, если существует действительное число $\lambda<1$

такое, что

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$$

при всех $x, y \in X$. Важной теоремой о полных М. п. является принцип сжимающих (сжатых) отображений: для каждого такого отображения (непустого) полного М. п. $\{X, \rho\}$ в себя существует ровно одна *неподвижная точка*.

Топологич. теория М. п. значительно проще общей теории топологич. пространств. Ниже приводятся наиболее важные топологич. свойства М. п. $\{X, \rho\}$ — имеются ввиду свойства топологии $\mathcal{T}_\rho$, порожденной метрикой.

Каждое М. п. нормально и даже коллективно нормально. Это позволяет продолжать непрерывные действительные функции с замкнутых подмножеств М. п. на все пространство. Более сильное утверждение: для каждого замкнутого подмножества Y М. п. $\{X, \rho\}$ существует линейное отображение φ пространства всех непрерывных действительных функций на $\{Y, \rho\}$ в пространство всех непрерывных действительных функций на $\{X, \rho\}$ такое, что (каково бы ни было f) $\varphi(f)$ является продолжением функции f и

$$\sup\{|f(x)| : x \in Y\} = \sup\{|\varphi(f)(x)| : x \in X\}$$

(теорема Дугунджи). Эта теорема связана с теоремой Хаусдорфа о продолжении метрики: если замкнутое подпространство Y метризуемого пространства X уже метризовано метрикой ρ_1 (порождающей на Y топологию подпространства X), то можно продолжить ρ_1 до метрики ρ на всем X, порождающей исходную топологию на X. Аналогичные утверждения справедливы для вполне ограниченных метрик и полных метрик.

Исследование топологич. свойств М. п. в большей степени основывается на следующей теореме Стоуна: М. п. паракомпактно, т. е. в любое его открытое покрытие γ можно вписать локально конечное открытое покрытие λ (локальная конечность означает наличие у каждой точки окрестности, задевающей лишь конечное множество элементов покрытия λ). На теореме о паракомпактности М. п. основан метризационный критерий Нагаты — Смирнова (см. *Метризуемое пространство*).

Для М. п. имеют место важные теоремы об эквивалентности топологич. свойств, различаемых в рамках общей топологии. Так, совпадают следующие кардинальнозначные инварианты: плотность, вес, число Суслина, число Линделёфа. Для М. п. равносильны: счетная компактность, псевдокомпактность и бикомпактность. Для М. п. совпадают размерности dim (в смысле покрытий) и Ind (большая индуктивная), а для сепарабельных М. п. с dim и Ind совпадает и малая индуктивная размерность ind (см. *Размерности теория*).

Каждое М. п. $\{X, \rho\}$ звездно нормально: в любое открытое покрытие γ пространства $\{X, \rho\}$ можно вписать открытое покрытие λ звездно, т. е. так, что для каждой точки $x \in X$ найдется $U \in \gamma$, содержащее всякое $V \in \lambda$, для к-рого $x \in V$. С этой теоремой связан критерий метризуемости (Стоуна—Архангельского). Критерием метризуемости регулярного пространства вполне ограниченной метрикой является наличие в этом пространстве счетной базы — но даже счетное регулярное пространство может быть не метризуемо. Простейший пример получается присоединением к дискретному натуральному ряду какой-нибудь одной точки из нароста *Стоуна — Чеха бикомпактного расширения* натурального ряда. Неожиданный характер носит критерий метризуемости метризуемого пространства X полной метрикой — для этого необходимо и достаточно, чтобы X было множеством типа G_δ в каком-нибудь (а тогда и в любом) бикомпактном

хаусдорфовом расширении пространства X. Впрочем, бикомпактные хаусдорфовы расширения М. п. несут полную информацию о топологии последних, как это видно из т е о р е м ы Ч е х а: М. п. гомеоморфны в том и только в том случае, если гомеоморфны их расширения Стоуна — Чеха.

М. п. может не иметь счетной базы, но всегда удовлетворяет первой аксиоме счетности — имеет счетную базу в каждой точке. Более того, каждый компакт в М. п. имеет счетную базу окрестностей. Сверх того, в каждом М. п. существует такая база, что каждая точка пространства принадлежит лишь счетному множеству ее элементов — точечно-счетная база, но это свойство слабее метризуемости даже в присутствии паракомпактности и хаусдорфовости. Не обязано быть метризуемым и регулярное сепарабельное пространство с первой аксиомой счетности.

Просто выглядит условие метризуемости отделимой топологич. группы — для этого необходимо и достаточно, чтобы пространство группы удовлетворяло первой аксиоме счетности, причем на группе тогда существуют как левоинвариантная, так и правоинвариантная метрики, порождающие ее топологию.

С каждым М. п. $\{X, \rho\}$ стандартным образом связано другое М. п., а именно пространство $F(X)$ всех его непустых замкнутых подмножеств, несущее на себе м е т р и к у Х а у с д о р ф а, определяемую следующей формулой:

$$\rho_H(A, B)=\max\{\sup\{\rho(a, B): a\in A\},\ \sup\{\rho(b, A): b\in B\}\}.$$

Пространство $\{X, \rho\}$ изометрично замкнутому подпространству полученного М. п. $\{F(X), \rho_H\}$. Если метрика ρ полна, то и метрика ρ_H полна. Но из топологич. эквивалентности метрик ρ' и ρ'', заданных на X, не следует, вообще говоря, что отвечающие им метрики Хаусдорфа ρ'_H и ρ''_H топологически эквивалентны.

Непрерывный образ М. п. может быть не гомеоморфен никакому М. п., даже удовлетворяя аксиоме отделимости Хаусдорфа. Это относится и к факторпространствам М. п. Напр., если на плоскости «склеить» в точку фиксированную прямую, взяв в качестве отдельных элементов разбиения все точки плоскости, не попавшие на эту прямую, то получится неметризуемое нормальное сепарабельное пространство — в особой его точке не выполняется первая аксиома счетности. Имеется общий критерий метризуемости факторпространства М. п. (см. [6]). В частности, пространство *непрерывного разбиения* М. п. на компакты всегда метризуемо. Всякое хаусдорфово пространство, являющееся непрерывным образом компактного М. п., метризуемо и компактно — это частное проявление общего положения о неповышении веса топологич. пространства при непрерывном отображении на бикомпакт. Но и когда образ Y М. п. $\{X, \rho\}$ метризуем, метрику, осуществляющую метризацию Y, не удается получить из метрики ρ посредством какой-либо формулы. Вместо метрики на $Y\times Y$ по ρ естественно определяется функция d посредством правила: $d(y', y'')$ для любых y', $y''\in Y$ равно расстоянию в смысле ρ между прообразами точек y' и y'' при рассматриваемом отображении. Часто (напр., если Y — пространство разбиения М. п. на компакты) d хорошо согласуется с топологией Y и является с и м м е т р и к о й. Последнее означает, что $d(y', y'')=d(y'', y')$ для всех y', $y''\in Y$, $d(y', y'')=0$, если и только если $y'=y''$. Симметрика d, так определенная, почти никогда не удовлетворяет аксиоме треугольника, но если разбиение на компакты непрерывно, то d обладает топологич. свойствами, с успехом заменяющими аксиому треугольника и гарантирующими метризуемость образа «настоящей» метрикой. Топологич. пространство, являющееся образом М. п. при непрерывном, открытом и замкнутом отображении,

само гомеоморфно нек-рому М. п. Однако при непрерывных открытых отображениях метризуемость сохраняется не всегда — все пространства с первой аксиомой счетности и только они представимы как образы М. п. *при* непрерывных открытых отображениях.

Среди обобщений М. п. наиболее важны псевдометрич. пространства, пространства с симметрикой и пространства с 0-метрикой [7]. Они определяются аксиоматически посредством естественных ослаблений системы аксиом М. п. Но расстояние здесь по-прежнему выражается неотрицательной действительным числом. Можно рассматривать обобщенные метрики со значениями в упорядоченных полугруппах, полуполях и т. д. (см. [8]). На этом пути можно осуществить обобщенную метризацию произвольного вполне регулярного пространства.

Фундаментальным обобщением концепции М. п. является понятие *равномерного пространства.* Далее идут чисто топологич. расширения класса М. п., среди к-рых важны классы пространств с равномерной базой, моровских пространств, перистых и паракомпактных перистых пространств, кружевных пространств. Класс паракомпактов является слишком широким обобщением класса М. п., чтобы считаться таковым: паракомпактность не сохраняется даже при возведении в квадрат. Напротив, класс паракомпактных перистых пространств является удачным одновременным обобщением класса пространств, гомеоморфных М. п., и класса бикомпактов. В ином направлении обобщают понятие метрики $\varkappa$-метрики и δ-метрики [4]. Концепция статистич. М. п., введенная К. Менгером (K. Menger), в топологич. отношении оказалась равноценной понятию пространства с симметрикой.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Fréchet M., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1906, v. 22; [3] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [4] Щепин Е. В., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 5, с. 191—226; [5] Engelking R., General topology, Warsz., 1977; [6] Архангельский А. В., «Докл. АН СССР», 1964, т. 155, № 2, с. 247—50; [7] Недев С. Й., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 24, с. 201—36; [8] Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Т. А., «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4, с. 185—218; [9] Недев С. Й., Чобан М. М., «Сердика», 1975, т. 1, с. 12—28.

А. В. Архангельский.

МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР МЕТОД, механических кубатур метод,— метод решения интегральных уравнений, основывающийся на замене интеграла суммой при помощи квадратурных (кубатурных) формул. Пусть рассматривается уравнение

$$x(t)=\int_\Omega K(t,\ s)\,x(s)\,ds+y(t), \qquad (1)$$

где $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ — ограниченная открытая область. С использованием какого-либо квадратурного (кубатурного) процесса

$$\int_\Omega z(s)\,ds=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn}z(s_{jn})+\varphi_n(z)$$

составляют систему линейных уравнений

$$x_{in}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn}K(s_{in},\ s_{jn})\,x_{jn}+y(s_{in}),\ \ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (2)$$

относительно $x_{in}\approx x(s_{in})$, $i=1,\ \ldots,\ n$.

Пусть свободный член y и ядро K непрерывны соответственно на $\bar\Omega$ и $\bar\Omega\times\bar\Omega$ ($\bar\Omega$ — замыкание Ω) и пусть уравнение (1) имеет единственное решение $x(t)$. Пусть $\varphi_n(z)\to 0$ при $n\to\infty$ для любой непрерывной на $\bar\Omega$ функции $z(t)$. Тогда при достаточно больших n система (2) однозначно разрешима и

$$c_1\varepsilon_n\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\,x_{in}-x(s_{in})\,|\leqslant c_2\varepsilon_n,\ \ n\geqslant n_0,$$

где c_1 и c_2— нек-рые положительные постоянные,

$$\varepsilon_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\varphi_n(K(s_{in}, s)\ x(s))| \longrightarrow 0$$

при $n\to\infty$.

М. к. м. может быть применен для решения нелинейных интегральных уравнений [3] и проблемы собственных значений для линейных интегральных операторов. Метод сходится и для нек-рого класса уравнений с разрывными ядрами [4].

Лит.: [1] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 2, М., 1977; [2] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 2, М., 1962; [3] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [4] Вайникко Г. М., «Сиб. матем. ж.», 1971, т. 12, № 1, с. 40–53; [5] Прёсдорф З., Некоторые классы сингулярных уравнений, пер. с нем., М., 1979.

Г. М. Вайникко.

МЕШАЮЩИЙ ПАРАМЕТР — любой неизвестный параметр вероятностного распределения в статистич. задаче, связанной с изучением других параметров данного распределения. Точнее, пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta=(\theta_1, \ldots, \theta_k, \theta_{k+1}, \ldots, \theta_n)\in\Theta\subset\mathbb{R}^n$, необходимо сделать статистич. выводы о параметрах $\theta_1, \ldots, \theta_k$. Тогда $\theta_{k+1}, \ldots, \theta_n$ суть М. п. в данной задаче. Напр., пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся нормальному закону $\Phi\left(\frac{x-\xi}{\sigma}\right)$, параметры к-рого ξ и σ^2 неизвестны, и пусть проверяется гипотеза H_0: $\xi=\xi_0$, где ξ_0— нек-рое фиксированное число. Неизвестная дисперсия σ^2 является М. п. в задаче проверки гипотезы H_0. Другой важный пример задачи с М. п. дает *Беренса — Фишера проблема*. Естественно, что при решении статистич. задач с М. п. желательно уметь получать статистич. выводы, не зависящие от этих параметров. В теории статистич. проверки гипотез этого часто добиваются за счет сужения класса всех критериев, предназначенных для проверки нек-рой гипотезы H_0 при наличии М. п., до класса *подобных критериев*.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

М. С. Никулин.

МИКРОРАССЛОЕНИЕ — отображение $p: E\to X$, являющееся ретракцией (т. е. существует $g: X\to E$, для к-рого $pg=1_X$), локально тривиальное в том смысле, что для каждой точки $x\in X$ имеется представление нек-рой окрестности U точки gx в E в виде прямого произведения $U=V\times\mathbb{R}^n$, при к-ром $p|_U$ оказывается проекцией на сомножитель v. Если для каждой такой окрестности U на каждом слое $(p|_U)^{-1}(x)$ фиксирована кусочно линейная структура, причем проекция U на $\mathbb{R}^n$ кусочно линейна на каждом слое и для двух окрестностей U_1 и U_2 и всякой точки $x\in p(U_1)\cap p(U_2)$ структуры на $(p|_{U_1})^{-1}(x)$ и $(p|_{U_2})^{-1}(x)$ совпадают в нек-рой окрестности точки gx, то такое М. наз. кусочно линейным. Аналогично можно вводить и другие структуры.

Понятие М. было введено с целью определить аналог *касательного расслоения* для топологического или кусочно линейного многообразия X. Именно, здесь $E=X\times X$, $p(x, y)=y$, $g(x)=(x, x)$. Каждое топологич. М. эквивалентно единственному локально тривиальному расслоению со слоем $\mathbb{R}^n$ соответствующей размерности, т. е. имеется гомеоморфизм h нек-рой окрестности W множества gX в E на окрестность $\overline{W}$ нулевого сечения нек-рого расслоения $\bar{p}: E\to X$ со слоем $\mathbb{R}^n$. Этот факт верен и для кусочно линейных М. Несмотря на то, что в связи с этой теоремой понятие М. потеряло теоретич. интерес, оно еще используется в конкретных задачах.

А. В. Чернавский.

МИЛНА МЕТОД — конечноразностный метод решения задачи Коши для системы обыкновенных диф-

ференциальных уравнений 1-го порядка:

$$y' = f(x,\ y),\ y(a) = b.$$

В М. м. используется конечноразностная формула:

$$y_i - y_{i-2} = 2hf(x_{i-1},\ y_{i-1}),$$

где

$$x_i = a + ih,\quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Для вычисления по этой формуле необходимо каким-либо иным способом найти дополнительное начальное значение $y_1 \approx y(x_1)$. М. м. имеет 2-й порядок точности, устойчив по Далквисту, т. е. все решения однородного разностного уравнения $y_i - y_{i-2} = 0$ ограничены равномерно по h при $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ \left[\frac{A-a}{h}\right]$ для любого фиксированного отрезка $[a,\ A]$. Для устойчивости по Далквисту достаточно, чтобы простые корни характеристич. многочлена левой части разностного уравнения не превосходили по модулю единицы, а кратные — были по модулю строго меньше единицы. В данном случае характеристич. многочлен $\rho(\lambda) = \lambda^2 - 1$ имеет корни $\lambda = \pm 1$ и, следовательно, удовлетворяет указанному условию устойчивости. Однако при решении систем уравнений $y' = Ay$ с матрицей A, имеющей отрицательные собственные значения, происходит быстрый рост вычислительной погрешности.

Предсказывающе-исправляющий М. м. использует пару конечноразностных формул: предсказывающую

$$\bar{y}_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} + f_{i-2} + 2f_{i-1}),\ i = 4,\ 5,\ \ldots,$$

и исправляющую

$$\bar{\bar{y}}_i = y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_i + 4f_{i-1} + f_{i-2}),\ i = 4,\ 5,\ \ldots,$$

где

$$f_i = f(x_i,\ y_i),\quad \bar{f}_i = f(x_i,\ \bar{y}_i).$$

В качестве приближенного выражения погрешности берется величина

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29}(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i).$$

Дополнительные начальные значения $y_j \approx y(x_j)$, $j = 1,\ 2,\ 3$, вычисляются каким-либо иным способом, напр. методом Рунге — Кутта, имеющим четвертый порядок точности. Метод предложен в [3].

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З., Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные уравнения, М., 1962; [3] Милн В. Э., Численное решение дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1955.

В. В. Поспелов.

МИЛНА ПРОБЛЕМА проблема теории переноса излучения о решении односкоростного кинетич. уравнения переноса квантов или частиц для полупространства. Впервые интегральное уравнение М. п. с источником на бесконечности при нулевом потоке падающего извне излучения было выведено Э. Милном [1] для случая изотропного рассеяния квантов, распространяющихся без поглощения в звездной атмосфере.

Уравнение Милна имеет вид

$$B(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty B(t)\,E_1(|x-t|)\,dt. \qquad (1)$$

Здесь $B(x)$ — плотность излучения (или частиц),

$$E_1(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x/\mu}}{\mu}\,d\mu$$

— интегро-показательная функция ($E_1(x) = -\mathrm{Ei}(-x)$).

В нейтронной физике М. п. используется для постановки приближенных граничных условий при ре-

шении уравнений диффузионного приближения в ограниченной области; при этом учитываются захват нейтронов в среде, анизотропия рассеяния и кривизна границы.

Здесь М. п. состоит в решении интегро-дифференциального уравнения

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') \psi(x, \mu') d\mu'$$

с краевым условием на границе полупространства, заполненного веществом, с вакуумом

$$\psi(0, \mu) = 0 \text{ для } 0 < \mu \leqslant 1, \qquad (2)$$

где c есть среднее число вторичных нейтронов, приходящееся на одно соударение с ядром ($c<1$ в рассеивающем и поглощающем нейтроны веществе), $p(\mu, \mu')$ — индикатриса рассеяния ($p(\mu, \mu')=1$ при изотропном рассеянии). Аналогично ставится сферическая или цилиндрическая М. п. о распределении нейтронов в пространстве вне поглощающей сферы или цилиндра.

Решение М. п. удобно проводить, применяя преобразование Лапласа к интегро-дифференциальному уравнению переноса (см. [3]) и используя для решения получающихся функциональных уравнений *Винера — Хопфа метод*.

Для решения М. п. было предложено использовать разложение по обобщенным собственным функциям и методы решения сингулярных интегральных уравнений (см. [4]). Решение М. п. при $p(\mu, \mu')=1$, $c<1$ ищется в виде

$$\psi(x,\mu) = \psi_{0-}(x,\mu) + a_{0+}\psi_{0+}(x,\mu) + \int_0^1 A(\nu)\psi_\nu(x, \mu)d\nu,$$

где

$$\psi_\nu(x, \mu) = \varphi_\nu(\mu)\, e^{-x/\nu},$$

$$\varphi_\nu(\mu) = (c\nu/2)\, P\frac{1}{\nu-\mu} + \lambda(\nu)\, \delta(\nu-\mu)$$

— собственные функции непрерывного спектра, P — символ главного значения по Коши, $\delta(\nu-\mu)$ есть δ-функция Дирака,

$$\lambda(\nu) = 1 - \nu c \operatorname{Arth} \nu, \quad \psi_{0\pm} = \varphi_{0\pm}(\mu)\, e^{\mp x/\nu_0}.$$

Дискретные собственные значения $\pm\nu_0$ суть корни характеристич. уравнения

$$\nu c \operatorname{Arth}\frac{1}{\nu} = 1,$$

— собственные функции дискретного спектра имеют вид

$$\varphi_{0\pm}(\mu) = \pm\left(\frac{c\nu_0}{2}\right)\frac{1}{\pm\nu_0-\mu}.$$

Система собственных функций $\varphi_{0+}(\mu)$ и $\varphi_\nu(\mu)$, $0\leqslant\nu\leqslant 1$, оказывается полной в пространстве обобщенных функций на отрезке $0\leqslant\mu\leqslant 1$ и ортогональной с весом $W(\mu)$, к-рый находится как решение сингулярного интегрального уравнения (см. [4]).

Граничное условие (2) М. п. дает ($\mu\geqslant 0$):

$$-\varphi_{0-}(\mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\nu)\,\varphi_\nu(\mu)\,d\nu,$$

то есть a_{0+} и $A(\nu)$ определяются как коэффициенты разложения функции

$$\varphi_{0-}(\mu) = -(c\nu_0/2)\frac{1}{\nu_0+\mu}.$$

Асимптотич. плотность нейтронов

$$B_{ac}(x) = 2\pi\int_{-1}^{+1}[\psi_{0-}(x, \mu) + a_{0+}\psi_{0+}(x, \mu)]\,d\mu =$$

$$= 4\pi e^{-x_0/\nu_0}\operatorname{sh}\frac{x+x_0}{\nu_0}$$

обращается в нуль при

$$x = -x_0 - (\nu_0/2)\,(\ln a_{0+} - i\pi).$$

Для $c=1$ $p(\mu, \mu')=1$, постоянная Хопфа $x_0=0{,}710446$.

Лит.: [1] Milne E. A., «Mon. Notices Roy. Astron. Soc.», 1921, v. 81, p. 361—75; [2] Hopf E., Mathematical problems of radiative equilibrium, Camb., 1934; [3] Снеддон И., Преобразование Фурье, пер. с англ., М., 1955; [4] Кейз К.-М., Цвайфель П.-Ф., Линейная теория переноса, пер. с англ., М., 1972. *В. А. Чуянов.*

МИЛНОРА СФЕРА — гладкое многообразие, гомеоморфное (кусочно линейно изоморфное) сфере S^n, но не диффеоморфное ей. Впервые пример такого многообразия был построен Дж. Милнором в 1956 (см. [1]); этот же пример — первый пример гомеоморфных, но не диффеоморфных многообразий.

Построение М. с. Любое гладкое замкнутое многообразие, гомотопически эквивалентное сфере S^n, при $n\geqslant 5$ гомеоморфно (и даже кусочно линейно изоморфно) сфере S^n (см. *Пуанкаре гипотеза* обобщенная, *h-кобордизм*). Сигнатура замкнутого гладкого почти *параллелизуемого многообразия* размерности $4k$ делится на число σ_k, экспоненциально растущее с ростом k. Для любого k имеется параллелизуемое многообразие P^{4k} сигнатуры 8 (именно, *деревовидное многообразие* Милнора), край к-рого $M=\partial P$ есть при $k\geqslant 1$ гомотопическая сфера (см. [2]). Если бы M было диффеоморфно сфере S^{4k-1}, то многообразие W^{4k}, полученное из P^{4k} добавлением конуса над краем, было бы гладким почти параллелизуемым замкнутым многообразием сигнатуры 8. Таким образом, M есть М. с.

Имеется и др. пример М. с. (см. [5]).

Классификация М. с. Имеется 28 различных (не диффеоморфных) 7-мерных М. с. (в эти 28 многообразий включена стандартная сфера S^7, и в дальнейшем термин «М. с.» используется и для обозначения стандартной сферы S^n).

Множество всех гладкостей на кусочно линейной сфере (точнее, сглаживаний, но для сфер это одно и то же) эквивалентно множеству элементов группы $\pi_i\,(PL/0)$. Последняя группа при $i<7$ тривиальна, так что любая М. с. размерности, меньшей 7, диффеоморфна стандартной.

Пусть θ_n — множество классов h-кобордантности n-мерных гладких многообразий, гомотопически эквивалентных сфере S^n. Операция *связной суммы* превращает это множество в группу, где нуль — класс h-кобордантности сферы S^n. При $n>5$ элементы группы θ_n находятся во взаимно однозначном соответствии с классами диффеоморфности n-мерных М. с. Для вычисления групп θ_n, $n>5$, задается (см. [3]) тривиализация стабильного нормального расслоения (оснащение) М. с. M^n. Это возможно, так как M^n стабильно параллелизуемо. Полученное оснащенное многообразие определяет элемент стабильной гомотопич. группы $\prod_n = \lim_i \pi_{i+n}(S^i)$. Этот элемент зависит, вообще говоря, от выбора оснащения ($\theta_n \to \prod_n$ — «многозначное отображение»). Пусть $\theta_n(\partial\pi)$ — подгруппа в θ_n, состоящая из М. с., ограничивающих параллелизуемые многообразия. Построенное многозначное отображение индуцирует гомоморфизм $\alpha : \theta_n/\theta_n(\partial\pi) \to \mathrm{Coker}\ I$, где $I : \pi_n(SO) \to \prod_n$ — стационарный *Уайтхеда гомоморфизм* и α — изоморфизм. Вычисление группы $\theta_n/(\theta_n(\partial\pi))$ сводится к задаче (нерешенной, 1982) вычисления группы $\prod_n$ и вычисления группы $\theta_n(\partial\pi)$, что делается посредством *Морса перестроек* пленки (при сохранении края). Пусть $[M^n] \in \theta(\partial\pi)$, то есть $M^n = \partial W^{n+1}$ и W^{n+1} параллелизуемо. Если W — стягиваемое многообразие, то после вырезания в W маленького диска многообра-

зие M h-кобордантно S^n, то есть $[M^n]\ 0\in\theta_n$. Если n четно, то можно так изменить W посредством перестроек Морса, что новое многообразие W' с $\partial W'=M$ будет стягиваемым (здесь требуется параллелизуемость многообразия W и условие $n>5$). Итак, $\theta_{2n}(\partial\pi)=0$.

Случай $n=4k-1$. Если сигнатура $\sigma(W)$ многообразия W есть 0, то W можно перестройками Морса превратить в стягиваемое многообразие, так что в этом случае M есть стандартная сфера. Если $M=\partial W$ и $M'=\partial W'$, то $M\#(-M')=\partial(W\#(-W))$ и $\sigma(W\#(-W'))=\sigma(W)-\sigma(W')$ (здесь $A\#B$ — связная сумма многообразий A и B). Если $\sigma(W)=\sigma(W')$, то $[M]=[M']$, так что инвариант $\sigma(W)$ однозначно определяет элемент $[M]\in\theta_n$. Если $[M]=0\in\theta_{4k-1}(\partial\pi)$ и $M=\partial W$, то $\sigma(W)$ делится на σ_k. Обратно, для любого $k>1$ существует гладкое замкнутое многообразие B^{4k} с $\sigma(B^{4k})=\sigma_k$, поэтому если $M=\partial W$ и $\sigma(W)=n\sigma_k$, то $M=\partial(W\#(-nB^{4k}))$, где $W\#\#(-nB^{4k})$ параллелизуемо и $\sigma(W\#(-nB^{4k}))=0$. Элемент $[M]\in\theta_{4k-1}(\partial\pi)$ полностью определяется вычетом $\sigma(W)\bmod\sigma_k$, и разные вычеты определяют разные многообразия. Так как $\sigma(W)$ принимает любое значение, кратное 8, то $\operatorname{ord}\theta_{4k-1}(\partial\pi)=\sigma_{nk}\cdot 8$.

Случай $n=4k+1$. Пусть $M=\partial W^{4k+2}$. Если *Кервера инвариант* многообразия W есть нуль, то есть $\psi(W)=0$, то W перестраивается до стягиваемого многообразия, то есть $[M]=0$. Пусть теперь $\psi(W)\neq 0$. Так как при $4k+2\neq 2^i-2$ не существует гладкого замкнутого почти параллелизуемого (что в размерности $4k+2$ равносильно параллелизуемости) многообразия с инвариантом Кервера, не равным нулю, то M не диффеоморфно S^{4k+1}. В этом случае $\theta_{4k+1}(\partial\pi)\neq 0$, то есть $\theta_{4k+1}(\partial\pi)=\mathbb{Z}_2$. При $4k+2=2^i-2$ и тех значениях i, где существует многообразие с ненулевым инвариантом Кервера, $M\approx S^{4k+1}$, то есть $\theta_{4k+1}(\partial\pi)=0$, но вопрос об описании всех таких не решен (1982), хотя при $i\leqslant 6$ ответ положителен. Итак, $\theta_{4k+1}(\partial\pi)$ есть $\mathbb{Z}_2$ или 0.

Имеется другое представление М. с. Пусть в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ W — алгебраическое многообразие с уравнением

$$z_1^{a_1}+z_2^{a_2}+\ldots+z_{n+1}^{a_{n+1}}=0$$

и S_ε есть $(2n+1)$-мерная сфера радиуса ε (малого) с центром в начале координат. При подходящих значениях a_k $M=W\cap S_\varepsilon$ есть М. с. (см. [4]). Напр., при $n=4$ и $a_1=6k-1$, $a_2=3$, $a_3=a_4=a_5=2$ и $k=1, 2, \ldots, 28$ получаются все 28 7-мерных М. с.

Лит.: [1] Милнор Дж., «Математика», 1957, т. 1, № 3, с. 35—42; [2] Milnor J., Kervaire M., в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958, Camb., 1960, p. 454—58; [3] их же, «Ann. Math.», 1963, v. 77, № 3, p. 504—37; [4] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [5] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979.

Ю. Б. Рудяк.

МИНИМАКС — смешанный экстремум

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}F(x,y),\quad \min_{y\in Y}\max_{x\in X}F(x,y)$$

и т. п. (см. также *Максимин*); может интерпретироваться (напр., в теории принятия решений, *исследовании операций* или статистике) как наименьшие потери из тех, к-рые нельзя предотвратить принимающему решения субъекту в наихудших для него обстоятельствах.

Н. Н. Воробьев.

МИНИМАКСА ПРИНЦИП — принцип оптимальности в *антагонистических играх*, выражающий стремление каждого из игроков к получению наибольшего гарантированного выигрыша. М. п. реализуем в антагонистич. игре $\Gamma=\langle A, B, H\rangle$, если справедливо равенство

$$v=\max_{a\in A}\inf_{b\in B}H(a,b)=\min_{b\in B}\sup_{a\in A}H(a,b),\qquad (*)$$

т. е. если существуют значение игры, равное v, и оптимальные стратегии у обоих игроков.

Для *матричных игр* и нек-рых классов бесконечных антагонистич. игр (см. *Бесконечная игра*) М. п. реализуем в смешанных стратегиях. Известно, что равенство (*) равносильно выполнению неравенств (см. *Седловая точка*):

$$H(a, b^*) \leqslant H(a^*, b^*) \leqslant H(a^*, b)$$

для всех $a \in A$, $b \in B$, где a^*, b^* — стратегии, на к-рых достигаются внешние экстремумы в (*). Таким образом, М. п. математически выражает интуитивно понимаемую идею устойчивости, т. к. ни одному из игроков невыгодно отклоняться от своих оптимальных стратегий a^* (соответственно b^*). Вместе с тем М. п. гарантирует игроку I (II) получение выигрыша (проигрыша), не меньшего (не большего), чем значение игры. Было дано аксиоматич. обоснование М. п. для матричных игр (см. [1]).

Лит.: [1] Вилкас Э., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, в. 3, с. 324—27. *Е. Б. Яновская.*

МИНИМАКСНАЯ ОЦЕНКА — статистическая оценка, к-рая получена в результате конкретизации понятия *минимаксности статистической процедуры* в задаче статистич. оценивания.

Пример 1. Пусть случайная величина X подчиняется биномиальному закону, параметры к-рого суть n и θ, причем θ, $0<\theta<1$, неизвестен. Статистика

$$t = \frac{X}{n} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} + \frac{1}{2(1+\sqrt{n})}$$

является М. о. для параметра θ относительно функции потерь

$$L(\theta, t) = (\theta - t)^2.$$

Пример 2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, к-рые подчиняются одному и тому же вероятностному закону, имеющему непрерывную плотность вероятности $f(x-\theta)$, $|x|<\infty$, $|\theta|<\infty$. Оценка Питмена

$$t = t(X_1, \ldots, X_n) = X_{(1)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \prod_{i=2}^{n} f(x+X_i)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \prod_{i=2}^{n} f(x+X_i)\,dx}$$

является М. о. для неизвестного параметра сдвига θ относительно функции потерь $L(\theta, t) = (\theta - t)^2$, где $X_{(1)}$ — первый член вариационного ряда, построенного по выборке $X_1, \ldots, X_n$. В частности, если $X_1, \ldots, X_n \sim N(\theta, 1)$, то $t = (X_1 + \ldots + X_n)/n$.

Лит.: [1] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975; [2] Кокс Д., Хинкли Д., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978. *М. С. Никулин.*

МИНИМАКСНОЕ СВОЙСТВО собственных значений — специального типа соотношения, связывающие собственные значения вполне непрерывного самосопряженного оператора A с максимальным и минимальным значениями соответствующей ему квадратичной формы (Ax, x). Пусть A — самосопряженный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. Спектр оператора A состоит из конечного или счетного множества действительных собственных значений λ_n, имеющих единственную предельную точку, равную нулю. Соответствующие ненулевым собственным значениям корневые подпространства состоят из собственных векторов и конечномерны; собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны; оператор A имеет полную систему собственных векторов. Спектральное разложение оператора A имеет вид: $A = \Sigma \lambda_i P_i$, где λ_i — различные собственные значения, P_i — проекторы на соответствующие собственные подпространства, причем ряд сходится по операторной норме. Норма оператора A совпадает с максимальным по модулю соб-

ственным значением и совпадает с $\max\limits_{x \in H,\ |x|=1} |(Ax, x)|$; при этом максимум достигается на соответствующем собственном векторе.

Пусть $\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \ldots$ — положительные собственные значения оператора A, причем каждое собственное значение повторяется столько раз, сколько его кратность. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^+ &= \max_{x \in H} \frac{(Ax, x)}{|x|^2}, \\ \lambda_{n+1}^+ &= \min_{y_1, \ldots, y_n} \max_{\substack{(x, y_i)=0 \\ i=1, \ldots, n}} \frac{(Ax, x)}{|x|^2}, \quad n \geqslant 1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $x, y_1, \ldots, y_n$ — произвольные ненулевые векторы пространства H. Аналогичные соотношения справедливы для отрицательных собственных значений $\lambda_1^- \geqslant \lambda_2^- \geqslant \ldots$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^- &= \min_{x \in H} \frac{(Ax, x)}{|x|^2}, \\ \lambda_{n+1}^- &= \max_{y_1, \ldots, y_n} \min_{\substack{(x, y_i)=0 \\ i=1, \ldots, n}} \frac{(Ax, x)}{|x|^2}, \quad n \geqslant 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Соотношения (1) и (2) применяются для нахождения собственных значений интегральных операторов с симметричным ядром. Если A и B — самосопряженные вполне непрерывные операторы, $A \leqslant B$ (т. е. $(Ax, x) \leqslant (Bx, x)$), λ_n, μ_n — последовательности их положительных собственных значений, занумерованных в порядке убывания, причем каждое значение повторяется столько раз, какова его кратность, то $\lambda_n \leqslant \mu_n$.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж.-Т., Линейные операторы, пер. с англ., т. 2, М., 1966. *А. И. Логинов.*

МИНИМАКСНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ — один из вариантов оптимальности в математич. статистике, согласно к-рому статистич. процедура объявляется оптимальной в минимаксном смысле, если она минимизирует максимальный риск. В терминах решающих функций понятие М. с. п. определяется следующим образом. Пусть случайная величина X принимает значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, и пусть $\Delta = \{\delta\}$ — класс решающих функций, с помощью к-рых по реализации случайной величины X надлежит выбрать решение d из пространства решений D, т. е. $\delta(\cdot) : \mathfrak{X} \to D$, при этом задана некрая функция потерь $L(\theta, d)$, определенная на $\Theta \times D$. В таком случае статистич. процедура $\delta^* \in \Delta$ наз. м и н и м а к с н о й в задаче принятия статистич. решения относительно функции потерь $L(\theta, d)$, если при всех $\delta \in \Delta$ выполняется соотношение

$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta^*(X)) \leqslant \sup_{\theta \in \Theta} \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X)),$$

где

$$\mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X)) = R(\theta, \delta) = \int_{\mathfrak{X}} L(\theta, \delta(x))\, dP_\theta(x)$$

— функция риска, отвечающая статистич. процедуре (решающему правилу) δ, при этом решение $d^* = \delta^*(x)$, отвечающее наблюденной реализации x и минимаксной процедуре δ^*, наз. м и н и м а к с н ы м. Так как величина

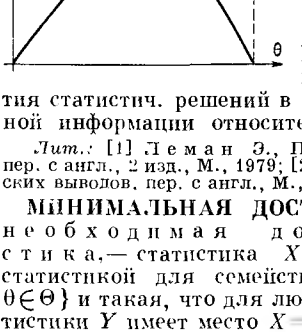
$$\sup_{\theta \in \Theta} \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X))$$

показывает ожидаемые потери, к-рые можно понести при использовании процедуры $\delta \in \Delta$, то М. с. п. δ^* означает, что если руководствоваться процедурой δ^*

в задаче выбора решения d из пространства решений D, то наибольший ожидаемый риск

$$\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, \delta^*)$$

будет настолько малым, насколько это возможно. Принцип М. с. п. не всегда приводит к разумным выводам (см. рис.); в данном случае следует ориентироваться на процедуру δ_1, а не на δ_2, хотя



$$\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, \delta_1) > \sup_{\theta\in\Theta} R(\theta, \delta_2).$$

Понятие М. с. п. является полезным в задачах принятия статистич. решений в условиях отсутствия априорной информации относительно параметра θ.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975.
М. С. Никулин.

МИНИМАЛЬНАЯ ДОСТАТОЧНАЯ СТАТИСТИКА, необходимая достаточная статистика,— статистика X, являющаяся достаточной статистикой для семейства распределений $\mathcal{P}=\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$ и такая, что для любой другой достаточной статистики Y имеет место $X=g(Y)$, где g — нек-рая измеримая функция. Достаточная статистика минимальна тогда и только тогда, когда порождаемая ею достаточная σ-алгебра минимальна, т. е. содержится в любой другой достаточной σ-алгебре.

Используется также понятие $\mathcal{P}$-минимальной достаточной статистики (σ-алгебры). Достаточная σ-алгебра $\mathcal{B}_0$ (и соответствующая статистика) наз. $\mathcal{P}$-минимальной, если $\mathcal{B}_0$ содержится в пополнении $\bar{\mathcal{B}}$ любой достаточной σ-алгебры $\mathcal{B}$ относительно семейства распределений $\mathcal{P}$. Если семейство $\mathcal{P}$ доминировано σ-конечной мерой μ, то σ-алгебра $\mathcal{B}_0$, порождаемая семейством плотностей

$$\left\{p_\theta(\omega)=\frac{dP}{d\mu}(\omega);\ \theta\in\Theta\right\},$$

является достаточной и $\mathcal{P}$-минимальной.

Общий пример М. д. с. дает направляющая статистика $T=(T_1, \ldots, T_n)$ экспоненциального семейства

$$p_\theta(\omega)=C(\theta)\exp\sum\nolimits_j Q_j(\theta)\,T_j(\omega)$$

в предположении точности канонич. параметризации этого семейства.

Лит.: [1] Барра Ж.-Р., Основные понятия математической статистики, пер. с франц., М., 1974; [2] Шметтерер Л., Введение в математическую статистику, пер. с нем., М., 1976.
А. С. Холева.

МИНИМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ — алгебраическое многообразие с условием минимальности относительно существования бирациональных морфизмов на неособые многообразия. Точнее, пусть B — класс всех бирационально эквивалентных неособых проективных многообразий над алгебраически замкнутым полем k, поля функций к-рых изоморфны заданному конечно порожденному расширению K над k. Многообразия из класса B наз. проективными моделями этого класса, или проективными моделями поля K/k. Многообразие $X\in B$ наз. относительно минимальной моделью, если всякий бирациональный морфизм $f: X\to X'$, где $X'\in B$, является изоморфизмом. Иначе говоря, относительно М. м.— это минимальные элементы в B относительно частичного порядка, определяемого следующим отношением доминирования: X_1 доминирует X_2, если существует бирациональный морфизм $h: X_1\to X_2$. Если относительно М. м. единственна в B, то она наз. минимальной моделью.

В каждом классе бирационально эквивалентных кривых существует единственная (с точностью до изоморфизма) неособая проективная кривая. Так что всякая неособая проективная кривая является М. м. В общем случае, если класс B не пуст, то в нем существует хотя бы одна относительно М. м. Непустота класса B известна (благодаря теоремам о разрешении особенностей) для многообразий любой размерности в характеристике 0 и для многообразий размерности $n\leqslant 3$ в характеристике $p>5$.

Основные результаты о М. м. алгебраич. поверхностей заключаются в следующих утверждениях.

1) Неособая проективная поверхность X тогда и только тогда является относительно М. м., когда она не содержит исключительных кривых первого рода (см. *Исключительное подмногообразие*).

2) Всякая неособая полная поверхность обладает бирациональным морфизмом на относительно М. м.

3) В каждом непустом классе B бирационально эквивалентных поверхностей, кроме классов рациональных и линейчатых поверхностей, существует (и притом единственная) М. м.

4) Если B - класс *линейчатых поверхностей* с кривой C рода $g>0$ в качестве базы, то все относительно М. м. в B исчерпываются геометрически линейчатыми поверхностями $\pi : X\to C$.

5) Если B — класс рациональных поверхностей, то все относительно М. м. в B исчерпываются проективной плоскостью P^2 и серией минимальных рациональных линейчатых поверхностей $F_n = P(\mathcal{O}_{P^1}+\mathcal{O}_{P^1}(n))$ для всех целых $n\geqslant 2$.

Имеется (см. [6], [7]) обобщение теории М. м. поверхностей на регулярные двумерные схемы. Описаны (см. [2]) М. м. рациональных поверхностей, определенных над произвольным полем.

О М. м. для многообразий размерности $n\geqslant 3$ почти ничего не известно (1982).

Лит.: [1] Алгебраические поверхности, М., 1965 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 75); [2] Исковских В. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1979, т. 43, № 1, с. 19—43; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [4] Bombieri E., Husemoller D., Classification and embeddings of surfaces. Proc. symp. pure math., v. 29 — Algebraic geometry arcata 1974, Rhode Island, 1975, p. 329—420; [5] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y.—Hdlb.—B., 1977; [6] Lichtenbaum S., «Amer. J. Math.», 1968, v. 90, № 2, p. 380—405; [7] Shafarevitch I., Lectures on minimal models and birational transformations of twodimensional schemes, Bombey, 1966.

В. А. Исковских.

МИНИМАЛЬНАЯ НОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — неединичная нормальная подгруппа H такая, что между ней и единичной подгруппой нет других нормальных подгрупп всей группы. М. н. п. имеются далеко не во всякой группе. Если группа конечна, то любая ее М. н. п. является прямым произведением изоморфных простых групп. Если М. н. п. у группы G существует и единственна, то она наз. монолитом (иногда сердцевиной), а сама группа G наз. монолитичной.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Шмелькин.

МИНИМАЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — поверхность, у к-рой средняя кривизна H равна нулю во всех точках.

Первые исследования о М. п. восходят к Ж. Лагранжу (J. Lagrange, 1768), к-рый рассмотрел следующую вариационную задачу: найти поверхность наименьшей площади, натянутую на данный контур. Предполагая искомую поверхность задаваемой в виде $z=z(x, y)$, Ж. Лагранж получил, что $z(x, y)$ необходимо должна удовлетворять т. н. уравнению Эйлера — Лагранжа

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2pq\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+(1+p^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \qquad (1)$$

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Позже Г. Монж (G. Monge, 1776) обнаружил, что условие минимальности площади приводит к условию $H=0$, и поэтому за поверхностями с $H=0$ закрепилось название «минимальные». В действительности, однако, нужно различать понятия М. п. и поверхности наименьшей площади, т. к. условие минимальности $H=0$ представляет собой лишь необходимое условие минимальности площади, вытекающее из равенства нулю 1-й вариации площади поверхности среди всех поверхностей класса C^2 с заданной границей. Для проверки достижения в указанном классе хотя бы относительного (локального) минимума приходится исследовать 2-ю вариацию площади поверхности.

Теория М. п. имеет богатую историю — ею занимались почти все крупные математики 19 –20 вв. Ее задачи стимулировали развитие многих смежных областей математики. Первые общие методы интегрирования уравнения Эйлера — Лагранжа были предложены Г. Монжем (1784) и А. Лежандром (A. Legendre, 1787) в виде т. н. формул Монжа, полученных через комплексные характеристики уравнения (1):

$$x=A(t)+A_1(\tau),\quad y=B(t)+B_1(\tau),\quad z=C(t)+C_1(\tau),$$

где t и τ — комплексные переменные, $A(t)$, . . ., $C_1(\tau)$ — голоморфные функции, удовлетворяющие условиям

$$A'^2(t)+B'^2(t)+C'^2(t)=0,\quad A_1'^2(\tau)+B_1'^2(\tau)+C_1'^2(\tau)=0.$$

Однако эти методы в силу недостаточного еще развития теории функций комплексного переменного долгое время оставались без применения [в 1832 С. Пуассон (S. Poisson) писал, что из формул Монжа трудно извлечь какую-либо пользу, т. к. они усложнены введением комплексных переменных].

Новые результаты о М. п. стали появляться лишь с начала 30-х гг. 19 в. С. Пуассон анонсировал (1832) решение им вариационной задачи Лагранжа в случае, когда край поверхности близок к плоской кривой. Вскоре к известным уже М. п.— *катеноиду* [Л. Эйлер (L. Euler, 1774), Ж. Мёнье (J. Meusnier, 1776)] и *геликоиду* (Ж. Мёнье, 1776) — была добавлена третья М. п.— *Шерка поверхность* (H. Scherk, 1834). В 1842 Э. Каталан (E. Catalan) доказал, что геликоид является единственной линейчатой М. п.; в 1844 была поставлена и решена *Бьёрлинга задача*; в 50-х гг. 19 в. в серии работ О. Бонне (O. Bonnet) были даны новые доказательства известных к тому времени фактов теории М. п. и найдены другие свойства М. п. (единственность катеноида как М. п. вращения, конформность сферич. отображения М. п. и др.).

В 1866 были открыты формулы Вейерштрасса:

$$x=x_0+\operatorname{Re}\int_0^w (f^2-g^2)\,dw,$$

$$y=y_0+\operatorname{Re}\int_0^w i\,(f^2+g^2)\,dw,$$

$$z=z_0+2\operatorname{Re}\int_0^w fg\,dw,$$

представляющие односвязную М. п. S (x, y, z) через голоморфные функции $f(w)$ и $g(w)$, определенные в круге или во всей плоскости изменения внутренних *изотермических координат* (u, v), $w=u+iv$. Эти формулы эквивалентны или содержат как частные случаи все другие найденные до этого параметрич. представления М. п. [Б. Риман (B. Riemann, 1860), А. Эннепер (A. Enneper, 1864), К. М. Петерсон, 1866, и др.] и дают регулярную М. п. только в случае, когда f и g не имеют общих нулей, а в случае совпадения нулей функций f и g поверхность является т. н. обобщенной М. п. с вырождающейся в общих нулях f и g метрикой

$$ds^2=(|f|^2+|g|^2)\,(du^2+dv^2).$$

В этих точках появляются *ветвления точки* М. п. С помощью формул Вейерштрасса появилась возможность явного построения и изучения многих конкретных М. п., в частности алгебраич. М. п., получаемых при алгебраич. функциях f и g.

В 1874 Г. Шварц (H. Schwarz) получил представление М. п. в изотермич. координатах (u, v) в виде

$$r(w) = r(u+iv) = \operatorname{Re}\left[F(w) - i\int_0^w n(w)\,dF(w)\right],$$

где $F(w)$ и $n(w)$ — трехмерные векторы с голоморфными компонентами, совпадающими соответственно с $r(u, 0)$ и единичной нормалью $n(u, 0)$ к М. п. При $\operatorname{Im} w = 0$ эта формула дает решение задачи Бьёрлинга в явном виде и позволяет распространить на М. п. принцип симметрии Шварца.

В эти же годы С. Ли (S. Lie, 1878) развил свою интерпретацию формул Монжа, сопоставив каждой М. п. с гармонич. радиус-вектором $r(w)$ комплексно-аналитич. кривую

$$z = R(w) \in \mathbb{C}^3,\ \operatorname{Re} R(w) = \frac{1}{2} r(w)$$

и представив М. п. как поверхность переноса кривой $R(w)$ и ей комплексно-сопряженной кривой $\overline{R(w)}$, что послужило отправной точкой для установления плодотворных связей между теорией М. п. и аналитич. кривых. Таким образом, труды К. Вейерштрасса, С. Ли, Б. Римана, Г. Шварца и др. привели к концу 19 в. к широкому использованию в теории М. п. методов и результатов теории функций комплексного переменного.

В своих опытах Ж. Плато (J. Plateau, 1849) пришел к физич. реализации М. п. в виде мыльных пленок, натянутых на проволочные каркасы различной формы. Его опыты оживили интерес к старой проблеме нахождения М. п. по ее заданному граничному контуру. Эту проблему стали называть *Плато задачей*. Первые ее решения были получены для различных случаев полигональных контуров, при этом, в частности, была открыта *Римана — Шварца поверхность*.

В 1816 в теории М. п. появилась новая з а д а ч а Ж е р г о н н а: найти М. п., если часть ее границы задана, а остальная часть должна располагаться на некрой заранее заданной поверхности; эта задача стала наз. задачей о М. п. с о с в о б о д н о й г р а н и ц е й. Первые результаты по ее решению также относятся к случаям, когда заданная часть границы состоит из отрезков прямых, а остальная ее часть должна находиться на заданных плоскостях (более подробно см. в [1], [2]).

С начала 20 в. усилился интерес к изучению М. п. «в целом». Изучалась задача Дирихле для уравнения Эйлера — Лагранжа [А. Корн (A. Korn, 1909), С. Н. Бернштейн, 1900]; была получена *Бернштейна теорема* о М. п.; вообще с началом работ С. Н. Бернштейна в теорию М. п. вошли методы теории дифференциальных уравнений с частными производными. Г. Либман (H. Liebmann, 1919) установил связь между М. п. и бесконечно малыми изгибаниями сферы. Венцом достижений 1-й пол. 20 в. в теории М. п. было полное решение задачи Плато, сначала в случае односвязных поверхностей, а затем и для двумерных поверхностей произвольного топологич. типа в евклидовом и римановом пространстве (см. [1] — [5]). Результаты о М. п. были распространены на случай решений более общих вариационных задач (обобщающих вариационную задачу для минимума поверхности), более общих дифференциальных уравнений (обобщающих уравнение Эйлера — Лагранжа для М. п.) и на случай более общего класса поверхностей (напр., с постоянной средней кривизной) (см. [3], [6], [7]).

Среди имеющихся результатов и ведущихся исследований по М. п. можно выделить несколько направлений.

1) Внутренняя геометрия М. п. Не для всякого риманова многообразия неположительной кривизны существует изометрич. погружение в евклидово пространство E^n, $n\geqslant 3$, в виде нек-рой М. п. Критерий существования М. п. в E^3 с данной метрикой заключается в следующей теореме Риччи: для того чтобы данная метрика ds^2 была изометрична метрике нек-рой М. п. в E^3, необходимо и достаточно, чтобы ее кривизна K была неотрицательна, а в точках, где $K<0$, метрика $d\sigma^2=\sqrt{-K}\,ds^2$ была евклидова. На основании этого критерия удается охарактеризовать все изгибания М. п., удовлетворяющей условиям теоремы Риччи, в классе всех М. п. из E^n, $n\geqslant 3$. Прежде всего, имея в E^n М. п. F, заданную в изотермич. координатах (u, v) гармоничн. функциями $x_k(u, v)=\operatorname{Re}\Phi_k(w)$, $w=u+iv$, $1\leqslant k\leqslant n$, $\Phi_k(w)$ — голоморфные функции, строят так наз. ассоциированные с F и друг с другом М. п. F_α с компонентами радиус-вектора $x_k=\operatorname{Re}(\Phi_k(w)e^{-i\alpha})$, $F=F_0$. Ассоциированные М. п. F_α все оказываются изометричными друг другу, а в случае $n=3$ их изгибания друг в друга при изменении α обладают следующим характеристич. свойством: нормали к F_α в соответствующих по изометрии точках параллельны, причем изгибания М. п. F в E^3 в классе М. п. исчерпываются семейством ассоциированных с F М. п.; напр., катеноид и геликоид — две ассоциированные (а значит, изометричные) М. п. с параметрами $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$. Далее, по данной М. п. F в E^n можно построить изометричную ей М. п. $G\subset E^{2n}$ с радиус-вектором $\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $y_k=\operatorname{Im}\Phi_k$, а затем, отправляясь от G, строится нек-рое специальное двухпараметрич. семейство изометричных F М. п. $G_{\alpha,\beta}\in E^{2n}$. В итоге оказывается, что если нек-рая М. п. $M\in E^{2n}$ удовлетворяет условиям теоремы Риччи, то существует М. п. $F\subset E^3$, изометричная M, причем: 1) или $M\subset E^3$ и тогда она входит в семейство ассоциированных с F М. п.; 2) или $M\in E^6$ (и не принадлежит E^5) и она входит в упомянутое выше семейство $G_{\alpha\beta}$.

Однако уже в E^4 существуют М. п., метрики к-рых не удовлетворяют условиям теоремы Риччи. Поэтому возникает задача описания всех метрик, порождаемых двумерными М. п. в E^n, $n\geqslant 4$, и изгибаний этих М. п.; эта задача также решена с достаточной полнотой в терминах нек-рых классов голоморфных отображений. Имеется также ряд результатов о внутренней характеристике метрик двумерных М. п. в сферах S^n, $n\geqslant 3$ (см. [8]).

Что касается метрик многомерных М. п., то здесь пока нет сколько-нибудь существенно продвинутых результатов, а вопросы единственности и изгибаний М. п. исчерпываются главным образом описанием возможных видов компактных минимальных подмногообразий n-мерной сферы. Изгибания М. п. на поверхности другого внешнего строения также изучены недостаточно полно даже для E^3.

Другой круг проблем внутренней геометрии М. п. составляют изопериметрич. неравенства, к-рые, впрочем, в наиболее точных и интересных формах зависят от внешнего строения М. п. (см. [9]).

2) Локальные свойства М. п. Сюда можно отнести результаты об аналитичности М. п. (само определение М. п. требует принадлежности ее лишь классу C^2) и решений ряда вариационных задач, утверждение о том, что достаточно малая область М. п. реализует абсолютный минимум площади среди всех поверхностей с той же границей, что и рассматриваемая область, теоремы об устранимости изолированных или

маломощных особенностей решений уравнения М. п. и его обобщений, изучение строения обобщенных М. п. в окрестности их точек ветвления, исследования особенностей М. п. и решений так наз. эллиптических вариационных задач в многомерных евклидовых и римановых пространствах (см. [2], [3], [6], [10], [12]).

3) Изучение конкретных М. п. или М. п. при априори заданных свойствах края, плоских сечений, сферич. отображения и т. п. Напр., теорема о выпуклости горизонтальных сечений двусвязной М. п. с выпуклыми горизонтальными краями; теорема о совпадении с катеноидом полной М. п., расположенной между плоскостями $z=C_1$ и $z=C_2$, $-\infty \leqslant C_1 < C_2 \leqslant \infty$, и имеющей звездные сечения $z=\text{const}$; детальное изучение классич. М. п.— Эннепера, Шерка, Римана — Шварца и др. Особо нужно отметить исследования минимальных конусов в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$, приведшие к построению контрпримера для теоремы Бернштейна в E^n, $n \geqslant 9$, и к нахождению примера нерегулярного решения задачи Плато для гиперповерхностей в E^8. Конкретные примеры различных М. п. начались изучаться также и в многомерных римановых пространствах (см. [1], [2], [6], [12], [13]).

4) Развитие теории М. п. в E^n, $n \geqslant 3$, по аналогии с функциями комплексного переменного в $\mathbb{C}^1$. Здесь можно назвать результаты о граничных свойствах М. п.— теорема об аналитич. продолжении М. п. через регулярную аналитич. дугу границы, теоремы о гладкости М. п. в зависимости от гладкости ее границы (напр., если граница класса $C^{n,\alpha}$, $n \geqslant 1$, $0<\alpha<1$, то М. п. принадлежит тому же классу); работы по построению для М. п. аналога теории Неванлинны о распределении значений мероморфных функций (см. [2], [6], [13]).

5) Работы об уравнении Эйлера — Лагранжа. Наряду с изучением «в целом» решений этого уравнения и его обобщения для n-мерных М. п. $(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_k(x))$ в E^{n+k}, $k \geqslant 1$,

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} g^{ij}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}, \qquad (2)$$

(где $f=(f_1, \ldots, f_k)$, g^{ij} — контравариантные компоненты метрич. тензора g_{ij}), большое количество работ посвящено локальному поведению решений уравнения Эйлера — Лагранжа и его обобщения (2). Это — вопросы устранимости особенностей при коразмерностях $k-1$, существование нерегулярных решений при больших коразмерностях, и особенно — исследование задачи Дирихле. Эту задачу можно по-другому трактовать как задачу Плато по определению М. п. с заданным контуром и с дополнительным условием однозначной проектируемости М. п. на ту же плоскость, что и граничный контур. Такая трактовка позволяет во многих случаях получать выводы о задаче Дирихле на основании известных результатов о задаче Плато (напр., существование и единственность решения задачи Дирихле в E^3 для случая выпуклой области D получается как следствие одной теоремы Радо о задаче Плато).

В общем случае установлено, что для разрешимости задачи Дирихле в коразмерности 1 для любой непрерывной граничной функции необходимо и достаточно, чтобы вектор средней кривизны края ∂D был направлен внутрь области D (при $n=2$ это означает выпуклость области D); при этом решение задачи единственно. Что касается невыпуклых областей, то, напр., доказано, что для любой невыпуклой области D с жордановой границей ∂D можно найти такую непрерывную функцию $\varphi(p)$, $p \in \partial D$, что для нее соответствующая задача Дирихле будет неразрешимой. В больших коразмерностях задача Дирихле может быть неразрешимой даже для случая, когда область совпадает с шаром в E^n.

Задача Дирихле рассматривалась также во внешности области D. Здесь получаются новые факты (напр., теряется единственность решения, не всегда получается разрешимость и т. д.). Имеются также результаты в случае постановки задачи Дирихле с неполными или частично неограниченными граничными значениями (см. [2], [6]—[8], [14]).

6) П о л н ы е М. п. Под полными М. п. понимаются М. п., полные как метрич. пространства относительно своей внутренней метрики. Полные М. п. бывают компактные (без границы) и некомпактные, или открытые. В исследованиях полных М. п. интерес направлен главным образом на изучение связей, существующих между глобальными метрич., геометрич. и топологич. свойствами поверхностей.

Наиболее продвинуто изучение двумерных полных М. п. в E^3, $n\geqslant 3$, для к-рых большинство результатов получается применением методов теории функций комплексного переменного. В частности, показано существование в E^3 полной М. п. любого заранее заданного рода g и связности k; получены теоремы о связях между интегральной кривизной $\iint KdS$ и топологическим и конформным типами полной М. п. (напр., $\iint KdS\leqslant 2\pi(\chi-k)$, где χ — эйлерова характеристика поверхности, k — число компонент ее границы; если $\left|\iint Kds\right|<\infty$, то поверхность S конформно эквивалентна римановой поверхности с конечным числом выколотых точек, если полная М. п. S бесконечно связна или конформно гиперболич. типа, то ее интегральная кривизна бесконечна, и нормали к S принимают все направления бесконечное число раз, за возможным исключением множества направлений нулевой емкости, и т. д.); изучена структура сферич. отображения (напр., полная М. п. в E^3 есть или плоскость, или ее сферич. образ не содержит, самое большее, множество емкости нуль, полная М. п. в E^3, $n\geqslant 3$, является либо плоскостью, либо ее образ при обобщенном сферич. отображении пересекается со всюду плотным множеством гиперплоскостей, для любого $n\leqslant 4$ в E^3 существуют полные М. п., сферич. образ к-рых не содержит ровно n заранее заданных точек, и т. д.); найдены поверхности, полностью определяемые их интегральной кривизной и топологич. типом (это катеноид и *Эннепера поверхность*); показана внешняя неограниченность в E^n, $n\geqslant 3$, полных М. п. с ограниченной интегральной кривизной.

Результаты о компактных М. п. относятся в основном к полным М. п., расположенным в сферах $S^n\subset E^{n+1}$. Интерес именно к этим М. п. объясняется, помимо трудностей случая общего риманова пространства, еще и наличием важных связей между минимальными конусами в E^{n+1} и М. п. в S^n (каждый гиперконус в E^{n+1}, определяемый своей вершиной O и пересечением со сферой S^n с центром в O, является минимальным тогда и только тогда, когда его пересечение с S^n будет М. п. в S^n). Исследуемые здесь вопросы в основном те же, что и для полных М. п. в E^n. Напр., показано, что любое компактное двумерное многообразие, за исключением проективной плоскости, может быть реализовано в виде полной М. п. в S^3; в S^3 получен аналог теоремы Бернштейна: если нормали к полной М. п. лежат в открытой полусфере, то эта М. п. совпадает с экваториальной гиперсферой; найдены и другие признаки совпадения полной М. п. в S^n с гиперсферой, исследованы возможные виды и вопросы единственности полных М. п. в S^n в зависимости от величины их скалярной кривизны и т. д. (см. [2], [6], [8], [13]).

7) Построение различного рода о б о б щ е н и й М. п., а также уравнений и вариационных задач, решения к-рых сохраняют свойства М. п., здесь к классич. тео-

рии М. п. непосредственно примыкают работы о поверхностях с заданной средней кривизной, с квазиконформным сферич. отображением, работы о квазилинейных эллиптич. уравнениях со многими свойствами уравнения Эйлера — Лагранжа двух и большего числа переменных; более далекие обобщения сделаны в теориях, связывающих М. п. с множествами, минимизирующими интегральные потоки или различные меры Хаусдорфа, и т. п. (см. [2], [6], [7], [10], [11]).

8) Работы о задаче Плато для двумерных и многомерных М. п. (см. *Плато задача*, *Плато многомерная задача*).

Из приведенного перечня исследуемых задач и полученных результатов видно, что диапазон вопросов теории М. п. весьма велик, соответственно разнообразны и применяемые в ней методы. Если в классич. исследованиях в основном применялись методы дифференциальной геометрии, теории функций комплексного переменного и дифференциальных уравнений, то сейчас возрастает роль методов топологии, теории меры и функционального анализа, особенно в исследованиях М. п. в многомерных пространствах.

Лит.: [1] Курант Ф., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, пер. с англ., М., 1953; [2] Nitsche J. C. C., Vorlesungen über Minimalflächen, B.—[u. a.], 1975; [3] Radó T., On the problem of Plateau, B., 1933; [4] Douglas J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1931, v. 33, p. 263—321; [5] Morrey C., «Ann. Math.», 1948, v. 49, p. 807—851; [6] Ниче И. С. С., «Математика», 1967, т. 11, № 3, с. 37—100; [7] Оссерман Р., «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 4, с. 55—136; [8] его же, «Математика», 1971, т. 15, № 2, с. 104—25; [9] его же, «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 6, p. 1182—1238; [10] Federer H., Geometric measure theory, B. [u. a.], 1969; [11] Morrey C., Multiple integrals in the calculus of variations, B.—[u. a.], 1966; [12] Фоменко А. Т., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 5, с. 1049—79; [13] Lawson H. «Ann. Math.», 1970, v. 92, № 2, p. 335—74; [14] Lawson H., Osserman R., «Acta math.», 1977, v. 139, № 1—2, p. 1—17; [15] Аминов Ю. А., «Укр. геом. сб.», 1976, в. 19, с. 3—9.

И. Х. Сабитов.

МИНИМАЛЬНАЯ ПРОСТАЯ ГРУППА — неабелева простая группа, все собственные подгруппы к-рой разрешимы. Полное описание конечных М. п. г. получено (см. [1], [2]) попутно с классификацией всех конечных групп, все локальные подгруппы (т. е. нормализаторы p-подгрупп) к-рых разрешимы. А именно, конечная М. п. г. изоморфна одной из следующих проективных специальных линейных групп:

PSL(2,2p), p — любое простое;

PSL(2,3p), p — любое нечетное;

PSL(2, p), $p\neq 3$ — простое,

удовлетворяющее сравнению $p^2+1\equiv 0 \pmod 5$;

PSL(3,3),

или

Судзуки группе Sz(2p), p — любое нечетное простое. В частности, каждая конечная М. п. г. порождается двумя элементами.

Лит.: [1] Thompson J. G., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 74, p. 383—437; [2] его же, «Pacif. J. Math.», 1970, v. 33, p. 451—536; 1971, v. 39, p. 483—534; 1973, v. 48, p. 511—92; 1974, v. 50, p. 215—97; v. 51, p. 573—630.

С. П. Струнков.

МИНИМАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО—1) М. м. в римановом пространстве — обобщение *минимальной поверхности*. М. м. есть k-мерное замкнутое подмножество X_0 в римановом пространстве M^n, $n>k$, такое, что за исключением подмножества Z k-мерной *хаусдорфовой меры* нуль множество $X_0\setminus Z$ является дифференцируемой k-мерной минимальной поверхностью (т. е. экстремалью функционала k-мерного объема Λ^k, определенного на k-мерных поверхностях, вложенных в M^n). Понятие «М. м.» объединяет в себе несколько математич. понятий, призванных обслуживать так наз. многомерную *Плато задачу*.

А. Т. Фоменко.

2) М. м. топологической динамической системы $\{S_t\}$ — такое непустое замкнутое инвариантное (т. е. целиком состоящее из траекторий) подмножество F фазового пространства W

системы, к-рое не имеет собственных замкнутых инвариантных подмножеств. Последнее эквивалентно тому, что каждая из лежащих в F траекторий всюду плотна в F. Понятие М. м. ввел Дж. Биркгоф (G. Birkhoff, см. [1]) применительно к случаю потока («время» t пробегает действительные числа). Он доказал (см. [1], [2]), что если F — компактное М. м. и $w \in F$, то для любой окрестности U точки w множество тех l, для к-рых $S_l w \in U$, относительно плотно (т. е. имеется такое l, что в каждом «отрезке времени» $[s, s+l]$ длины l содержится хоть одно t с $S_t w \in U$); обратно, если W — полное метрич. пространство и точка w обладает указанным выше свойством, то замыкание траектории $\{S_t w\}$ — компактное М. м. (то же самое справедливо и для *каскадов*; о более общих группах преобразований см., напр., [3] или [4]). Сформулированное свойство точки w (и ее траектории) Дж. Биркгоф назвал р е к у р р е н т н о с т ь ю этой точки (и траектории), употребителен также предложенный У. Готшалком и Г. Хедлундом [3] другой вариант терминологии, в к-ром это свойство наз. п о ч т и - п е р и о д и ч н о с т ь ю т о ч к и w. Если $F = W$, то саму динамич. систему называют м и н и м а л ь н о й.

Если нек-рая траектория имеет компактное замыкание, то в нем содержится нек-рое М. м. F (для полугрупп непрерывных преобразований $\{S_t\}$ с неотрицательными действительными или целыми t справедлив аналог этого результата, причем на F преобразования S_t уже обратимы [5]). Однако исследование предельного поведения траекторий динамич. системы не сводится к изучению одних только М. м. последней. Очень просто устроено М. м. гладкого потока класса C^2 на двумерной замкнутой поверхности — это либо точка, либо замкнутая траектория, либо вся поверхность, к-рая в этом случае является тором (т е о р е м а Ш в а р ц а, см. [6]). В общем случае строение М. м. может быть весьма сложным (в связи с этим, дополнительно к сказанному в [2]—[4], надо указать, что минимальность динамич. системы не накладывает никаких ограничений на ее эргодич. свойства по отношению к имеющимся у нее инвариантным мерам [7]). М. м. — основной объект изучения в *топологической динамике*.

Лит.: [1] Б и р к г о ф Д ж. Д., Динамические системы, пер. с англ., М.—Л., 1941; [2] Н е м ы ц к и й В. В., С т е п а н о в В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949; [3] G o t t s c h a l k W. H., H e d l u n d G. A., Topological dynamics, Providence, 1955; [4] Б р о н ш т е й н И. У., Расширения минимальных групп преобразований, Кишинев, 1975; [5] Л е в и т а н Б. М., Ж и к о в В. В., Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1978; [6] Х а р т м а н Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [7] Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262. *Д. В. Аносов.*

МИНИМАЛЬНОЕ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, м и н и м а л ь н о е и с ч и с л е н и е в ы с к а з ы в а н и й,— логическое исчисление, получающееся из *позитивного пропозиционального исчисления* П добавлением новой связки $\neg$ (отрицание) и схемы аксиом

$$(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A),$$

к-рая наз. з а к о н о м п р и в е д е н и я к а б с у р д у.

М. п. и. отличается тем, что в нем не всякая формула выводима из «лжи», т. е. формулы вида $\neg A \& A$. М. п. и. можно получить из исчисления П и другим способом: добавлением к языку вместо связки $\neg$ новой пропозициональной константы $\underline{|}$ (ложь) без добавления новых схем аксиом. Отрицанием $\neg A$ формулы A здесь служит формула $A \supset \underline{|}$.

Лит.: [1] Ч ё р ч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960. *С. К. Соболев.*

МИНИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ч а с т н ы х с у м м о р т о г о н а л ь н ы х р а з л о ж е н и й: для любой функции $f(x) \in L^2[a, b]$, для любой ортонормированной

на $[a, b]$ системы $\{\varphi_n(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и для любого n имеет место равенство:

$$\inf_{\{a_k\}_{k=1}^n} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right| dx = \int_a^b |f(x) - S_n(f, x)|^2 dx,$$

где

$$S_n(f, x) = \sum_{k=1}^n c_k(f) \varphi_k$$

— n-я частная сумма разложения $f(x)$ по системе $\{\varphi_k(x)\}$, т. е.

$$c_k(f) = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx.$$

Этот минимум достигается только на сумме $S_n(f, x)$, при этом

$$\int_a^b |f(x) - S_n(f, x)|^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n |c_k(f)|^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля для полных систем, а также нек-рые другие основные свойства ортогональных разложений по существу являются следствиями этого равенства.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958. *А. А. Талалян.*

МИНИМАЛЬНОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, минимальное исчисление предикатов,— исчисление предикатов, задаваемое всеми схемами аксиом *минимального пропозиционального исчисления* и обычными кванторными схемами аксиом и правилами вывода, т. е.

$$\forall x A(x) \supset A(t), \quad A(t) \supset \exists x A x$$

(t — произвольный терм), *модус поненс* и

$$\frac{C \supset A(a)}{C \supset \forall x A(x)}, \quad \frac{A(a) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$$

(переменная a не входит в $A(x)$ и в C).

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960. *С. К. Соболев.*

МИНИМАЛЬНЫЙ ИДЕАЛ — минимальный элемент частично упорядоченного множества идеалов определенного типа нек-рой алгебраич. системы. Поскольку порядок в множестве идеалов определяется отношением включения, М. и.— идеал, не содержащий отличных от себя идеалов того же типа. Для мультиоператорных групп (в частности, для колец) и для решеток, в отличие от полугрупп, всегда предполагается, что рассматриваемое частично упорядоченное множество идеалов не содержит нулевого идеала. Если класс идеалов специально не оговорен, то под М. и. понимают минимальный элемент в множестве всех (ненулевых) двусторонних идеалов.

Минимальный двусторонний идеал, если такой существует в полугруппе S, будет единственным минимальным двусторонним идеалом и является наименьшим двусторонним идеалом; он наз. ядром полугруппы S. Не всякая полугруппа обладает ядром (пример — бесконечная *моногенная полугруппа*), но, напр., ядро есть у любой конечной полугруппы. Ядро является идеально простой полугруппой (см. *Простая полугруппа*). Если ядро полугруппы S есть группа, то S наз. гомогруппой. Полугруппа S будет гомогруппой тогда и только тогда, когда в S существует элемент z, делящийся слева и справа на любой элемент из S (то есть $z \in xS \cap Sx$ для любого $x \in S$); в этом случае ядро состоит из всех таких элементов. Гомогруппой будет, напр., всякая конечная коммутативная полугруппа.

Если полугруппа S обладает минимальным левым идеалом (м. л. и.) L, то для любого $x \in S$ произведение Lx также будет м. л. и., причем всякий м. л. и. может быть получен таким образом. Каждый м. л. и. есть простая слева полугруппа. В полугруппе с м. л. и. каждый левый идеал содержит нек-рый м. л. и., объединение всех м. л. и. (к-рые попарно не пересекаются) является ядром полугруппы. Если полугруппа S обладает м. л. и. L и минимальным правым идеалом (м. п. и.) R, то $R \cap L = RL$ есть подгруппа в S, и $L = Se$, $R = eS$, где e — единица этой подгруппы, произведение LR совпадает с ядром полугруппы S, являющимся в этом случае *вполне простой полугруппой*.

Для полугрупп с нулем содержательным является рассмотрение ненулевых идеалов, и минимальный элемент в соответствующем частично упорядоченном множестве идеалов наз. 0-м и н и м а л ь н ы м (л е в ы м, п р а в ы м, д в у с т о р о н н и м) и д е а л о м. Свойства 0-минимальных идеалов (0-м. и.) во многом повторяют свойства М. и., с нек-рыми естественными оговорками. Напр., 0-минимальный двусторонний идеал не обязательно единствен и не обязательно будет 0-простой полугруппой; он может быть и полугруппой с нулевым умножением (см. *Нильпотентная полугруппа*). Объединение всех 0-минимальных левых идеалов (соответственно 0-минимальных правых идеалов) полугруппы с нулем наз. ее л е в ы м (соответственно п р а в ы м) ц о к о л е м (по определению, цоколь равен нулю, если соответствующих 0-м. и. в полугруппе нет). Полугруппа совпадает со своими левым и правым цоколями тогда и только тогда, когда она есть 0-прямое объединение вполне 0-простых полугрупп и полугруппы с нулевым умножением.

Рассмотрение тех или иных М. и. и 0-м. и. играет существенную роль в структурной теории ряда важных классов полугрупп (см., напр., *Вполне простая полугруппа*, *Регулярная полугруппа*, а также [1] § 2.5, 2.7, гл. 6, §§ 7.7, 8.2, 8.3; [2] гл. V). *Л. Н. Шеврин.*

Кольца (как и полугруппы) не обязаны обладать М. и. (простейший пример — кольцо целых чисел), и М. и. в кольце, если он существует, не обязан быть единственным. Сумма всех (левых, правых, двусторонних) М. и. кольца наз. (соответственно л е в ы м, п р а в ы м, д в у с т о р о н н и м) ц о к о л е м к о л ь ц а. Все *артиновы кольца*, очевидно, обладают ненулевым цоколем. Наличие М. и. *в примитивном кольце* делает его близким к матричному в следующем смысле: примитивное кольцо с ненулевым цоколем изоморфно нек-рому плотному подкольцу кольца всех линейных преобразований нек-рого векторного пространства над телом, содержащему все преобразования конечного ранга [3]. *В. Е. Говоров.*

Лит.: [1] К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., М., 1972; [2] Л я п и н Е. С., Полугруппы, М., 1960; [3] Д ж е к о б с о н Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961.

МИНИМАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax = b$, в к-ром решение x представляется в виде линейной комбинации базисных векторов, ортогональных в нек-рой метрике, связанной с матрицей системы.

В случае симметричной матрицы A ортогональная система векторов $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ строится по трехчленным рекуррентным формулам

$$p_{n+1} = Ap_k - \alpha_k p_k - \beta_k p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2, \quad (1)$$

$p_1 = Ap_0 - \alpha_0 p$, p_0 — произвольный вектор, где

$$\alpha_k = \frac{(Ap_k, p_k)}{(p_k, p_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2,$$

$$\beta_k = \frac{(p_k, p_k)}{(p_{k-1}, p_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Решение системы $Ax=b$ находится по формулам $x=\sum_{k=0}^{n-1} c_k p_k$, а коэффициенты c_k дают решение системы

$$\left.\begin{aligned} &c_{i-1}+\alpha_i c_i+\beta_{i+1}c_{i+1}=\frac{(b,\ p_i)}{(p_i,\ p_i)},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\\ &\alpha_0 c_0+\beta_1 c_1=\frac{(b,\ p_0)}{(p_0,\ p_0)},\quad c_{n-2}+\alpha_{n-1}c_{n-1}=\frac{(b,\ p_{n-1})}{(p_{n-1},\ p_{n-1})}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

В случае вырождения в алгоритме ортогонализации, т. е. когда $p_2=0$ при $r<n$, выбирают новый начальный вектор $p_0^{(1)}$, ортогональный $p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{r-1}$, и достраивают систему базисных векторов до полной системы.

Для случая несимметричной матрицы разработан биортогональный алгоритм.

Если матрица A симметрична и положительно определена, то построение A-ортогональной системы векторов $p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{n-1}$ по формулам (1) с

$$\alpha_k=\frac{(Ap_k,\ Ap_k)}{(Ap_k,\ p_k)},\quad \beta_k=\frac{(Ap_k,\ p_k)}{(Ap_{k-1},\ p_{k-1})}$$

позволяет избежать решения вспомогательной системы (2) и получить *явное* выражение для коэффициентов c_k : $c_k=\frac{(b,\ p_k)}{(Ap_k,\ p_k)}$. При этом методу A-минимальных итераций можно придать итерационную форму

$$x_{k+1}=x_k+c_{k+1}p_{k+1},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2,\quad x_0=c_0p_0,$$

причем $x=x_{n-1}$. Такая модификация метода не требует *повторного использования* всех векторов $p_0,\ p_1,\ \ldots,\ p_{k-1}$. М. и. м. используется также для решения полной проблемы собственных значений и для нахождения обратной матрицы.

Лит.: [1] Lanczos C., «J. Res. Nat. Bur. Stand.», 1950, v. 45, № 4, p. 255—88; [2] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1960.

Е. С. Николаев.

МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК МЕТОД — итерационный метод решения линейного операторного уравнения

$$Au=f \quad (1)$$

с самосопряженным положительно определенным ограниченным оператором A, действующим в гильбертовом пространстве H, и заданным элементом $f\in H$. Формулы М. н. м. имеют вид

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_k(Au^k-f),\quad k=0,\ 1,\ \ldots, \quad (2)$$

где параметр

$$\alpha_k=(A\xi^k,\ \xi^k)/(A\xi^k,\ A\xi^k) \quad (3)$$

выбирается на каждом шаге $k\geqslant 0$ из условия максимальной минимизации нормы невязки $\xi^{k+1}=Au^{k+1}-f$; т. е. требуется выполнение соотношения

$$\|\xi^k-\alpha_k A\xi^k\|=\inf_{\alpha} \|\xi^k-\alpha A\xi^k\|. \quad (4)$$

Если спектр оператора A принадлежит отрезку $[m,\ M]$ действительной оси, где $m\leqslant M$ — положительные числа, то последовательные приближения $\{u^k\}$ метода (2)—(3) сходятся к решению u^* уравнения (1) со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $q=(M-m)/(M+m)<1$.

Различные способы определения в H скалярного произведения приводят к различным итерационным методам. В частности, при специальных скалярных произведениях формулы М. н. м. совпадают с формулами *наискорейшего спуска метода* и метода минимальных ошибок (см. [2]).

Условия сходимости М. н. м. могут быть ослаблены по сравнению с перечисленными выше: если рассматривать на нек-рых подмножествах из H. Напр., если рассматривать М. н. м. только в действительных простран-

ствах, то можно отказаться от требования самосопряженности оператора A (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Красносельский М. А., Крейн С. Г., «Матем. сб.», 1952, № 31, с. 315—34; [2] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [3] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [4] Марчук Г. И., Кузнецов Ю. А., Итерационные методы и квадратичные функционалы, Новосиб., 1972. *Ю. А. Кузнецов.*

МИНИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ — раздел современной вычислительной математики, посвященный конструированию и исследованию методов, позволяющих находить приближенное с заранее указываемой точностью $\varepsilon>0$ решение поставленной задачи P из класса $\{P\}$ при наименьших затратах вычислительной работы (при наименьшем объеме вычислений). Этот раздел вычислительной математики может быть отнесен к более общему, имеющему дело с задачей оптимизации методов (см., напр., [1], [2]), в к-ром наряду с указанной проблемой М. в. р. рассматривается и двойственная по отношению к ней проблема нахождения среди приближенных методов, требующих примерно одинаковой допустимой вычислительной работы, метода, обладающего максимальной точностью (наименьшей погрешностью). Последняя проблема характерна, напр., для задач численного интегрирования, в к-рых фиксируется число узлов интегрирования, служащее мерой совершаемой вычислительной работы.

Пусть $\varepsilon\geqslant 0$ (обычно $\varepsilon>0$, при $\varepsilon\to 0$ ищется точное решение P) — требуемая точность решения задачи P из заданного класса $\{P\}$ родственных задач, а m — допустимый метод для отыскания решения любой задачи из $\{P\}$, и множество таких методов обозначено через $\{m\}$. Пусть число $W_m(P, \varepsilon)>0$ характеризует затраты вычислительной работы в методе m, позволяющие найти решение P с точностью ε, а

$$W_m(\{P\}, \varepsilon) = \sup_{P\in\{P\}} W_m(\{P\}, \varepsilon).$$

Тогда задача минимизации состоит в отыскании такого метода m_0, что

$$W_{m_0}(\{P\}, \varepsilon) = \inf_{m\in\{m\}} W_m(\{P\}, \varepsilon),$$

то есть по существу ищется оптимальный метод решения не одной фиксированной задачи P, а целого класса задач (оптимизация на классе). Чаще же всего М. в. р. производится в асимптотич. смысле при $\varepsilon\to 0$, $N\to\infty$, где N — параметр, определяющий «размерность» решаемой задачи.

Метод m_0 наз. оптимальным по порядку, если затраты вычислительной работы в нем не превышают более чем в конечное число раз величину $\underline{W}(\{P\}, \varepsilon)$ — полученных оценок снизу затрат вычислительной работы в любом возможном методе; метод m_0 наз. логарифмически оптимальным, если

$$\ln W_{m_0}(\{P\}, \varepsilon) = (1+o(1))\ln \underline{W}(\{P\}, \varepsilon).$$

Вычислительная же работа $W_m(P, \varepsilon)$ обычно характеризуется числом арифметич. действий, производимых в методе m для достижения точности ε при его реализации на условной ЭВМ. До какой-то степени это является оправданным упрощением, поскольку во многих методах логич. операций на реальных ЭВМ совершается лишь в конечное число раз больше, чем арифметических. От допустимых методов, как правило, требуют их устойчивости по отношению к ошибкам округления. Важно, чтобы и асимптотич. рост количества используемых ячеек машинной памяти не был в этих методах чересчур большим.

При конкретизации указанных задач М. в. р. должно быть уточнено и описание класса $\{P\}$ и указано метрич.

пространство H, с помощью к-рого определяется точность решения исходной задачи.

Решение многих таких конкретных проблем минимизации представляет не только теоретич. интерес, но и имеет большое прикладное значение, позволяя часто решать задачи на ЭВМ при сравнительно небольших затратах машинного времени. Особенно это важно или для задач, требующих большого объема вычислений, что характерно, напр., для многомерных задач математич. физики (см. [2]—[10]), или для задач, подобных задачам вычисления элементарных функций и нахождения дискретных преобразований Фурье (см. [1], [11]), являющихся стандартными, и многократно используемых для решения других, более сложных. Указанные задачи М. в. р. достаточно сложны и во многих случаях их решения получены лишь частично или даже пока (1982) совсем не известны.

На практике при решении задач не очень большой размерности и не с очень большой точностью иногда метод с худшими асимптотич. характеристиками может потребовать меньше машинного времени. Часто же если затраты вычислительной работы приемлемы, то руководствуются при выборе метода прежде всего соображениями его простоты и надежности.

Пусть исходная задача конечномерна и существуют методы, дающие точное решение за конечное число арифметич. действий, если эти действия совершаются без ошибок округления. В качестве примеров можно взять задачу вычисления значения многочлена $p_N(x)$ степени N при заданном значении x с $|x|\leqslant 1$, перемножения двух квадратных матриц порядка N, решения определенной системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$ с квадратной матрицей порядка N и задачу нахождения дискретного преобразования Фурье (см. [1], [11]):

$$v_n=\sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-\frac{2\pi n}{N} i}, \quad n=0, 1, \ldots, N-1, \qquad (1)$$

где i — мнимая единица, вектор $u=(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$ задан и ищется вектор $v=(v_0, v_1, \ldots, v_{N-1})$, $N=2^r$, $r=0, 1, 2, \ldots$. Никаких конкретных ограничений на вид $p_N(x)$, $x\in[-1,1]$, A, b, число r и вектор u не накладывается, и поэтому в каждой из этих задач допустимый класс $\{P\}$ состоит из всех задач такого вида. В подобных задачах N выступает в роли параметра и особое внимание уделяется поведению затрат вычислительной работы $W_m(P, 0)\equiv W_m(P)$ при $N\to\infty$. Для первой из этих задач метод Горнера, записывающий $p_N(x)$ в виде

$$a_0+x(a_1+x(\ldots+x(a_{N-1}+xa_N))\ldots),$$

позволяет вычислить $p_N(x)$ за N умножений и N сложений. Доказано (см. [11]), что этот метод является оптимальным; не существует метода, к-рый требовал бы меньшего суммарного числа сложений и вычитаний или меньшего числа умножений и делений; устойчивость его приемлема, если $\sum_i |a_i|$ не велика (см. [1]).

Для второй и третьей задач существует большое число методов, дающих их решения при $N\to\infty$ за $W(N)\asymp N^3$ арифметич. действий (см. [1]) и реально применяемых на практике. Наименьшие же затраты вычислительной работы среди всех пока известных методов достигаются на методе с оценкой $W(N)\asymp N^{\log_2 7}$ (см. [11]). Этот метод достаточно сложен и по ряду причин интересен пока только с теоретич. точки зрения. Не известно (1982), является ли он даже логарифмически оптимальным. Имеется гипотеза, что у логарифмически оптимального метода с числом арифметич. действий $W(N)$ должно быть

$$\ln W(N)=2\ln N+o(\ln N).$$

Для задачи же (1), являющейся предметом гармонич. анализа, простейшие методы требуют $\asymp N^2$ арифметич.

действий с комплексными числами. В 1965 был предложен метод, позволяющий находить вектор за $W(N) \asymp \asymp N \ln N$ арифметич. действий (см. [1], [11]), получивший название *метода быстрого дискретного преобразования Фурье*. Этот метод является логарифмически оптимальным; он широко применяется и на практике. Имеется большое число подобных задач минимизации, решенных и нерешенных (см. [11], [12]); оптимальные по порядку или логарифмически оптимальные оценки затрат вычислительной работы для нахождения решения подобных задач могут рассматриваться как показатель их сложности.

М. в. р. при решении сеточных систем уравнений, возникающих или в разностных методах, или в проекционно разностных (методах конечных элементов) для приближенного решения краевых задач для уравнений и систем уравнений сильно эллиптич. типа, имеет особое теоретическое и прикладное значение и обычно осуществляется асимптотически при $N \to \infty$, где N — число неизвестных в системе, и при $\varepsilon \to 0$. Для решения простейших разностных аналогов нек-рых краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике или параллелепипеде успешно применяются нек-рые прямые методы, являющиеся логарифмически оптимальными и требующие затраты $O(N \ln N)$ арифметич. действий (см. [3], [5], [13], [14]). Известен в случае прямоугольника (см. [15]) и оптимальный по порядку метод, требующий $O(N)$ действий. Используя же итерационные методы, удается получить логарифмически оптимальные оценки типа

$$W = O(N \ln N |\ln \varepsilon|),$$

где ε — точность решения системы в той или иной метрике, для довольно широкого класса дискретных краевых задач на параллелепипедной сетке для линейных и нелинейных сильно эллиптич. систем, рассматриваемых в нек-рых идеальных областях (см. [2] — [10], [16], [17]) (напр., на плоскости Q может быть образована из конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, а в случае трехмерного пространства Q должна конечным числом плоских разрезов, параллельных заданной координатной плоскости, разбиваться на параллелепипеды с гранями, параллельными координатным плоскостям). Для более сложных областей Ω использование сеток, топологически эквивалентных указанным сеткам идеальных областей Q, и нек-рых типов проекционно-разностных методов позволяет часто получить системы уравнений, решаемые столь же эффективно, что и в случае идеальных областей (см. [3], [8], [10], [16], [17]). При этом правые части этих систем могли быть любыми векторами; если же учитывать, что они порождались специальным образом как нек-рые функционалы от достаточно гладких функций, то удается построить методы с затратами работы $O(N \ln N)$ и даже $O(N)$ при условии, что $\varepsilon \asymp N^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Методы последнего типа для решения задачи на заданной сетке используют последовательность подобных же задач на более редких сетках.

Существуют методы, позволяющие найти с точностью ε младшие собственное значение и соответствующую собственную функцию для нек-рых сеточных аналогов эллиптич. задач на собственные значения, при затрате $O(N \ln N |\ln \varepsilon|)$ или даже $O(N \ln N)$ (при $\varepsilon \asymp N^{-\alpha}$, $\alpha > 0$) действий (см. [9]).

Пусть задача P состоит в решении корректного операторного уравнения

$$L(u) = f, \qquad (2)$$

оператор L действует из H в F, где H и F — бесконечномерные банаховы пространства. Пусть класс $\{P\}$ состоит из таких задач с различными f, при к-рых ре-

шения уравнения (2) принадлежат нек-рому компакту U. Обычно U задается условием:

$$\|u\|_{H'} \leqslant R, \tag{3}$$

где H' — нек-рое банахово пространство, вложенное в H. Если $u \in U$ ищется с точностью $\varepsilon > 0$ в норме H, то часто известны информационные оценки, равномерные относительно всех $u \in U$ наименьшей размерности $N \equiv N(\varepsilon)$ вектора $v_N = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$, задание к-рого позволяет получить элемент

$$\hat{v}_N \equiv \sum_{i=1}^{N} v_i \psi_i(z) \in H \quad \text{с} \quad \|u - \hat{v}_N\|_H \leqslant \varepsilon \tag{4}$$

(см. [1], [2], [6], [7], [18], [19]). Эти оценки снизу для $N(\varepsilon)$ дают и очевидные оценки снизу для необходимых затрат вычислительной работы в любом допустимом методе. Для ряда краевых задач сильно эллиптич. систем построены варианты проекционно-разностных методов, приводящих к алгебраич. системам уравнений

$$L_N(\bar{u}_N) = \bar{f}_N \tag{5}$$

с N неизвестными, для к-рых, во-первых, известны оптимальные по порядку итерационные методы приближенного решения и, во-вторых, соответствующие восполнения $\hat{u}_N$ вектора u_N (см. [4]) являются ε-аппроксимациями в H решения уравнения (2), причем $N \leqslant kN(\varepsilon)$, где k — константа, не зависящая от ε (см. [6] — [8], [10], [17]). Если не учитывать работу на формирование (5), то такие методы приводят к оценкам затраты вычислительной работы, минимальным по порядку. Напр., для случая эллиптич. уравнения 2-го порядка $H = W_2^1(\Omega)$, $H' = W_2^2(\Omega)$ (W_2^k — пространство С. Л. Соболева [20]), если Ω — область на плоскости, достижимы оценки затрат числа арифметич. действий $\asymp \varepsilon^{-2}$. Вычислительную работу на формирование (5) тоже часто можно оценить как $O(N \ln N)$, если брать информацию о заданных функциях в соответствующих пространствах. В частности, в упомянутом примере f должна рассматриваться как элемент $F = W_2^{-1}(\Omega)$, но не $L_2(\Omega)$ (см. [8], [17]). Подобного рода оценки получены и для нек-рых дифференциальных задач на собственные значения (см. [9]).

Рассматривались нек-рые вопросы М. в. р. при решении интегральных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и нестационарных уравнений с частными производными (см., напр., [1] — [4], [21] — [23]).

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] его же, в сб.: Международный конгресс математиков в Ницце, 1970, М., 1972, с. 27—33; [3] Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, М., 1977; [4] Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971; [5] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [6] Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А., в сб.: Дифференциальные уравнения и их применения, Вильнюс, в. 5, 1973; в. 8, 1974; [7] Дьяконов Е. Г., «Численные методы механики сплошной среды», Новосиб., 1976, т. 7, № 5, с. 14—78; [8] его же, в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, с. 149 -64; [9] Дьяконов Е. Г., Орехов М. Ю., «Матем. заметки», 1980, т. 27, № 5; [10] Корнеев В. Г., Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности, Л., 1977; [11] Borodin A., Munro I., The Computational Complexity of Algebraic and Numeric Problems, N. Y., 1975; [12] Analytic Computational Complexity, N. Y., 1976; [13] Concus P., Golub G., «SIAM J. Numer. Anal.», 1973, v. 10, p. 1103—20; [14] Barker R. J., в кн.: Mathematical models and numerical methods (Banach Center Publications), Warsz., 1978, v. 3, p. 255—68; [15] Bank R. E., Rose D. J., «Proc. Symp. Carnegie-Mellon Univ.», N. Y., 1976, p. 201—49; [16] Кузнецов Ю. А., в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике, Новосиб., 1978, с. 178 -212; [17] Дьяконов Е. Г., в кн.: Численные методы в математической физике, Новосиб., 1979, с. 45 68; [18] Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики, М., 1979, с. 45—118; [19] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [20] Собо-

лев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [21] Емельянов К. В., Ильин А. М., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 4, с. 905—10; [22] Иванов В. В., в кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972, с. 209—19; [23] Акопян Ю. Р., Оганесян Л. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1977, т. 17, № 1, с. 109—18.

Е. Г. Дьяконов.

МИНИМИЗАЦИЯ ПЛОЩАДИ — задача о минимуме площади $A(F)$ римановой поверхности, на к-рую данная область B плоскости z отображается взаимно однозначно регулярными в ней функциями F данного класса R, т. е. задача о нахождении

$$\min_{F\in R} A(F) = \min_{F\in R} \iint_B |F'(z)|^2 d\sigma \qquad (*)$$

($d\sigma$ — элемент площади). Под интегралом в (*), взятым по области B, понимается предел интегралов, взятых по областям B_n, $n=1, 2, \ldots$, исчерпывающим область B, т. е. таким, что $B_n \subset B$, $B_n \subset B_{n+1}$ и что любое замкнутое множество $E \subset B$, начиная с нек-рого n, лежит в B_n.

В случае, когда R — класс функций $F(z)$, $F(0)=0$, $F'(0)=1$, регулярных в данной односвязной области B, содержащей точку $z=0$ и имеющей более одной граничной точки, минимум A площади $A(F)$ образа области B в классе R дает единственная функция, однолистно отображающая область B на полный круг $|z|<r$, где r — конформный радиус области B в точке $z=0$, причем $A=\pi r^2$.

Рассматривалась также задача о минимальной площади образа многосвязной области (см. [1] с. 225, 594).

Лит.: [1] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

Е. Г. Голузина.

МИНИМИЗИРУЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность элементов y_n из множества M, для к-рой соответствующая последовательность значений нек-рой функции $\varphi(y_n)$ стремится к точной нижней грани ее значений на M, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \inf_{y\in M} \varphi(y).$$

Компактность М. п., т. е. существование подпоследовательности, сходящейся к элементу из M, в сочетании с полунепрерывностью снизу функции φ обеспечивает существование оптимального элемента

$$y^n \in M,\ \varphi(y^n) = \min_{y\in M} \varphi(y).$$

В теории приближений М. п. $y_n \in M$ для данного элемента из метрич. пространства $X=(X, \rho)$ — последовательность, для к-рой

$$\rho(x, y_n) \longrightarrow \rho(x, M) = \inf\{\rho(x, y): y\in M\}.$$

См. *Аппроксимативно компактное множество.*

Ю. Н. Субботин.

МИНИМИЗИРУЮЩАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность элементов $\{z_n\}$, $z_n \in Z$, минимизирующая непрерывный функционал $I[z]$, $z\in Z$:

$$I[z_n] \longrightarrow \inf_{z\in Z} I[z],\ n\longrightarrow\infty.$$

Задачи минимизации функционалов принято разделять на две группы. К первой относят нахождение минимального значения функционала, при к-ром несущественно, на каких элементах z достигается искомый минимум. В этом случае в качестве приближенных решений можно использовать значения функционала на любой М. п. Другая группа задач состоит в отыскании элемента z^*, на к-ром функционал $I[z]$ достигает своего наименьшего значения:

$$\inf_{z\in Z} I[z] = I[z^*] = I^*. \qquad (1)$$

При этом существуют М. п., не сходящиеся к элементу z^*.

Пусть задача минимизации (1) имеет единственное решение z^* и $\{z_n\}$ — М. п., т. е. такая последовательность, что

$$\lim_{n\to\infty} I[z_n] = I^*. \qquad (2)$$

Задача минимизации (1) наз. устойчивой, если всякая М. п. (2) сходится к элементу $z^* \in Z$.

При решении устойчивых задач М. п. находится построением последовательности итераций таких, что по z_n (n-й итерации) находится «направление» y_n, а затем выбирается элемент

$$z_{n+1} = z_n - f(\rho_n)\, y_n$$

из множества элементов $z_n - f(\rho) y_n$, минимизирующих функцию $I[z_n - f(\rho)\, y_n]$ переменной ρ.

Методы построения М. п. для устойчивых задач (1) распадаются на три семейства. В первом производные не используются; это — прямые методы. Второе семейство использует первые производные функционала; такие методы обычно наз. методами спуска. Третью группу методов составляют алгоритмы с использованием вторых производных функционала.

В задачах минимизации функционалов, не обладающих свойством устойчивости, для построения последовательностей $\{z_n\}$, сходящихся к элементу z^*, применяют методы регуляризации.

Лит.: [1] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974; [2] Сеа Ж., Оптимизация. Теория и алгоритмы, пер. с франц., М., 1973.

Ю. В. Ракитский.

МИНИМУМ — см. *Максимум и минимум функции, Максимума и минимума точки.*

МИНКОВСКОГО ГЕОМЕТРИЯ — геометрия конечномерного *нормированного пространства*, т. е. аффинного пространства, в к-ром введена метрика Минковского — инвариантная относительно параллельных переносов метрика, при к-рой роль единичной сферы играет фиксированное центрально-симметричное выпуклое тело.

В. А. Залгаллер.

МИНКОВСКОГО ГИПОТЕЗА — предположение, согласно к-рому для действительных линейных форм

$$L_j(\bar{x}) = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ с отличным от нуля определителем Δ при любых действительных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ существуют целые $x_1, \ldots, x_n$ такие, что будет выполнено неравенство

$$\prod_{j=1}^{n} |L_j(\bar{x}) - \alpha_j| \leqslant 2^{-n} |\Delta|. \qquad (*)$$

Эта гипотеза была доказана Г. Минковским (H. Minkowski, 1910) в случае $n=2$. Известны (1982) доказательства гипотезы для $n \leqslant 5$, а при $n > 5$ справедливость неравенства (*) доказана при нек-рых дополнительных ограничениях (см. [2]).

Лит.: [1] Касселс Дж. В. С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965; [2] Скубенко Б. Ф., в кн.: Исследования по теории чисел. 2, Л., 1973, с. 6—36 («Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР», т. 33).

Э. П. Ковалевская.

МИНКОВСКОГО НЕРАВЕНСТВО — 1) Собственно М. н.: если действительные числа x_i, $y_i \geqslant 0$ при $i=1, \ldots, n$ и $p>1$, то

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}. \qquad (1)$$

Выведено Г. Минковским [1]. При $p<1$, $p \neq 0$ неравенство заменяется на противоположное (для $p<0$ следует считать $x_i,\ y_i > 0$). В каждом из этих случаев равенство имеет место тогда и только тогда, когда строки $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ пропорциональны. При $p=2$ М. н.

наз. неравенством треугольника. М. н. допускает обобщения в различных направлениях (они также носят названия неравенств Минковского). Ниже приводятся нек-рые из них.

2) М. н. для сумм. Пусть $x_{ij} \geqslant 0$ для $i=1, \ldots, n$ и $j=1, \ldots, m$ и $p>1$, тогда

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right)^{p}\right]^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{p}\right)^{1/p}. \quad (2)$$

Знак неравенства меняется на обратный при $p<1$, $p\neq 0$ и для $p<1$ полагается $x_{ij}>0$. В каждом из этих случаев равенство имеет место тогда и только тогда, когда строки $\{x_{i1}\}, \ldots, \{x_{im}\}$ пропорциональны. Существуют также обобщения неравенств (1) на кратные и бесконечные суммы. Однако при использовании предельных процессов особого внимания требует формулировка случаев возможного равенства (см. [2]).

Неравенства (1) и (2) однородны относительно $\sum$, и потому они имеют аналоги для различных средних, напр., если $M_\varphi(x_i)=\varphi^{-1}\{\sum \varphi(x_i)\}$, где $\varphi=\ln t$, то

$$M_\varphi\left(\frac{x_i+y_i}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} M_\varphi(x_i)+\frac{1}{2} M_\varphi(y_i);$$

подробнее см. в [2].

3) М. н. для интегралов аналогично неравенству (2) и имеет место опять же вследствие однородности относительно $\int$. Пусть $f(x), g(x)$ — интегрируемые функции в нек-рой области $X\subset\mathbb{R}^n$ относительно элемента объема dV, тогда при $p>1$

$$\left(\int_X |f+g|^p\, dV\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |f|^p\, dV\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p\, dV\right)^{1/p}. \quad (3)$$

Естественно получается обобщение неравенства (3) для большего числа функций. Дальнейшее обобщение: если $k>1$, то

$$\left(\int\left(\int f(x, y)\, dy\right)^{1/k} dx\right)^{1/k} \leqslant \int\left(\int f^k(x, y)\, dx\right)^{1/k} dy,$$

$f(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$, причем равенство имеет место лишь в случае $f(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$.

4) Другие неравенства типа М. н.:

а) для произведений: если $x_i, y_i \geqslant 0$, то

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{1/n} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}+\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/n};$$

б) неравенство Малера: пусть $F(x)$ — обобщенная норма в E^n, $G(y)$ — ее полярная функция. Тогда

$$(x, y) \leqslant F(x)G(y),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение;

в) для определителей: если A, B — неотрицательные эрмитовы матрицы над $\mathbb{C}$, то

$$(\det(A+B))^{1/n} \geqslant (\det A)^{1/n}+(\det B)^{1/n}.$$

5) Наконец, с именем Г. Минковского связываются и др. неравенства, в особенности в выпуклом анализе и теории чисел, напр. *Брунна — Минковского теорема.*

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, 1, Lpz., 1896, § 115—17; [2] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; [3] Беккенбах Э. Ф., Беллман Р., Неравенства, пер. с англ., М., 1965; [4] Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972.

М. И. Войцеховский.

МИНКОВСКОГО ПРОБЛЕМА: существует ли замкнутая выпуклая гиперповерхность F, у к-рой гауссова кривизна $K(\xi)$ является заданной функцией единич-

ного вектора внешней нормали ξ. Поставлена Г. Минковским [1], к-рому принадлежит обобщенное решение проблемы в том смысле, что оно не содержит никакой информации о характере регулярности F, даже если $K(\xi)$ — аналитич. функция. Он доказал, что если заданная на единичной гиперсфере S непрерывная положительная функция $K(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\int_S \xi \frac{ds}{K(\xi)} = 0, \qquad (1)$$

то существует и притом единственная (с точностью до параллельного переноса) замкнутая выпуклая поверхность F, для к-рой $K(\xi)$ является гауссовой кривизной в точке с внешней нормалью ξ.

Регулярное решение М. п. дано А. В. Погореловым в 1971 (см. [2]), им же рассмотрены нек-рые вопросы геометрии и теории дифференциальных уравнений, примыкающие к этой проблеме. Именно он доказал, что если $K(\xi)$ принадлежит классу C^m, $m \geqslant 3$, то получаемая поверхность F принадлежит классу $C^{m+1,\,\alpha}$, $\alpha > 0$, а в случае аналитичности $K(\xi)$ поверхность F также оказывается аналитической.

Естественное обобщение М. п. состоит в решении вопроса о существовании выпуклой гиперповерхности с заданной элементарной симметрич. функцией главных кривизн $\varphi_\nu(\xi)$ любого данного порядка ν, $\nu \leqslant n = \dim F$. В частности, при $\nu = 1$ это — проблема Кристоффеля о восстановлении поверхности по средней кривизне. Необходимое условие разрешимости этой обобщенной М. п. аналогично (*) имеет вид

$$\int_S \xi \varphi_\nu(\xi)\, dS = 0.$$

Однако это условие недостаточно (А. Д. Александров, 1938, см. [3]). Вот примеры достаточных условий:

$$\int_S \xi\, \Phi_\nu(\xi)\, dS = 0,$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2(\nu-1)} \max\left(\Phi_{\nu,t} - \Phi''_{\nu,t}\right) < \Phi_{\nu,t}(\xi),$$

где $\Phi_{\nu,t} = \left(\dfrac{\varphi_{\nu,t}}{C_n^\nu}\right)^{1/n}$, $\varphi_{\nu,t} = t\varphi_\nu + 1 - t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

При этом регулярность F та же, что и в М. п. Эти результаты с помощью аппроксимаций оказываются справедливыми и для функций $\varphi(\xi)$, обладающих свойствами неотрицательности, симметрии и вогнутости.

Лит.: [1] Minkowski H., «Math. Ann.», 1903, Bd 57, S. 447—95; [2] Погорелов А. В., Многомерная проблема Минковского, М., 1971; [3] Буземан Г., Выпуклые поверхности, пер. с англ., М., 1964.

М. И. Войцеховский.

МИНКОВСКОГО ПРОСТРАНСТВО — четырехмерное *псевдоевклидово пространство* сигнатуры (1, 3), предложенное Г. Минковским (H. Minkowski, 1908) в качестве геометрич. интерпретации пространства-времени специальной теории относительности (см. [1]). Каждому событию соответствует точка М. п., три координаты к-рой представляют собой координаты трехмерного пространства; четвертая — координата ct, где c — скорость света, t — время события. Связь между пространственными расстояниями и промежутками времени, разделяющими события, характеризуется квадратом т. н. интервала:

$$s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

Интервал в М. п. играет роль, аналогичную роли расстояния в геометрии евклидовых пространств. Вектор с положительным квадратом интервала наз. *времениподобным вектором*, с отрицательным квадратом интервала — *пространственноподобным вектором*. Линия, касательный вектор к к-рой в каждой ее точке времениподобен, наз. *времениподобной линией*. Аналогично

определяются пространственноподобные и изотропные линии. Событие в данный момент времени в данной точке наз. мировой точкой; множество мировых точек, описывающее развитие какого-либо процесса или явления во времени, наз. мировой линией. Если вектор, соединяющий мировые точки, времениподобен, то существует система отсчета, в к-рой события происходят в одной и той же точке трехмерного пространства. Время, разделяющее события в этой системе отсчета, равно $\Delta t = \tau = s\,c$, где τ — т. н. собственное время. Ни в какой системе отсчета эти события не могут быть одновременными (т. е. имеющими равные координаты t). Если вектор, соединяющий мировые точки двух событий, пространственноподобен, то существует система отсчета, в к-рой эти два события происходят одновременно; они не связаны причинно-следственной связью; модуль интервала определяет пространственное расстояние между этими точками (событиями) в этой системе отсчета. Касательный вектор к мировой линии является времениподобным вектором. Касательный вектор к световому лучу является изотропным вектором.

Движениями М. п., т. е. преобразованиями, сохраняющими интервал, являются *Лоренца преобразования*.

Обобщение М. п.— *псевдориманово пространство*, к-рое используется при построении теории тяготения.

Лит.: [1] Минковский Г., Пространство и время, в кн.: Принцип относительности, М., 1973; [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; [3] Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, 2 изд., М., 1961; [4] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [5] Синг Дж. Л., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963.

Д. Д. Соколов.

МИНКОВСКОГО ТЕОРЕМА — 1) М. т. о выпуклом теле — одна из теорем геометрии чисел, послужившая основой выделения геометрии чисел в раздел теории чисел. Установлена Г. Минковским в 1896 (см. [1]). Пусть $\mathfrak{K}$ — замкнутое выпуклое тело, симметричное относительно начала координат O, имеющее объем $V(\mathfrak{K})$. Тогда всякая точечная решетка Λ определителя $d(\Lambda)$, для к-рой

$$V(\mathfrak{K}) \geqslant 2^n d(\Lambda),$$

имеет в $\mathfrak{K}$ точку, отличную от O.

Равносильная формулировка теоремы Минковского

$$\Delta(\mathfrak{K}) \geqslant 2^{-n} V(\mathfrak{K}),$$

где $\Delta(\mathfrak{K})$ — критич. определитель тела $\mathfrak{K}$. Обобщением теоремы Минковского на невыпуклые множества является теорема Блихфельдта (см. *Геометрия чисел*). Теоремы Минковского и Блихфельдта позволяют оценивать сверху арифметич. минимумы лучевых функций.

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz., 1896; Lpz.—B., 1910; N. Y., 1953.

А. В. Малышев.

2) М. т. о линейных неравенствах: система неравенств

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right| \leqslant c_1, \quad \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| < c_i, \quad 2 \leqslant i \leqslant n,$$

где a_{ij}, c_i — действительные числа, имеет целое решение $(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, если $c_1 \ldots c_n \geqslant |\det(a_{ij})|$. Установлена Г. Минковским в 1896 (см. [1]). М. т. является следствием более общей теоремы Минковского о выпуклом теле (см. п. 1).

Лит.: [1] Minkowski H., Geometrie der Zahlen, Lpz., 1896; Lpz.—B., 1910; N. Y., 1953; [2] его же, Diophantische Approximationen, Lpz., 1907; [3] Кассельс Дж. В. С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965.

Э. И. Ковалевская.

МИНОР порядка k — определитель матрицы, элементы к-рой стоят в данной прямоугольной матрице на пересечении k разных столбцов и k разных строк.

Если номера отмеченных строк совпадают с номерами отмеченных столбцов, то М. наз. главным, а если отмечены первые k строк и первые k столбцов — угловым. Базисным минором матрицы наз. любой ее ненулевой М. максимального порядка. Для того чтобы М. был базисным, необходимо и достаточно, чтобы все окаймляющие его М. (т. е. содержащие его М. на единицу большего порядка) были равны нулю. Система строк (столбцов) матрицы, связанных с базисным М., является максимальной линейно независимой подсистемой системы всех строк (столбцов) матрицы. *В. Н. Ремесленников.*

МИНОРАНТА — см. *Мажоранта и миноранта.*

МИНУТА — единица измерения плоских углов, равная 1/60 части градуса, обозначается знаком $'$. М. делится на 60 секунд ($60''$). Метрическая М.— 1/10000 часть прямого угла, обозначается знаком ^{c}. Метрическая М. делится на 100 метрических секунд (100^{cc}).

МИРОВАЯ ЛИНИЯ — линия в пространстве-времени, являющаяся пространственно-временной траекторией материальной точки. Пусть в нек-рой области пространства-времени введена локальная система координат t, x, y, z, и пусть точка $P(t, x, y, z)$ лежит на М. л. γ. Точку P наз. мировой точкой, она описывает событие, состоящее в том, что материальная точка в данный момент времени t имеет пространственные координаты x, y, z. Абстракция события и связанные с ним абстракции мировой точки и М. л. являются одними из основных понятий теории относительности, дополняющими абстракцию материальной точки, заимствованную из классич. механики. Обычно рассматривают гладкие (или кусочно гладкие) мировые линии. М. л. материальной точки с положительной массой покоя является времениподобной кривой. М. л. материальной точки с нулевой массой покоя (такая материальная точка является неквантовой моделью фотона и др. элементарных частиц нулевой массы покоя) является изотропной линией. Произвольная точка пространства-времени рассматривается в качестве мировой точки, т. е. (возможного) события, а каждая времениподобная или изотропная линия — в качестве М. л. нек-рой материальной точки. М. л. материальной точки, не испытывающей воздействия негравитационных сил, является согласно *геодезических гипотезе* нек-рой геодезической пространства-времени. Единичный касательный вектор $\dot\gamma$ к М. л. γ наз. четырехмерным вектором скорости; в локальных координатах он имеет вид

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

где

$$v=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right).$$

См. также *Минковского пространство.*

Д. Д. Соколов.

МИРОВАЯ ФУНКЦИЯ — значение интеграла

$$\Omega(P', P)\ \ \Omega(x', x)=\frac{1}{2}(u-u_0)\int_{u_0}^{u_1} g_{ij}U^iU^j\,du,$$

взятого вдоль геодезической Γ, соединяющей две точки $P'(x')$ и $P(x)$ пространства-времени. При этом Γ задана уравнениями $x^i=\xi^i(u)$, где u — канонич. параметр, а $U^i=\frac{dx^i}{du}$. М. ф. равна с точностью до знака половине квадрата меры геодезической, соединяющей P' и P, и является двухточечным инвариантом в том смысле, что ее величина не изменяется, когда незави-

симо преобразуются координатные системы в окрестностях P' и P.

В плоском пространстве-времени существует такая система координат, что

$$\Omega(x',\ x)=\frac{1}{2}\,g^0_{ij}\,(x^{i'}-x^i)\,(x^{j'}-x^j),$$

где

$$g^0_{ij}=\operatorname{diag}(1,\ 1,\ 1,\ -1).$$

Лит.: [1] Синг Дж., Общая теория относительности, пер. с англ., М., 1963.

М. И. Войцеховский.

МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ЗВЕЗДА — то же, что *звезда элемента функции.*

МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — полунепрерывный метод суммирования числовых и функциональных рядов, определенный последовательностью функций

$$g_k(\delta)=\frac{1}{\Gamma(1+\delta k)},\quad \delta>0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k$$

суммируем методом Миттаг-Леффлера к сумме s, если

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k}{\Gamma(1+\delta k)}=s$$

и ряд под знаком предела сходится. Метод был первоначально введен Г. Миттаг-Леффлером (G. Mittag-Leffler, [1]) для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}z^k.$$

М.-Л. м. с. является регулярным (см. *Регулярные методы суммирования*) и применяется как аппарат для аналитич. продолжения функций. Если $f(z)$ — главная ветвь аналитич. функции, регулярной в нуле и представимой рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$$

для малых z, то этот ряд суммируем М.-Л. м. с. к $f(z)$ во всей звезде функции $f(z)$, причем равномерно в любой замкнутой ограниченной области, содержащейся внутри звезды.

Из методов суммирования, определенных преобразованием последовательности в последовательность полунепрерывными матрицами $a_k(\omega)$ типа

$$a_k(\omega)=\frac{c_{k+1}\omega^{k+1}}{E(\omega)},$$

где

$$E(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\omega^k$$

— целая функция, Г. Миттаг-Леффлером рассматривался случай, когда

$$E(\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega^k}{\Gamma(1+\alpha k)}.$$

Матрицу $a_k(\omega)$ с такой целой функцией наз. матрицей Миттаг-Леффлера.

Лит.: [1] Atti del IV Congresso Internationale, v. 1, Roma, 1908, p. 67—85; [2] Mittag-Leffler G., «Acta math.», 1905, v. 29, p. 101—81; [3] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951; [4] Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, пер. с англ., М., 1960.

И. И. Волков.

МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ТЕОРЕМА — 1) М.-Л. т. о разложении мероморфной функции (см. [1], [2]) — одна из основных теорем теории аналитических функций, дающая для мероморфных функций

аналог разложения рациональной функции на простейшие дроби. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел

$$|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

и $\{g_n(z)\}$ — последовательность рациональных функций вида

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{l_n} \frac{c_{nk}}{(z-a_n)^k}, \tag{1}$$

так что точка a_n является единственным полюсом соответствующей функции $g_n(z)$. Тогда существуют мероморфные функции $f(z)$ в плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, имеющие полюсы в точках a_n и только в них с заданными главными частями (1) *Лорана рядов*, соответствующих точкам a_n. Все эти функции $f(z)$ представимы в виде разложения Миттаг-Леффлера:

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(z) + p_n(z)], \tag{2}$$

где $p_n(z)$ — нек-рые многочлены, подбираемые по a_n и $g_n(z)$ так, чтобы ряд (2) равномерно (после выбрасывания конечного числа членов) сходился на любом компакте $K \subset \mathbb{C}$, $h(z)$ — произвольная целая функция.

Из М.-Л. т. вытекает, что любая наперед заданная мероморфная функция $f(z)$ в $\mathbb{C}$ с полюсами a_n и соответствующими главными частями $g_n(z)$ разложений $f(z)$ в ряды Лорана в окрестности a_n разлагается в ряд (2), где целая функция $h(z)$ определяется по $f(z)$. Г. Миттаг-Леффлер указал общую конструкцию многочленов $p_n(z)$, отыскание же целой функции $h(z)$ по данной $f(z)$ иногда представляет собой более трудную задачу. Для получения разложения (2) можно применить методы теории *вычетов* (см. также [3] — [5]).

Справедливо обобщение приведенной теоремы, также принадлежащее Г. Миттаг-Леффлеру и состоящее в том, что каковы бы ни были область D расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, последовательность $\{a_n\}$ точек $a_n \in D$, все предельные точки к-рой находятся на границе ∂D, и соответствующие главные части (1), существует мероморфная в D функция $f(z)$, имеющая полюсы в точках a_n и только в них с заданными главными частями (1). В такой форме М.-Л. т. обобщается и для открытых римановых поверхностей D (см. [7]); о существовании мероморфных функций с заданными особенностями на компактных римановых поверхностях см. *Абелев дифференциал*, *Дифференциал на римановой поверхности*, *Римана — Роха теорема*. М.-Л. т. верна и для абстрактных мероморфных функций g_n, $f : D \to F$, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, со значениями в банаховом пространстве F (см. [8]).

Другое обобщение М.-Л. т. состоит в том, что для любых последовательности $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, и соответствующих функций

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{nk}}{(z-a_n)^k},$$

являющихся целыми функциями относительно переменного $w_n = 1/(z-a_n)$, существует однозначная аналитическая функция $f(z)$, имеющая особые точки a_n и только их с главными частями $g_n(z)$ (см. [3]).

Для аналитических функций многих комплексных переменных обобщением задачи Миттаг-Леффлера о построении функции с заданными особенностями является первая (аддитивная) *Кузена проблема*. В связи с этим часто оказывается полезной следующая равносильная формулировка М.-Л. т. Пусть $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$, где Ω_j — открытые множества в $\mathbb{C}$, и пусть даны мероморфные функции g_j соответственно на множествах Ω_j, причем

разности $g_j - g_k$ суть регулярные функции на пересечениях $\Omega_j \cap \Omega_k$ при всех j и k. Тогда на Ω существует мероморфная функция f такая, что разности $f - g_j$ регулярны на Ω_j для всех j (см. [5], [6]).

2) М.-Л. т. о разложении однозначной ветви аналитической функции в звезде — см. *Звезда элемента функции.*

Лит.: [1] Mittag-Leffler G., En metod att analytisk framställa en funktion at rationel karakter...— Öfversigt Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar, 1876, v. 33, № 6, p. 3—16; [2] его же, «Acta math.», 1884, v. 4, p. 1—79; [3] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., 3 изд., т. 2, М.—Л., 1936; [4] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [5] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [6] Хёрмандер Л., Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, пер. с англ., М., 1968; [7] Behnke H., Sommer F., Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 3 Aufl., B., 1965; [8] Шварц Л., Анализ, пер. с франц., т. 2, М., 1972.
Е. Д. Соломенцев.

МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА ФУНКЦИЯ — целая функция $E_\rho(z)$ комплексного переменного z, введенная Г. Миттаг-Леффлером [1] как обобщение показательной функции:

$$E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k/\rho)}, \quad 1 \leqslant \rho < +\infty.$$

В связи с тем, что М.-Л. ф. и более общая функция типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\ \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}, \quad \mu,\ \rho \in \mathbb{C},$$

широко используются в интегральных представлениях и преобразованиях аналитич. функций, их свойства, в частности асимптотика, изучены весьма подробно (см. [2], [3]).

Лит.: [1] Mittag-Leffler G., «Acta math.», 1905, v. 29, p. 101—81; [2] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966; [3] Гольдберг А. А., Островский И. В., Распределение значений мероморфных функций, М., 1970.
Е. Д. Соломенцев.

МИХАЙЛОВА КРИТЕРИЙ: все корни многочлена

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

с действительными коэффициентами имеют строго отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда комплекснозначная функция $z = P(i\omega)$ действительного переменного $\omega \in [0,\ \infty)$ описывает в комплексной плоскости z кривую (годограф Михайлова), начинающуюся на положительной действительной полуоси, не попадающую в начало координат и последовательно проходящую против хода часовой стрелки n квадрантов (эквивалентное условие: когда радиус-вектор $P(i\omega)$ при возрастании ω от 0 до $+\infty$ нигде не обращается в нуль и монотонно поворачивается в положительном направлении на угол $\pi n/2$).

Этот критерий впервые был предложен А. В. Михайловым [1]. Он равносилен *Рауса — Гурвица критерию*, однако носит геометрич. характер и не требует проверки детерминантных неравенств (см. [2], [3]). М. к. дает необходимое и достаточное условие асимптотич. устойчивости линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

с постоянными коэффициентами или линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

с постоянной матрицей A, характеристич. многочлен к-рой совпадает с $P(z)$ (см. [4]).

М. к.— один из частотных критериев устойчивости линейных систем автоматич. регулирования (примыкающий, напр., к *Найквиста критерию*). Известны обобщения М. к. на системы автоматич. регулирования с запаздыванием, на импульсные системы (см. [5]), а

также аналоги М. к. для нелинейных систем управления (см. [6]).

Лит.: [1] Михайлов А. В., «Автоматика и телемеханика», 1938, № 3, с. 27—81; [2] Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н., Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций, М.—Л., 1949 («Тр. Матем. ин-та АН СССР», т. 26); [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [4] Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., 1967; [5] Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э., Математические основы теории управляемых систем, М., 1969; [6] Блакьер О., Анализ нелинейных систем, пер. с англ., М., 1969.

Н. Х. Розов.

МНИМАЯ ЕДИНИЦА — комплексное число i, квадрат к-рого равен минус единице: $i^2=-1$.

МНИМОЕ ЧИСЛО — число вида $x+iy$, где i — мнимая единица, x и y — действительные числа и $y\neq 0$, т. е. *комплексное число*, не являющееся действительным; М. ч. вида iy наз. чистомнимым (иногда только такие числа наз. М. ч.).

МНОГОГРАННАЯ МЕТРИКА — *внутренняя метрика* связного симплициального комплекса из евклидовых симплексов, в к-ром склеиваемые грани изометричны и склеивание производится по изометрии. Расстоянием между точками комплекса служит нижняя грань длин ломаных, соединяющих эти точки, и таких, что каждое из звеньев умещается в одном из симплексов. Примером М. м. служит внутренняя метрика на поверхности выпуклого многогранника в E^3. М. м. может рассматриваться также на комплексе из симплексов пространства постоянной кривизны.

М. м. допускают синтетич. приемы исследования. Обычно М. м. рассматривают для комплексов, являющихся многообразиями или многообразиями с краем. В теории выпуклых поверхностей и *двумерных многообразий ограниченной кривизны* приближение посредством М. м. служит универсальным аппаратом исследования (см. [1], [2]). Для изучения выпуклых поверхностей успешно привлекались также трехмерные М. м. (см. [3]). На М. м. размерности $n>2$ обобщены нек-рые из результатов римановой геометрии в целом (см. [4], [5]).

Лит.: [1] Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; [2] Александров А. Д., Залгаллер В. А., Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М.— Л., 1962 («Тр. Матем. ин-та АН СССР», т. 63); [3] Волков Ю. А., «Вестн. Ленингр. ун-та», 1960, № 19, с. 75—86; [4] Милка А. Д., «Укр. геометр. сб.», 1968, № 5—6, с. 103—14; 1970, № 7, с. 68—77; [5] Stone D. A., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1976, v. 215, № 488, p. 1—44.

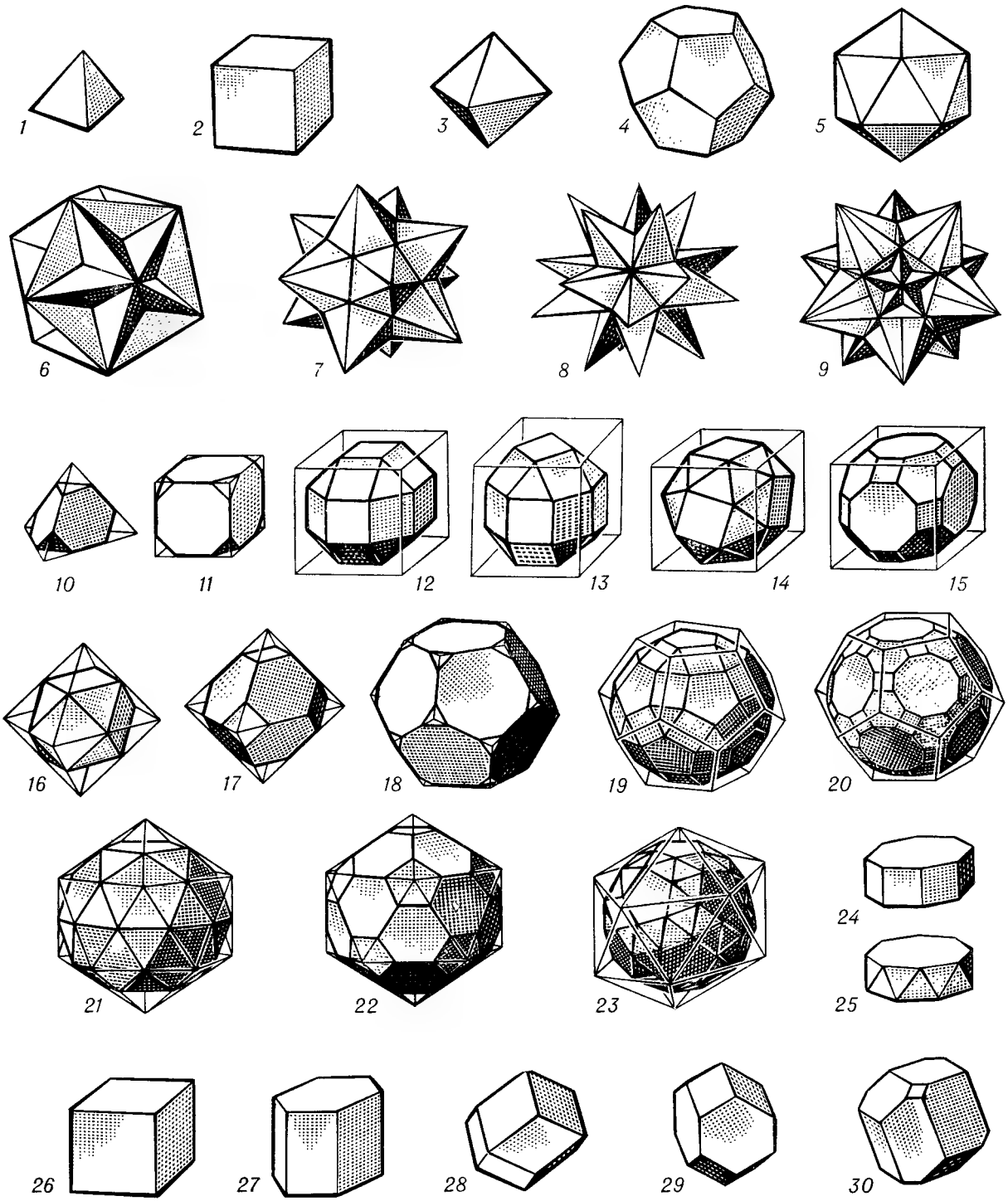
В. А. Залгаллер.

МНОГОГРАННИК — совокупность конечного числа плоских многоугольников такая, что: 1) каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемого смежным с первым (по этой стороне); 2) от любого из многоугольников, составляющих М., можно дойти до любого из них, переходя к смежному с ним, а от этого, в свою очередь, к смежному с ним, и т. д. Эти многоугольники наз. гранями, их стороны — ребрами, а их вершины — вершинами М.

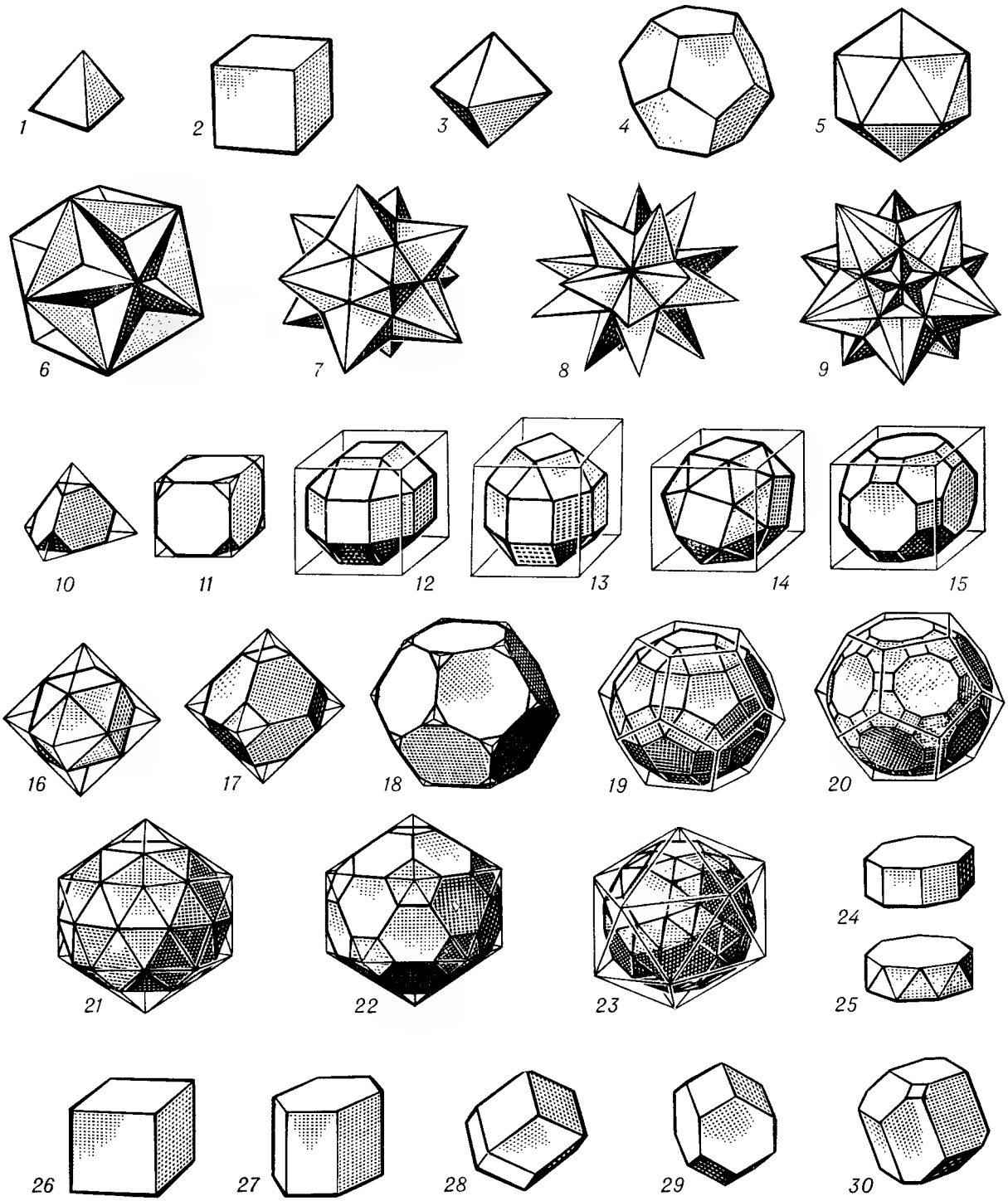
Приведенное определение М. получает различный смысл в зависимости от того, как определить *многоугольник*. Если под многоугольником понимают плоские замкнутые ломаные (хотя бы и самопересекающиеся), то приходят к первому определению М. Основная часть статьи построена на основе второго определения М., при к-ром его грани являются многоугольниками, понимаемыми как части плоскости, ограниченные ломаными. С этой точки зрения М. есть поверхность, составленная из многоугольных кусков. Если эта поверхность сама себя не пересекает, то она есть полная поверхность нек-рого геометрич. тела, к-рое также наз. М.; отсюда возникает третья точка зрения на М. как на геометрич. тела, причем допускается также существование у этих тел «дырок», ограниченных конечным числом плоских граней.

Простейшими примерами М. являются призмы и пи-

рамиды. М. наз. n-угольной пирамидой, если он имеет одной своей гранью (основанием) какой-либо n-угольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной, не лежащей в плоскости основания. Треугольная пирамида наз. также тетраэдром. М. наз. n-угольной призмой, если он имеет двумя своими гранями (основаниями) равные n-угольники (не лежащие в одной плоскости), получающиеся друг из друга параллельным переносом, а остальные грани — параллелограммы, противоположными сторонами к-рых являются соответственные стороны оснований. Для всякого М. нулевого рода эйлерова характеристика (число вершин минус число ребер плюс число граней) равна двум; символически: $B-P+\Gamma=2$ (теорема Эйлера). Для М. рода p справедливо соотношение $B-P+\Gamma=2-2p$.



рамиды. М. наз. n-угольной пирамидой, если он имеет одной своей гранью (основанием) какой-либо n-угольник, а остальные грани — треугольники с общей вершиной, не лежащей в плоскости основания. Треугольная пирамида наз. также тетраэдром. М. наз. n-угольной призмой, если он имеет двумя своими гранями (основаниями) равные n-угольники (не лежащие в одной плоскости), получающиеся друг из друга параллельным переносом, а остальные грани — параллелограммы, противоположными сторонами к-рых являются соответственные стороны оснований. Для всякого М. нулевого рода эйлерова характеристика (число вершин минус число ребер плюс число граней) равна двум; символически: $B-P+\Gamma=2$ (теорема Эйлера). Для М. рода p справедливо соотношение $B-P+\Gamma=2-2p$.



Выпуклым многогранником наз. выпуклая оболочка конечного числа точек, т. е. такой М., к-рый лежит по одну сторону от плоскости любой его грани. Внутренняя его часть есть выпуклое тело. Если поверхность выпуклого тела многогранная, то соответствующий М.— выпуклый. Наиболее важны следующие выпуклые М.

Правильные многогранники (тела Платона) — такие выпуклые М., все грани к-рых суть одинаковые правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах правильные и равные (см. рис. 1—5).

Изогоны и изоэдры — выпуклые М., все многогранные углы к-рых равны (изогоны) или равны все грани (изоэдры); причем группа поворотов (с отражениями) изогона (изоэдра) вокруг центра тяжести переводит любую его вершину (грань) в любую другую его вершину (грань). Каждый из изоэдров может быть реализован так, что все его грани суть правильные многоугольники. Полученные так М. наз. полуправильными многогранниками (телами Архимеда) (см. рис. 10—25).

Параллелоэдры (выпуклые) — М., рассматриваемые как тела, параллельным пересечением к-рых можно заполнить все бесконечное пространство так, чтобы они не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой, т. е. образовали разбиение пространства (см. рис. 26—30).

Основываясь на первом (указанном в начале статьи) определении М., можно указать еще четыре правильных невыпуклых М. (тела Пуансо). В этих М. либо грани пересекают друг друга, либо сами грани — самопересекающиеся многоугольники (см. рис. 6—9). Для изучения вопросов, связанных с площадями поверхностей и объемами таких М., удобно пользоваться именно первым определением М.

Если у М. можно так ориентировать грани, чтобы каждое ребро в тех двух гранях, к-рые смежны по этому ребру, имело бы обратные направления, то его наз. ориентируемым, в противном случае — неориентируемым. Для ориентируемого М. (даже если он — самопересекающийся и его грани — самопересекающиеся многоугольники) можно ввести понятия площади поверхности и величины объема. Площадью ориентируемого М. наз. сумму площадей его граней. При определении объема следует иметь в виду, что совокупность внутренних кусков граней М. разделяет пространство на определенное число связных кусков, из к-рых один по отношению к М. бесконечный (внешний), а остальные конечные (внутренние). Если из внешней по отношению к М. точки провести отрезок в какую-либо внутреннюю точку внутреннего куска, то сумму «коэффициентов» тех внутренних кусков граней М., к-рые пересечет этот отрезок, наз. коэффициентом рассматриваемого внутреннего куска М. (она не зависит от выбора внешней точки); такой коэффициент есть целое положительное, отрицательное число или нуль. Сумму обычных объемов всех внутренних кусков М., умноженных на эти их коэффициенты, наз. объемом М.

Рассматриваются и n-мерные М. Некоторые из указанных определений имеют n-мерное обобщение. В частности, найдены все выпуклые правильные М., при $n = 4$ их оказалось 6, а при всех бо́льших n всего 3: обобщение тетраэдра, куба и октаэдра. В то же время, напр., неизвестны (1982) все 4-мерные изоэдры и изогоны.

Лит.: [1] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 — Геометрия, М., 1963; [2] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М.— Л., 1981; [3] Александров А. Д., Выпуклые многогранники, М.— Л., 1950; [4] Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; [5] Brückner M., Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte, Lpz., 1900.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

МНОГОГРАННИКА ГРУППА — группа Sym P симметрии многогранника P в n-мерном евклидовом про-

странстве En, т. е. группа всех движений пространства E^n, переводящих P в себя. Многогранник P наз. п р а в и л ь н ы м, если группа Sym P транзитивно действует на множестве его «флагов» — наборов

$$F=\{\Gamma_0,\ \Gamma_1,\ \ldots,\ \Gamma_{n-1}\},$$

где Γ_k есть k-мерная замкнутая грань и $\Gamma_{k-1}\subset\Gamma_k$. Группа симметрии правильного многогранника порождается отражениями (см. *Отражений группа*). Ее фундаментальной областью является симплициальный конус K, вершина к-рого совпадает с центром многогранника P, а ребра проходят через центры граней, составляющих какой-либо флаг F. Тем самым образующие отражения $r_1,\ \ldots,\ r_n$ группы Sym P получают естественную нумерацию: r_k есть отражение относительно той гиперплоскости, ограничивающей K, к-рая не проходит через центр грани Γ_{k-1}. Образующие r_k и r_l при $|k-l|\geqslant 2$ коммутируют, а порядок r_kr_{k+1} равен p_k — числу k-мерных (или $(k-1)$-мерных) граней многогранника Γ_{k+1}, содержащих грань Γ_{k-2} (если считать, что $\Gamma_k=P$, а $\Gamma_{-1}=\varnothing$). Последовательность $\{p_1,\ \ldots,\ p_{n-1}\}$ наз. с и м в о л о м Ш л е ф л и многогранника. Трехмерные правильные многогранники (тела Платона) имеют следующие символы Шлефли: тетраэдр — $\{3,3\}$, куб — $\{4,3\}$, октаэдр — $\{3,4\}$, додекаэдр — $\{5,3\}$, икосаэдр — $\{3,5\}$.

Символ Шлефли определяет правильный многогранник с точностью до подобия. Обращению символа Шлефли соответствует переход к в з а и м н о м у м н о г о г р а н н и к у, вершинами к-рого служат центры $(n-1)$-мерных граней многогранника P. Взаимные многогранники имеют одинаковые группы симметрии.

Все возможные символы Шлефли правильных многогранников можно получить из классификации конечных групп отражений, выделив из них те, граф Кокстера к-рых линеен. При $n\geqslant 5$ в E^n существует лишь 3 правильных многогранника: симплекс, куб и многогранник взаимный кубу (аналог октаэдра). Их символы Шлефли суть $\{3,\ \ldots,\ 3\}$, $\{4,3,\ \ldots,\ 3\}$ и $\{3,\ \ldots,\ 3,\ 4\}$. В 4-мерном пространстве имеется 6 правильных многогранников: $\{3,3,3\}$, $\{4,3,3\}$, $\{3,3,4\}$, $\{3,4,3\}$, $\{5,3,3\}$ и $\{3,3,5\}$.

Каждая грань правильного многогранника P также является правильным многогранником, причем ее символ Шлефли есть начальный отрезок символа Шлефли самого многогранника P. Напр., 3-мерная грань многогранника $\{5,3,3\}$ имеет символ Шлефли $\{5,3\}$, т. е. является додекаэдром.

Лит.: [1] Coxeter H. S. M., Regular Polytopes, 2 ed., N. Y.— L., 1963; [2] Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, М., 1966.

Э. Б. Винберг.

МНОГОГРАННЫЙ УГОЛ — часть пространства, ограниченная одной полостью многогранной конич. поверхности, направляющая к-рой — плоский многоугольник без самопересечений. Грани этой поверхности наз. г р а н я м и М. у., вершина — в е р ш и н о й М. у. Многогранный угол наз. п р а в и л ь н ы м, если равны все его линейные углы и все его двугранные углы. Мерой М. у. является площадь, ограниченная сферич. многоугольником (см. рис.), полученным пересечением граней М. у., сферой с радиусом, равным единице, и с центром в вершине М. у.

МНОГОГРУППОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — один из методов приближенного описания и изучения системы большого числа взаимодействующих частиц (газ, жидкость), применяемый в статистич. физике.

Этот метод основан на предположении, что всякая (или почти всякая) конфигурация частиц разбивается на конечные группы частиц — к л а с т е р ы, расположенные достаточно далеко и почти не взаимодейст-

вующие друг с другом. Иными словами, система взаимодействующих частиц представляется в виде газа кластеров, к-рым запрещено слишком сближаться. Следующий шаг состоит в пренебрежении этим запретом, а также в том, что из рассмотрения исключаются кластеры очень больших размеров или очень сложной формы (в этом собственно и состоит М. п.).

Основное допущение о разложении конфигурации на кластеры, лежащее в основе метода, верно в случае малой плотности частиц и короткодействующих сил между ними. Оправдано ли это допущение в других случаях — неизвестно (1982). Применяемые же в М. п. аппроксимации, по-видимому, дают хорошее приближение также лишь при малых значениях плотности и становятся слишком грубыми в случае фазового перехода, когда одинаково существенную роль начинают играть кластеры всех размеров.

Лит.: [1] Band W., «J. Chem. Phys.», 1939, v. 7, p. 324—26; [2] Frenkel J., там же, p. 200; [3] Минлос Р. А., Синай Я. Г., «Матем. сб.», 1967, т. 73, в. 3, с. 375—448; [4] Хилл Т., Статистическая механика, пер. с англ., М., 1960.

Р. А. Минлос.

МНОГОЗНАЧНАЯ ЛОГИКА — раздел *математической логики*, изучающий математич. модели логики высказываний. Эти модели отражают две основные черты последней — множественность значений истинности высказываний и возможность построения новых более сложных высказываний из заданных при помощи логич. операций, к-рые позволяют также по значениям истинности исходных высказываний устанавливать значение истинности сложного высказывания. Примерами многозначных высказываний являются суждения с модальным исходом («да», «нет», «может быть») и суждения вероятностного характера, а примерами логич. операций — логич. связки типа «и», «или», «если..., то». В общем случае модели М. л. представляют собой обобщения *алгебры логики*. Важно отметить, что в алгебре логики высказывания принимают только два значения истинности («да», «нет»), в связи с чем она в общем случае не может отразить всего многообразия логич. построений, встречающихся на практике. При достаточно широком толковании М. л. в нее иногда включают также *логические исчисления*.

Исторически первыми моделями М. л. явились двузначная логика Дж. Буля (G. Boole, сер. 19 в.), называемая также алгеброй логики, трехзначная логика Я. Лукасевича (J. Łucasiewicz, 1920) и m-значная логика Э. Поста (E. Post, 1921). Изучение этих моделей составило важный этап в создании теории М. л.

Основные модели многозначной логики. М. л. обладает определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при исследовании М. л. с позиций математич. логики, математич. кибернетики и алгебры. Так, с позиций математич. кибернетики модели М. л. рассматриваются как языки, описывающие функционирование сложных управляющих систем, компоненты к-рых могут находиться в нек-ром числе различных состояний, а с точки зрения алгебры модели М. л. представляют *алгебраические системы*, имеющие наряду с прикладным и теоретич. интерес.

Построение моделей М. л. осуществляется по аналогии с построением двузначной логики. Так, индивидуальные высказывания логики, разбитые на классы с одним и тем же значением истинности, приводят к понятию множества E — констант модели, к-рые фактически отождествляют все индивидуальные высказывания, заменяя их соответствующими значениями истинности; переменные высказывания приводят к переменным величинам $x_1, x_2, \ldots$, которые в качестве значений принимают элементы из множества E; логич. связки приводят к множеству M элементарных функций (операций), к-рые, как и их аргументы, принимают значения из E. Сложные высказывания, построенные из ин-

дивидуальных и переменных высказываний, а также логич. связок, приводят к множеству $\langle M\rangle$ формул над M. Значение истинности из E сложного высказывания является функцией от соответствующих значений истинности высказываний, входящих в данное сложное высказывание. В модели эта функция приписывается формуле, соответствующей данному сложному высказыванию; говорят также, что формула р е а л и з у е т эту функцию. Функции, отображающие *кортежи* элементов из E в E, наз. ф у н к ц и я м и m-з н а ч н о й л о г и к и, где m обозначает мощность множества E. Множество всех функций m-значной логики обозначают через P_m. Множество формул $\langle M\rangle$ приводит к множеству $[M]$ функций, реализуемых формулами из $\langle M\rangle$ и наз. с у п е р п о з и ц и я м и (или к о м п о з и ц и я м и) над M. Множество $[M]$ наз. з а м ы к а н и е м м н о ж е с т в а M. Задание конкретной модели М. л. M_E считается эквивалентным указанию множеств E, M, $\langle M\rangle$ и $[M]$, при этом говорят, что модель порождается множеством M; если M конечно, говорят, что модель является к о н е ч н о п о р о ж д е н н о й. Эта модель наз. ф о р м у л ь н о й м о д е л ь ю, а также m-з н а ч н о й л о г и к о й.

Своеобразие подхода математич. кибернетики к М. л. состоит в рассмотрении моделей М. л. как управляющих систем. Элементарные функции при этом являются элементами, производящими определенные операции, а формулы интерпретируются как схемы, построенные из элементов и также осуществляющие переработку входной информации в выходную. Такого рода управляющие системы, известные в кибернетике как с х е м ы и з ф у н к ц и о н а л ь н ы х э л е м е н т о в (без ветвления), широко используются в теоретич. и практич. вопросах кибернетики.

Вместе с тем существует ряд задач логики и кибернетики, к-рый связан с изучением соответствий между множествами M и $[M]$ и при к-ром роль множества $\langle M\rangle$ несколько затушевывается, сводясь к способу определения второго множества по первому. В этом случае приходят к другой модели М. л., представляющей собой алгебру, элементами к-рой являются функции, принимающие в качестве значений, как и их аргументы, элементы из E. В качестве операций в этих алгебрах обычно используется специальный набор операций, эквивалентный в смысле соответствий M и $[M]$ множеству формул, построенных из функций множества M, т. е. получению сложных функций из заданных путем подстановки одних функций вместо аргументов других. Эти алгебры наз. а л г е б р а м и m-з н а ч н ы х л о г и к. Конкретно это может быть достигнуто, напр., введением следующих унарных операций: ζ, τ, Δ, ∇ и бинарной операции $*$. В предположении, что каждая функция f из P_E с учетом фиктивных переменных зависит от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где n определяется функцией f, эти операции могут быть заданы так:

$$(\zeta f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1),$$
$$(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n),$$
$$(\Delta f)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

если $n>1$, и $\zeta f=\tau f=\Delta f=f$, если $n=1$;

$$(\nabla f)(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})$$

и для $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_m)$

$$(f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}) =$$
$$= f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Возникающие алгебры $M_E=\langle M, \zeta, \tau, \Delta, \nabla, *\rangle$ иногда наз. а л г е б р а м и П о с т а.

Проблематика многозначной логики. К числу задач, характерных для формульной модели М. л., относится задача «об описании», т. е. вопрос об указании для за-

данного множества $M_2 \subseteq [M_1]$ всех формул из $\langle M_1 \rangle$, реализующих функции из M_2. Частным случаем такой задачи является важный вопрос математич. логики об указании всех формул, реализующих заданную константу, что, напр., для исчисления высказываний эквивалентно построению всех тождественно истинных высказываний.

Пограничным вопросом между математич. логикой и алгеброй, примыкающим к задаче об описании, является задача о тождественных преобразованиях. В ней при заданном множестве M требуется выделить в нек-ром смысле простейшее подмножество пар равных, т. е. реализующих одну и ту же функцию, формул из $\langle M \rangle$ (тождеств), позволяющее путем подстановки выделенных равных формул одной вместо другой получить из любой формулы все формулы, равные ей (полную систему тождеств).

Аналогичное место занимает т. н. проблема полноты, состоящая в указании всех таких подмножеств M_1 заданного замкнутого, т. е. совпадающего со своим замыканием, множества M, для к-рых выполнено равенство $[M_1] = M$, т. е. имеет место свойство полноты (или свойство функциональной полноты) M_1 в M. К этой задаче примыкает задача о базисах, состоящая в указании всех полных в M подмножеств M_1, никакое собственное подмножество к-рых уже не полно в M (базисы называют также полными независимыми системами функций). Выделяют два подхода к решению задачи о полноте — алгоритмический и алгебраический. В первом случае ставится вопрос о существовании алгоритма, устанавливающего полноту или неполноту систем функций, описанных на нек-ром языке; во втором — переходят к изучению свойств решетки подалгебр данной алгебры m-значной логики и решают задачу о полноте, используя эти свойства. Важным понятием при алгебраич. подходе является понятие критериальной системы подалгебр. Система N подалгебр алгебры $M = \langle M, \zeta, \tau, \wedge, \vee, * \rangle$ наз. критериальной, если любое множество $M' \subseteq M$ является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одной подалгебры из N. Таково, напр., множество всех собственных подалгебр алгебры M. В общем случае последняя критериальная система является избыточной. Всякая критериальная система содержит все максимальные подалгебры алгебры M (или предполные классы), и это позволяет перейти к рассмотрению более экономных критериальных систем, к-рые не содержат подалгебр максимальных подалгебр. Таким образом, в задачах о полноте можно ограничиться использованием критериальных систем вида $N = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где Σ_1 — множество всех максимальных подалгебр, а множество Σ_2 состоит из нек-рых таких подалгебр, к-рые не являются подалгебрами никакой максимальной подалгебры. В случае пустоты Σ_2 задача о полноте сводится к описанию максимальных подалгебр алгебры N.

Глобальной задачей для М. л. является описание решетки замкнутых классов данной модели М. л.

Характерный для теории управляющих систем вопрос о сложности этих систем естественно возникает и по отношению к формулам и функциям из М. л. Типичной при таком подходе является следующая задача о сложности реализации. На множестве всех элементарных формул нек-рым способом вводится числовая мера (сложность формул), к-рая затем распространяется на множество всех формул, напр. путем суммирования мер всех тех элементарных формул, к-рые участвуют в построении заданной формулы. Требуется для заданной функции указать ту формулу (простейшую), к-рая реализует эту функцию и имеет наименьшую сложность, а также выяснить, как

эта сложность зависит от нек-рых свойств рассматриваемой функции. Исследуются различные обобщения этой задачи.

Широкий круг вопросов связан с реализацией функций формулами с наперед заданными свойствами. Сюда относятся задача о реализации функций алгебры логики *дизъюнктивными нормальными формами* и связанная с этим задача минимизации; а также задача о реализации функций формулами в нек-ром смысле ограниченной глубины (т. е. такими формулами, в к-рых цепочка подставляемых друг в друга формул имеет ограниченную длину, такое ограничение связано с надежностью и скоростью вычислений), задача о декомпозиции, т. е. о реализации функций от переменных при помощи формул, построенных из элементарных формул, реализующих функции от меньшего числа переменных, и ряд других.

Решения всех перечисленных выше задач существенно зависят от мощности множества E и множества M, порождающего заданную модель М. л.

Важнейшие примеры многозначных логик. К числу наиболее важных примеров М. л. относятся конечнозначные логики (т. е. m-значные логики, для к-рых m конечно). Для них обычно полагают, что $E=E_m=\{0, 1, \ldots, m-1\}$, а m-значную логику M_E обозначают M_m. Наиболее глубоко исследован случай $m=2$, при этом функции двузначной логики наз. также *булевыми функциями*. Важнейшим результатом здесь является полное описание Э. Постом (E. Post, см. [1]) решетки замкнутых классов. Множество их оказалось счетным, а каждый класс и решетки их по включению строятся эффективно. Эти классы наз. классами Поста. Всякий замкнутый класс имеет конечный базис, и его мощность не превосходит 4. Из этих результатов получаются решения задач о выразимости, полноте и базисах, а также задачи о тождественных преобразованиях. Относительно полных конечных систем для «почти всех» функций указано поведение меры сложности простейших формул, реализующих эти функции, и построен соответствующий алгоритм синтеза формул (см. [2]). Изучены задачи о построении оптимальных по сложности формул, реализующих функции надежно и достаточно хорошо по быстродействию, а также вопросы сложности реализации для большого числа специальных классов функций и отдельных функций.

Одним из глубоко исследованных вопросов для двузначной логики является также задача минимизации. В ней изучается специальный язык задания функций двузначной логики — язык дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.). Вводится понятие сложности д. н. ф.— число букв в ней — и изучаются задачи поиска, строения и метрич. свойств «простейших» в смысле этой меры д. н. ф., реализующих заданную функцию (см. [3]). Задача о декомпозиции для булевых функций состоит в выяснении условий, при к-рых заданная функция от n переменных может быть реализована формулой, построенной из функций от меньшего числа переменных, причем все функции, подставляемые друг в друга в процессе построения формулы, не зависят от общих переменных. Такие формулы наз. бесповторными. Показано, что не существует конечной системы функций такой, что каждая функция может быть реализована бесповторной формулой над этой системой, и даже что «почти все» функции не допускают реализации бесповторными формулами. В целом двузначные логики, в силу нек-рых их особенностей, являются главным объектом, на к-ром просматриваются общие постановки задач.

Для произвольных конечнозначных логик, к-рые при $m>2$ существенно отличаются от двузначной логики, имеются эффективные решения задач о выразимости для конечных систем. Показано, что при $m\geqslant 3$ сущест-

вуют m-значные логики с конечным базисом и в то же время не имеющие конечной полной системы тождеств (см. [4]), тогда как в двузначной логике каждый замкнутый класс имеет конечную полную систему тождеств (см. [5]). Для конечнозначных логик с конечным базисом имеется эффективное решение задачи о полноте. Оно достигается следующим путем. Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет множество $K = \{g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_s(x_1, \ldots, x_n)\}$, если для любого набора $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_k}$, где $g_{i_j} \in K$, имеет место $f(g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_n}) \in K$. Множество K наз. правильным, если селекторная функция $g_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$ содержится в K при всех j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и каждая функция из K сохраняет K. Если $M = [K]$, то в M выбирают все системы K' с такими свойствами: функции в них зависят только от $x_1, \ldots, x_n$, добавление к ним всех селекторных функций делает их правильными, они не содержат в качестве подмножества K. Указанная процедура выделения всех правильных множеств $K_1, \ldots, K_t$, $t \leqslant 2^{m^n}$, является эффективной. Критериальной системой является $\{U(K_1), U(K_2), \ldots, U(K_t)\}$, где $U(K_i)$ (класс сохранения K_i) состоит из всех функций из M, сохраняющих K_i, $1 \leqslant i \leqslant t$. Невключение произвольного конечного множества $K \subseteq M$ в каждый из классов $U(K_i)$ проверяется также эффективно. Каждый предполный класс является одним из классов сохранения, а множество всех предполных классов в этом случае образует критериальную систему. Показано, что при $m \geqslant 3$ в P_m имеется континуум замкнутых классов, существуют замкнутые классы с базисами заданной конечной или счетной мощности, а также такие классы, к-рые не имеют базисов, при этом сами семейства классов без базисов или со счетным базисом континуальны. Примерами классов без базиса или имеющих счетный базис являются $[\{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}]$ и $[\{g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots\}]$, где: $f_n = 0$ при $n = 0$, а при $n > 0$ функция $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ равна 0 на всех наборах, кроме $(2, \ldots, 2)$, на к-ром равна 1; $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ равна 0 на всех наборах, кроме наборов вида $(2, \ldots, 2, 1, 2, \ldots, 2)$, на к-рых равна 1 (см. [6]).

Особый интерес представляет задача о полноте в m-значной логике P_m. В P_m существуют конечные полные системы, что позволяет из каждой полной системы выделить конечную полную подсистему и свести задачу к изучению полноты конечных систем. Существуют также полные системы, состоящие из одной функции, такие функции наз. шеффферовыми. Примером их может служить функция Вебба $\max(x_1, x_2) + 1 \pmod m$. В силу конечной порожденности в P_m эффективно решается задача о полноте.

В P_m явно построены все предполные классы, являющиеся классами сохранения специальных предикатов. Указание этих предикатов составляет содержание теоремы о полноте в конечнозначных логиках (см. [7]). Говорят, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет предикат R: $(E_m)^h \to \{0, 1\}$, если формула

$$R(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1h}) \,\&\, \ldots \,\&\, R(z_{n1}, z_{n2}, \ldots, z_{nh}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow R(f(z_{11}, z_{21}, \ldots, z_{n1}), \ldots, f(z_{1h}, z_{2h}, \ldots, z_{nh}))$$

тождественно равна 1 при всех значениях переменных z_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant h$. Класс $U(R)$ всех функций, сохраняющих предикат R, наз. классом сохранения предиката R. Показано, что для каждого предполного класса N можно выбрать такой предикат R, зависящий не более чем от $m+2$ переменных, а при $m \geqslant 3$ не более чем от m переменных, что $N = U(R)$. Эти предикаты могут быть разбиты на шесть семейств: H, S, E, L, Z, U. Семейства H, S и E состоят из всех двуместных предикатов отношения порядка на E_m, имеющих по одному максимальному и минимальному элементу,— в первом случае; задающих подстановки

на E_m, разлагающиеся в циклы одинаковой простой длины (без инвариантных элементов),— во втором случае; и задающих нетождественные и неуниверсальные отношения эквивалентности на E_m — в третьем случае. Семейство L не пусто при $m=p^h$, p — простое, и состоит из всех четырехместных предикатов $R_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$ таких, что $R_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 1 эквивалентно $y_1 + y_2 = y_3 + y_1$, где G — абелева группа, в к-рой каждый ненулевой элемент имеет порядок p. Предикат $R(y_1, \ldots, y_h)$, $1 \leqslant h \leqslant m$, рефлексивен, если из того, что не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_h$ различны, следует, что $R(a_1, a_2, \ldots, a_h) = 1$, и симметричен, если для любой подстановки s чисел $1, 2, \ldots, h$ имеет место $R(y_1, \ldots, y_h) = R(y_{s(1)}, \ldots, y_{s(h)})$. Множество элементов $c \in E_m$ таких, что $R(a_1, \ldots, a_{h-1}, c) = 1$ для любых $a_1, \ldots, a_{h-1}$, наз. центром симметричного предиката R. Предикат $R(y_1, \ldots, y_h)$ является центральным, если он рефлексивен, симметричен и имеет центр c такой, что $\varnothing \subset c \subset E_m$. Семейство Z состоит из всех h-местных центральных предикатов таких, что $1 \leqslant h \leqslant m$. Для a из E_{h^k} полагают $a = \sum_{l=0}^{k-1} [a]_l \cdot h^l$, где $[a]_l \in E_h$. Семейство U состоит из всех предикатов $R(y_1, \ldots, y_h)$ таких, что при $3 \leqslant h \leqslant m$ и $h^k \leqslant m$, $k \geqslant 1$, для нек-рой сюръекции φ: $E_m \to E_{h^k}$ равенство $R(a_1, \ldots, a_h)$ 1 эквивалентно тому, что набор $([\varphi(a_1)]_l, \ldots, [\varphi(a_n)]_l)$ неразнозначен при любом $l = 0, 1, \ldots, k-1$. Установлено, что предикаты из разных семейств задают разные предполные классы, и указаны условия, когда предикаты из одного и того же семейства задают одинаковые классы. Показано, что число предполных классов асимптотически равно $\delta(m) \cdot m \cdot 2^{C_{m-1}^{[m-1/2]}}$, где $\delta(m) = 1$, если m четно, и $\delta(m) = 2$, если m нечетно (т. е. это число растет достаточно быстро), что указывает на малую практич. эффективность критериальных систем (см. [8]). Рассматриваются различные модификации задачи о полноте, сводящиеся к исследованию систем с нек-рыми заранее известными свойствами, напр. систем, содержащих множество P_m^1 всех одноместных функций или же множество S_m всех подстановок. В первом случае система при $m > 2$, а во втором при $m > 4$ является полной тогда и только тогда, когда она содержит существенную функцию, т. е. функцию, зависящую более чем от одного переменного и принимающую все m значений (см. [9], [10]). С ними связана задача указания всех таких подмножеств T множеств P_m^1 и S_m, каждое из к-рых вместе с любой существенной функцией образует полную систему. Показано, что подмножество $T \subseteq P_m^1$ всех одноместных функций, не принимающих хотя бы одного значения, является таковым, а подмножество $T \subseteq P_m^1$ всех одноместных функций, не принимающих хотя бы двух значений, вообще говоря, таковым уже не является. При $m > 4$ таковыми являются те и только те подмножества T, к-рые 4-транзитивны при $m = 2^k$, 3-транзитивны при $m = p^k$, p — простое, $p \neq 2$, 2-транзитивны при остальных m. Эти условия после естественного обобщения транзитивности сохраняются и для произвольных систем функций, к-рые принимают все m значений (см. [11]).

Для систем, состоящих из одной функции, критерием полноты является условие 2-транзитивности. Произвольное множество функций при $m > 2$ является полным тогда и только тогда, когда оно m-транзитивно и степень транзитивности не может быть понижена.

От конечных полных систем путем операции отождествления можно перейти к рассмотрению более простого класса полных систем, наз. простыми базисами. Под простым базисом понимается такая конечная полная система, к-рая теряет свойство полноты после отождествления любой пары существенных пере-

менных у любой функции этой системы. Существует лишь конечное число q простых базисов и $\log q \sim m^{m^{m-1}-(m-1)!}$ [12]. Число переменных у функций из простых базисов не превосходит m^{m-1}, и существует функция, входящая в простой базис и существенно зависящая от m^{m-1} переменных. Указаны представления М. л. P_k в P_m, т. е. гомоморфизмы P_k в P_m [13]; построены также нек-рые аналоги теории минимизации для произвольных конечнозначных логик.

Первыми примерами конечнозначных логик явились трехзначная логика Лукасевича, к-рая порождается функциями $1-x$, $\min(1, 1-x_1+x_2)$, где x_1, x_2 принимают значения 0, 1/2, 1, и m-значная логика Поста, к-рая порождается функциями $x_1+1 \pmod m$, $\max(x_1, x_2)$, где x_1, x_2 принимают значения 0, 1, ..., $m-1$. К конечнозначным логикам примыкают алгебры многозначных функций, на которые в значительной мере переносятся проблематика и методы исследования конечнозначных логик.

Примерами других М. л. являются счетнозначные и континуумзначные логики (т. е. такие m-значные логики, для к-рых мощность m является соответственно счетной или континуальной). Эти модели играют важную роль в математич. логике, теории моделей и в математич. анализе. Для счетнозначных логик установлена гиперконтинуальность множеств предполных (а значит и множества всех) замкнутых классов и найдено решение задачи о полноте систем, содержащих множество $P^1_{\aleph_0}$ всех одноместных функций [14]. В отличие от конечнозначных логик P_m при $m>2$, где имеется только один предполный класс, содержащий все одноместные функции, в $P_{\aleph_0}$ существуют два таких предполных класса и указанная система функций является полной тогда и только тогда, когда она не содержится в этих классах. Если обобщить понятие существенной функции и считать, что таковой является всякая функция, образующая полную систему вместе с $P^1_{\aleph_0}$, то так же, как и в конечнозначных логиках, возникает задача описания всех тех подмножеств множества $P^1_{\aleph_0}$, к-рые содержат все множество $S_{\aleph_0}$ подстановок из $P_{\aleph_0}$ и вместе с любой существенной функцией образуют полную систему. Показано, что пересечение всех таких замкнутых подмножеств само обладает указанным свойством. Это пересечение, к-рое отлично от $S_{\aleph_0}$, эффективно описано в теоретико-множественных терминах.

В счетнозначных и континуумзначных логиках особую роль играют различные их подклассы. Таковыми являются в первом случае предельные логики, а во втором — М. л. непрерывных функций. Предельные логики представляют собой счетные замкнутые классы функций М. л. $P_{\aleph_0}$, содержащие гомоморфные прообразы всех конечнозначных логик. Существует континуум различных и даже конечно порожденных попарно неизоморфных предельных логик. Установлено, что в общем случае для предельных логик задача о полноте не эквивалентна отысканию всех предполных классов. Мощность множества предполных классов в предельных логиках может быть равной любому натуральному числу, а также быть счетной или континуальной (см. [15]). Для М. л. непрерывных функций показана полнота всех двуместных функций и получены нек-рые аналоги теоремы о полноте систем, состоящих из всех одноместных и многоместной функций. Установлено также, что всякую непрерывную функцию можно представить в виде суммы специально выбранных непрерывных одноместных функций. Показано, что для k раз дифференцируемых функций от n

переменных, вообще говоря, невозможно представление их с помощью суперпозиций функций той же гладкости, но зависящих от меньшего числа переменных (см. [16]).

К М. л. могут быть отнесены также и такие алгебры функций, в к-рых запас операций несколько отличается от описанного выше. Таковы алгебры неоднородных конечнозначных функций (их аргументы принимают конечное число значений из своих областей), рекурсивных и частично-рекурсивных функций, алгебры автоматных отображений и ряд других.

Лит.: [1] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966; [2] Лупанов О. Б., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 14, с. 31—110; [3] Журавлев Ю. И., «Проблемы кибернетики», 1962, в. 8, с. 5—44; [4] Линдон Р. К., «Кибернетич. сб.», 1960, в. 1, с. 234—45; [5] Мурский В. Л., «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, № 4, с. 815—18; [6] Янов Ю. И., Мучник А. А., «Докл. АН СССР», 1959, т. 127, № 1, с. 44—46; [7] Rosenberg J., Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken, Praha, 1970; [8] Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В., «Докл. АН СССР», 1969, т. 186, № 3, с. 509—12; [9] Яблонский С. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51, с. 5—142; [10] Салома а А., «Кибернетич. сб.», 1964, в. 8, с. 7—32; [11] Кудрявцев В. Б., «Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik» (EIK), 1973, Bd 9, Hft 1/2, S. 81—105; [12] Алексеев В. Б., «Дискретный анализ», 1971, № 19, с. 3—10; [13] Мальцев А. И., «Алгебра и логика», 1966, т. 5, в. 2, с. 5—24; [14] Гаврилов Г. П., «Проблемы кибернетики», 1965, в. 15, с. 5—64; [15] Деметрович Я., «Проблемы кибернетики», 1975, в. 30, с. 5—42; [16] Витушкин А. Г., в кн.: Тр. Международного конгресса математиков, М., 1968, с. 322—28.

В. Б. Кудрявцев.

МНОГОЗНАЧНАЯ ФУНКЦИЯ — функция f, к-рая ставит в соответствие каждому элементу $x \in X$ нек-рое подмножество $f(x)$ множества Y: $f(x) \subset Y$, причем существует хотя бы одно $y \in Y$, состоящее не менее чем из двух элементов. См. также *Многозначное отображение.*

Л. Д. Кудрявцев.

МНОГОЗНАЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, точечно-множественное отображение,— отображение $\Gamma: X \to Y$, ставящее в соответствие каждому элементу x множества X нек-рое подмножество $\Gamma(x)$ множества Y. Если для каждого $x \in X$ множество $\Gamma(x)$ состоит из одного элемента, то отображение Γ наз. однозначным. М. о. Γ можно трактовать как однозначное отображение X в 2^Y, т. е. во множество всех подмножеств множества Y.

Для двух М. о. $\Gamma_i: X \to Y$, $i=1, 2$, естественным образом определяется включение $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, если $\Gamma_1(x) \subset \Gamma_2(x)$ для всех $x \in X$. Для любого семейства М. о. $\Gamma_\alpha: X \to Y$, $\alpha \in A$, определяется объединение и пересечение: $\Gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$, если $\Gamma(x) = \bigcup_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha(x)$ для всех $x \in X$, и $\Gamma = \bigcap_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha$, если $\Gamma(x) = \bigcap_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha(x)$ для всех $x \in X$. Для любого семейства М. о. $\Gamma_\alpha: X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, М. о. $\Gamma = \prod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha : X \to \Gamma_\alpha \in \in A Y_\alpha$ наз. декартовым произведением М. о. Γ_α, если $\Gamma(x) = \prod_{\alpha \in A} \Gamma_\alpha(x)$. Сечением М. о. Γ наз. такое однозначное отображение $f: X \to Y$, что $f(x) \in \Gamma(x)$ для всех $x \in X$. Графиком М. о. Γ наз. множество $G(\Gamma) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Gamma(x)\}$.

М. о. Γ топологич. пространства X в топологич. пространство Y наз. полунепрерывным сверху, если для всякого открытого множества $U \subset Y$ множество $\Gamma^+(u) = \{x \in X : \Gamma(x) \subset U,\ \Gamma(x) \neq \varnothing\}$ открыто в X, или эквивалентно: для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U множества $\Gamma(x)$ найдется окрестность Ox точки x такая, что $\Gamma(Ox) \subset U$, если $\Gamma(Ox) = \bigcup \{\Gamma(y);\ y \in Ox\}$. М. о. Γ топологич. пространства X в топологич. пространство Y наз. полунепрерывным снизу, если для любого открытого множества $U \subset Y$ множество $\Gamma^-(U) = \{x \in X : \Gamma(x) \cap U \neq \varnothing\}$ открыто в X. Если для М. о. Γ выполнены оба свойства одновременно, то оно наз. непрерывным М. о.

Пусть Y — топологич. векторное пространство. М. о.

$\Gamma: X \to Y$ наз. выпукло компактнозначным, если $\Gamma(x)$ является выпуклым компактом для всех $x \in X$. Для конечного множества М. о. $\Gamma_i: X \to Y$, $i \in I$, определяется алгебраич. сумма $\Gamma = \sum_{i \in I} \Gamma_i$ с помощью равенства: $\Gamma(x) = \sum_{i \in I} \Gamma_i(x)$. Пересечение любого (конечного) семейства полунепрерывных сверху (непрерывных) М. о. является полунепрерывным сверху (непрерывным) отображением. Декартово произведение конечного семейства полунепрерывных сверху М. о. является полунепрерывным сверху отображением. Алгебраич. сумма конечного семейства полунепрерывных сверху (выпукло компактнозначных) отображений является полунепрерывным сверху (выпукло компактнозначным). Пересечение и декартово произведение любого семейства выпукло компактнозначных отображений является выпукло компактнозначным. Пусть X — паракомпактное пространство и Y — метрич. линейное локально выпуклое пространство.

Пусть $\Gamma: X \to Y$ — М. о., являющееся полунепрерывным сверху и таким, что множество $\Gamma(x)$ замкнуто в Y для каждого $x \in X$. Тогда М. о. Γ допускает непрерывное сечение. Пусть $(X, \mathfrak{A})$ и $(Y, \mathfrak{B})$ — пространства с заданными на них σ-алгебрами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$; М. о. $\Gamma: (X, \mathfrak{A}) \to (Y, \mathfrak{B})$ наз. измеримым, если график $G(\Gamma)$ принадлежит наименьшей σ-алгебре $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ произведения $X \times Y$, содержащей все множества вида $A \times B$, если $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$. Если Γ — измеримое М. о. пространства $(X, \mathfrak{A})$ в полное сепарабельное метрич. пространство $(Y, \mathfrak{B})$, причем $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра Y, то существует измеримое сечение f М. о. Γ.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1—2, М., 1966—69.

Б. А. Ефимов.

МНОГОЗНАЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ связной топологической группы G — обычное представление π такой связной топологич. группы G', что группа G изоморфна (как топологич. группа) факторгруппе группы G' по ее дискретному нормальному делителю N, к-рый не содержится в ядре представления π. М. п. наз. n-значным, если $\pi(N)$ содержит в точности n элементов. Отождествлением элементов группы G с элементами группы G'/N получается, что для множеств $\pi(g)$, $g \in G = G'/N$, справедливы соотношения $\pi(e) \ni 1$, $\pi(g_1, g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$, $g_1, g_2 \in G$. Существование М. п. связной локально линейно связной топологич. группы G возможно лишь у неодносвязных групп. Важнейший пример М. п.— *спинорное представление* комплексной ортогональной группы $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, $n \geqslant 2$; это представление является двузначным представлением группы $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$ и определяется точным представлением универсальной накрывающей группы для $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976.

А. И. Штерн.

МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ФУНКЦИИ — функции, совокупность к-рых вместе с соответствующими операциями над ними образует *многозначную логику*. М. л. ф., как и их аргументы, принимают в качестве значений элементы одного и того же множества, состоящего из констант многозначной логики.

В. Б. Кудрявцев.

МНОГОКРАТНАЯ РЕКУРСИЯ — вид рекурсии, в к-рой участвуют сразу несколько переменных. Наборы значений этих переменных упорядочиваются лексикографически. Под это определение подходят многочисленные конкретные рекурсивные описания. Если в таком описании искомая функция не подставляется сама в себя, то оно сводится к примитивной рекурсии. В общем случае М. р. выводит за рамки примитивно рекурсивных функций, т. к. посредством двукратной рекурсии (ведущейся по двум переменным) можно построить функцию, универсальную для примитивно рекурсивных

функций (аналогично, для k-рекурсивных функций существует $(k+1)$-кратная универсальная функция). Всевозможные разновидности k-кратной рекурсии можно свести к следующей нормальной форме:

$$\varphi(n_1, \ldots, n_k) = 0, \text{ если } n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = 0,$$

$$\varphi(n_1+1, \ldots, n_k+1) = \beta(n_1, \ldots, n_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_k),$$

где

$$\varphi_i = \varphi((n_1+1, \ldots, n_{i-1}+1, n_i,$$

$$\gamma_1^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k)),$$

$$\ldots, \gamma_{k-1}^{(i)}(n_1, \ldots, n_k, \varphi(n_1+1, \ldots, n_{k-1}+1, n_k))).$$

Лит.: [1] Петер Р., Рекурсивные функции, пер. с нем., М., 1954.

Н. В. Белякин.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА — математическая модель принятия оптимального решения одновременно по нескольким критериям. Эти критерии могут отражать оценки различных качеств объекта (или процесса), по поводу к-рых принимается решение, или оценки одной и той же его характеристики, но с различных точек зрения. Теория М. з. относится к числу математич. методов *исследования операций*.

Формально М. з. задается множеством X «допустимых решений» и набором целевых функций $f_1, \ldots, f_n$ на X, принимающих действительные значения. Сущность М. з. состоит в нахождении оптимального ее решения, т. е. такого $x \in X$, к-рое в том или ином смысле максимизирует значения всех функций f_i, $i=1, \ldots, n$. Существование решения, буквально максимизирующего все целевые функции, является редким исключением. Поэтому в теории М. з. понятие оптимальности получает различные и притом нетривиальные истолкования. Содержание теории М. з. состоит в выработке таких концепций оптимальности, доказательстве их реализуемости (т. е. существования оптимальных в соответствующем смысле решений) и нахождении этих реализаций (т. е. в фактич. решении задачи).

Наиболее прямолинейным подходом к решению М. з. является сведение ее к обычной («однокритериальной») задаче математич. программирования путем замены системы целевых функций $f_1, \ldots, f_n$ на одну «сводную» функцию $F(f_1, \ldots, f_n)$. В ее роли могут выступать «взвешенные суммы» $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, $\lambda_i \geqslant 0$, «взвешенные максимумы» $\max_i \lambda_i f_i$ и др. «свертки» исходных целевых функций. Такой подход концептуально и технически представляется самым удобным. Основным его недостатком является трудно выполнимое требование содержательной сопоставимости значений различных целевых функций, а также неопределенность (и нередко произвольность) в выборе функции F и, в частности, «весов» λ_i. Для их установления нередко рекомендуется прибегать к экспертным оценкам.

Частный случай описанного подхода состоит в выделении «решающего критерия», т. е. в том, чтобы все веса λ_i, за исключением нек-рого λ_{i_0}, полагать равными нулю. Тогда М. з. перейдет в обычную задачу математич. программирования, а множество ее оптимальных решений можно рассматривать как множество допустимых решений новой М. з. с целевыми функциями f_i, $i \neq i_0$.

В качестве решений М. з. можно рассматривать решения, оптимальные по Парето, т. е. решения, не поддающиеся улучшению по какому-либо критерию, иначе как за счет ухудшения по другим критериям (иначе говоря, такие $x \in X$, что для любого $y \in X$ из $f_i(x) < f_i(y)$ следует $f_j(y) < f_j(x)$ при нек-ром j). Недостатком этого подхода является множественность оптимальных по Парето решений. Этот недостаток преодолевается предложенным Дж. Нэшем (J. Nash) методом «арбитражных решений», существенно ограничивающим число выбираемых решений среди оптимальных по Парето. Он состоит в установлении на основании

содержательных соображений нек-рых минимальных допустимых значений f_i^0 и в последующем нахождении допустимого x, максимизирующего $\prod_{i=1}^{n}(f_i(x)-f_i^0)$ (см. также *Арбитражная схема*).

М. з. можно рассматривать как игру (см. *Игр теория*) и подходить к ее решению на основе различных теоретико-игровых методов. Напр., если допустимое решение x выбирается с целью максимизировать одну из целевых функций $f_1, \ldots, f_n$, но какую именно — для принимающего решение субъекта неизвестно, то можно воспользоваться взвешенной суммой этих функций, взяв в качестве весов компоненты смешанной стратегии «природы». Возможны трактовки М. з. как *бескоалиционной игры*, в том числе с позиций кооперативной теории (см. *Кооперативная игра*), и применения связанных с этим принципов оптимальности.

Лит.: [1] Льюс Р. Д., Райффа Х., Игры и решения, пер. с англ., М., 1961.

Н. Н. Воробьев.

МНОГОЛИСТНАЯ ОБЛАСТЬ – область S *римановой поверхности* R, рассматриваемой как накрывающая поверхность над плоскостью комплексного переменного $\mathbb{C}$, такая, что над каждой точкой ее проекции $D\subset\mathbb{C}$ расположены не менее двух точек S; *ветвления точка* R порядка $k-1$ считается при этом за k точек. Напр., аналитич. функция $w=z^2$ отображает взаимно однозначно круг $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ на двулистную область (двулистный круг) $S=\{w\in R:|w|<1\}$ римановой поверхности R этой функции; всюду, кроме начала координат, это отображение конформно.

Для аналитич. функций многих комплексных переменных также возникают многолистные *римановы области* над комплексным пространством $\mathbb{C}^n$.

Е. Д. Соломенцев.

МНОГОЛИСТНАЯ ФУНКЦИЯ — понятие, естественным образом обобщающее понятие *однолистной функции*. Функция $f(z)$, регулярная или мероморфная в области D комплексной плоскости z, наз. p-л и с т н о й в D ($p=1, 2, \ldots$), если она принимает в этой области каждое свое значение не более p раз, т. е. если число корней уравнения $f(z)=w$ в области D при любом w не превосходит p. Геометрически это означает, что над каждой точкой плоскости w лежит не более p точек *римановой поверхности*, на к-рую функция $w=f(z)$ отображает область D. При $p=1$ функция $f(z)$ является однолистной в области D.

Наряду с этим простейшим классом p-листных функций большую роль в теории М. ф. играют функции, p-листные в нек-ром обобщенном смысле, «p-листные в среднем». Пусть функция $f(z)$ регулярна или мероморфна в области D плоскости z, $n(w)$ — число корней уравнения $f(z)=w$ в D и p — положительное число. Функция $f(z)$ наз. p-л и с т н о й в с р е д н е м п о о к р у ж н о с т и в D, если для всех $R>0$ выполняется условие:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\left(Re^{i\varphi}\right)d\varphi\leqslant p.$$

Геометрически это означает, что линейная мера дуг, принадлежащих римановой поверхности, на к-рую функция $w=f(z)$ отображает область D, и проектирующихся в любую окружность $|w|=R$, не превосходит p длин таких окружностей. Функция $f(z)$ наз. p-л и с т н о й в с р е д н е м п о п л о щ а д и в D, если

$$\int_0^R\left(\int_0^{2\pi} n\left(\rho e^{i\varphi}\right)d\varphi\right)\rho\,d\rho\leqslant p\pi R^2$$

для всех $R>0$. Геометрически это означает, что площадь проектирующейся в любой круг $|w|<R$ части римановой поверхности, на к-рую функция $w=f(z)$ отображает область D, не превосходит p площадей таких кругов. Из этих определений следует, что функция, p-листная в нек-рой области, является в ней и p-листной в сред-

нем по окружности, а функция, p-листная в среднем по окружности, является p-листной в среднем по площади. Функция, p-листная в среднем, может оказаться бесконечнолистной.

М. ф., как и однолистные, изучаются в различных направлениях: с точки зрения характеристики искажения области при ее отображениях этими функциями, оценки коэффициентов рядов, представляющих эти функции, и т. д. Они обладают многими экстремальными свойствами, аналогичными экстремальным свойствам однолистных функций. Напр., имеются следующие обобщения на случай p-листных функций двух классич. результатов теории однолистных функций — *площадей принципа* и оценки второго коэффициента (см. *Бибербаха гипотеза*).

Если функция

$$F(\zeta) = \sum_{m=1}^{p} \alpha_m \zeta^m + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n}, \quad \alpha_p \neq 0, \quad |\zeta| > 1, \tag{1}$$

p-листна и регулярна в области $|\zeta|>1$, за исключением полюса в точке $\zeta=\infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leqslant \sum_{m=1}^{p} m |\alpha_m|^2. \tag{2}$$

Если функция

$$f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots \tag{3}$$

регулярна и p-листна в круге $|z|<1$, то

$$|a_{p+1}| \leqslant 2p. \tag{4}$$

Неравенства (2) и (4) не могут быть улучшены. Эти два результата относятся к наиболее ранним основным результатам теории p-листных функций. Неравенство (2) доказано также для функций вида (1), p-листных в среднем по площади в $|\zeta|>1$, а неравенство (4) — для функций вида (3), p-листных в среднем по площади в $|z|<1$.

Значительно продвинуть исследование класса p-листных функций позволило рассмотрение его как подкласса функций, p-листных в среднем. Получены для p-листных функций и точные аналоги основных теорем искажения и покрытия, известных для однолистных функций (см. *Искажения теоремы*, *Покрытия теоремы*), именно: для функций $f(z)$ вида (3), p-листных в среднем по окружности в круге $|z|<1$, верны точные оценки:

$$\frac{|z|^p}{(1+|z|)^{2p}} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|^p}{(1-|z|)^{2p}},$$

$$|f'(z)| < p|z|^{p-1} \cdot \frac{1+|z|}{(1-|z|)^{2p+1}}, \quad |z|<1;$$

функция $f(z)$ принимает в $|z|<1$ каждое значение w с $|w|<1\,4^p$ ровно p раз (прямой аналог теоремы покрытия Кёбе). Этим последним свойством обладают и функции $f(z)$ вида (3), p-листные в среднем по площади в $|z|<1$. Для функций, p-листных в среднем по окружности, получен ряд неулучшаемых результатов, характеризующих рост их коэффициентов. Так, для функции вида

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{5}$$

p-листной в среднем по окружности в круге $|z|<1$, $p>0$, существует, и притом конечный, предел

$$\alpha = \lim_{r \to 1-0} (1-r)^{2p} \max_{|z|=r} |f(z)|$$

и

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| / n^{2p-1} = \alpha/\Gamma(2p)$$

при $p>1\,4$. Всякий раз, когда получается оценка для α, отсюда следует и соответствующая точная оценка

асимптотич. роста коэффициентов. В частности, если $f(z)$ имеет вид (3), то последнее равенство принимает вид

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n^{2p-1}}=\frac{\alpha}{(2p-1)!},$$

где $\alpha<1$, за исключением того случая, когда $f(z)=z^p(1-ze^{i\theta})^{-2p}$ (θ — вещественно). Далее, для функций вида (3), p-листных в среднем по окружности в круге $|z|<1$, получена точная оценка:

$$|a_{p+2}|\leqslant p\,(2p+1),$$

а для подкласса p-листных функций такого вида была указана точная оценка и следующего коэффициента:

$$|a_{p+3}|\leqslant\frac{2}{3}\,p\,(p+1)\,(2p+1).$$

Два последних неравенства являются для М. ф. аналогами оценок $|a_3|\leqslant 3$ и $|a_1|\leqslant 4$, известных для однолистных функций (см. *Бибербаха гипотеза*). Так как экстремальными функциями приведенных выше оценок оказываются p-листные функции, то все эти результаты не могут быть улучшены и в классе p-листных функций.

Для функций вида (5), p-листных в среднем по площади в круге $|z|<1$, известны следующие оценки их коэффициентов для всех $n\geqslant 1$:

$$|a_n|<A(p)\,\mu_p n^{2p-1}\quad(p>1/4),\tag{6}$$

$$|a_n|<A\,|a_0|\,n^{-1/2}\log(n+1)\quad(p=1/4),\tag{7}$$

$$|a_n|<A(p)\,|a_0|\left[\frac{\log(n+1)}{n}\right]^{1/2}\quad(0<p<1/4),\tag{8}$$

$$||a_{n+1}|-|a_n||<A(p)\,\mu_p n^{2p-2}\quad(p\geqslant 1)\tag{9}$$

и оценка

$$\max_{|z|=r}|f(z)|<A(p)\,\mu_p(1-r)^{-2p}\quad(0<r<1):\tag{10}$$

здесь $A(p)$ зависит только от p, $\mu_p=\max\limits_{0\leqslant\nu\leqslant p}|a_\nu|$. Порядок величин в (6), (9) и (10) не может быть улучшен.

Имеется также следующий аналог для М. ф. теоремы, известной для однолистных мероморфных функций: в классе всех функций

$$F(\zeta)=\zeta^p\left(1+\frac{a_1}{\zeta}+\dots\right),$$

p-листных и регулярных в области $|\zeta|>1$, за исключением полюса в $\zeta=\infty$, имеющих в фиксированной точке $\zeta_0\neq\infty$ этой области разложение

$$F(\zeta)=F(\zeta_0)+\frac{F^{(p)}(\zeta_0)}{p!}(\zeta-\zeta_0)^p+\dots,$$

областью значений функционала

$$w=\log[F^{(p)}(\zeta_0)/p!]$$

является круг

$$|w|\leqslant -p\log\left(1-\frac{1}{|\zeta_0|^2}\right).$$

Кроме указанных выше основных классов М. ф., значительное место в исследованиях занимают более специальные классы М. ф., напр. функции типично вещественные порядка p, p-листно звездные, p-листно выпуклые, p-листно близкие к выпуклым, ограниченные p-листные и др., являющиеся обобщениями соответственно *типично вещественных функций*, *звездообразных функций*, *выпуклых функций*, близких к выпуклым, ограниченных однолистных и других функций.

Функция

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\tag{11}$$

наз. типично вещественной порядка

p в круге $|z|<1$, если она регулярна в нем, имеет вещественные коэффициенты a_n и обладает свойством: существует такое число $\delta=\delta(f)$, $0<\delta<1$, что для всякого r из промежутка $1-\delta<r<1$ мнимая часть $\operatorname{Im}\{f(z)\}$ меняет свой знак на окружности $|z|=r$ точно $2p$ раз. При этом $f(z)$ может быть более чем p-листной в $|z|<1$. Для коэффициентов такой функции имеет место точная оценка:

$$|a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \frac{2k(n+p)!}{(n^2-k^2)\,(p-k)!\,(p+k)!\,(n-p-1)!}\,|a_k|, \quad (12)$$
$$n > p.$$

Одним из аналогов гипотезы Бибербаха для функций вида (11), регулярных и p-листных в круге $|z|<1$, является гипотеза Гудмена о справедливости для их коэффициентов a_n неравенства (12). В частности, эта гипотеза Гудмена верна для p-листных типично вещественных функций порядка p в $|z|<1$. Доказано, что она верна также для одного из классов p-листных функций, являющегося обобщением класса однолистных функций, выпуклых в направлении мнимой оси. Другим аналогом гипотезы Бибербаха для p-листных функций является следующая гипотеза Гудмена. Пусть функция

$$f(z) = z^2 + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n z^n, \quad q \geqslant 1,$$

регулярна и p-листна, $p=1, 2, \ldots$, в круге $|z|<1$, и пусть она имеет t нулей $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ в области $0<|z|<1$, $t \leqslant p-q$. Гипотеза состоит в том, что $|a_n| \leqslant B_n$, $n>q$, где B_n — коэффициенты разложения

$$\frac{z^q}{(1-z)^{2q}}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2(p-q-t)}\frac{1}{(1-z)^{2t}} \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{t}\left(1+\frac{z}{|\alpha_j|}\right)(1+|\alpha_j|z) =$$
$$= z^q + \sum_{n=q+1}^{\infty} B_n z^n, \quad |z|<1.$$

Для типично вещественных функций порядка p в $|z|<1$ это неравенство доказано.

Классы p-листно звездных и p-листно выпуклых функций, соответственно $S(p)$ и $C(p)$, определяются следующим образом. Функция $f(z)$ принадлежит классу $S(p)$ ($p=1, 2, \ldots$), если она регулярна в круге $|z|<1$, $f(0)=0$ и если существует такое число ρ, $0<\rho<1$, что

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0,$$
$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} d\theta = 2p\pi, \qquad \theta = \arg z$$

для $\rho<|z|<1$. Функция $f(z)$ принадлежит классу $C(p)$ ($p=1, 2, \ldots$), если она регулярна в круге $|z|<1$, $f(0)=0$ и если существует такое ρ, что

$$1+\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0,$$
$$\int_0^{2\pi}\left[1+\operatorname{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\right]d\theta = 2p\pi, \quad \theta = \arg z$$

для $\rho<|z|<1$. Для функций этих двух классов получен ряд точных оценок.

Классы $S(p)$ и $C(p)$ оказываются подклассами более широкого класса p-листных функций — функций p-листно близких к выпуклым. Функция

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

регулярная в круге $|z|<1$, наз. p-листно близкой к выпуклой, если она удовлетворяет одному из следующих условий:

(А) существуют функция $f(z)\in S(p)$ и число ρ, $0<\rho<1$, такие, что

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{f(z)}\right\}>0 \quad (\rho<|z|<1), \tag{13}$$

(Б) $F(z)$ регулярна на $|z|=1$ и существует функция $f(z)\in S(p)$, также регулярная на $|z|=1$, такая, что на $|z|=1$ выполняется неравенство (13). Для функций $F(z)$ этого класса найдены точные оценки снизу и сверху $|F'(z)|$ и доказана справедливость неравенства (12) — при $n=p+1$ для всех функций этого класса и при всех $n\geqslant p+1$ для его функций с вещественными коэффициентами. Точные оценки, обобщающие нек-рые результаты для ограниченных однолистных функций, получены и для ограниченных функций, p-листных в соответствующем обобщенном смысле. Так, был найден радиус p-листности в классе регулярных и ограниченных в круге функций, именно: если функция $f(z)$ регулярна и ограничена по модулю единицей в круге $|z|<1$, нормирована условиями $f(0)=0$, $f'(0)=a_1$, $0<|a_1|<1$, то радиус ρ наибольшего круга $|z|<\rho$, в к-ром она p-листна, определяется из уравнения

$$\frac{(p+1)\rho^p(1-\rho^2)}{1-\rho^{2p+2}}=|a_1|, \quad 0<\rho<1.$$

Эта теорема обобщает на случай $p>1$ теорему Ландау о радиусе однолистности функций, регулярных и ограниченных в круге $|z|<1$.

Известны различные достаточные условия для того, чтобы функция, регулярная в области, была в ней p-листной. Напр., если $f(z)$ регулярна в выпуклой области D и существуют такое вещественное θ и такое целое k, $0\leqslant k\leqslant p-1$, что

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\frac{d^p}{dz^p}[z^k f(z)]\right\}>0, \quad z\in D,$$

то $f(z)$ p-листна в D.

М. ф. исследуются также и в многосвязных областях. Многие оценки здесь выражаются через функции, отображающие данную многосвязную область на канонические римановы поверхности, и через *Бергмана ядро-функцию*. Первым основным результатом, относящимся к вопросу существования конформных отображений многосвязной области на многолистные канонич. поверхности, явилась следующая теорема Грунского: пусть D — конечносвязная область плоскости z с внутренней точкой $z=\infty$ и с отличными от точек граничными компонентами и $Q_p(z)$ — любой заданный полином степени p, $p\geqslant 1$; тогда для любого заданного θ, $0\leqslant\theta<\pi$, существует единственная функция $\Phi_\theta(z)$, регулярная в области D, за исключением полюса в $z=\infty$, главная часть к-рой в $z=\infty$ (с включением в нее свободного члена) совпадает с $Q_p(z)$ и к-рая ставит в соответствие каждой граничной компоненте области D прямолинейный отрезок наклона θ к вещественной оси. Иначе говоря, функция $w=\Phi_\theta(z)$ отображает область D на полную p-листную плоскость w с параллельными разрезами наклона θ. Доказано существование конформных отображений данной конечносвязной области и на другие канонические многолистные поверхности; установлены экстремальные свойства М. ф., аналогичные нек-рым экстремальным свойствам однолистных функций. Выявлен просто характеризуемый геометрически наиболее общий класс М. ф., мероморфных в конечносвязной области, для к-рых верна теорема площадей.

Основными методами исследования М. ф. являются: *контурного интегрирования метод*, *симметризации метод*, метод *квадратичных дифференциалов*.

Вариационный метод в теории М. ф. менее эффективен, чем в теории однолистных функций.

Лит.: [1] Голузин Г. М., «Матем. сб.», 1940, т. 8, в. 2, с. 277—83; [2] Хейман В. К., Многолистные функции, пер.

с англ., М., 1960; [3] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [4] Pethe K., «Bull. Acad. Polon. Sci.», 1972, v. 20, № 3, p. 219—20; [5] Livingston A. E., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 115, № 3, p. 161—79; [6] Leach R. J., «Pacific J. Math.», 1978, v. 74, № 1, p. 133—42; [7] Krzyż J., «Ann. Univ. Mariae Curie-Skiodowska. Sec. A», 1958, v. 12, № 2, p. 23—28, № 3, p. 29—38; [8] Ozaki S., «Sci. Rep. Tokio Bunrika Daigaku», A, 1935, v. 2, № 40, p. 167—88; [9] Аленицын Ю.Е., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1973, т. 37, № 5, с. 1132—54; [10] Singh S. K., «Math. Student», 1962, v. 30, № 1—2, p. 79—90; [11] Goodman A. W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1968, v. 74, № 6, p. 1035—50.

Ю. Е. Аленицын.

МНОГОМЕРНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА. вариационная задача с частными производными,— задача вариационного исчисления, в к-рой требуется определить экстремум функционала, зависящего от функций многих независимых переменных. Обычные вариационные задачи, в к-рых рассматриваются функционалы от функций одной независимой переменной, можно назвать в этом смысле одномерными вариационными задачами.

Примером двумерной вариационной задачи может служить задача, в к-рой требуется определить функцию двух независимых переменных $u(x, y)$, непрерывную вместе со своими частными производными 1-го порядка, доставляющую экстремум функционалу

$$I(u) = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy \qquad (1)$$

при граничном условии

$$u(x, y)|_l = u_0(x, y), \qquad (2)$$

где l — замкнутый контур, ограничивающий область D $u_0(x, y)$ — заданная функция, $F(x, y, u, u_x, u_y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция по совокупности своих аргументов. Пусть $u(x, y)$ есть решение задачи (1), (2). Подстановка функций сравнения $u(x, y)+\alpha\eta(x, y)$, где $\eta(x, y)|_l = 0$, α — числовой параметр, в функционал (1), дифференцирование по α и приравнивание $\alpha = 0$ позволяет получить следующее выражение для первой вариации функционала

$$\delta I = \iint_D (F_u \eta + F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y)\, dx\, dy. \qquad (3)$$

Если $u(x, y)$ имеет непрерывные производные 2-го порядка, то легко показать, что необходимым условием равенства нулю первой вариации δI является выполнение условия

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) наз. уравнением Эйлера — Остроградского (иногда — уравнением Остроградского). Этому уравнению должна удовлетворять функция $u(x, y)$, доставляющая экстремум функционалу (1) при граничных условиях (2). Уравнение Эйлера — Остроградского является аналогом уравнения Эйлера для одномерных вариационных задач. В развернутом виде (4) представляет собой уравнение с частными производными 2-го порядка.

В случае тройного интеграла и функции $u(x, y, z)$, зависящей от трех независимых переменных, уравнение Эйлера — Остроградского принимает вид:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - \frac{\partial}{\partial z} F_{u_z} = 0.$$

Следующее условие является аналогом *Лежандра условия*. Для того чтобы функция $u(x, y)$ доставляла хотя бы слабый экстремум функционалу (1), необходимо, чтобы в каждой внутренней точке области D выполнялось условие

$$F_{u_x u_x} F_{u_y u_y} - F^2_{u_x u_y} \geqslant 0.$$

Для минимума необходимо $F_{u_x u_x} \geqslant 0$, а для максимума $F_{u_x u_x} \leqslant 0$.

Рассматриваются также разрывные М. в. з. (см. [4]).

Лит.: [1] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., 2 изд., т. 2, М.— Л., 1951; [2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [3] Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, М., 1955; [4] Керимов М. К., «Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР», 1951, т. 18, с. 209—19.

И. Б. Вапнярский.

МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия пространств размерности, большей трех; термин применяется к тем пространствам, геометрия к-рых была первоначально развита для случая трех измерений и только потом обобщена на число измерений $n>3$, прежде всего евклидово пространство, а также пространства Лобачевского, Римана, проективное, аффинное, псевдоевклидово. (Общие же римановы и др. пространства были определены сразу для n измерений.) В настоящее время разделение трехмерной и многомерной геометрий имеет главным образом историческое и педагогич. значение, т. к. задачи ставятся и решаются для любого числа измерений, когда и поскольку это осмысленно. Построение геометрии указанных пространств для n измерений проводится по аналогии со случаем трех измерений. При этом можно исходить из обобщения непосредственно геометрич. оснований трехмерной геометрии, из той или иной системы ее аксиом или из обобщения аналитич. геометрии, перенося ее основные выводы со случая трех координат на произвольное n. Именно так и начиналось построение n-мерной евклидовой геометрии.

Исторически представление о более чем трехмерном пространстве зарождалось постепенно, первоначально на почве геометрич. представления степеней: a^2 — «квадрат», a^3 — «куб», но a^4 и т. д. уже не имеет наглядного представления, и говорили a^4 — «биквадрат», a^5 — «кубо-квадрат» и т. д. (еще у Диофанта в 3 в. и далее у ряда средневековых авторов). Мысль о многомерном пространстве выражал И. Кант (I. Kant, 1746), а о присоединении к пространству времени в качестве 4-й координаты писал Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert, 1764). Построение же n-мерной геометрии было осуществлено А. Кэли (A. Cayley, 1843), Г. Грассманом (H. Grassmann, 1844) и Л. Шлефли (L. Schläfli, 1852). Первоначальные сомнения и мистика, связанные со смешением этих обобщений с физич. пространством, были преодолены, и n-мерное пространство как плодотворное формально-математич. понятие скоро полностью укрепилось в математике.

Евклидово пространство произвольного числа измерений $n\geqslant 3$ (не исключая случая бесконечномерного) проще всего определить как такое, в к-ром выделены подмножества — прямые и плоскости, имеются обычные отношения: принадлежности, порядка, конгруэнтности (или определены расстояния, или движения) и выполняются все обычные аксиомы, кроме следующей: две плоскости, имеющие общую точку, имеют по крайней мере еще одну. Если это выполнено, то пространство трехмерно, если же не выполнено, так что есть две плоскости с единственной общей точкой, то пространство, как минимум, четырехмерно.

Понятие плоскости обобщается следующим образом: плоскостью наз. такое множество точек, к-рое вместе с любыми двумя своими точками содержит и проходящую через них прямую. В этом смысле все пространство тоже является плоскостью. Пересечение всех плоскостей, содержащих данное множество точек M, будет плоскостью, «натянутой на M» (аффинной оболочкой M). Если плоскость натягивается на $m+1$ точку, но не натягивается на меньшее их число, то она наз. m-мерной, или, короче, m-плоскостью.

Точка есть 0-плоскость, прямая — 1-плоскость, обычная плоскость — 2-плоскость, трехмерное пространство — 3-плоскость. Пространство наз. n-мерным, если оно является n-плоскостью. То есть, для определения n-мерного евклидова пространства E_n при любом данном $n \geqslant 3$ достаточно добавить аксиому: пространство есть n-плоскость. В нем есть m-плоскости с $0 \leqslant m \leqslant n-1$. Каждая m-плоскость с $m \geqslant 2$ является m-мерным евклидовым пространством E_m. Так как 4 точки всегда содержатся в 3-плоскости, то и любые две прямые содержатся в 3-плоскости, т. е. в E_3.

В E_n через любую точку можно провести n, и не более, взаимно перпендикулярных прямых и ввести соответственно прямоугольные координаты $x_1, \ldots, x_n$; в них длина любого отрезка XY выражается формулой

$$XY = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}. \qquad (*)$$

Формулу (*) можно положить в основу координатного определения E_n, равносильного предыдущему. Именно: E_n есть такое множество, в к-ром введены координаты $x_1, \ldots, x_n$ (принимающие все возможные значения) и каждой паре точек $X(x_1, \ldots, x_n)$, $Y(y_1, \ldots, y_n)$ сопоставляется число — «расстояние» формулой (*); при этом к геометрии E_n относятся те и только те определения и утверждения, к-рые могут быть формулированы через отношения расстояний. Напр., отрезок AB есть множество всех точек X, для к-рых $AX+XB=AB$, а прямая AB — всех тех X, для к-рых $\pm AX \pm XB \cdot AB$.

Векторное исчисление строится в E_n так же, как в E_3 (исходя из геометрических или координатных определений); разница лишь в том, что в E_n вектор имеет n составляющих (соответственно n векторов могут быть независимыми). Напр., скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\alpha = \sum a_i b_i.$$

Только векторное произведение при $n>3$ не может быть определено, т. к. 2-плоскость имеет перпендикуляры разных направлений (проведенные из одной точки они заполняют $(n-2)$-плоскость). Вместо векторного произведения пользуются понятием бивектора. Сочетание непосредственно геометрических, координатных и векторных методов дает наиболее полный арсенал средств развития геометрии E_n. Геометрич. подход позволяет сразу перенести в E_n планиметрию и стереометрию, т. е. геометрию на 2- и 3-плоскостях, и далее построить стереометрию самого E_n, к-рая естественно обобщает стереометрию E_3: теорема о перпендикулярах, параллельных плоскостях и др. Напр., прямая, перпендикулярная m прямым в m-плоскости, перпендикулярна ко всякой прямой в ней. Многие определения и доказательства даются для E_n индукцией по n. Напр., n-мерный многогранник, или n-многогранник, есть тело (замкнутая ограниченная область в E_n), граница к-рого состоит из конечного числа $(n-1)$-многогранников. Простейшие многогранники: призма заполняется равными параллельными отрезками, проведенными из всех точек $(n-1)$-многогранника, пирамида — отрезками, проведенными из одной точки во все точки $(n-1)$-многогранника; простейшие из них: n-куб — прямая призма, грани к-рой суть $(n-1)$-кубы (2-кубы — квадрат); n-симплекс с $(n-1)$-симплексом в основании (2-симплекс — треугольник). Объем определяется так же, как в E_3, соответственно в E_n имеется n объемов: 1-объем — длина, 2-объем — площадь и т. д. У призмы n-объем $V=Sh$, у пирамиды $V=\frac{1}{n}Sh$, где S есть $(n-1)$-объем основания, h — высота. Обширную и развитую область геометрии E_n представляет теория выпуклых тел.

Можно различать три рода фактов М. г.: 1) те, к-рые являются прямым обобщением фактов из E_3 (напр., только что приведенные теоремы об объемах); 2) те,

к-рым соответствуют аналогичные факты для разных размерностей $m \leqslant n$ (напр., выпуклое тело с центром симметрии однозначно определяется m-объемами своих m-мерных проекций при любом данном $m \geqslant 1$ и $m < n$); 3) те, в к-рых обнаруживаются существенные различия в разных E_n (напр., число правильных многогранников в $E_3 - 5$, в $E_4 - 7$, в E_n при $n \geqslant 5$ их всего 3: симплекс, куб и двойственный кубу аналог октаэдра; другой пример: выпуклый многогранный (не трехгранный) угол в E_3 изгибаем, в E_n при $n > 3$ всегда неизгибаем; существенно различаются теории поверхностей в E_3 и в E_n с $n > 3$).

Совершенно аналогично E_n определяются пространство Лобачевского Λ_n и аффинное пространство A_n. В пространстве Λ_n выполняются все те же аксиомы, что в E_n, с заменой аксиомы параллельности на противоположную, а в A_n — все аксиомы E_n за вычетом аксиом конгруэнтности, вместе с чем исключается и само понятие конгруэнтности. Аналогично, изменением аксиом сочетания можно определить n-мерное проективное пространство P_n. Другой способ определения всех этих пространств состоит в том, что в них вводятся координаты, задается группа их преобразований и геометрическими считаются те и только те соотношения, к-рые инвариантны относительно этой группы. В случае E_n — это группа подобий (сочетания ортогональных преобразований, переносов и умножений всех координат на число $\neq 0$); для A_n — это группа всех линейных (неоднородных) преобразований; см. также *Проективная геометрия*, *Лобачевского геометрия*.

Псевдоевклидовы пространства можно определить в координатах: E_n^{n-m} есть множество, в к-ром введены координаты $x_1, \ldots, x_n$ и «интервалы» между точками X, Y:

$$(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2 - \\ - (x_{m-1} - y_{m-1})^2 - \ldots - (x_n - y_n)^2;$$

геометрическими считаются определения и утверждения, формулируемые через отношения интервалов; иначе — те, к-рые инвариантны относительно группы преобразований, сохраняющих отношения интервалов. В частной теории относительности пространство-время определяется как E_4^1: в нем интервалы

$$c^2 (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2,$$

где t — время, x, y, z — пространственные координаты в данной системе отсчета и c — const — скорость света.

А. Д. Александров.

МНОГОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей на σ-алгебре борелевских множеств s-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^s$. О М. р. обычно говорят как о распределении многомерной случайной величины или случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_s)$, понимая под этим совместное распределение действительных случайных величин $X_1(\omega), \ldots, X_s(\omega)$, заданных на одном и том же пространстве элементарных событий Ω (можно рассматривать $X_1, \ldots, X_s$ как координатные величины в пространстве $\Omega = \mathbb{R}^s$). М. р. однозначно определяется функцией распределения — функцией

$$F(x_1, \ldots, x_s) = \mathsf{P}\{X_1 < x_1, \ldots, X_s < x_s\}$$

действительных переменных $x_1, \ldots, x_s$.

Так же, как и в одномерном случае, наиболее распространенными М. р. являются дискретные и абсолютно непрерывные распределения. В дискретном случае М. р. сосредоточено на конечном или счетном множестве точек $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$ пространства $\mathbb{R}^s$, так что

$$\mathsf{P}\{X_1 = x_{i_1}, \ldots, X_s = x_{i_s}\} = p_{i_1 \ldots i_s} \geqslant 0,$$

$$\sum_{i_1 \ldots i_s} p_{i_1 \ldots i_s} = 1$$

(см., напр., *Полиномиальное распределение*). В абсолютно непрерывном случае почти всюду (по мере Лебега) в $\mathbb{R}^s$

$$\frac{\partial^s F(x_1, \ldots, x_s)}{\partial x_1 \ldots \partial x_s} = p(x_1, \ldots, x_s),$$

где $p(x_1, \ldots, x_s) \geqslant 0$ — плотность М. р.:

$$\mathsf{P}\{X \in A\} = \int_A p(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s,$$

для любого A из σ-алгебры борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^s$ и

$$\int_{\mathbb{R}^s} p(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = 1.$$

Распределение любой случайной величины X_i (а также при любом $m<s$ распределение величин $X_{i_1}, \ldots, X_{i_s}$) по отношению к М. р. наз. частным, или *маргинальным распределением*. Маргинальные распределения полностью определяются заданным М. р. В том случае, когда величины $X_1, \ldots, X_s$ независимы, то

$$F(x_1, \ldots, x_s) = F_1(x_1) \ldots F_s(x_s)$$

и

$$p(x_1, \ldots, x_s) = p_1(x_1) \ldots p_s(x_s),$$

где $F_i(x)$ и $p_i(x)$ соответственно маргинальные функции распределения и плотности случайных величин X_i.

Математич. ожидание любой функции $f(X_1, \ldots, X_s)$ от $X_1, \ldots, X_s$ определяется интегралом от этой функции по М. р., в частности в абсолютно непрерывном случае интегралом

$$\mathsf{E}f(X_1, \ldots, X_s) = \int_{\mathbb{R}^s} f(x_1, \ldots, x_s)\, p(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s.$$

Характеристич. функция М. р. есть функция вектора $t=(t_1, \ldots, t_s)$, равная

$$\varphi(t) = \mathsf{E}e^{itx'},$$

где $tx' = t_1x_1 + \ldots + t_sx_s$. Основными характеристиками М. р. служат моменты: $\mathsf{E}X_1^{k_1} \ldots X_s^{k_s}$ — смешанные моменты и $\mathsf{E}(X_1 - \mathsf{E}X_1)^{k_1} \ldots (X_s - \mathsf{E}X_s)^{k_s}$ — центральные смешанные моменты, где $k_1 + \ldots + k_s$ — порядок соответствующего момента. Роль математич. ожидания и дисперсии для М. р. выполняют вектор $\mathsf{E}X = (\mathsf{E}X_1, \ldots, \mathsf{E}X_s)$ и совокупность центральных смешанных моментов 2-го порядка, образующих ковариационную матрицу. Если $\mathsf{E}(X_i - \mathsf{E}X_i)(X_j - \mathsf{E}X_j) = 0$ при всех i, j, $i \neq j$, то случайные величины $X_1, \ldots, X_s$ наз. попарно некоррелированными (ковариационная матрица диагональна). Если ранг r ковариационной матрицы меньше s, то М. р. наз. *вырожденным распределением*; в этом случае М. р. сосредоточено на нек-ром линейном многообразии в $\mathbb{R}^s$ размерности r.

О методах исследования зависимости между $X_1, \ldots, X_s$ см. статьи *Корреляция*, *Регрессия*. *А. В. Прохоров.*

МНОГОМЕРНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — раздел математич. статистики, посвященный математич. методам построения оптимальных планов сбора, систематизации и обработки многомерных статистич. данных, направленным на выявление характера и структуры взаимосвязей между компонентами исследуемого многомерного признака и предназначенным для получения научных и практич. выводов. Под многомерным признаком понимается p-мерный вектор $x=(x_1, \ldots, x_p)$ показателей (признаков, переменных) $x_1, \ldots, x_p$, среди к-рых могут быть: количественные,

т. е. скалярно измеряющие в определенной шкале степень проявления изучаемого свойства объекта, порядковые (или ординальные), т. е. позволяющие упорядочивать анализируемые объекты по степени проявления в них изучаемого свойства; и классификационные (или номинальные), т. е. позволяющие разбивать исследуемую совокупность объектов на не поддающиеся упорядочиванию однородные (по анализируемому свойству) классы. Результаты измерения этих показателей

$$\{x_{\cdot i}\}_1^n = \{(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{pi})'\}_1^n \qquad (1)$$

на каждом из n объектов исследуемой совокупности образуют последовательность многомерных наблюдений, или исходный массив многомерных данных для проведения М. с. а. Значительная часть М. с. а. обслуживает ситуации, в к-рых исследуемый многомерный признак x интерпретируется как многомерная случайная величина и соответственно последовательность многомерных наблюдений (1) — как выборка из генеральной совокупности. В этом случае выбор методов обработки исходных статистич. данных и анализ их свойств производится на основе тех или иных допущений относительно природы многомерного (совместного) закона распределения вероятностей $\mathsf{P}(x)$.

По содержанию М. с. а. может быть условно разбит на три основных подраздела: М. с. а. многомерных распределений и их основных характеристик; М. с. а. характера и структуры взаимосвязей между компонентами исследуемого многомерного признака; М. с. а. геометрич. структуры исследуемой совокупности многомерных наблюдений.

Многомерный статистический анализ многомерных распределений и их основных характеристик охватывает лишь ситуации, в к-рых обрабатываемые наблюдения (1) имеют вероятностную природу, т. е. интерпретируются как выборка из соответствующей генеральной совокупности. К основным задачам этого подраздела относятся: статистич. оценивание исследуемых многомерных распределений, их основных числовых характеристик и параметров; исследование свойств используемых статистич. оценок; исследование распределений вероятностей для ряда статистик, с помощью к-рых строятся статистич. критерии проверки различных гипотез о вероятностной природе анализируемых многомерных данных. Основные результаты относятся к частному случаю, когда исследуемый признак x подчинен многомерному нормальному закону распределения $N_p(\mu, V)$, функция плотности к-рого $f(x|\mu, V)$ задается соотношением

$$f(x \mid \mu, V) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |V|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)' V^{-1}(x-\mu)\right\}, \qquad (2)$$

где $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_p)'$ — вектор математич. ожиданий компонент случайной величины x, т. е. $\mu_l = \mathsf{E}x_l$, $l=1, 2, \ldots, p$, а $V=\|v_{ij}\|_{i,j=1}^p$ — ковариационная матрица случайного вектора x, т. е. $v_{ij}=\mathsf{E}(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)$ — ковариации компонент вектора x (рассматривается невырожденный случай, когда ранг $V=p$; в противном случае, т. е. при ранге $V=p'<p$, все результаты остаются справедливыми, но применительно к подпространству меньшей размерности p', в к-рой оказывается сосредоточенным распределение вероятностей исследуемого случайного вектора x).

Так, если (1) — последовательность независимых наблюдений, образующих случайную выборку из $N_p(\mu, V)$, то оценками максимального правдоподобия для параметров μ и V, участвующих в (2), являются

соответственно статистики (см. [1], [2])

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_{\cdot i} \tag{3}$$

и

$$\hat{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}_{\cdot i} - \hat{\boldsymbol{\mu}})\,(\boldsymbol{x}_{\cdot i} - \hat{\boldsymbol{\mu}})', \tag{4}$$

причем случайный вектор $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ подчиняется p-мерному нормальному закону $N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\boldsymbol{V})$ и не зависит от $\hat{\boldsymbol{V}}$, а совместное распределение элементов матрицы $\hat{\boldsymbol{Q}} = n\hat{\boldsymbol{V}}$ описывается т. н. распределением Уишарта (см. [4]), плотность к-рого

$$w(\hat{\boldsymbol{Q}} \mid \boldsymbol{V};\ n) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{|\hat{\boldsymbol{Q}}|^{(n-p-2)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{V}^{-1}\hat{\boldsymbol{Q}})\right\}}{2^{(n-1)p/2}\,\pi^{p(p-1)/4}\,|\boldsymbol{V}|^{(n-1)/2}\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left\{\frac{n-j}{2}\right\}}, \\ \text{если } \hat{\boldsymbol{Q}} \text{ — положительно определена;} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

В рамках этой же схемы исследованы распределения и моменты таких выборочных характеристик многомерной случайной величины, как коэффициенты парной, частной и множественной корреляции, обобщенная дисперсия (т. е. статистика $|\hat{\boldsymbol{V}}|$), обобщенная T^2-статистике Хотеллинга (см. [5]). В частности (см. [1]), если определить в качестве выборочной ковариационной матрицы $\boldsymbol{S}_n$ подправленную «на несмещенность» оценку $\hat{\boldsymbol{V}}$, а именно:

$$\boldsymbol{S}_n = \frac{n}{n-1}\,\hat{\boldsymbol{V}}, \tag{5}$$

то распределение случайной величины $\sqrt{n}(|\boldsymbol{S}_n| / |\boldsymbol{V}| - 1)$ стремится к $N_1(0, 2p)$ при $n \to \infty$, а случайные величины

$$\frac{n-p}{p(n-1)}\,T^2 = \frac{n-p}{p(n-1)}\,n\,(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu})'\,\boldsymbol{S}_n^{-1}\,(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}) \tag{6}$$

и

$$\frac{n_1+n_2-p-1}{(n_1+n_2-2)\,p}\,\tilde{T}^2 =$$

$$= \frac{n_1+n_2-p-1}{(n_1+n_2-2)\,p}\,\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}\,(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_2})'\,\boldsymbol{S}_{n_1+n_2}^{-1}\,(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_2}) \tag{7}$$

подчиняются F-распределениям с числами степеней свободы соответственно $(p,\ n-p)$ и $(p,\ n_1+n_2-p-1)$. В соотношении (7) n_1 и n_2 — объемы двух независимых выборок вида (1), извлеченных из одной и той же генеральной совокупности $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V})$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n_i}$ и $\boldsymbol{S}_{n_i}$ — оценки вида (3) и (4)—(5), построенные по i-й выборке, а

$$\boldsymbol{S}_{n_1+n_2} = \frac{1}{n_1+n_2-2}\,[(n_1-1)\,\boldsymbol{S}_{n_1} + (n_2-1)\,\boldsymbol{S}_{n_2}]$$

— общая выборочная ковариационная матрица, построенная по оценкам $\boldsymbol{S}_{n_1}$ и $\boldsymbol{S}_{n_2}$.

Многомерный статистический анализ характера и структуры взаимосвязей компонент исследуемого многомерного признака объединяет в себе понятия и результаты, обслуживающие такие методы и модели М. с. а., как множественная регрессия, многомерный *дисперсионный анализ* и *ковариационный анализ*, *факторный анализ* и метод главных компонент, анализ канонич. корреляций. Результаты, составляющие содержание этого подраздела, могут быть условно разделены на два основных типа.

1) Построение наилучших (в определенном смысле) статистич. оценок для параметров упомянутых моделей и анализ их свойств (точности, а в вероятностной постановке — законов их распределения, доверительных

областей и т. д.). Так, пусть исследуемый многомерный признак x интерпретируется как векторная случайная величина, подчиненная p-мерному нормальному распределению $N_p(\mu, V)$, и расчленен на два подвектора-столбца $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ размерности q и $p-q$ соответственно. Это определяет и соответствующее расчленение вектора математич. ожиданий μ, теоретической и выборочной ковариационных матриц V и $\hat{V}$, а именно:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{V}_{11} & \hat{V}_{12} \\ \hat{V}_{21} & \hat{V}_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда (см. [1], [2]) условное распределение подвектора $x^{(1)}$ (при условии, что второй подвектор принял фиксированное значение $x^{(2)}$) будет также нормальным $N_q(\mu^{(1)} + B(x^{(2)} - \mu^{(2)}), \Sigma)$. При этом оценками максимального правдоподобия $\hat{B}$ и $\hat{\Sigma}$ для матриц регрессионных коэффициентов B и ковариаций Σ этой классической многомерной модели множественной регрессии

$$\mathsf{E}(x^{(1)} \mid x^{(2)}) = \mu^{(1)} + B(x^{(2)} - \mu^{(2)}) \qquad (8)$$

будут взаимно независимые статистики соответственно

$$\hat{B} = \hat{V}_{12}\hat{V}_{22}^{-1} \quad \text{и} \quad \hat{\Sigma} = \hat{V}_{11} - \hat{V}_{12}\hat{V}_{22}^{-1}\hat{V}_{21};$$

здесь распределение оценки $\hat{B}$ подчинено нормальному закону $N_{q(p-q)}(B, V_B)$, а оценки $n\hat{\Sigma}$ — закону Уишарта с параметрами Σ и $n-(p-q)$ (элементы ковариационной матрицы V_B выражаются в терминах элементов матрицы V).

Основные результаты по построению оценок параметров и исследованию их свойств в моделях факторного анализа, главных компонент и канонич. корреляций относятся к анализу вероятностно-статистич. свойств собственных (характеристических) значений и векторов различных выборочных ковариационных матриц.

В схемах, не укладывающихся в рамки классич. нормальной модели и тем более в рамки какой-либо вероятностной модели, основные результаты относятся к построению алгоритмов (и исследованию их свойств) вычисления оценок параметров, наилучших с точки зрения нек-рого экзогенно заданного функционала качества (или адекватности) модели.

2) Построение статистич. критериев для проверки различных гипотез о структуре исследуемых взаимосвязей. В рамках многомерной нормальной модели (последовательности наблюдений вида (1) интерпретируются как случайные выборки из соответствующих многомерных нормальных генеральных совокупностей) построены, напр., статистич. критерии для проверки следующих гипотез.

I. Гипотезы $\mu = \mu^*$ о равенстве вектора математич. ожиданий исследуемых показателей заданному конкретному вектору μ^*; проверяется с помощью T^2-статистики Хотеллинга с подстановкой в формулу (6) $\mu - \mu^*$.

II. Гипотезы $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ о равенстве векторов математич. ожиданий в двух генеральных совокупностях (с одинаковыми, но неизвестными ковариационными матрицами), представленных двумя выборками; проверяется с помощью статистики $\tilde{T}^2$ (см. [7]).

III. Гипотезы $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \ldots = \mu^{(k)} = \mu$ о равенстве векторов математич. ожиданий в нескольких генеральных совокупностях (с одинаковыми, но неизвестными ковариационными матрицами), представленных своими выборками; проверяется с помощью статистики

$$U_{p,k-1,n-k} = \frac{\left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{\cdot i}^{(j)} - \hat{\mu}^{(j)} \right) \left(x_{\cdot i}^{(j)} - \hat{\mu}^{(j)} \right)' \right|}{\left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{\cdot i}^{(j)} - \hat{\mu} \right) \left(x_{\cdot i}^{(j)} - \hat{\mu} \right)' \right|},$$

в к-рой $x_{\cdot i}^{(j)}$ есть i-е p-мерное наблюдение в выборке объема n_j, представляющей j-ю генеральную совокупность, а $\hat{\mu}^{(j)}$ и $\hat{\mu}$ — оценки вида (3), построенные соответственно отдельно по каждой из выборок и по объединенной выборке объема $n = n_1 + \ldots + n_k$.

IV. Гипотезы $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \ldots = \mu^{(k)} = \mu$ и $V_1 = \ldots = V_k = V$ об эквивалентности нескольких нормальных генеральных совокупностей, представленных своими выборками $\{x_{\cdot i}^{(j)}\}_{i=1}^{n_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$; проверяется с помощью статистики

$$\lambda = \frac{\prod_{j=1}^{k} |n_j \hat{V}_j|^{(n_j - 1)/2}}{\left| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{\cdot i}^{(j)} - \hat{\mu}\right)\left(x_{\cdot i}^{(j)} - \hat{\mu}\right)' \right|^{(n-k)/2}},$$

в к-рой $\hat{V}_j$ — оценка вида (4), построенная отдельно по наблюдениям j-й выборки, $j = 1, 2, \ldots, k$.

V. Гипотезы о взаимной независимости подвекторов-столбцов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ размерностей соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_m$, на к-рые расчленен исходный p-мерный вектор исследуемых показателей x, $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = p$; проверяется с помощью статистики

$$\psi = \frac{|n\hat{V}|}{\prod_{i=1}^{m} |n_i \hat{V}_i|},$$

в к-рой $\hat{V}$ и $\hat{V}_i$ — выборочные ковариационные матрицы вида (4) для всего вектора x и для его подвектора $x^{(i)}$ соответственно.

Многомерный статистический анализ геометрической структуры исследуемой совокупности многомерных наблюдений объединяет в себе понятия и результаты таких моделей и схем, как *дискриминантный анализ*, смеси вероятностных распределений, кластер-анализ и таксономия, многомерное шкалирование. Узловым во всех этих схемах является понятие расстояния (меры близости, меры сходства) между анализируемыми элементами. При этом анализируемыми могут быть как реальные объекты, на каждом из к-рых фиксируются значения показателей x,— тогда геометрич. образом i-го обследованного объекта будет точка $x_{\cdot i} = (x_{1i}, \ldots, x_{pi})'$ в соответствующем p-мерном пространстве, так и сами показатели $x_{l\cdot}$, $l = 1, 2, \ldots, p$,— тогда геометрич. образом l-го показателя будет точка $x_{l\cdot} = (x_{l1}, x_{l2}, \ldots, x_{ln})$ в соответствующем n-мерном пространстве.

Методы и результаты дискриминантного анализа (см. [1], [2], [7]) направлены на решение следующей задачи. Известно о существовании определенного числа $k \geqslant 2$ генеральных совокупностей и у исследователя имеется по одной выборке из каждой совокупности («обучающие выборки»). Требуется построить основанное на имеющихся обучающих выборках наилучшее в определенном смысле классифицирующее правило, позволяющее приписать нек-рый новый элемент (наблюдение x) к своей генеральной совокупности в ситуации, когда исследователю заранее не известно, к какой из совокупностей этот элемент принадлежит. Обычно под классифицирующим правилом понимается последовательность действий: по вычислению скалярной функции от исследуемых показателей, по значениям к-рой принимается решение об отнесении элемента к одному из классов (построение дискриминантной функции); по упорядочению самих показателей по степени их информативности с точки зрения правильного отнесения элементов к классам; по вычислению соответствующих вероятностей ошибочной классификации.

Задача анализа смесей распределений вероятностей (см. [7]) чаще всего (но не всегда) возникает также в связи с исследованием «геометрической структуры»

рассматриваемой совокупности. При этом понятие r-го однородного класса формализуется с помощью генеральной совокупности, описываемой нек-рым (как правило, унимодальным) законом распределения $\mathsf{P}(x|\theta_r)$, так что распределение общей генеральной совокупности, из к-рой извлечена выборка (1), описывается смесью распределений вида

$$\mathsf{P}(x) = \sum_{r=1}^{k} \pi_r \mathsf{P}(x \mid \theta_r),$$

где π_r — априорная вероятность (удельный вес элементов) r-го класса в общей генеральной совокупности. Задача состоит в «хорошем» статистич. оценивании (по выборке $\{x_{\cdot i}\}_1^n$) неизвестных параметров θ_r, π_r, а иногда и k. Это, в частности, позволяет свести задачу классификации элементов к схеме дискриминантного анализа, хотя в данном случае отсутствовали обучающие выборки.

Методы и результаты кластер-анализа (классификации, таксономии, распознавании образов «без учителя», см. [2], [6], [7]) направлены на решение следующей задачи. Геометрич. структура анализируемой совокупности элементов задана либо координатами соответствующих точек (т. е. матрицей $\|x_{ij}\|$, $i=1, \ldots, p$; $j=1, \ldots, n$), либо набором геометрич. характеристик их взаимного расположения, напр. матрицей попарных расстояний $\|\rho_{ij}\|_{i,j=1}^n$. Требуется разбить исследуемую совокупность элементов на сравнительно небольшое (заранее известное или нет) число классов так, чтобы элементы одного класса находились на небольшом расстоянии друг от друга, в то время как разные классы были бы по возможности достаточно взаимоудалены один от другого и не разбивались бы на столь же удаленные друг от друга части.

Задача многомерного шкалирования (см. [6]) относится к ситуации, когда исследуемая совокупность элементов задана с помощью матрицы попарных расстояний $\|\rho_{ij}\|_{i,j=1}^n$ и заключается в приписывании каждому из элементов заданного числа (p) координат таким образом, чтобы структура попарных взаимных расстояний между элементами, измеренных с помощью этих вспомогательных координат, в среднем наименее отличались бы от заданной. Следует заметить, что основные результаты и методы кластер-анализа и многомерного шкалирования развиваются обычно без каких-либо допущений о вероятностной природе исходных данных.

Прикладное назначение многомерного статистического анализа состоит в основном в обслуживании следующих трех проблем.

Проблема статистического исследования зависимостей между анализируемыми показателями. Предполагая, что исследуемый набор статистически регистрируемых показателей x разбит, исходя из содержательного смысла этих показателей и окончательных целей исследования, на q-мерный подвектор $x^{(1)}$ предсказываемых (зависимых) переменных и $(p-q)$-мерный подвектор $x^{(2)}$ предсказывающих (независимых) переменных, можно сказать, что проблема состоит в определении на основании выборки (1) такой q-мерной векторной функции $f(x^{(2)})$ из класса допустимых решений F, к-рая давала бы наилучшую, в определенном смысле, аппроксимацию поведения подвектора показателей $x^{(1)}$. В зависимости от конкретного вида функционала качества аппроксимации и природы анализируемых показателей приходят к тем или иным схемам множественной регрессии, дисперсионного, ковариационного или конфлюентного анализа.

Проблема классификации элементов (объектов или показателей) в общей (нестрогой) постановке заключается в том, чтобы всю анализируемую совокупность элементов, статистически представленную в виде матрицы $\|x_{ij}\|$, $i=1, \ldots, p$; $j=1, \ldots, n$, или матрицы

$\|\rho_{ij}\|$, $i, j = 1, \ldots, n$, разбить на сравнительно небольшое число однородных, в определенном смысле, групп [7]. В зависимости от природы априорной информации и конкретного вида функционала, задающего критерий качества классификации, приходят к тем или иным схемам дискриминантного анализа, кластер-анализа (таксономии, распознавания образов «без учителя»), расщепления смесей распределений.

Проблема снижения размерности исследуемого факторного пространства и отбора наиболее информативных показателей заключается в определении такого набора сравнительно небольшого числа $m \ll p$ показателей $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)'$, найденного в классе допустимых преобразований $Z(x)$ исходных показателей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, на к-ром достигается верхняя грань нек-рой экзогенно заданной меры информативности m-мерной системы признаков (см. [7]). Конкретизация функционала, задающего мер у автоинформативности (т. е. нацеленное на максимальное сохранение информации, содержащейся в статистич. массиве (1) относительно самих исходных признаков), приводит, в частности, к различным схемам факторного анализа и главных компонент, к методам экстремальной группировки признаков. Функционалы, задающие мер у внешней информативности, т. е. нацеленные на извлечение из (1) максимальной информации относительно нек-рых других, не содержащихся непосредственно в x, показателей или явлений, приводят к различным методам отбора наиболее информативных показателей в схемах статистич. исследования зависимостей и дискриминантного анализа.

Основной математический инструментарий М. с. а. составляют специальные методы теории систем линейных уравнений и теории матриц (методы решения простой и обобщенной задачи о собственных значениях и векторах; простое обращение и псевдообращение матриц; процедуры диагонализации матриц и т. д.) и некрые оптимизационные алгоритмы (методы покоординатного спуска, сопряженных градиентов, ветвей и границ, различные версии случайного поиска и стохастич. аппроксимации и т. д.).

Лит.: [1] Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976; [3] Большев Л. Н., «Bull. Int. Stat. Inst.», 1969, № 43, p. 425—41; [4] Wishart J., «Biometrika», 1928, v. 20A, p. 32—52; [5] Hotelling H., «Ann. Math. Stat.», 1931, v. 2, p. 360—78; [6] Kruskal J. B., «Psychometrika», 1964, v. 29, p. 1—27; [7] Айвазян С. А., Бежаева З. И., Староверов О. В., Классификация многомерных наблюдений, М., 1974. *С. А. Айвазян.*

МНОГОМЕРНЫЙ УЗЕЛ — изотопический класс вложений сферы в сферу. Более точно, n-мерным узлом коразмерности q наз. пара $K = (S^{n+q}, k^n)$, состоящая из ориентированной сферы S^{n+q} и ее ориентированного локально плоского подмногообразия k^n, гомеоморфного сфере S^n. Два узла $K_1 = (S^{n+q}, k_1^n)$ и $K_2 = (S^{n+q}, k_2^n)$ наз. эквивалентными, если существует *изотопия* сферы S^{n+q}, переводящая k_1^n на k_2^n с сохранением ориентации. В зависимости от того, в какой категории (Diff, PL или Top) понимаются термины «подмногообразие» и «изотопия» в предыдущих определениях, говорится о гладких, кусочно линейных или топологич. М. у. соответственно. В гладком случае подмногообразие k^n может иметь и нестандартную дифференцируемую структуру. n-мерный узел коразмерности q, изотопный стандартному вложению, наз. т р и в и а л ь н ы м, или н е з а у з л е н н ы м, узлом.

Изучение М. у. коразмерности 1 связано с *Шёнфлиса гипотезой*. Всякий топологич. узел коразмерности 1 тривиален. Это же верно и для кусочно линейных и гладких узлов, если $n \neq 3, 4$.

Кусочно линейные и топологич. М. у. коразмерности $q \geqslant 3$ тривиальны. В гладком случае это не так. Множе-

ство изотопич. классов гладких n-мерных узлов коразмерности $q \geqslant 3$ совпадает при $n \geqslant 5$ с множеством $\theta^{n+q,\,n}$ классов кобордизмов узлов (два М. у. $K_1 = (S^{n+q}, k_1^n)$ и $K_2 = (S^{n+q}, k_2^n)$ наз. кобордантными, если существует гладкое $(n-1)$-мерное подмногообразие $W \subset S^{n+q} \times I$, трансверсально выходящее на $\partial(S^{n+q} \times I)$, причем $\partial W = (k_1^n \times 0) \cup (-k_2^n \times 1)$ и W является *h-кобордизмом* между $k_1^n \times 0$ и $k_2^n \times 1$). Множество $\theta^{n+q,\,n}$ является абелевой группой относительно связного суммирования. В этой группе противоположным к классу М. у. (S^{n+q}, k^n) является класс кобордизмов узла $(-S^{n+q}, -k^n)$, где минус означает обращение ориентации. Имеется естественный гомоморфизм $\theta^{n+q,\,n} \to \theta^n$, где θ^n — группа n-мерных гомотопич. сфер; этот гомоморфизм сопоставляет узлу (S^{n+q}, k^n) дифференцируемую структуру сферы k^n. Ядро этого гомоморфизма, обозначаемое $\Sigma^{n+q,\,n}$, совпадает с множеством изотопич. классов стандартной сферы S^n в S^{n+q}. Если $2q > n+3$, то группа $\Sigma^{n+q,\,n}$ тривиальна. Если $2q \leqslant n+3$ и $(n+1) \not\equiv 0 \pmod 4$, то группы $\Sigma^{n+q,\,n}$ и $\theta^{n+q,\,n}$ конечны. В случае, когда $2q \leqslant n+3$ и $(n+1) \equiv 0 \pmod 4$, группы $\theta^{n+q,\,n}$ и $\Sigma^{n+q,\,n}$ являются конечно порожденными абелевыми группами ранга 1 (см. [1], [2]). Вычислено также множество классов конкордантных гладких вложений S^n в S^{n+q} при $q > 2$ (см. [3]).

Изучение М. у. коразмерности 2, к-рые в дальнейшем будут наз. просто узлами, проходит почти аналогично во всех трех категориях (Diff, Pl, Top). При $n \geqslant 5$ всякий топологич. узел переводится изотопией в гладкий. Однако существуют топологич. трехмерные узлы в S^5, не эквивалентные и даже не кобордантные гладким узлам (см. [4]).

Множество изотопич. классов n-мерных узлов (каждой категории) образует абелеву полугруппу относительно связного суммирования. Известно, что при $n > 1$ в этой полугруппе всякий элемент представляется в виде конечной суммы простых, т. е. нетривиальным образом неразложимых элементов, и такое разложение единственно.

n-мерный узел $K = (S^{n+2}, k^n)$ тривиален тогда и только тогда, когда $\pi_i(S^{n+2} - k^n) = \pi_i(S^1)$ при всех $i \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Дана (см. [6]) алгебраич. классификация узлов K, у к-рых $\pi_i(S^{n+2} - k^2) = \pi_i(S^1)$ при всех $i \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$ и число n нечетно (узлы типа L): при $n \geqslant 5$ множество изотопич. классов таких узлов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством S-эквивалентных классов *Зейферта матриц*. Узлы типа L важны с точки зрения приложений в алгебраич. геометрии, т. к. среди них находятся все узлы, получаемые с помощью следующей конструкции (см. [15]). Пусть $f(z_1, \ldots, z_{q+1})$ — комплексный многочлен ненулевой степени, имеющий 0 в качестве изолированной особой точки и $f(0) = 0$. Пересечение k гиперповерхности $V = f^{-1}(0)$ с малой сферой S^{2q+1} с центром в нуле является $(q-2)$-связным $(2q-1)$-мерным многообразием. Многообразие k гомеоморфно сфере S^{2q-1} тогда и только тогда, когда $|\Delta(1)| = 1$, где $\Delta(t)$ — полином Александера. В этом случае возникает узел (S^{2q+1}, k). Такие узлы наз. алгебраическими, все они являются узлами типа L.

Внешностью гладкого узла K (S^{n+2}, k^n) наз. дополнение X открытой трубчатой окрестности k^n в S^{n+2}. При $n \geqslant 2$ для всякого n-мерного узла K существует такой узел $\tau(K)$, что всякий узел, внешность к-рого диффеоморфна внешности узла K, эквивалентен либо K, либо $\tau(K)$. Если X_1, X_2 — внешности двух гладких n-мерных узлов, $n \geqslant 3$, и $\pi_1(X_1) = \pi_1(X_2) = \mathbb{Z}$, то следующие утверждения равносильны (см. [7]): 1) X_1 и X_2 диффеоморфны, 2) пары $(X_1, \partial X_1)$ и $(X_2, \partial X_2)$ гомотопически эквивалентны. Эти результаты сводят проблему

классификации узлов к гомотопич. классификации пар $(X, \partial X)$ и к решению вопроса о том, определяет ли внешность тип узла, т. е. верно ли равенство $K = \tau(K)$? Известно, что это равенство справедливо для узлов типа L (см. [6]), для узлов, получаемых конструкцией Артина и конструкцией сверхзакручивания (см. [8]). Однако найдены двумерные узлы в S^4, для к-рых $K \neq \tau(K)$ (см. [9]).

Изучение гомотопич. типа внешности X усложняется из-за ее неодносвязности. Если G — группа узла (т. е. $G = \pi_1(X)$), то $G/[G, G] = \mathbb{Z}$, $H_2(G) = 0$, вес группы G (т. е. минимальное число элементов, не содержащихся ни в одном собственном нормальном делителе) равен 1. При $n \geqslant 3$ эти свойства полностью описывают класс групп n-мерных узлов (см. [10]). Группы одномерных и двумерных узлов обладают рядом дополнительных свойств (см. *Узлов теория*, *Двумерный узел*).

Поскольку $H^1(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, внешность X обладает единственным бесконечным циклическим накрытием $p: \tilde{X} \to X$, к-рое наз. б е с к о н е ч н ы м ц и к л и ч е с к и м н а к р ы т и е м у з л а. Гомологии $H_*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ являются $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$-модулями. Их *Александера инварианты* являются инвариантами узла. Об алгебраич. свойствах модулей $H_*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ см. [10]—[13].

Благодаря тому обстоятельству, что на бесконечном циклическом накрытии группа $\mathbb{Z}$ действует без неподвижных точек, $(n+2)$-мерное некомпактное многообразие $\tilde{X}$ обладает рядом гомологич. свойств компактных $(n+1)$-мерных многообразий. В частности, на гомологиях многообразия $\tilde{X}$ с коэффициентами в поле F существует невырожденное спаривание

$$H_n(\tilde{X}; F) \otimes H_{n+1-k}(\tilde{X}; F) \longrightarrow F, \quad k = 1, \ldots, n,$$

по свойствам напоминающее спаривание, определяемое *пересечения индексом* в $(n+1)$-мерных компактных многообразиях. Имеется также спаривание

$$T_k\tilde{X} \otimes T_{n-k}\tilde{X} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

аналогичное *зацепления коэффициентам* в $(n+1)$-мерных многообразиях (см. [13]), где $T_j\tilde{X} = \operatorname{Tors} H_j(\tilde{X}; \mathbb{Z})$. Эти гомологич. спаривания порождают инварианты гомотопич. типа пары $(X, \partial X)$. Для получения алгебраич. инвариантов используются также конечнолистные циклические разветвленные накрытия (см. [14]).

Задача классификации узлов коразмерности 2 с точностью до кобордизма — отношения эквивалентности более грубого, чем изотопич. тип,— полностью решена при $n > 1$ (см. *Узлов кобордизм*).

Лит.: [1] H a e f l i g e r A., «Ann. Math.», 1962, v. 75, p. 452—66; [2] е г о ж е, там же, 1966, v. 83, p. 402—36; [3] L e v i n e J., там же, 1965, v. 82, p. 15—51; [4] C a p p e l l S., S h a n e s o n J., «Topology», 1973, v. 12, p. 33—40; [5] С о с и н с к и й А. Б., «Матем. сб.», 1970, т. 81, № 1, с. 145—58; [6] L e v i n e J., «Comm. math. helv.», 1970, v. 45, p. 185—98; [7] L a s h o f R., S h a n e s o n J., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 75, p. 171—75; [8] C a p p e l l S., в кн.: Topology of Manifolds, Chi., 1971, p. 358—83; [9] C a p p e l l S., S h a n e s o n J., «Ann. Math.», 1976, v. 103, p. 349—53; [10] K e r v a i r e M., «Bull. soc. math. France», 1965, t. 93, p. 225—71; [11] L e v i n e J., «Ann. Math.», 1966, v. 84, p. 537—54; [12] е г о ж е, в кн.: Knots, groups and 3-manifolds, Princeton, 1975, p. 25—34; [13] Ф а р б е р М. Ш., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, с. 794—828; [14] В и р о О. Я., там же, 1973, т. 37, с. 1241—58; [15] М и л н о р Д ж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971.

М. Ш. Фарбер.

МНОГОМЕСТНЫЙ ФУНКТОР, м у л ь т и ф у н к т о р,— функция от нескольких аргументов, определенная на категориях, принимающая значения в категории и задающая одноместный функтор по каждому аргументу. Более точно, пусть даны n категорий $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$. Построим декартово произведение категорий $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \times \mathfrak{K}_2 \times \ldots \times \mathfrak{K}_n$, где каждая категория $\overline{\mathfrak{K}_i}$ либо совпадает с $\mathfrak{K}_i$, либо с дуальной категорией $\mathfrak{K}_i^*$.

Одноместный ковариантный функтор F из $\mathfrak{K}$ со значениями в категории $\mathfrak{S}$ наз. n-м е с т н ы м ф у н к т о р о м, заданным на категориях $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ со значениями в категории $\mathfrak{S}$. Функтор F ковариантен по тем аргументам, к-рые соответствуют множителям $\mathfrak{K}_i$ в произведении $\mathfrak{K}$, и контравариантен по остальным аргументам.

Выпишем явно соотношения, к-рым должно удовлетворять *отображение* F: $\mathfrak{K} \to \mathfrak{S}$ (*для простоты* $n=2$ и первый аргумент считается контравариантным, а второй — ковариантным). Функтор F: $\mathfrak{K}_1^* \times \mathfrak{K}_2 \to \mathfrak{S}$ сопоставляет каждой паре объектов (A, B), где $A \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{K}_1$, $B \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{K}_2$, объект $F(A, B) \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{S}$ и каждой паре морфизмов (α, β), где

$$\alpha: A \to A_1 \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{K}_1, \quad \beta: B \to B_1 \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{K}_2,$$

морфизм

$$F(\alpha, \beta): F(A_1, B) \to F(A, B_1) \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{S}.$$

При этом выполняются следующие условия:

1) $F(1_A, 1_B) = 1_{F(A, B)}$ для любой пары объектов A, B;

2) если $\alpha: A \to A_1$, $\alpha_1: A_1 \to A_2$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{K}_1$,

$$\beta: B \to B_1, \quad \beta_1: B_1 \to B_2, \quad \beta, \beta_1 \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{K}_2,$$

то

$$F(\alpha\alpha_1, \beta\beta_1) = F(\alpha_1, \beta) F(\alpha, \beta_1).$$

Примеры М. ф.

1) Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с *конечными произведениями*. Тогда произведение n объектов можно рассматривать как n-местный ковариантный по всем аргументам функтор, определенный на декартовой степени $\mathfrak{K}^n = \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \times \ldots \times \mathfrak{K}$ (n раз) и принимающий значения в $\mathfrak{K}$. Аналогичные функторы можно построить для копроизведений, тензорных произведений и т. д.

2) Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольная категория. Сопоставим каждой паре объектов A, B из $\mathfrak{K}$ множество морфизмов $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ и каждой паре морфизмов $\alpha: A \to A_1$, $\beta: B \to B_1$ отображение множеств $H_{\mathfrak{K}}(\alpha, \beta): H_{\mathfrak{K}}(A_1, B) \to H_{\mathfrak{K}}(A, B_1)$, заданное следующим образом:

если $\varphi: A_1 \to B$, то $H_{\mathfrak{K}}(\alpha, \beta)(\varphi) = \alpha\varphi\beta$.

Описанное построение задает двуместный функтор из $\mathfrak{K}^* \times \mathfrak{K}$ в категорию множеств, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму.

Если $\mathfrak{K}$ — аддитивная категория, то можно считать, что построенный функтор принимает значения в категории абелевых групп.

3) Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с конечными произведениями. Рассмотрим произведение как двуместный функтор $\times: \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$. Тогда, комбинируя примеры 1) и 2), можно построить трехместные функторы $H_{\mathfrak{K}}(A, B \times C)$ и $H_{\mathfrak{K}}(A \times B, C)$. Первый функтор естественно эквивалентен функтору $H_{\mathfrak{K}}(A, B) \times H_{\mathfrak{K}}(A, C)$. В случае категории множеств $\mathfrak{S}$ второй функтор естественно эквивалентен функтору $H_{\mathfrak{S}}(A, H_{\mathfrak{S}}(B, C))$.

4) Пусть ϑ — малая категория и $F(\vartheta, \mathfrak{S})$ — категория диаграмм над категорией множеств $\mathfrak{S}$ со схемой ϑ, т. е. категория одноместных ковариантных функторов и их естественных преобразований. Построим двуместный ковариантный по обоим аргументам функтор $E: \mathfrak{K} \times F(\vartheta, \mathfrak{S}) \to \mathfrak{S}$; если $A \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{K}$ и $F \in \mathrm{Ob}\, F(\vartheta, \mathfrak{S})$, то $E(A, F) = F(A)$; если $\alpha: A \to B \in \mathrm{Mor}\, \mathfrak{K}$ и $\sigma: F \to G$ — естественное преобразование, то $E(\alpha, \sigma) = F(\alpha)\sigma_B = \sigma_A G(\alpha)$. Функтор E называют функтором «вычисления значений». Этот функтор естественно эквивалентен функтору $\mathrm{Nat}(H_A, F): \mathfrak{K} \times F(\vartheta, \mathfrak{S}) \to \mathfrak{S}$, к-рый сопоставляет объекту $A \in \mathfrak{K}$ и функтору $F: \mathfrak{K} \to \mathfrak{S}$ множество естественных преобразований основного функтора H_A в F (л е м м а И о н е д ы).

М. Ш. Цаленко.

МНОГООБРАЗИЕ — геометрический объект, локально имеющий строение (топологическое, гладкое, гомологическое или иное) числового пространства $\mathbb{R}^n$ или другого векторного пространства. Это фундаментальное понятие математики уточняет и обобщает на любое число измерений понятия линии и поверхности. Введение этого понятия вызвано разнообразными потребностями как самой математики, так и др. наук. В математике М. возникают прежде всего как совокупности решений невырожденных систем уравнений, а также как различные совокупности геометрических и др. объектов, допускающих введение локальной параметризации (см. ниже), напр., совокупность плоскостей размерности k в $\mathbb{R}^n$. Они появляются также как решение многомерных вариационных задач (мыльные пленки), как интегральные многообразия пфаффовых систем и динамических систем, как группы геометрических преобразований и их однородные пространства и др. В физике они играют роль моделей пространства-времени, в механике служат фазовыми пространствами, уровнями энергии и проч., в экономике поверхностями безразличия, в психологии пространством ощущений (напр., цветов) и т. д.

Хотя исходная идея, кладущаяся в основу определения М., относится к их локальному строению («такому же, как у $\mathbb{R}^n$»), эта идея позволяет выделить целый ряд характерных именно для М. глобальных черт: (не) ориентируемость, гомологическая *Пуанкаре двойственность*, возможность определения *степени отображения* одного М. на другое той же размерности и проч. Особое значение имеет введение *касательного расслоения* и связанных с ним инвариантов.

Локальное строение М. позволяет также привлечь к их изучению геометрическую технику: приведение в *общее положение*, построение *Морса функций* и проч., к-рая служит для геометрического изучения глобального строения М., т. е, грубо говоря, заключается в представлении возможно более простым образом М. в виде объединения простых кусков, симплексов или ручек.

При использовании понятия М. также обычно совершается переход от локального к глобальному. Первым шагом является введение параметризации, т. е. представление «пространства состояний» данной задачи областью числового пространства. Это дает возможность описать каждое состояние набором чисел — координатами соответствующей точки (координатный метод). В целом пространство состояний может не допускать подобного описания, т. е. может не иметь гомеоморфизма на область в $\mathbb{R}^n$. Если не прибегать к параметризации с вырождениями (как в полярных координатах и их обобщениях), то возможны два пути: либо введение сначала большего, чем необходимо, числа параметров, и выделение истинного пространства неявно системой уравнений («уравнения состояния»), либо пространство параметризуется по частям локально, «в малом». Например, множество прямых на плоскости покрыто двумя подмножествами: Π_1, состоящее из прямых с уравнениями вида $y=\bar{k}x+b$, и Π_2, состоящее из прямых с уравнениями вида $x=\bar{k}y+\bar{b}$; оба они гомеоморфны $\mathbb{R}^2$ с параметризацией парами (k, b) и $(\bar{k}, \bar{b})$ соответственно. Однако в целом это множество гомеоморфно открытому листу Мёбиуса.

Когда М. естественно появляются в той или иной области, они обязательно несут какую-либо дополнительную структуру, к-рая и служит предметом изучения в этой области. Однако важную роль играет и топологич. строение, к-рое ограничивает априорные возможности. Наоборот, в топологии локальные и глобальные свойства М. изучают, привлекая дополнительные структуры (напр., гладкую) в качестве инструментов.

Фундаментом общего понятия М. является определение топологического многообразия как топологич. пространства, в к-ром каждая точка имеет окрестность $\mathfrak{X}$ и гомеоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{X} \to U$ на область в $\mathbb{R}^n$ или в полупространстве $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n \geqslant 0\}$; гомеоморфизм φ наз. локальной параметризацией или картой, в $\mathfrak{X}$. Размерность $n = \dim M$ является инвариантом связного М. Для несвязного М. обычно берут компоненты одной размерности. М. распадается на внутренность $\operatorname{Int} M$ и край ∂M: точки края отвечают в своих картах точкам границы $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^n$. Край является $(n-1)$-мерным М. без края и может быть пустым. Связное М. без края наз. открытым, если оно некомпактно, и замкнутым, если оно компактно. Простейшими примерами четырех возможных типов М. служат $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$, шар B^n и его граничная сфера S^{n-1}. Хотя нехаусдорфовы М. встречаются в некоторых ситуациях (напр., пространства пучков), обычно принимают, что М. хаусдорфово, паракомпактно, имеет счетную базу, в частности, метризуемо.

Глобальное задание М. осуществляется атласом — набором карт, покрывающих М. Для использования М. в математич. анализе нужно, чтобы пересчет координат от одной карты к другой был дифференцируемым. Поэтому чаще всего рассматривают *дифференцируемые многообразия*. Более общим образом вводится понятие Г-строения на М., задаваемого атласами $\{\varphi_i : \mathfrak{X}_i \to U_i\}$, в к-рых координатные переходы $h_{ij} = \varphi_j \varphi_i^{-1}$ между картами являются гомеоморфизмами, входящими в систему Г-отображений областей в $\mathbb{R}^n_+$, замкнутую относительно композиций. Если Г состоит из непрерывно дифференцируемых r раз отображений, то говорят, что класс гладкости М. есть C^r. Аналогично определяются *аналитические многообразия*, кусочно линейные, липшицевы и др. типы М. Два Г-атласа задают одно Г-строение, если их объединение есть Г-атлас. Классификация Г-строений является важнейшей проблемой геометрии М. Отображение $f : M \to N$ одного Г-многообразия в другое наз. Г-отображением, если локально оно имеет «координатное представление» $f_{ij} = \varphi_j f \varphi_i^{-1}$, где φ_j, φ_i — карты в M и N, а $f_{ij} \in \Gamma$. В частности, имеется понятие Г-гомеоморфизма (C^r-диффеоморфизма в случае $\Gamma = C^r$).

Поскольку в математич. анализе М. важны как носители дифференцируемых отображений, их иногда определяют (см. [12]) через запас гладких функций, определенных в окрестностях точек (см. *Росток*). Развитие этой идеи привело к понятию предмногообразия, или *окольцованного пространства* (пучка колец), и далее к понятию *схемы*. Заменяя $\mathbb{R}^n$ на другие векторные и иные пространства, приходят к различным обобщениям понятия М., таким, как напр. комплексно-аналитические М. Бесконечномерные М. возникают в математич. анализе и топологии как пространства отображений и сечений расслоений, как пространства гомеоморфизмов, замкнутых подмножеств и пр. Их локальными моделями служат векторные пространства (банаховы и иные) и такие пространства, как *гильбертов кирпич*. Понятие гладких и иных строений на бесконечномерных М. изучено недостаточно. Трудности здесь возникают из-за отсутствия технических теорем типа аппроксимаций, существования разбиения единицы (мал запас гладких функций), теоремы о неявной функции и т. п.

М. возникают как подмножества $\mathbb{R}^n$ при неявном задании их в виде множеств решений систем уравнений (и неравенств в случае непустого края). Этим М. задается сразу, а не по частям, как в случае задания атласом. Однако необходимы условия невырожденно-

сти, иначе всякое замкнутое множество можно задать одним уравнением. Существование локальной параметризации обеспечивается по теореме о неявной функции условием максимальности ранга *Якоби матрицы* данной системы. Уравнения служат языком для выражения средствами математич. анализа свойств М., служащих для определения М. Напр., свойство ортогональности $(n\times n)$-матрицы записывается системой из $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений относительно элементов матрицы. Система оказывается невырожденной, а группа ортогональных матриц гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{n^2}$.

В механич. системе с уже введенными координатами меньшие системы выделяются уравнениями или неравенствами, выражающими ограничения или «связи». Если условие невырожденности системы $F_i=0$ выполнено во всех точках М., то градиенты функций F_i образуют о с н а щ е н и е (k-репер, ортогональный к касательной плоскости в точке М. и непрерывно зависящий от этой точки). М., допускающие оснащение, образуют довольно узкий класс с т а б и л ь н о п а р а л л е л и з у е м ы х М. (напр., они имеют *ориентацию*). Но локально любое дифференцируемое М. в $\mathbb{R}^n$ может быть задано невырожденной системой, а с помощью разбиения единицы можно построить и систему постоянного (а не максимального) ранга, задающую М.

Для М., заданного атласом, возникает задача реализации его как подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ с учетом того или иного Г-строения. Любое топологическое, гладкое или кусочно линейное М. M в к л а д ы в а е т с я, т. е. Г-гомеоморфно подмногообразию, в $\mathbb{R}^{2n}$, а в $\mathbb{R}^{2n+1}$ множество вложений плотно в пространстве всех непрерывных отображений. Для других классов вопрос существенно сложнее. Интенсивно он изучается, напр., для римановых многообразий. *Алгебраические многообразия*, реализующиеся в комплексном проективном пространстве (заменяющем здесь $\mathbb{R}^n$), составляют очень специальный класс *Ходжа многообразий*. Если допускать вырожденность системы уравнений, то возникают М. с о с о б е н н о с т я м и. В алгебраич. геометрии обе идеи комбинируют: *алгебраическое пространство* определяется склейкой частей, к-рые локально задаются полиномиальными системами с вырождениями. В теории кобордизмов в топологии под названием М. с особенностями рассматривают пространства, устроенные локально как произведения конусов над М. Дальнейшие обобщения связаны с рассмотрением непрерывных семейств М. (см. *Расслоенное пространство*, *Слоение*, *Стратификация*).

Изучение М. чисто топологическими методами чрезвычайно сложно и до последнего времени оно ограничивалось локальными свойствами М., т. е. в сущности свойствами $\mathbb{R}^n$ (*непрерывное разбиение*, *дикое вложение* и пр.). Глобальное изучение М. и по необходимости требует привлечения или гомологических и других средств алгебраической топологии, или гладких, кусочно линейных и иных строений. Основное гомологическое свойство М.— Пуанкаре двойственность, сохраняющаяся и для *гомологических многообразий* и служащая для таких обобщений понятия М. как Пуанкаре комплексы. Гомологическую природу имеет и степень отображения, фундаментальное понятие, определяемое также для п с е в д о м н о г о о б р а з и й — пространств (обычно, комплексов), обладающих открытыми связными плотными подмножествами, являющимися М.

Геометрическое изучение М., основанное на использовании различных строений, исходит прежде всего из локальной эквивалентности М. с $\mathbb{R}^n$ и из возможности благодаря этому аппроксимации отображений гладкими или кусочно линейными, приведения их в общее положение и пр. Начальной задачей здесь является пред-

ставление М. в виде пространства, склеенного из простых кусков. Первоначальной идеей было понятие *триангуляции* М., развившееся в широкое понятие *комплекса*. Трудные проблемы триангулируемости и эквивалентности триангуляций были прояснены в 60—70-х гг. 20 в. (см. *Топология многообразий*). Более гибким инструментом оказалось разбиение М. на ручки, эквивалентное рассмотрению функций Морса. С помощью техники постепенного упрощения такого разбиения были доказаны важные теоремы (об h-кобордизме, обобщенная *Пуанкаре гипотеза* и др.). Эта техника послужила также геометрич. основой для теорем классификации гладких и кусочно линейных строений на заданном гомотопич. типе М. Эти теоремы потребовали, однако, привлечения тонких инвариантов, связанных с касательным расслоением М. (см. ниже). Большое значение имело также открытие новых гомологич. теорий: *К-теории* и особенно теорий *кобордизмов*. Два М. кобордантны, если они вместе ограничивают третье М. При этом учитывается тот или иной тип строения. Это отношение эквивалентности легло в основу первоначального определения гомологий, когда циклы рассматривались наивно как кусочно гладкие М. В теории кобордизмов эта идея восстанавливается, но подмногообразия заменяются отображениями М. Особую роль в вопросах классификации строений на М. играет фундаментальная группа, благодаря к-рой устанавливается связь этих вопросов с алгебраической К-теорией.

Важнейший инвариант гладкого М. M — его касательное расслоение τM. Предметом анализа на М. служит изучение сечений τM и различных ассоциированных с ним расслоений. С топологической точки зрения τM характеризуется существованием *экспоненциального отображения* $\exp : \tau M \to M$, диффеоморфно отображающего малые шары в слоях $\tau_x M$ на окрестности соответствующих точек $x \in M$. Его можно описать как проекцию трубчатой окрестности диагонали в $M \times M$ на сомножитель. В такой форме определение τM переносится на топологический, кусочно линейный и др. случаи (см. *Микрорасслоение*).

Различные редукции структурной группы касательного расслоения наз. с т р у к т у р а м и на М. Если можно подобрать атлас такой, что матрицы Якоби его координатных переходов принадлежат уменьшенной структурной группе и определяют тем самым эту редукцию, то такая структура наз. и н т е г р и р у е м о й. Вопросы классификации структур и их интегрируемости относятся к основным вопросам *дифференциальной геометрии многообразий*. В топологии М. вопрос о классификации гладких, кусочно линейных и иных строений сводится в основном к классификации соответствующих структур на касательном расслоении и приводится тем самым к гомотопич. задачам.

Важная роль касательного расслоения состоит в том, что с ним инвариантно связываются когомологич. классы (см. *Характеристический класс*) в той или иной гомологической теории, несущие в себе наиболее существенную информацию о глобальном строении М. и связывающие свойства различных строений и структур на М. с его топологическими свойствами.

Исследование топологии М. в этом направлении до 70-х гг. было по-существу использованием гладких и кусочно линейных строений на М. (точнее, на *гомотопическом типе* М.). Переход к чисто топологическим результатам стал возможным лишь после доказательства трудных и глубоких теорем, начиная с доказательства топологической инвариантности характеристических (рациональных) классов (см. *Топология многообразий*). В конце 70-х г. с этим направлением слилось и упомянутое выше направление чисто топологического изучения М. Ярким примером служит доказательство гипотезы о том, что двойная *надстройка* над гомологи-

ческой трехмерной сферой есть многообразие (сфера). Это позволило дать топологическую характеризацию М. (известную до этих пор лишь для одномерных многообразий и *двумерных многообразий*), прояснить вопрос о том, какие полиэдры являются М. (препятствием здесь служит лишь недоказанная пока (1982) *Пуанкаре гипотеза* в размерностях 3 и 4) и др., см. *Топология многообразий* и [19].

Исторический очерк. Начальный период изучения М. связан с анализом понятия многомерной параметризации, с исследованиями по геометрии физич. мира (земной поверхности) и по геометрич. аксиоматике. Два способа задания М. в $\mathbb{R}^n$ (локальная параметризация и уравнения) были рассмотрены впервые К. Гауссом (K. Gauss, см. [1] с. 127) для случая поверхностей в $\mathbb{R}^3$, а в многомерном случае А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [3], с. 459). Ю. Плюккер [5] изучал локальные координаты в М., составленных из кривых, поверхностей и т. п. Г. Грассман пришел в [6] к общей идее «многомерной протяженности», к-рая была под названием «многообразие» введена в математику Б. Риманом (B. Riemann) в его знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (см. [1] с. 30). Свойства различных специальных координат изучались К. Якоби (C. Jacobi), Г. Ламе (G. Lamé) и др. (см. [8]).

К. Гаусс (см. [1] с. 123) начал в связи со своими работами по геодезии систематич. изучение поверхностей, введя понятие внутренней геометрии и тем самым о М., не зависящем от объемлющего числового пространства, и фактически понятие структуры на М. Его идеи были вполне поняты лишь в теории характеристич. классов, построенной в середине 20 в. Б. Риман перенес идеи К. Гаусса на многомерные М. На основе римановой геометрии был создан трудами Риччи, Леви-Чивита, Кристоффеля и др. тензорный анализ, дальнейшее развитие к-рого шло в тесной связи с теорией относительности. Другая геометрическая линия развития понятия М. берет начало в открытии возможности неевклидовых геометрий и в построении геометрии на основе понятия движения (Г. Гельмгольц, H. Helmholtz, см. [1] с. 366). Эта идея была превращена в широкую программу теоретико-группового построения геометрии Ф. Клейном (F. Klein, см. [1] с. 399 и [8]) и привела к глубоким работам С. Ли (S. Lie) по теории непрерывных групп. Линия Гельмгольца — Клейна — Ли долгое время оставалась в стороне от линии Гаусса — Римана — Риччи, заимствовав у нее понятие кривизны, но интересуясь лишь *Клейна пространствами*. Однако здесь были поставлены важные вопросы о глобальном строении групп Ли и их однородных пространств и тем самым привлечено внимание к глобальному строению М. Важным фактом было произведшее глубокое впечатление открытие Клейном *эллиптической геометрии*, локально эквивалентной сферической, но глобально имеющей существенно иные свойства, а также открытие Мёбиусом и Клейном явления неориентируемости.

Синтез обоих направлений произошел в работах Э. Картана (E. Cartan, см. [1] с. 483). Отправляясь от исследований Г. Дарбу (G. Darboux) по теории поверхностей, он рассмотрел *подвижного репера метод* для произвольного М. в $\mathbb{R}^n$ и пришел к теории уравнений структуры — далекого обобщения теории Дарбу, включившего в себя теорию С. Ли. В картановском понятии G-структуры соединились идеи римановой геометрии и теории действия групп Ли. По существу Э. Картан ввел понятие касательного расслоения и его структурной группы, окончательно оформленного лишь в 40-х гг. 20 в. (см. [13]). Это понятие позволило также объединить математич. анализ на М. с топологич. изучением М. Основой послужил изоморфизм де Рама (см. *Рама теорема*) — окончательное оформление принад-

лежащей Пуанкаре идеи (см. [3] с. 472) о связи между вещественными когомологиями и дифференциальными формами. Важнейшим следующим шагом было введение характеристических классов и их выражение как интегралов от форм, выражающихся через форму кривизны (примером здесь служит выражение эйлеровой характеристики в теореме Гаусса — Бонне в форме Дика, см. [14] с. 186).

Топологическое изучение М. началось с открытия *римановых поверхностей* в связи с представлением комплексно аналитических функций интегралами как попытка избавиться от многозначности этих функций. «Периоды» интегралов привели к понятию чисел связности и в конечном счете к гомологиям. Мысль о многомерном обобщении этого понятия и идея о глобальном гомологическом изучении М. принадлежит Риману (см. [2] с. 294). Это изучение было начато А. Пуанкаре, сделавшим ряд важных открытий и доказавшим *Пуанкаре двойственность*. Стимулирующую роль имело последовавшее за открытием Римана изучение двумерных многообразий (в первую очередь Мёбиусом и К. Жорданом, см. [14] с. 244), приведшее к полной их классификации. Окончательно это оказалось возможным проделать лишь после прояснения понятия «чистого» гомеоморфизма (А. Пуанкаре, например, пользовался в сущности кусочно гладкими гомеоморфизмами). Это прояснение явилось одним из итогов анализа непрерывности числового континуума, предпринятого в конце 19 в. Наибольшее значение имели в этом направлении постановка 5-й проблемы Гильберта и работы Л. Брауэра (L. Brouwer, [9]), доказавшего теоремы (инвариантность области, инвариантность размерности), к-рые позволили Г. Вейлю [4] сформулировать приятие топологич. М. Однако в высших размерностях топологическое изучение М. долгое время велось в рамках гладких и кусочно линейных строений. Гладкие строения, введенные в книге [20], были проанализированы в основном Х. Уитни [21], а также Г. Уайтхедом и др. Кусочно линейные структуры были введены Л. Брауэром и проанализированы Дж. Александером [22] и также М. Ньюменом (M. Newman) и Г. Уайтхедом. Долгое время они рассматривались лишь как вспомогательное средство топологического изучения М. Лишь в конце 50-х гг. была открыта неединственность гладких строений уже на сферах и в конце 60-х гг. возможность неединственности кусочно линейных строений (например, на торах). После 50-х гг. 20 в. изучение М. проходило под знаком объединения идей топологии и анализа, основанного в первую очередь на понятии характеристич. классов (см. [17]).

Лит.: [1] Об основаниях геометрии, М., 1956; [2] Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948; [3] Пуанкаре А., Избр. тр., пер. с франц., т. 2, М., 1972; [4] Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, 3 Aufl., Stuttg., 1955; [5] Pluecker J., Neue Geometrie des Raumer . . ., Abt. 1 -2, Lpz., 1868—69; [6] Grassmann H., Die Ausdehnungslehre von 1844, Lpz., 1894; [7] Kronecker L., «Monatsber. Preuss. Akad. Wiss.», 1869, S. 159—226; [8] Клейн Ф., Высшая геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1939; [9] Brouwer L. E. J., «Math. Ann.», 1911, Bd 70, S. 161—65; 1911, Bd 71, S. 97—115; 1912, Bd 72, S. 55—6; [10] Weyl H., Mathematische Analyse des Raumproblems, B., 1923; [11] Стинрод Н. Е., Топология косых произведений, пер. с англ., М., 1953; [12] Шевалле К., Теория групп Ли, пер. с англ., т. 1, М., 1948; [13] Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономий, пер. с франц., М., 1960; [14] Хирш М., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1979; [15] Манкрс Дж., в кн.: Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979, с. 270—358; [16] Nijenhuis A., Theory of the geometric object, Amst., 1952; [17] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973; [18] Сулливан Д., Геометрическая топология, пер. с англ., М., 1975; [19] Cannon J. W., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 5, p. 832—66; [20] Веблен О., Уайтхед Дж., Основания дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1940; [21] Whitney H., «Ann. Math.», 1936, v. 37, p. 645—80; [22] Alexander J. W., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1926, v. 28, p. 301—29.

См. также лит. при статьях *Дифференциальная гео-*

метрия многообразий, Дифференциальная топология, Дифференцируемое многообразие. *А. В. Чернавский.*

МНОГООБРАЗИЕ категорий — понятие, аналогичное понятию многообразия универсальных алгебр. Пусть $\mathfrak{K}$ — бикатегория с произведениями. Полная подкатегория $\mathfrak{M}$ категории $\mathfrak{K}$ наз. многообразием, если она удовлетворяет следующим условиям: а) если $\mu: A \to B$ — допустимый мономорфизм и $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$, то $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$; б) если $\nu: A \to B$ — допустимый эпиморфизм и $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$, то $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$; в) если $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$, $i \in I$, то $A = \prod_{i \in I}^{x} A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{M}$.

Если бикатегория $\mathfrak{K}$ локально мала слева, т. е. допустимые подобъекты любого объекта образуют множество, то всякое М. является рефлективной подкатегорией категории $\mathfrak{K}$. Это значит, что функтор вложения $\mathrm{Id}_{\mathfrak{M},\mathfrak{K}}: \mathfrak{M} \to \mathfrak{K}$ обладает сопряженным слева функтором $S: \mathfrak{K} \to \mathfrak{M}$. Единица этого сопряжения — естественное преобразование $\varepsilon: \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to T = S\mathrm{Id}_{\mathfrak{M},\mathfrak{K}}$ обладает тем свойством, что для каждого $A \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$ морфизм $\varepsilon_A: A \to T(A)$ является допустимым эпиморфизмом. Во многих важных случаях функтор T оказывается точным справа, т. е. он переводит коядро ν пары морфизмов $\alpha, \beta: A \to B$ в коядро пары морфизмов $T(\alpha)$, $T(\beta)$, если (α, β) — ядерная пара морфизма ν. Более того, точность справа и наличие естественного преобразования $\varepsilon: \mathrm{Id}_{\mathfrak{K}} \to T$ являются характеристич. свойствами функтора T.

Всякое М. наследует многие свойства объемлющей категории. Оно снабжается структурой бикатегории и является биполной категорией, если исходная категория биполна.

В категориях с нормальными кообразами, как и в случае многообразий групп, можно определить произведение М. Строение возникающего при этом группоида М. изучено только в ряде частных случаев.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [2] Fröhlich A., «Quart. J. Math.», 1960, v. 11, № 43, p. 211—28. *М. Ш. Цаленко.*

МНОГОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ линейно связного пространства — область D, в к-рой существуют замкнутые пути, не гомотопные нулю, или, иначе говоря, *фундаментальная группа* к-рой не тривиальна. Это означает, что в D существуют замкнутые пути, к-рые нельзя непрерывно деформировать в точку, оставаясь все время в М. о. D, или, иначе, М. о. D — это область, не являющаяся *односвязной областью*.

Порядком связности плоской области D пространства $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}^1$ (или компактификаций этих пространств $\overline{\mathbb{R}}$ или $\overline{\mathbb{C}}$) наз. число (гомологически) независимых одномерных циклов, т. е. одномерное *Бетти число* p^1 области D. Если число k связных компонент границы плоской области D, рассматриваемой как область компактифицированного пространства $\overline{\mathbb{R}^2}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, конечно, то $p^1 = k$, в противном случае полагают $p^1 = \infty$. В случае $p^1 = 1$ D есть односвязная область, в случае $p^1 < \infty$ — конечносвязная область (применяются также термины двусвязная область, трехсвязная область, ..., k-связная область), в случае $p^1 = \infty$ D — бесконечносвязная область. Все плоские конечносвязные области, порядки связности k к-рых равны, гомеоморфны между собой. Удаляя из такой области D все точки $k-1$ разрезов, т. е. жордановых дуг, соединяющих попарно связные компоненты границы, всегда можно получить односвязную область $D^* \subset D$. О конформных типах плоских М. о. см. ст. *Римановых поверхностей конформные классы.*

Топологич. типы областей пространств $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, или $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 2$, гораздо более разнообразны и не могут быть охарактеризованы каким-либо одним числом. При этом

иногда термин «*М. о.*» (*с различными оговорками*) употребляется и в тех случаях, когда фундаментальная группа тривиальна, но не тривиальна какая-либо из групп гомологии высшей размерности. *Е. Д. Соломенцев.*

МНОГОУГОЛЬНИК — 1) Замкнутая ломаная линия, *именно: если* A_1, A_2, ... , A_n — различные точки, никакие последовательные три из к-рых не лежат на одной прямой, то совокупность отрезков $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ... , $[A_nA_1]$ наз. многоугольником (см. рис. 1). М. могут быть пространственными или плоскими (ниже рассматриваются плоские М.).

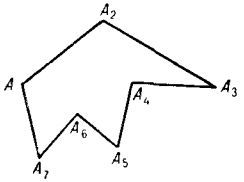


Рис. 1.

Рис. 2.

2) Связная (многосвязная) область, граница к-рой состоит из конечного числа отрезков и является замкнутой ломаной линией (или состоит из нескольких замкнутых ломаных, в этом случае М. иногда наз. многоугольной фигурой, см. рис. 2). Многоугольник в смысле первого определения наз. одномерным М., а в смысле второго определения — двумерным М.

Вершины ломаной линии (точки A_i) наз. вершинами М., отрезки $[A_iA_{i+1}]$ — его сторонами. Две стороны, имеющие общую вершину, наз. смежными, а две вершины ломаной — концы одного отрезка ломаной — наз. смежными вершинами М. Если граница М. является простой ломаной линией, так что несмежные ее стороны не имеют общих точек (внутренних или концевых), то М. наз. простым. Если граница двумерного М. не является простой, то она наз. самопересекающейся (рис. 3) (самопересекающийся М. в смысле первого определения). В этом случае М. является объединением простых М. Самопересекающаяся ломаная линия делит плоскость на определенное число кусков, один из к-рых — бесконечный. Если в качестве границы М. рассматриваются и лучи, то определяется бесконечный М., имеющий своей границей конечное число отрезков и лучей.

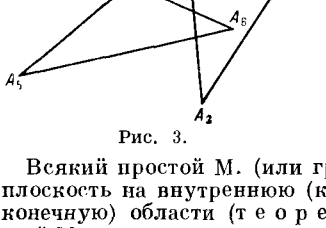


Рис. 3.

Рис. 4.

Всякий простой М. (или граница простого М.) делит плоскость на внутреннюю (конечную) и внешнюю (бесконечную) области (теорема Жордана). Простой М. может иметь весьма сложное строение границы. Для выяснения принадлежности какой-либо точки внешней или внутренней области достаточно провести из этой точки луч, не проходящий через вершины М.: если число пересечений луча с границей М. четное, то исследуемая точка лежит во внешней области, если нечетное — во внутренней.

Угол, образованный лучами, имеющими начало в некрой вершине М. и содержащими обе смежные стороны этой вершины, наз. внутренним углом (уг-

лом) М., если этот угол имеет непустое пересечение с внутренней областью М. и этому пересечению принадлежит рассматриваемая вершина М. (см. рис. 4). Сумма внутренних углов простого n-угольника равна $180°$ $(n-2)$. Простой М. имеет хотя бы один внутренний угол, меньший развернутого.

Прямая, проходящая через две несмежные вершины М., наз. диагональной, а отрезок с концами в несмежных вершинах М. наз. диагональю М.

М. наз. ориентируемым, если можно указать порядок обхода его вершин так, что конец одной стороны является началом следующей. Границу М. в этом случае наз. многоугольным (ориентированным) замкнутым путем на плоскости. Ориентированный простой двумерный М. при обходе границы всегда остается либо только слева от границы, либо только справа от нее; области М. с самопересекающейся границей могут оказаться по разные стороны от нее.

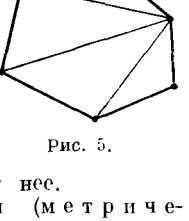


Рис. 5.

Простой М. наз. правильным (метрически правильным), если все его углы конгруэнтны между собой как конгруэнтны и все стороны (имеют равные длины). Около правильного М. можно описать окружность и можно вписать окружность в правильный М. Радиус вписанной окружности является апофемой правильного М. Правильные М. с одинаковым числом сторон подобны друг другу. В приведенной таблице указаны радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности и площадь нек-рых правильных многоугольников (a – длина стороны М.).

Число сторон	Радиус описанной окружности	Радиус вписанной окружности	Площадь
3	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2
5	$\frac{a}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})}$	$\frac{a}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$
6	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
8	$\frac{a}{2}\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$	$\frac{a}{2}(1+\sqrt{2})$	$2a^2(1+\sqrt{2})$
10	$\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

М. наз. выпуклым, если он располагается по одну сторону относительно прямой, содержащей любую сторону М. Выпуклый М.— всегда простой. Правильный М. является выпуклым. В выпуклом М. число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n-3)$ (n — число сторон), из каждой вершины можно провести $n-3$ диагоналей, к-рые делят М. на $n-2$ треугольников (рис. 5).

Угол, смежный с внутренним углом выпуклого М., наз. внешним. Сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, выпуклого М. составляет полный угол ($360°$). Внешний угол наз. поворотом границы М. в вершине.

Самопересекающийся М., все стороны к-рого конгруэнтны и все углы конгруэнтны, наз. звездчатым

(звездчато-правильным). Звездчатые М. существуют при числе сторон начиная с пяти, их можно рассматривать как определенную совокупность диагоналей правильного n-угольника.

Полуправильным наз. М., у к-рого конгруэнтны только все углы или конгруэнтны только все стороны. Полуправильный М. с четным числом вершин наз. равноугольно-полуправильным, если у него все углы конгруэнтны, а стороны конгруэнтны через одну (простейший пример — прямоугольник). Всегда существует окружность, проходящая через все вершины равноугольно-полуправильного М. Существуют также две окружности, из к-рых каждая касается сторон равноугольно-полуправильного М. через одну. Полуправильный М. с четным числом вершин наз. равносторонне-полуправильным, если все его стороны конгруэнтны, а углы конгруэнтны через один (простейший пример — ромб). В равносторонне-полуправильный М. можно вписать окружность так, что она будет касаться всех его сторон; существуют две окружности, из к-рых каждая проходит через вершины этого М., взятые через одну. Построение равноугольно-полуправильных и равносторонне-полуправильных М. осуществляется с помощью правильных М.

Правильный М. может быть построен циркулем и линейкой в случае, если число его сторон $n=2^m p_1 p_2 \dots p_\kappa$, где p_i — целые простые различные числа вида $p = 2^{2^\sigma}+1$, σ — целое положительное число (теорема Гаусса). Известны пять чисел указанного вида: 3, 5, 17, 257, 65537. Никакие другие правильные М. не могут быть построены циркулем и линейкой. Таким образом, можно построить циркулем и линейкой правильные n-угольники, если $n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 32, 34, \dots$, и нельзя построить циркулем и линейкой, если $n=7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, \dots$. Задача построения правильного n-угольника эквивалентна задаче деления окружности на n равных частей.

Построение звездчатых n-угольников осуществляется также с помощью деления окружности на равные части: если соединить отрезками делящие точки окружности через каждые p делений (p — целое число, взаимно-простое с n, $p<n$), то получается звездчатый n-угольник. Напр., при $n=15$ существуют 3 различные звездчатые 15-угольники. На рис. 6 изображены правильные и звездчатые М. для $n=3, 4, 5, 6, 7$.

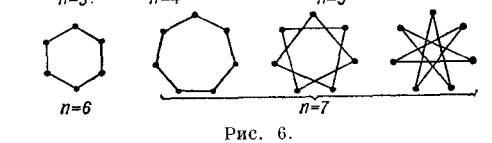


Рис. 6.

В нек-рых разделах геометрии под сторонами М. понимают прямые, на к-рых лежат отрезки замкнутой ломаной линии. В этом случае М. наз. многосторонником. Возможны одновременно вписанные и описанные М. (вершины одного лежат на стороне другого) и даже одновременно описанные и вписанные сами в себя многосторонники (см., напр., *Конфигурация*).

Площадь любого М. может быть вычислена путем разложения на треугольники, квадраты и т. д. Площади ориентированного простого М. приписывается знак плюс, если при обходе границы внутренняя область остается слева, и минус, если область останется справа.

В случае, когда граница М. является многоугольным замкнутым самопересекающимся путем, делящим плоскость на куски, то площадь такого М. может быть опре-

делена с помощью т. н. коэффициента куска: если из нек-рой точки во внешней области М. провести отрезок в точку, лежащую внутри данного куска, и граница М. пересекает этот отрезок p раз слева направо и q раз справа налево, то $p-q$ наз. коэффициентом куска. Этот коэффициент не зависит от выбора указанных двух точек. Площадью ориентированного М. (площадью многоугольного пути) в этом случае является сумма площадей каждого куска, умноженных на соответствующий коэффициент куска.

Если на плоскости введена декартова прямоугольная система координат xOy, то площадь ориентированного М. вычисляется при помощи интеграла $\int y dx$, где y — ордината точек границы М., обходимой один раз. В полярных координатах (ρ, φ) площадь М. вычисляется при помощи интеграла $\frac{1}{2}\oint \rho^2 d\varphi$, где ρ пробегает один раз границу М.

М. может быть криволинейным, его граница состоит из конечного числа кусков кривых. Такие М. существуют и на кривых поверхностях. Если граница М. на поверхности состоит из кусков дуг геодезич. линий этой поверхности, то М. наз. геодезическим. В случае, когда М. ограничен отрезками асимптотич. линий поверхности, то М. наз. асимптотическим, и т. д. Для криволинейных М. определяется внутренний угол при вершине, к-рый связан с поворотом границы в вершине и составляет с ним развернутый угол (поверхности предполагаются регулярными). Простые М. на поверхности могут иметь всего две стороны и две вершины (напр., геодезич. двуугольник на сфере).

М. может быть определен и как нек-рый набор векторов, к-рые рассматриваются как радиус-векторы вершин М. (n — угольника), т. е. точка (вершина) сопоставляется с нек-рым вектором. Свойства n-угольника переводятся на язык векторной алгебры, что открывает возможность применения алгебраич. методов в исследовании классов М. Определяется, в частности, сумма М., произведение М. на нек-рое число из коммутативного поля (характеристика к-рого взаимно проста с числом вершин М.), циклич. классы n-угольников, циклич. отображения и их алгебра и т. п. На этом пути оказывается возможным устанавливать многие общие свойства n-угольников (см., напр., [3]).

М. определяется также и с помощью понятия *выпуклой оболочки*, к-рая является выпуклым М. Именно, фигура Ф наз. М., если ее можно разложить на выпуклые М.:

$$\Phi = \bigcup_i F_i, \quad F_i \cap F_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

где F_i — выпуклые М.

Лит.: [1] Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. 1, М.— Л., 1948; [2] Адамар Ж., Элементарная геометрия, пер. с франц., 4 изд., ч. 1, М., 1957; [3] Бахман Ф., Шмидт З., n-Угольники, пер. с нем., М., 1973; [4] Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 — Геометрия, М., 1963.

Л. А. Сидоров.

МНОГОУГОЛЬНОЕ ЧИСЛО — см. *Арифметический ряд.*

МНОГОЧЛЕН, полином, — выражение вида

$$f(x, y, \ldots, w) = Ax^k y^l \ldots w^m + Bx^n y^p \ldots w^q + \ldots$$
$$\ldots + Dx^r y^s \ldots w^t,$$

где $x, y, \ldots, w$ — переменные, а $A, B, \ldots, D$ (коэффициенты М.) и $k, l, \ldots, t$ (показатели степеней — целые неотрицательные числа) — постоянные. Отдельные слагаемые вида

$$Ax^k y^l \ldots w^m$$

наз. членами М. Порядок членов, а также порядок множителей в каждом члене можно менять произвольно; точно так же можно вводить или опускать члены с

нулевыми коэффициентами, а в каждом отдельном члене — степени с нулевыми показателями. В случае, когда М. имеет один, два или три члена, его наз. одночленом, двучленом или трехчленом.

Относительно коэффициентов М. предполагается, что они принадлежат нек-рому *полю*, напр. полю рациональных, действительных или комплексных чисел.

Два члена М. наз. п о д о б н ы м и, если в них показатели степеней при одинаковых переменных попарно равны. Подобные между собой члены

$$A'x^ky^l\ldots w^m,\quad B'x^ky^l\ldots w^m,\ldots,D'x^ky^l\ldots w^m$$

можно заменить одним

$$(A'+B'+\ldots+D')\,x^ky^l\ldots w^m$$

(п р и в е д е н и е подобных членов). Два М. наз. равными, если после приведения подобных все члены с отличными от нуля коэффициентами оказываются попарно одинаковыми (но, может быть, записанными в разном порядке), а также если все коэффициенты этих М. оказываются равными нулю. В последнем случае *М. наз. т о ж д е с т в е н н ы м н у л е м* и обозначают знаком 0.

Сумму показателей степеней какого-либо члена М. наз. с т е п е н ь ю этого члена. Если М. не тождественный нуль, то среди членов с отличными от нуля коэффициентами (предполагается, что все подобные члены приведены) имеются один или несколько наибольшей степени; эту наибольшую степень наз. с т е п е н ь ю М. Тождественный нуль не имеет степени. М. нулевой степени сводится к одному члену A (постоянному, не равному нулю).

М. от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наз. *симметрическим многочленом*, если он не меняется ни при какой перестановке неизвестных. М., все члены к-рого одинаковой степени, наз. о д н о р о д н ы м м н о г о ч л е н о м, или ф о р м о й; формы первой, второй и третьей степеней наз. линейными, квадратичными, кубическими, а по числу переменных (два, три) — двоичными (бинарными), троичными (тернарными) (напр., $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_3$ есть троичная квадратичная форма).

С т е п е н ь ю многочлена $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ по отношению к одному из переменных x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, наз. наивысший показатель, с к-рым x_i входит в члены этого М. (эта степень может быть и нулевой). Из двух членов М. тот считается выше (относительно данной нумерации переменных), у к-рого показатель при x_1 больше, а если эти показатели равны, то тот, у к-рого показатели при x_2 больше, и т. д. Если все члены М. расположены в таком порядке, что каждый следующий член ниже предыдущего, то говорят, что члены этого М. расположены л е к с и к о г р а ф и ч е с к и. Тот член, к-рый при этом стоит на первом месте, наз. в ы с ш и м ч л е н о м м н о г о ч л е н а. М. от одного переменного, члены к-рого расположены в лексикографич. порядке, имеет вид

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты.

К о р н е м м н о г о ч л е н а от одного неизвестного над полем k наз. решение *алгебраического уравнения*

$$f(x)=0.$$

Корни М. связаны с его коэффициентами формулами Виета (см. *Виета теорема*).

Совокупность всевозможных различных М. от n переменных с коэффициентами из данного поля образует *кольцо* относительно естественным образом определяемых операций сложения и умножения. Рассматриваются также кольца М. от бесконечного множества переменных. *Многочленов кольца* являются ассоциа-

тивно-коммутативными кольцами без делителей нуля (т. е. произведение М., не равных 0, не может дать 0).

Если для двух многочленов P и Q можно найти такой многочлен R, что $P=QR$, то говорят, что P делится на Q; Q наз. делителем, а R — частным. Если P не делится на Q, но оба М. содержат *одно и то же* переменное, напр. x, и степень P по отношению к x есть n, а степень Q есть m и $n\geqslant m\geqslant 1$, то можно найти такие многочлены p, R и S, что $pP=QR+S$, причем p совсем не содержит x, а в S переменное x содержится в степени ниже m. В случае, когда x является единственным переменным, можно p считать равным 1; тогда операцию отыскания R и S по P и Q наз. делением с остатком; деление с остатком можно производить с помощью *Горнера схемы*.

Посредством повторного применения этой операции можно находить наибольший общий делитель P и Q, т. е. такой делитель P и Q, к-рый делится на любой общий делитель этих М. (см. *Евклида алгоритм*). Два М., наибольший общий делитель к-рых равен 1, наз. **взаимно простыми**.

М., к-рый можно представить в виде произведения М. низших степеней с коэффициентами из данного поля, наз. **приводимым** (в данном поле), в противном случае — **неприводимым**. Неприводимые М. играют в кольце М. роль, сходную с ролью простых чисел в кольце целых чисел. Напр., верна теорема: если произведение PQ делится на неприводимый многочлен R, а P на R не делится, то Q должен делиться на R. Каждый М., степени большей нуля, разлагается в данном поле в произведение неприводимых множителей единственным образом (с точностью до множителей нулевой степени). Напр., многочлен x^4+1, неприводимый в поле рациональных чисел, разлагается на два множителя в поле действительных чисел и на четыре множителя в поле комплексных чисел. Вообще, каждый М. от одного переменного x разлагается в поле действительных чисел на множители первой и второй степени, в поле комплексных чисел — на множители первой степени (*алгебры основная теорема*). Для двух и большего числа переменных этого уже нельзя утверждать. Над любым полем k для любого $n\geqslant 2$ существуют М. от n переменных, неприводимые в любом расширении поля k. Такие М. наз. **абсолютно неприводимыми**. Напр., многочлен $x^3+yz^2+z^3$ неприводим в любом числовом поле.

Если переменным x, y, . . ., w придать определенные числовые значения (напр., действительные или комплексные), то М. также получит определенное числовое значение. Таким образом, каждый М. можно рассматривать как функцию соответствующих переменных. Эта функция непрерывна и дифференцируема при любых значениях переменных; ее можно характеризовать как **целую рациональную функцию**, т. е. функцию, получающуюся из переменных и нек-рых постоянных (коэффициентов) посредством выполнения в определенном порядке действий сложения, вычитания и умножения. Целые рациональные функции входят в более широкий класс **рациональных функций**, где к перечисленным действиям присоединяется деление: любую рациональную функцию можно представить в виде частного двух М. Наконец, рациональные функции содержатся в классе *алгебраических функций*.

К числу важнейших свойств М. относится то, что любую непрерывную функцию можно с произвольно малой ошибкой заменить М. (см. *Вейерштрасса теорема*).

Специальные системы М.— *ортогональные многочлены* — используются в теории приближения как средство представления функций в виде рядов.

В элементарной алгебре М. иногда наз. такие алгебраич. выражения, в к-рых последним действием является сложение или вычитание.

Лит.: [1] Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра, 2 изд., М., 1965; [2] Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; [3] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965.

А. И. Маркушевич.

МНОГОЧЛЕНОВ КОЛЬЦО кольцо, элементами к-рого являются многочлены с коэффициентами из нек-рого фиксированного поля k. Рассматриваются также М. к. над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом R, напр. над кольцом целых чисел. М. к. от конечного множества переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над R принято обозначать через $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Можно говорить и о М. к. от любого бесконечного множества переменных, считая, что каждый отдельный многочлен зависит лишь от нек-рого конечного числа переменных. М. к. над кольцом R является (коммутативной) *свободной алгеброй* с единицей над R; множество переменных служит системой свободных образующих этой алгебры.

М. к. над произвольной областью целостности само является областью целостности. М. к. от любого конечного числа переменных над любым факториальным кольцом R само является факториальным.

Для М. к. над полем k от конечного числа переменных имеет место *Гильберта теорема* о базисе: всякий идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$ может быть порожден (как идеал) конечным числом элементов. Кольцо многочленов от одного переменного $k[x]$ является *главных идеалов кольцом*, т. е. любой его идеал может быть порожден одним элементом. Более того, $k[x]$ является *евклидовым кольцом*. Это свойство $k[x]$ дает возможность исчерпывающим образом описать конечно порожденные модули над ним и, в частности, привести к канонич. виду линейный оператор в конечномерном векторном пространстве (см. *Жорданова матрица*). При $n>1$ кольцо $k[x_1, \ldots, x_n]$ не является кольцом главных идеалов.

Пусть S — нек-рая ассоциативно-коммутативная k-алгебра с единицей, $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — элемент декартовой степени S^n, тогда существует единственный гомоморфизм М. к. от n переменных в S

$$\varphi_a : k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to S,$$

при к-ром $\varphi_a(x_i) = a_i$ для всех $i=1, \ldots, n$, а $\varphi_a(1)$ — единица S. Образ многочлена $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ при этом гомоморфизме наз. его значением в точке a. Точка $a \in S^n$ наз. нулем системы многочленов $F \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, если значение каждого многочлена из F в этой точке есть $0 \in S$. Для М. к. имеет место *Гильберта теорема* о нулях: пусть $\mathfrak{A}$ — идеал кольца $R=k[x_1, \ldots, x_n]$, M — множество нулей идеала $\mathfrak{A}$ в $\overline{k}^n$, где $\overline{k}$ — алгебраич. замыкание поля k, g — многочлен из R, обращающийся в нуль во всех точках из M, тогда существует натуральное число m такое, что $g^m \in \mathfrak{A}$.

Пусть A — произвольный модуль над кольцом $R=k[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда существуют свободные R-модули $X_0, X_1, \ldots, X_n$ такие, что последовательность гомоморфизмов

$$\{0\} \leftarrow A \leftarrow X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \ldots \leftarrow X_n \leftarrow \{0\}$$

точна, т. е. ядро предыдущего гомоморфизма является образом последующего. Это утверждение — одна из возможных формулировок *Гильберта теоремы* о сизигиях для М. к.

Конечно порожденный проективный модуль над М. к. от конечного числа переменных с коэффициентами из кольца главных идеалов свободен (см. [5], [6]); это есть решение проблемы Серра.

Лишь в нек-рых частных случаях имеются ответы на следующие вопросы: 1) не порождается ли группа

автоморфизмов М. к. элементарными автоморфизмами; 2) не порождается ли $k[x_1, \ldots, x_n]$ произвольным множеством $f_1, \ldots, f_n$ таким, что $\det\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|$—ненулевая константа; 3) если $S \otimes k[y]$ изоморфно $k[x_1, \ldots, x_n]$, не будет ли S изоморфно $k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$?

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Бурбаки Н., Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы, пер. с франц., М., 1965; [3] Hilbert D., «Math. Ann.», 1893, Bd 42, S. 313—73; [4] его же, «Math. Ann.», 1890, Bd 36, S. 473—534; [5] Суслин А. А., «Докл. АН СССР», 1976, т. 229, с. 1063—66; [6] Quillen D., «Invent. math.», 1976, v. 36, p. 167—71.

Ю. А. Бахтурин.

МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА — экстремальная задача, имеющая несколько или неизвестное число локальных экстремумов.

Проблема отыскания глобального экстремума $f(x)$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in X \subset \mathbb{R}^n$, решена для основных классов унимодальных функций (прежде всего для выпуклых и родственных им, см. *Выпуклое программирование*). Для мультимодальных функций, даже для гладких и медленно меняющихся, в настоящее время (1982) отсутствуют методы достоверного вычисления глобального экстремума за исключением сканирования по траекториям, образующим всюду плотное множество в допустимом множестве X. На практике трудоемкое сканирование комбинируют с алгоритмами поиска локального экстремума: с помощью сканирования и априорных сведений об $f(x)$ (оценок производных, функциональных уравнений и неравенств и др.) оконтуривается область притяжения каждого локального экстремума и мертвые зоны, где конкретный локальный алгоритм теряет эффективность (напр., для градиентного метода мертвыми зонами являются окрестность седловой точки и «дно оврага»). Затем экстремумы оцениваются или ищутся с помощью локальных методов и сравниваются между собой.

Для функций, удовлетворяющих условию Липшица

$$(\forall x,\ x' \in X)\ (\exists l < \infty) \mid f(x) - f(x') \mid \leqslant l \| x - x' \|,$$

наиболее универсальным является метод покрытий (перебор на неравномерной сетке), к-рый к тому же легко реализуем в многомерном случае.

Для нахождения локальных экстремумов, близких к глобальному, в приложениях используются эмпирические «эвристические» способы, к-рые можно назвать квазиглобальными:

1. Алгоритмы типа *тяжелого шарика метода* или овражных методов (см. *Овражных функций методы минимизации*), способные «проскакивать» через нек-рые локальные экстремумы или «огибать» области их притяжения.

2. Случайный перебор значений $f(x)$ с помощью *Монте-Карло метода*.

3. Модификация локальных методов путем введения стохастич. параметров. Напр., траектория рандомизированного градиентного метода

$$\dot{x} = -\nabla f(x) + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — случайный процесс типа белого шума, при нек-рых условиях способна попадать из точки локального в точку глобального экстремума.

4. «Огрубление» функции путем ее аппроксимации последовательностью унимодальных функций. Аппроксимация может производиться по значениям $f(x)$ в нек-рых точках, разложением по параметрам, входящим в аналитич. выражение функции, мажорантами или минорантами и т. п.

5. Поиск локального экстремума осредненной функции $\overline{f(x)}$ (скользящее среднее)

$$\overline{f(x)} = \int_X p(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$
$$p(x, \xi) \geqslant 0; \quad \int_X p(x, \xi)\, d\xi = 1. \qquad (1)$$

Примеры:

1. $\overline{f(x)} = \frac{1}{2T}\int_{x-T}^{x+T} f(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad x \pm T \in X.$

2. $\overline{f(x)} = \int_X e^{-(x-\xi)^2} f(\xi)\,d\xi \Big/ \int_X e^{-(x-\xi)^2}\,d\xi, \quad x \mp \xi \in X.$

Физич. смысл такого усреднения заключается в «сглаживании» исходной функции и «отфильтровании» от нее колеблющихся слагаемых.

Если $\overline{f(x)} \cong \text{const}\,(x)$ (быстроосциллирующая функция $f(x)$), то перед усреднением исходную функцию можно «продетектировать» с помощью нелинейного преобразования, напр.

$$\overline{\overline{f(x)}} = \int_X p(x, \xi)\,|f(\xi)|\,d\xi. \qquad (2)$$

В качестве взвешивающей при усреднении функции $p(x, \xi)$ можно взять и

$$p_n(x, \xi) = \frac{|f(x-\xi)|^n}{\int_X |f(x)|^n\,dx}, \quad n \geqslant 0,$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{M \quad X} |f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\int_X |f(x)|^n\,dM_x}{\int_X dM\,(x)}}.$$

Последнее соотношение возможно также использовать для получения оценок существенных максимума и минимума.

Формулы (1) и (2) можно интерпретировать как формулы математич. ожиданий для функции случайной величины ξ, распределенной с плотностью вероятностей $p(x, \xi)$. Поэтому данную М. з. можно трактовать как задачу *стохастического программирования* и применять к ней его методы.

После нахождения экстремума аппроксимирующей или усредненной функции (о б з о р н ы й п о и с к) можно произвести в окрестности найденной точки д е т а л ь н ы й п о и с к экстремума исходной функции $f(x)$.

Глобальную оптимизацию отдельных функций можно произвести с помощью частных специфич. приемов. Напр., построить такую динамич. систему, для к-рой точка глобального экстремума является асимптотически устойчивой точкой покоя.

Одним из источников идей новых методов (квази) глобальной оптимизации является моделирование процессов в физических и биологических системах.

Громоздкие вычислительные процессы нелокального поиска можно оптимизировать по ряду показателей с учетом ограничений на вычислительные средства, априорной и последовательно накапливаемой информации об исследуемой функции $f(x)$, вероятностных характеристиках случайных факторов и пр. Один из подходов, к-рые здесь пытаются применить, основан на теории статистич. решений.

Помимо отыскания глобального экстремума возникают и иные М. з., напр. определение колебания функции, перечисление и отыскание всех локальных экстремумов в заданной области.

Для многочленов разработаны весьма эффективные правила подсчета и отделения корней производных.

Для точек экстремума трансцендентных функций здесь могут быть полезны соображения типа *Ролля теоремы* или *сравнения теорем* для решений дифференциальных уравнений.

Число стационарных точек аналитич. функции может быть оценено с помощью *аргумента принципа*.

Если функция имеет бесконечную последовательность экстремумов, то на практике вычисляется непосредственно несколько из них, а остальные — с помощью асимптотич. разложения (напр., Г-функция).

Квазиклассич. приближение для дифференциальных уравнений можно рассматривать как асимптотич. разложение решения уравнения по числу его экстремумов.

О М. з. в бесконечномерном случае см. *Вариационное исчисление в целом*. Дискретные аналоги освещены в ст. *Целочисленное программирование* и *Дискретное программирование*.

Лит. см. при ст. *Максимизация и минимизация функций*.

Ю. П. Иванилов, В. В. Окрименко.

МНОЖЕСТВ КАТЕГОРИЯ — категория, объектами к-рой являются всевозможные множества, морфизмами — всевозможные отображения множеств друг в друга, и умножение морфизмов определяется как последовательное выполнение отображений $\alpha : A \to B$ и $\beta : B \to C$. Если теоретико-категорные рассмотрения проводятся внутри фиксированного *универсального множества* U, то под М. к. понимают категорию, объектами к-рой являются всевозможные множества, принадлежащие U, а морфизмы и их умножение вводятся, как и выше. М. к. обозначают либо $\mathfrak{S}$, либо Ens, либо St, либо Me.

Пустое множество $\varnothing$ является левым нулем (начальным объектом), а одноэлементное множество — правым нулем (терминальным объектом) М. к. Всякое непустое множество является образующим объектом, всякое множество, содержащее не менее двух элементов,— кообразующим (коинтегральным) объектом М. к. Всякий мономорфизм с непустым началом есть обратимое справа инъективное отображение, всякий эпиморфизм есть обратимое слева сюръективное отображение. М. к. обладает единственной бикатегорной структурой.

М. к. является локально малой биполной категорией. В частности, произведение семейства множеств совпадает с декартовым произведением этого семейства, копроизведение семейства множеств совпадает с разъединенным объединением этого семейства. Декартово произведение, рассматриваемое как бифунктор, Hom-функтор $H : \mathfrak{S}^* \times \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ и одноэлементное множество снабжают М. к. структурой *замкнутой категории*. Всякая категория относительная категория над М. к. Двухэлементное множество снабжает М. к. дополнительной структурой (абстрактного) *топоса*.

Категория $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда эквивалентна М. к., когда в $\mathfrak{N}$ имеется формально присоединенный левый нуль Λ, а полная подкатегория $\mathfrak{N} \setminus \Lambda$ является категорией с регулярными кообразами с унарным образующим объектом, для каждого объекта A к-рой существует произведение $A \times A$ и каждое отношение эквивалентности

$$(\mu),\ \mu = \mu\pi_1\,(\times)\,\mu\pi_2 : R \rightarrow A > A\,(\pi_1, \pi_2)$$

индуцировано ядерной парой $(\mu\pi_1, \mu\pi_2)$ нек-рого морфизма. Объект U наз. у н а р н ы м, если существуют любые копроизведения

$$\Pi^*_{i \in I} U_i, \quad U_i = U,$$

и если всякий морфизм

$$\alpha : U \longrightarrow \Pi^*_{i \in I} U_i\,(\sigma_i)$$

представим в виде $\alpha = \alpha' \sigma_i$ для единственного i. О других характеризациях М. к. см. [2], [3].

Категории, изоморфные подкатегориям М. к., наз. к о н к р е т н ы м и. О необходимых и достаточных условиях конкретности категории см. [1].

Лит.: [1] F r e y d P., «J. Pure and Appl. Algebra», 1973, v. 3, № 2, p. 171–91; [2] L a w v e r e F. W., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1964, v. 52, № 6, p. 1506–11; [3] С к о р н я к о в Л. А., «Матем. сб.», 1969, т. 80, № 4, с. 492—502.

М. Ш. Цаленко.

МНОЖЕСТВ ТЕОРИЯ н а и в н а я — учение о свойствах множеств, преимущественно бесконечных, э л и м и н и р у ю щ е е свойства элементов, составляющих эти множества. Понятие множества принадлежит к

числу первоначальных математич. понятий и может быть пояснено только при помощи примеров. Так, можно говорить о множестве людей, живущих на нашей планете в данный момент времени, о множестве точек данной геометрич. фигуры, о множестве решений данного дифференциального уравнения. Люди, живущие на нашей планете в данный момент времени, точки данной геометрич. фигуры, решение данного дифференциального уравнения являются элементами соответствующего множества. Множество A считается заданным, если указано характеристич. свойство элементов этого множества, т. е. такое свойство, к-рым обладают все элементы этого множества и только они. Одним из основных понятий М. т. является понятие принадлежности элемента множеству. В качестве обозначения того, что предмет a принадлежит множеству A, пишут $a \in A$. (Если a не принадлежит A, то пишут $a \overline{\in} A$, $a \notin A$.) Может случиться, что характеристич. свойством, определяющим множество A, не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что множество A пустое и пишут $A = \varnothing$. Напр., множество действительных решений уравнения $x^2 = -1$ пустое. Если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B, то множество A наз. п о д м н о ж е с т в о м множества B и пишут $A \subset B$. Если одновременно выполнено $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что множества A и B р а в н ы и пишут $A = B$. О б ъ е д и н е н и е м $A \cup B$ множеств A и B наз. множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B. П е р е с е ч е н и е м $A \cap B$ множеств A и B наз. множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B. Операции объединения и пересечения коммутативны, ассоциативны и взаимно дистрибутивны. Например, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Во многих разделах М. т. рассматриваются только такие множества, к-рые содержатся в нек-ром фиксированном множестве X. Если A — подмножество X и P — свойство, характеризующее элементы из A, то пишут $A = \{x \in X: P(x) — \text{истина}\}$. Напр., если X — множество всех действительных чисел, а A — подмножество положительных чисел, то $A = \{x \in X: x > 0\}$. Если $A \subset X$, то множество $X \setminus A = \{x \in X: x \overline{\in} A\}$ наз. д о п о л н е н и е м множества A. Операции объединения, пересечения и дополнения связаны т. н. з а к о н а м и д е М о р г а н а. Напр., $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$. Раздел М. т., к-рый занимается исследованием операций над множествами (не только конечных, но и бесконечных операций), наз. а л г е б р о й м н о ж е с т в. Алгебра множеств в свою очередь является частным случаем теории *булевых алгебр*.

М. т. была создана работами математиков 19 в., к-рые ставили себе целью разработку оснований математич. анализа. Уже в первых работах в этой области [Б. Больцано (B. Bolzano), П. Дюбуа-Реймон (P. Du Bois-Reymond), Р. Дедекинд (R. Dedekind)], в к-рых рассматривались числовые множества или множества функций, ставился вопрос о количественном сравнении бесконечных множеств. Является ли бесконечность множества чисто отрицательным свойством, не допускающим расчленения, или же существуют различные ступени математич. бесконечности, бесконечные множества различной количественной силы, различной «мощности»? Ответ на этот вопрос дал Г. Кантор (G. Cantor, 1871 -83), к-рый представил почти современное изложение теории *кардинальных чисел* и *порядковых чисел* и теории *вполне упорядоченных множеств*. Возможность сравнительной количественной оценки множеств опирается на понятие взаимно однозначного соответствия (или биекции) между двумя множествами. Пусть каждому элементу множества A соответ-

ствует в силу какого бы то ни было правила или закона нек-рый определенный элемент множества B, если при этом каждый элемент множества B оказывается поставленным в соответствие одному и только одному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие (или биективное отображение, или биекция). Между двумя конечными множествами можно установить биекцию тогда и только тогда, когда оба множества состоят из одного и того же числа элементов. В обобщении этого факта Г. Кантор определил количественную эквивалентность, или равномощность, как возможность установить между ними взаимно однозначное соответствие. Если множество A равномощно множеству B, то множества A и B имеют одно и то же кардинальное число. Ценность понятия мощности множества определяется существованием неравномощных бесконечных множеств. Напр., множество всех действительных чисел и множество всех натуральных чисел имеют разные мощности. Первое имеет мощность континуума, а второе — счетное множество. В каждом бесконечном множестве A имеется собственное подмножество, равномощное всему A, в то же время как ни в одном конечном множестве такой правильной части найти нельзя. Поэтому наличие правильной части, равномощной целому, можно принять за определение бесконечного множества.

Заслуга Г. Кантора состоит не только в решении проблемы мощности множества, но и в том решительном шаге, к-рый сделал он, рассмотрев множества, состоящие из элементов произвольной природы. О том, что шаг к общности был трудным, свидетельствуют, во-первых, различные противоречия (*антиномии*), открытые разными учеными к началу 20 в. и приведшие к созданию *аксиоматической теории множеств*, и, во-вторых, то, что естественным образом возникшие задачи (напр., *континуум-гипотеза*) оказались неразрешимыми.

Дальнейший вклад в М. т. внес Ф. Хаусдорф (F. Hausdorff), разработав теорию линейно упорядоченных множеств и применив М. т. к топологии, он заложил основы теории *топологических пространств* (или общей топологии). Далее, A-операция, возникшая при исследовании борелевских множеств, привела к созданию *дескриптивной теории множеств*. Из ряда задач комбинаторной математики и теории графов возникла комбинаторная теория множеств. Наконец, открытия, сделанные К. Гёделем (K. Gödel) и П. Коэном (P. Cohen) в аксиоматич. теории множеств существенно повлияли на методы и развитие М. т.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; [2] Больцано Б., Парадоксы бесконечного, пер. с нем., Одесса, 1911; [3] Учение о множествах Георга Кантора, СПБ, 1914 (Новые идеи в математике. Сб. № 6); [4] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937; [5] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; [6] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965.

Б. А. Ефимов.

МНОЖЕСТВЕННОЕ СРАВНЕНИЕ — задача проверки гипотезы относительно значений скалярного произведения $\theta^{\perp} \cdot c$ вектора $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, координаты к-рого суть неизвестные параметры, на заданный вектор $c = (c_1, \ldots, c_k)^{\perp}$. В статистич. исследованиях задача М. с. часто возникает при проведении *дисперсионного анализа*, где, как правило, вектор c выбирается таким образом, что $c_1 + \ldots + c_k = 0$, а само скалярное произведение $\theta^{\perp} \cdot c$ в таком случае наз. *контрастом*. В предположении, что $\theta_1, \ldots, \theta_k$ суть неизвестные математич. ожидания одномерных нормальных законов, Дж. У. Тьюки (J. W. Tukey) и Г. Шеффе (H. Scheffé) предложили T-метод и S-метод соответственно для

оценивания контрастов, к-рые являются основными методами в задаче построения доверительных интервалов для контрастов.

Лит.: [1] Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963; [2] Кендалл М., Стьюарт А., *Многомерный статистический анализ и временные ряды*, пер. с англ., М., 1976.

М. С. Никулин.

МНОЖЕСТВЕННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ — мера линейной зависимости между одной и нек-рой совокупностью случайных величин. Точнее, если $(X_1, \ldots, X_k)$ случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^k$, то М. к. к. между X_1 и $X_2, \ldots, X_k$ определяется как обычный коэффициент корреляции между X_1 и наилучшим линейным приближением X_1 по $X_2, \ldots, X_k$, т. е. регрессией $\mathsf{E}(X_1|X_2, \ldots, X_k)$ величины X_1 по $X_2, \ldots, X_k$. М. к. к. обладает тем свойством, что если при $\mathsf{E}X_1 = \ldots = \mathsf{E}X_k = 0$

$$X_1^* = \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_k X_k$$

есть регрессия X_1 по $X_2, \ldots, X_k$, то среди всех линейных комбинаций величин $X_2, \ldots, X_k$ величина X_1^* имеет наибольшую корреляцию с X_1; в этом смысле М. к. к.— частный случай канонич. коэффициента корреляции. При $k=2$ М. к. к. равен обычному коэффициенту корреляции ρ_{12} между X_1 и X_2. М. к. к. между X_1 и $X_2, \ldots, X_k$ обозначается $\rho_{1\cdot(2\ldots k)}$ и выражается через элементы корреляционной матрицы $R = \|\rho_{ij}\|$, $i, j = 1, \ldots, k$, следующим образом

$$\rho^2_{1\cdot(2\ldots k)} = 1 - \frac{|R|}{R_{11}},$$

где $|R|$ — определитель R, а R_{11} алгебраич. дополнение элемента $\rho_{11} = 1$; при этом $0 \leqslant \rho_{1\cdot(2\ldots k)} \leqslant 1$. Если $\rho_{1\cdot(2\ldots k)} = 1$, то величина X_1 с вероятностью 1 равна нек-рой линейной комбинации величин $X_2, \ldots, X_k$, т. е. совместное распределение величин $X_1, \ldots, X_k$ сосредоточено в нек-рой гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^k$. С другой стороны, $\rho_{1\cdot(2\ldots k)} = 0$ тогда и только тогда, когда $\rho_{12} = \ldots = \rho_{1k} = 0$, т. е. когда X_1 не коррелирована ни с одной из величин $X_2, \ldots, X_n$. Для вычисления М. к. к. можно также использовать формулу

$$\rho^2_{1\cdot(2\ldots k)} = 1 - \frac{\sigma^2_{1\cdot(2\ldots k)}}{\sigma_1^2},$$

где σ_1^2 — дисперсия X_1, а

$$\sigma^2_{1\cdot(2\ldots k)} = \mathsf{E}\,(X_1 - \mathsf{E}\,(X_1 \mid X_2, \ldots, X_k))^2$$

— дисперсия X_1 относительно регрессии.

Выборочным аналогом М. к. к. $\rho_{1\cdot(2\ldots k)}$ является

$$r_{1\cdot(2\ldots k)} = \sqrt{1 - \frac{s^2_{1\cdot(2\ldots k)}}{s_1^2}},$$

где $s^2_{1\cdot(2\ldots k)}$ и s_1^2 — оценки $\sigma^2_{1\cdot(2\ldots k)}$ и σ_1^2 по выборке объема n. Для проверки гипотезы об отсутствии связи используются выборочные распределения $r_{1\cdot(2\ldots k)}$. При условии, что выборка произведена из многомерной нормальной совокупности, величина $r^2_{1\cdot(2\ldots k)}$ имеет бета-распределение с параметрами $\left(\frac{k-1}{2}, \frac{n-k}{2}\right)$, если $\rho_{1\cdot(2\ldots k)} = 0$; если $\rho_{1\cdot(2\ldots k)} \neq 0$, то величина $nr^2_{1\cdot(2\ldots k)}$ при $n \to \infty$ имеет в пределе нецентральное «хи-квадрат»-распределение с $k-1$ степенями свободы и параметром нецентральности $nr^2_{1\cdot(2\ldots k)}$.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

А. В. Прохоров.

МНОЖЕСТВО – набор, совокупность, собрание каких-либо объектов, наз. его *элементами*, обладающих общим для всех их характеристич. свойством. «Множество есть многое, мыслимое нами как единое» (Г. Кантор). Это не является в полном смысле логич. определением понятия М., а всего лишь пояснением (ибо определить понятие — значит найти такое родовое понятие, в к-рое данное понятие входит в качестве вида, но М. - это, пожалуй, самое широкое понятие математики и логики). При этом можно либо дать перечень элементов М.— его *перечисление*, либо дать правило для определения того, принадлежит или нет данный объект рассматриваемому М.— его *описание* (впрочем, первое приемлемо, лишь когда речь идет о конечных М.).

Для содержательного развития «наивной» *множеств теории* такого пояснения вполне достаточно, ибо для математич. теории существенны определенные соотношения между элементами М. (или между самими М.), а не их природа. При описании же тех М., к-рые могут быть элементами других М., во избежание т. н. *антиномий*, вводится, напр., термин «класс». И тогда, говоря более формально, теория М. имеет дело с объектами, наз. *классами*, для к-рых определено отношение принадлежности, а само М. определяется как класс, являющийся элементом нек-рого класса.

В последнее время все более вырисовывается объединяющая роль теории *категорий* (и, в частности, понятия *универсального множества*), построение к-рой основывается на *аксиоматической теории множеств*, позволяющей рассматривать, напр., такие «большие» совокупности, как категория всех множеств, групп, топологич. пространств и т. д.

Лит.: [1] Учение о множествах Георга Кантора. СПБ, 1914 (Новые идеи в математике. Сб. № 6); [2] Шиханович Ю. А., Введение в современную математику, М., 1965; [3] Кондаков Н. И., Логический словарь-справочник, 2 изд., М., 1975; [4] Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; [5] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [6] Кон П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; [7] Шенфилд Дж., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975. *М. И. Войцеховский.*

МНОЖЕСТВО ТИПА $F_\sigma(G_\delta)$, F_σ-множество (G_δ-множество),— объединение (пересечение) счетного числа замкнутых (открытых) множеств. См. *Борелевское множество.*

***A*-МНОЖЕСТВО**, аналитическое множество, в полном сепарабельном метрическом пространстве — непрерывный образ борелевского множества. Так как любое борелевское множество является непрерывным образом множества иррациональных чисел, то *A*-м. можно определить как непрерывный образ множества иррациональных чисел. Счетное пересечение и счетное объединение *A*-м. является *A*-м. Любое *A*-м. измеримо в смысле Лебега. Свойство быть *A*-м. инвариантно относительно измеримых по Борелю отображений, а также относительно *A-операции*. Более того, для того чтобы множество было *A*-м., необходимо и достаточно, чтобы оно представляло собой результат *A*-операции, примененной к нек-рой системе замкнутых множеств. Существуют примеры *A*-м., к-рые не являются борелевскими; так, в пространстве 2^I всех замкнутых подмножеств отрезка I действительных чисел множество замкнутых несчетных множеств является *A*-м., но не является борелевским. Любое несчетное *A*-м. топологически содержит канторов совершенное множество. Таким образом, *A*-м. «реализует» континуум-гипотезу: их мощность либо конечна, либо $\aleph_0$, либо $2^{\aleph_0}$. Для *A*-м. справедливы *Лузина принципы отделимости.*

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966; [2] Лузин Н. Н., Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953. *Б. А. Ефимов.*

***CA*-МНОЖЕСТВО** — дополнение к *A-множеству*, лежащему в полном сепарабельном метрич. пространстве X, т. е. $P \subset X$ есть *CA*-м., если $X \setminus P$ является *A*-множеством или, другими словами, *AC*-м. есть *проективное множество* класса 2. Существует пример *CA*-м., не являющегося *A*-множеством. Любое *A*-множество является взаимно однозначным и непрерывным образом нек-рого *CA*-м. (теорема Мазуркевича).

Точка y наз. значением порядка 1 отображения f, если существует одна и только одна точка такая, что $y = f(x)$. Значения порядка 1 B-измеримого отображения f произвольного борелевского множества образуют *CA*-м. (теорема Лузина). Имеет место и обратная теорема: пусть C — нек-рое *CA*-м., принадлежащее пространству X; тогда существует непрерывная функция f, определенная на замкнутом подмножестве пространства иррациональных чисел, такая, что C есть множество точек порядка 1 функции f. Теорема Куратовского о редукции: пусть дана бесконечная последовательность *CA*-м. $U^1, U^2, \ldots$, тогда существует такая последовательность непересекающихся *CA*-м. $V^1, V^2, \ldots$, что $V^n \subset U^n$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.

Лит.: [1] Куратовский К., Топология, пер. с англ., т. 1, М., 1966.

Б. А. Ефимов.

МОДА — одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины. Для случайной величины, имеющей плотность вероятности $p(x)$, М. наз. любая точка x_0 максимума $p(x)$. М. определяется и для дискретных распределений: если значения x_k и случайной величины X с распределением $p_k = \mathsf{P}\{X = x_k\}$ расположены в порядке возрастания, то точка x_m наз. модой, если $p_m \geqslant p_{m-1}$ и $p_m \geqslant p_{m+1}$.

Распределения с одной, двумя или большим числом М. наз. соответственно унимодальными (или одновершинными), бимодальными и мультимодальными. Наиболее важными в теории вероятностей и математич. статистике являются *унимодальные распределения*. Наряду с математич. ожиданием и медианой М. служит характеристикой расположения значений случайной величины. Для унимодального и симметричного относительно нек-рой точки a распределения М. равна a и совпадает с медианой и математич. ожиданием, если последнее существует.

А. В. Прохоров.

МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА — область логики, в к-рой наряду с обычными высказываниями рассматриваются модальные высказывания, т. е. высказывания типа «необходимо, что...», «возможно, что...» и т. п. В математич. логике рассматриваются различные формальные системы М. л., выявляется взаимосвязь между этими системами, изучаются их интерпретации.

Элементы М. л. имелись по существу еще у Аристотеля (4 в. до н. э.), а от него перешли в классич. философию. Впервые М. л. была формализована К. Льюисом [1], к-рый построил пять пропозициональных систем М. л., получивших в литературе обозначения S1—S5 (их формулировки приведены ниже). Затем были построены и исследованы другие системы М. л. Большое разнообразие систем М. л. объясняется тем, что понятия «возможно» и «необходимо» можно уточнять различными способами и, кроме того, по-разному трактовать сложные *модальности* типа «необходимо возможно» и «взаимоотношения» модальностей с логич. связками. Большинство изучавшихся систем М. л. опирается на классич. логику, однако рассматриваются и системы, основанные на интуиционистской логике (см., напр., [6]).

Ниже описывается несколько наиболее хорошо изученных пропозициональных систем М. л. Язык каждой из этих систем получается из языка классич. исчис-

ления высказываний P добавлением новых одноместных связок (модальных операторов) $\Box$ (необходимо) и $\Diamond$ (возможно). Поскольку почти во всех системах имеет место соотношение

$$\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A, \qquad (*)$$

то в качестве исходного берется один модальный оператор, напр. $\Box$, а другой определяется через него с помощью соотношения (*).

Система S1. Схемы аксиом:

1) все формулы вида $\vdash \Box A$, где A — выводимая в P формула,

2) $\Box(\Box A \supset A)$,

3) $\Box(\Box(A \supset B) \& \Box(B \supset C) \supset \Box(A \supset C))$.

Правила вывода:

I) $\dfrac{A \quad A \supset B}{B}$ (*modus ponens*),

II) $\dfrac{\Box A}{A}$,

III) $\dfrac{\Box(A \supset B)\,\Box(B \supset A)}{\Box(\Box A \supset \Box B)}$.

Система S2: S1$+\{\Box(\Box A \supset \Box(A \vee B))\}$.

Система S3: S2$+\{\Box(\Box(A \supset B) \supset \Box(\Box A \supset \Box B))\}$.

Система K. Схемы аксиом:

1) все схемы аксиом исчисления высказываний P,

2) $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$.

Правила вывода: modus ponens и $\dfrac{A}{\Box A}$ ($\Box$-введение).

Система T: K $\vdash\{\Box A \supset A\}=$
$=$ S2 $\vdash\{$правило $\Box$-введения$\}$.

Система B: T$+\{A \supset \Box\Diamond A\}$.

Система S4: S3$+\{\Box(\Box A \supset \Box\Box A)\}=$
$=T+\{\Box A \supset \Box\Box A\}$.

Система S5: S4$+\{\Box(A \supset \Box\Diamond A)\}$.

Среди вышеупомянутых систем важное значение имеет S4, т. к. в ней интерпретируется интуиционистское исчисление высказываний I, т. е. по всякой пропозициональной (немодальной) формуле A можно построить такую формулу A^* модальной логики, что

$$I \vdash A \Longleftrightarrow \text{S4} \vdash A^*.$$

В связи с этим особый интерес представляет система Гжегорчика (см. [5]):

$$\text{G} = \text{S4} + \{\Box(\Box(\Box(A \supset \Box A) \supset A) \supset A) \supset A)\},$$

для к-рой верна теорема о переводе: для любого множества схем аксиом Γ и любой формулы A

$$I + \Gamma \vdash A \Longleftrightarrow \text{S4} + \Gamma^* \vdash A^* \Longleftrightarrow \text{G} + \Gamma^* \vdash A^*,$$

где $\Gamma^* = \{B^* \mid B \in \Gamma\}$, причем G — самая сильная система с таким свойством. Эта теорема позволяет переносить нек-рые свойства (напр., полноту или разрешимость) с расширений системы S4 (или G) на *промежуточные логики*.

Для каждой пропозициональной системы М. л. S можно рассмотреть соответствующую предикатную систему, к-рая получается добавлением к языку системы S предметных переменных, предикатных символов и кванторов $\forall$, $\exists$ (или одного из них). Также добавляются обычные схемы аксиом и правила вывода для кванторов. Кроме того, иногда добавляют и другие аксиомы, описывающие действие модальных операторов на кванторы, напр. т. н. формулу Баркан:

$$\forall x \Box A(x) \supset \Box \forall x A(x).$$

Алгебраич. интерпретация систем М. л. задается нек-рой алгеброй (называемой также матрицей)

$$\mathfrak{M} = \langle M, D; \&^*, \vee^*, \supset^*, \neg^*, \Box^* \rangle,$$

где M — множество *истинностных значений*, D — множество выделенных истинностных значений, $D \subset M$, а $\&^*$, $\vee^*$, $\supset^*$, $\neg^*$, $\Box^*$ — операции на M, соответствующие связкам $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\Box$. Формула наз. общезначимой на алгебре $\mathfrak{M}$, если при всякой оценке ее пропозициональных переменных элементами M она принимает выделенное значение. Система М. л. S наз. полной относительно класса алгебр $\mathscr{K}$, если всякая формула выводима в S тогда и только тогда, когда она общезначима на всякой алгебре из $\mathscr{K}$. Напр., система S4 полна относительно класса конечных т. н. топологических булевых алгебр (см. [3]). Вообще, система S наз. финитно аппроксимируемой, если она полна относительно конечных алгебр. Если система конечно аксиоматизируема и финитно аппроксимируема, то она разрешима, т. е. для нее алгоритмически разрешима проблема распознавания выводимости. Матрица $\mathfrak{M}$ наз. характеристической, или адекватной, для системы S, если S полна относительно $\{\mathfrak{M}\}$. Никакая из упомянутых выше пропозициональных систем М. л. не имеет конечной адекватной матрицы, но каждая из этих систем финитно аппроксимируема и поэтому разрешима. С другой стороны, всякое расширение системы S5 имеет конечную адекватную матрицу с одним выделенным значением. Свойством финитной аппроксимируемости обладают также все расширения системы

$$S4.3 = S4 + \{\Box(\Box A \supset \Box B) \vee \Box(\Box B \supset \Box A)\}.$$

Важным инструментом изучения М. л. являются *Крипке модели*, имеющие вид (W, R, θ), где W — множество «миров», «ситуаций», R — нек-рое отношение на W, θ — оценка пропозициональных переменных подмножествами W. Для $s, t \in W$ отношение sRt можно трактовать как «мир t возможен в мире s». Пару (W, R) наз. структурой Крипке, или остовом (встречается также термин шкала). Формула A наз. общезначимой на остове (W, R), если для всякой оценки θ формула A истинна в модели Крипке (W, R, θ). Система S наз. полной по Крипке, если всякая не выводимая в S формула опровержима на нек-рой структуре Крипке, на к-рой общезначимы все выводимые в S формулы. Напр., система T полна относительно структур (W, R), где R — рефлексивное отношение; S4 полна относительно структур с рефлексивным и транзитивным отношением. Среди конечно аксиоматизируемых расширений системы S4 существуют такие, к-рые не полны по Крипке (см. [7]).

Для предикатных систем М. л. модели Крипке имеют вид (W, R, D, ψ, θ), где $D = \{D_s\}_{s \in W}$, D_s — универсум мира s, ψ — интерпретация предикатных символов в D, а θ — оценка, сопоставляющая каждой предметной переменной нек-рый элемент множества $\bigcup_{s \in W} D_s$. Для систем, содержащих формулу Баркан, надо также потребовать, чтобы

$$sRt \Rightarrow D_t \subseteq D_s.$$

Модели Крипке имеют, как правило, более наглядную структуру, чем алгебраич. модели, поэтому часто они удобнее для изучения различных систем М. л.

Лит.: [1] Lewis C. I., Langford C. H., Symbolic Logic, 2 ed., N. Y., 1959; [2] Фейс Р., Модальная логика, [пер. с англ.], М., 1974; [3] Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; [4] Минц Г. Е., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1968, т. 98, с. 88—111; [5] Grzegorczyk A., «Fundam. math.», 1967, t. 60, N. 2, p. 223—31; [6] Bull R. A., «Notre Dame J. Form. Logic», 1965, t. 6, p. 142—46; [7] Fine K., «Theoria», 1974, v. 40, pt 1, p. 23—29; [8] Gabbay D. M., «Ann. Math. Log.», 1975, v. 8, № 3, p. 237—95.

С. К. Соболев.

МОДАЛЬНОСТЬ — свойство суждения, характеризующее степень его достоверности. Различные М. и взаимосвязь между ними изучаются *модальной логикой.*

М. «необходимо» и «возможно» были введены в логику еще Аристотелем (4 в. до н. э.), к-рый, однако, не придавал им точного смысла. Эти М. наз. основными и обозначаются соответственно символами $\Box$ и $\Diamond$ (иногда L и M). Различные комбинации основных М. и отрицания $\neg$ также являются М. Двойственной к М. Q наз. М. $\overline{Q}$, получаемая из Q заменой каждого вхождения $\Box$ на $\Diamond$, и обратно. В подавляющем большинстве систем модальной логики для М. Q и двойственной ей М. $\overline{Q}$ имеет место эквивалентность

$$Q\neg A \Longleftrightarrow \neg\overline{Q}A. \qquad (*)$$

В принципе можно образовать бесконечное число комбинаций из $\Box$, $\Diamond$ и $\neg$, однако часто в конкретных системах число попарно не эквивалентных М. оказывается ограниченным (ввиду соотношения (*) и наличия аксиом, упрощающих нек-рые М. или сводящих одни М. к другим). Напр., в системе S3 имеется ровно 40 различных М., а в системе S4 их только 12:

$$\Box A,\ \Box\Diamond A,\ \Box\Diamond\Box A,\ \neg\Box A,\ \neg\Box\Diamond A,\ \neg\Box\Diamond\Box A,$$

а также М., двойственные этим. В системе S5 имеется всего 4 М.: A, $\Diamond A$, $\Box A$, $\neg\Diamond A$. С другой стороны, в системе T модальной логики, а также в S1 и S2 число М. бесконечно и, более того, нет редукций М., т. е. две положительные (не содержащие знака $\neg$) М. Q_1 и Q_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $Q_1 = Q_2$.

Иногда к М. относят (формализованные в соответствующих теориях) такие понятия, как «истинно», «доказуемо», «опровержимо», а также связанные со временем «будет», «всегда было» и т. п.

Лит. см. при ст. *Модальная логика.* *С. К. Соболев.*

МОДЕЛЕЙ ТЕОРИЯ — раздел математической логики, изучающий математические *модели*.

Начало М. т. относится к 30-м гг. 20 в., когда были доказаны следующие две основные теоремы.

Теорема 1 (теорема Гёделя — Мальцева). Если каждая конечная подсовокупность совокупности T высказываний языка 1-й ступени совместима, то совместна и вся совокупность T (см. [1]).

Теорема 2 (теорема Лёвенхейма — Сколема — Мальцева). Если совокупность высказываний языка 1-й ступени сигнатуры Ω имеет бесконечную модель, то она имеет модель любой бесконечной мощности, не меньшей мощности сигнатуры Ω.

Теорема 1, называемая теоремой компактности, получила широкое применение в алгебре. На основе этой теоремы А. И. Мальцев создал метод доказательства локальных теорем алгебры (см. *Мальцева локальные теоремы*).

Пусть A — алгебраич. система сигнатуры Ω, $|A|$ — основное множество системы A, $X \subseteq |A|$, $\langle \Omega, X\rangle$ обозначает сигнатуру, получаемую из Ω добавлением символов выделенных элементов c_a для всех $a \in X$, а (A, X) обозначает алгебраич. систему сигнатуры $\langle \Omega, X\rangle$, к-рая является обогащением алгебраич. системы A и в к-рой для каждого $a \in X$ символ c_a интерпретируется элементом a. Множество $O(A)$ всех замкнутых формул сигнатуры $\langle \Omega, |A|\rangle$ языка 1-й ступени, истинных в системе $(A, |A|)$, наз. описанием алгебраической системы A, а множество $D(A)$ тех формул из $O(A)$, к-рые являются либо атомными, либо отрицаниями атомных, наз. диаграммой A. Алгебраич. система B наз. элементарным расширением алгебраич. системы A, если $|A| \subseteq |B|$ и $(B, |A|)$ есть модель для $O(A)$. В этом случае A наз. элементарной подсистемой B. Напр., множество рациональных чисел вместе с обычным отношением порядка является элементарной подсистемой системы действительных чисел с обычным отношением порядка.

Подсистема A алгебраич. системы B сигнатуры Ω тогда и только тогда является элементарной подсистемой системы B, когда для каждой замкнутой формулы $(\exists c)\Phi(v)$ языка 1-й ступени сигнатуры $\langle\Omega, |A|\rangle$, истинной в $(B, |A|)$, найдется такой $a\in|A|$, что $\Phi(c_a)$ истинна в $(B, |A|)$. Из этого критерия сразу следует, что объединение возрастающей цепочки элементарных подсистем является элементарным расширением каждой из этих систем. Если замкнутая $\forall\exists$-формула языка 1-й ступени истинна в каждой системе возрастающей цепочки систем, то эта формула истинна и в объединении этой цепочки (см. [1]).

Пусть сигнатура Ω содержит символ U одноместного отношения. Говорят, что модель A теории T сигнатуры Ω имеет т и п (α, β), если мощность A равна α, а мощность $U(A)=\{a\in|A|\,|\,A\models U(a)\}$ равна β. Т е о р е м а В о т а: если элементарная теория T счетной сигнатуры имеет модель типа (α, β), где $\alpha>\beta$, то T имеет модель типа $(\aleph_1, \aleph_0)$ (см. [7], [10]). В предположении, что справедлива обобщенная гипотеза континуума, элементарная теория счетной сигнатуры имеет модель типа $(\aleph_{\alpha+2}, \aleph_{\alpha+1})$ для каждого α, если она имеет модель типа $(\aleph_1, \aleph_0)$ (см. [10]). При этом же предположении теория $\mathrm{Th}(A)$, где сигнатура A есть $\langle+, \cdot, 0, 1, <, U\rangle$, $|A|$ — множество всех действительных чисел, $U(A)$ — множество целых чисел, а $+$, $\cdot$, 0, 1, $<$ определены обычным образом, не имеет модели типа $(\aleph_2, \aleph_0)$.

Пусть (A, P) обозначает обогащение алгебраич. системы A при помощи предиката P, а $\langle\Omega, P\rangle$ — сигнатуру, полученную из Ω присоединением предикатного символа P. Во многих случаях важно понять, когда в каждой системе из класса K алгебраич. систем сигнатуры $\langle\Omega, P\rangle$ предикат P задается формулой языка 1-й ступени сигнатуры Ω. Частичный ответ на этот вопрос дает т е о р е м а Б е т а: тогда и только тогда существует формула $\Phi(x)$ языка 1-й ступени сигнатуры Ω такая, что формула $(\forall x)(\Phi(x)\leftrightarrow P(x))$ истинна на всех системах аксиоматизируемого класса K сигнатуры $\langle\Omega, P\rangle$, когда множество $\{P|(A, P)\in K\}$ содержит не более одного элемента для каждой алгебраич. системы A сигнатуры Ω (см. [2]).

Многие исследования по М. т. связаны с изучением свойств, сохраняющихся при операциях над алгебраич. системами. К числу важнейших операций относятся гомоморфизмы, прямые и фильтрованные произведения.

Говорят, что высказывание Φ у с т о й ч и в о относительно гомоморфизмов, если из истинности Φ в алгебраич. системе A следует истинность Φ во всех эпиморфных образах A. Формула Φ языка 1-й ступени наз. п о л о ж и т е л ь н о й, если Φ не содержит знаков отрицания и импликации. Доказано (см. [1]), что высказывание Φ языка 1-й ступени устойчиво относительно гомоморфизмов тогда и только тогда, когда Φ эквивалентно положительному высказыванию. Аналогичная теорема верна и для языка $L_{\omega_1\omega}$.

Формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ языка 1-й ступени сигнатуры Ω наз. х о р н о в с к о й, если она может быть получена конъюнкциями и навешиванием кванторов из формул вида $(\Phi_1\&\ldots\&\Phi_s)\to\Phi$, $\neg(\Phi_1\&\ldots\&\Phi_s)$, где $\Phi_1, \ldots, \Phi_s, \Phi$ — атомные формулы языка 1-й ступени сигнатуры Ω. Примерами хорновских формул являются тождества и квазитождества. Центральной в теории ультрапроизведений является т е о р е м а Л о с я (J. Łoś): всякая формула языка 1-й ступени фильтруется по любому *ультрафильтру* (см. [1]). Формула языка 1-й ступени условно фильтруется по любому фильтру тогда и только тогда, когда эта формула эквивалентна хорновской формуле. Имеет место теорема (см. [9]): алгебраич. системы A и B сигнатуры

Ω тогда и только тогда элементарно эквивалентны, когда существует такой ультрафильтр D на множестве I, что A^I/D и B^I/D изоморфны. Мощность фильтрованного произведения бесконечна, если для каждого натурального n число сомножителей мощности n конечно. Если для каждого натурального n множество тех индексов, для к-рых соответствующий сомножитель имеет мощность n, не принадлежит D, то мощность ультрапроизведения по неглавному ультрафильтру D на счетном множестве I равна континууму. Для каждого бесконечного I мощности α существует такой фильтр D на I, что для каждого фильтра D_1 на I, содержащего D, и каждого бесконечного множества A мощность A^I/D_1 не меньше 2^α (см. [1]).

Много применений находит теорема о существовании моделей с большим числом автоморфизмов (см. [3]): для любого линейно упорядоченного множества X в аксиоматизируемом классе K алгебраич. систем, содержащем бесконечную систему, существует такая система A, что $X \subseteq |A|$ и каждое сохраняющее порядок однозначное отображение X на X продолжается до автоморфизма A.

Важными понятиями М. т. являются понятия универсальной, однородной и насыщенной систем. Пусть A и B — алгебраич. системы сигнатуры Ω. Отображение f множества $X \subseteq |A|$ во множество $Y \subseteq |B|$ наз. элементарным, если для каждой формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ языка 1-й ступени сигнатуры Ω и любых $a_1, \ldots, a_n \in X$ имеет место эквивалентность $A \models \Phi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow B \models \Phi(fa_1, \ldots, fa_n)$. Система A наз. α-универсальной, если для каждой системы B, элементарно эквивалентной системе A и имеющей мощность, не превосходящую α, существует элементарное отображение $|B|$ в $|A|$. Система A наз. α-однородной, если для любого множества $X \subseteq |A|$, мощность к-рого меньше α, каждое элементарное отображение X в $|A|$ продолжается до элементарного отображения $|A|$ на $|A|$ (т. е. до автоморфизма A). Система A сигнатуры Ω наз. α-насыщенной, если для каждого множества $X \subseteq |A|$, мощность к-рого меньше α, и каждой совокупности Σ формул языка 1-й ступени сигнатуры $\langle \Omega, X \rangle$, не содержащих свободных переменных, отличных от x_0, из конечной выполнимости Σ в (A, X) следует выполнимость Σ в (A, X). Система A наз. универсальной (соответственно однородной или насыщенной), если A является α-универсальной (соответственно α-однородной или α-насыщенной), где α есть мощность $|A|$. Система тогда и только тогда насыщена, когда она одновременно универсальна и однородна. Две элементарно эквивалентные насыщенные системы одной мощности изоморфны (см. [3]). Все несчетные модели категоричной в несчетных мощностях элементарной теории счетной сигнатуры насыщены (теорема Морли, см. [3], [8]). Большое число примеров α-насыщенных систем доставляют ультрапроизведения. Напр., если D — неглавный ультрафильтр на счетном множестве I, то $\prod_{i \in I} A_i/D$ является $\aleph_1$-насыщенной системой для любых алгебраич. систем $A_i (i \in I)$ счетной сигнатуры Ω.

Основными задачами М. т. являются изучение выразительной возможности формализованного языка и изучение классов структур, определимых средствами этого языка. Найдены нек-рые важные свойства стабильных теорий, еще более детально изучены классы категоричных и суперстабильных теорий.

Основным аппаратом при изучении стабильных теорий является классификация формул и локально совместных множеств формул в этих теориях. Такая классификация осуществляется путем приписывания

формулам рангов. Эти ранги обычно принимают в качестве значений ординалы, а рангующие функции задаются с помощью специальных топологий или другим способом. Изучение рангующих функций и их усовершенствование — богатый источник информации о теориях.

В изучении классов моделей выясняют число различных с точностью до изоморфизма моделей теории в рассматриваемой мощности и наличие специальных моделей, напр. простых, минимальных, насыщенных, однородных, универсальных, конструктивизируемых и т. п., и создают способы их построения.

Классич. примерами применения методов М. т. в математич. анализе являются работы А. Робинсона (A. Robinson) и его школы, сформировавшиеся в самостоятельную науку — *нестандартный анализ*; благодаря работам А. И. Мальцева и его школы развивается применение методов М. т. в топологич. алгебре; новейшие результаты о свойствах стабильных теорий находят использование при изучении конкретных алгебраич. вопросов.

Перечисленные выше проблемы встают и при изучении различных неэлементарных языков, напр., получаемых добавлением новых кванторов, введением в рассмотрение бесконечных выражений, модальностей и т. п.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [2] Робинсон А., Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, пер. с англ., М., 1967; [3] Тайцлин М. А., Теория моделей, Новосиб., 1970; [4] Ершов Ю. Л., Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., 1980; [5] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, М., 1979; [6] Ершов Ю. Л. [и др.], «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 4, с. 37—108; [7] Мальцев А. И., Тр. Четвертого Всесоюзного математического съезда, т. 1, Л., 1963, с. 169—98; [8] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч., Теория моделей, пер. с англ., М., 1977; [9] Сакс Д ж., Теория насыщенных моделей, пер. с англ., М., 1976; [10] Vaught R.L., в сб.: Infinistic methods, N. Y. [a. o.], 1961, p. 303–21; [11] Morley M., Vaught R., «Math. scand.», 1962, v. 11, fasc. 1, p. 37–57; [12] Morley M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1965, v. 114, № 2, p. 514—38; [13] Shelah S., Classification theory and the number of non-isomorphic models, Amst., 1978; [14] Bell I. L., Slomson A. B., Models and ultraproducts. An introduction, Amst.— L., 1969.

А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин.

МОДЕЛЬ — интерпретация *формального языка*. Основным формальным языком является язык L_Ω 1-го порядка (или 1-й ступени) данной сигнатуры Ω, включающей предикатные символы R_i, $i \in I$, функциональные символы f_j, $j \in J$, и константы c_k, $k \in K$. Модель языка L_Ω есть *алгебраическая система* сигнатуры Ω.

Пусть Σ — нек-рое множество замкнутых формул языка L_Ω. Модель для Σ есть М. языка L_Ω, в к-рой истинны все формулы из Σ. Множество Σ наз. совместным, если оно имеет хотя бы одну М. Класс всех М. для Σ обозначается $\mathrm{Mod}\,\Sigma$. Совместность множества Σ означает, что $\mathrm{Mod}\,\Sigma \neq \varnothing$.

Класс K моделей языка L_Ω наз. аксиоматизируемым, если существует такое множество Σ замкнутых формул языка L_Ω, что $K = \mathrm{Mod}\,\Sigma$. Множество $T(K)$ всех замкнутых формул языка L_Ω, истинных в каждой М. из данного класса K моделей языка L_Ω, наз. *элементарной теорией* класса K. Таким образом, класс K моделей языка L_Ω аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = \mathrm{Mod}\,T(K)$. Если класс K состоит из М., изоморфных данной М., то его элементарная теория наз. элементарной теорией этой модели.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — нек-рая М. языка L_Ω, имеющая основное множество A. Каждому элементу $a \in A$ сопоставляют константу c_a и рассматривают язык $L_{\Omega A}$ 1-го порядка сигнатуры ΩA, к-рая получается из Ω добав-

лением констант c_a, $a \in A$. Язык $L_{\Omega A}$ наз. диаграммным языком модели $\mathcal{A}$. Множество $O(\mathcal{A})$ всех замкнутых формул языка $L_{\Omega A}$, истинных в $\mathcal{A}$ при замене каждой константы c_a соответствующим элементом a из A, наз. описанием (или элементарной диаграммой) М. $\mathcal{A}$. Множество $D(\mathcal{A})$ тех формул из $O(\mathcal{A})$, к-рые являются атомными или отрицаниями атомных формул, наз. диаграммой М. $\mathcal{A}$.

Наряду с М. языка 1-го порядка рассматривают также М. других типов (логики с бесконечными формулами, многосортной логики, логики 2-го порядка, *многозначной логики*, *интуиционистской логики* и *модальной логики*).

Лит. см. при ст. *Моделей теория*. *Д. М. Смирнов.*

МОДЕЛЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ — типовая абстрактная или конкретная задача, соответствующая проблеме численного решения нек-рого класса математич. или прикладных задач. Напр., в теории квадратур рассматривают задачу вычисления интегралов от функций, удовлетворяющих нек-рому условию $\|f^{(n)}\| \leqslant A$. Отработка методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений исторически производилась путем исследования свойств методов на моделях из последовательности усложняющихся моделей (отрезок интегрирования $[0, X]$):

1) уравнение $y' = 0$;

2) уравнение $y' = my$, $|m|X$ — порядка 1 (модели 1) и 2) соответствуют задаче интегрирования систем с гладкими решениями на небольших промежутках времени);

3*а*) уравнение $y' = my$, $m < 0$, $|m|X \gg 1$; эта модель соответствует задаче интегрирования на больших промежутках времени систем с устойчивыми решениями;

3*б*) уравнение $y' = x^{\lambda}$; модель уравнения с особенностями производных решения;

4) система $y_1' = m_1 y_1$, $y_2' = m_2 y_2$, $0 > m_1 > m_2$, $|m_2|X \gg |m_1|X$, $|m_1|X$ — порядка 1; модель т. н. *жесткой дифференциальной системы*, у к-рой одни компоненты решения меняются относительно медленно, а другие быстро.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *Н. С. Бахвалов.*

МОДЕЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ — см. *Математическая модель*.

МОДИФИКАЦИЯ аналитического пространства — аналитическое отображение $f\colon X \to Y$ аналитических пространств такое, что для нек-рых аналитических множеств $S \subset X$ и $T \subset Y$ меньших размерностей выполняются условия:

$$f\colon X \setminus S \longrightarrow Y \setminus T \text{ — изоморфизм}$$

и

$$f(S) = T.$$

Модификация f наз. также стягиванием аналитич. множества S на T. Примерами М. являются *моноидальные преобразования*.

См. также *Исключительное аналитическое множество*, *Исключительное подмногообразие*.

Лит.: [1] Behnke H., Stein K., «Math. Ann.», 1951, Bd 124, H. 1, S. 1–16. *А. Л. Онищик.*

МОДУЛЕЙ КАТЕГОРИЯ — категория mod-R, объекты к-рой — правые унитарные модули над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей, а морфизмы — гомоморфизмы R-модулей. Эта категория является важнейшим примером *абелевой категории*. Более того, для всякой малой абелевой категории существует полное точное вложение в нек-рую М. к.

Если $R = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то mod-R есть категория абелевых групп, а если $R = D$-тело (поле), то mod-R есть категория векторных пространств над D.

Свойства М. к. mod-R отражают ряд важных свойств кольца R (см. *Гомологическая классификация колец*), с этой категорией связан ряд важных гомологич. инвариантов кольца, в частности его *гомологические размерности*. Центр М. к. mod-R (т. е. множество естественных преобразований тождественного функтора категории) изоморфен центру кольца R.

В теории колец, гомологич. алгебре и алгебраич. K-теории изучаются различные подкатегории М. к., в частности подкатегория конечно порожденных проективных R-модулей и ассоциированные с ней K-функторы (см. *Алгебраическая K-теория*). По аналогии с двойственностью Понтрягина изучаются двойственности между полными подкатегориями М. к., в частности между подкатегориями конечно порожденных модулей. Напр., установлено, что если R и S — нётеровы кольца и имеет место двойственность между конечно порожденными правыми R-модулями и конечно порожденными левыми S-модулями, то существует бимодуль ${}_SU_R$ такой, что данная двойственность эквивалентна двойственности, определяемой функторами

$$\mathrm{Hom}_R(-, U) \text{ и } \mathrm{Hom}_S(-, U),$$

кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}\,U_R$ изоморфно S, а $\mathrm{End}_S U$ изоморфно R, бимодуль U — конечно порожденный инъективный кообразующий (и как R-модуль, и как S-модуль), кольцо R полусовершенно. Наиболее важным классом колец, возникающим при рассмотрении двойственности модулей, является класс *квазифробениусовых колец*. Артиново слева кольцо R будет квазифробениусовым тогда и только тогда, когда отображение

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, R)$$

определяет двойственность категорий левых и правых конечно порожденных R-модулей.

Лит.: [1] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [2] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, т. 1—2, пер. с англ., М., 1977—79.

А. В. Михалев.

МОДУЛЕЙ ПРОБЛЕМА — классическая проблема о рациональности или унирациональности многообразия модулей алгебраич. кривых рода g.

Римановы поверхности рода g (рассматриваемые с точностью до изоморфизма) зависят от $3g-3$ комплексных параметров — модулей (см. *Модули римановой поверхности*). Множество классов неособых проективных кривых рода g над алгебраически замкнутым полем k обладает структурой квазипроективного алгебраич. многообразия M_g (см. [3] — [5]).

Многообразие M_g в случаях $g=0$ и 1 устроено просто: M_0 состоит из одной точки, а M_1 изоморфно аффинной прямой A^1. Поэтому М. п. относится к кривым рода $g \geqslant 2$ и формулируется следующим образом: является ли рациональным или хотя бы унирациональным многообразие модулей M_g кривых рода $g \geqslant 2$? Рациональность M_g установлена только для $g=2$ (см. [2], там же явно описано многообразие M_2).

Для доказательства унирациональности многообразий M_g построен [6] общий метод, к-рым, в частности, доказана унирациональность M_g для всех $g \leqslant 10$. Доказана унирациональность M_{12}.

Часто М. п. трактуется более широко (см., напр., [5]): к ней относят весь комплекс задач, связанных с существованием пространств модулей тех или иных алгебраич. объектов (многообразий, векторных расслоений, эндоморфизмов и т. д.), с изучением их различных алгебро-геометрич. свойств и с техникой компактификации пространств модулей (см. *Модулей теория*).

Лит.: [1] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y., 1977; [2] Igusa J., «Ann. Math.», 1960, v. 72, № 3, p. 612—49; [3] Mumford D., Geometric invariant theory, B.— [a.o.],

1965; [4] его же, «L'enseignement math.», 1977, t. 23, № 1—2, p. 39—110; [5] Popp H., Moduli theory and classification theory of algebraic varieties. B.— Hdlb.— N.Y., 1977; [6] Severi F., «Atti della R. Acc. Naz. Lincei Rend.», 1915, v. 24, p. 877—88.

В. А. Исковских.

МОДУЛЕЙ ТЕОРИЯ — теория, изучающая непрерывные семейства объектов алгебраич. геометрии.

Пусть A — класс объектов алгебраич. геометрии (многообразий, схем, векторных расслоений и т. п.), на к-ром задано нек-рое отношение эквивалентности R. Основная задача классификации (описания множества классов A/R) состоит из следующих двух частей: 1) описание дискретных инвариантов, к-рые обычно позволяют разбить A/R в счетное число подмножеств, объекты к-рых уже непрерывно зависят от параметров; 2) задание и изучение алгебро-геометрич. структур на множествах параметров. Вторая часть составляет содержание М. т.

М. т. возникла при изучении эллиптич. функций: существует непрерывное семейство различных полей эллиптич. функций (или их моделей — неизоморфных эллиптич. кривых над $\mathbb{C}$), параметризованное комплексными числами. Б. Риман (B. Riemann), к-рому принадлежит и сам термин «модули», показал, что поля алгебраич. функций над $\mathbb{C}$ (или их моделей — компактных римановых поверхностей) рода $g \geqslant 2$ зависят от $3g-3$ непрерывных комплексных параметров — м о д у л е й.

Основные понятия М. т. Пусть S — нек-рая *схема* (комплексное или алгебраич. пространство). С е м е й с т в о о б ъ е к т о в, п а р а м е т р и з о в а н н ы х с х е м о й S (или, как часто говорят, «н а д S», или «с б а з о й S»), — это набор объектов

$$\{X_s \mid s \in S, \quad X_s \in A\},$$

снабженный дополнительной структурой, согласованной со структурой базы S. Эта структура в каждом конкретном случае задается явно. Ф у н к т о р с е м е й с т в — это контравариантный функтор $\mathcal{M}$ из категории схем (или пространств) в категорию множеств, определяемый следующим образом: $\mathcal{M}(S)$ — множество классов изоморфных семейств над S. Каждому морфизму $f\colon T \to S$ сопоставляется отображение $f^*\colon \mathcal{M}(S) \to \mathcal{M}(T)$ посредством взятия индуцированного семейства.

Пусть M — объект в категории схем (комплексных или алгебраич. пространств) и h_M — функтор точек в этой категории, т. е. $h_M = \mathrm{Hom}(S, M)$. Если функтор семейств $\mathcal{M}$ представим, т. е. $\mathcal{M} = h_M$ для нек-рого M, то существует универсальное семейство с базой $\mathcal{M}$, и M наз. т о н к о й с х е м о й (соответственно т о н к и м к о м п л е к с н ы м или а л г е б р а и ч е с к и м п р о с т р а н с т в о м) м о д у л е й. Функтор $\mathcal{M}$ представим в очень немногих случаях, в связи с чем было введено также понятие грубой схемы модулей; M наз. г р у б о й с х е м о й м о д у л е й, если существует морфизм функторов $\varphi\colon \mathcal{M} \to h_M$, обладающий свойствами: а) если $S = \mathrm{Spec}\, K = pt$ — одна точка (где K — алгебраически замкнутое поле), то отображение $\varphi\colon \mathcal{M}(pt) \to h_M(pt)$ биективно, иначе говоря, множество геометрич. точек схемы M находится в естественном взаимно однозначном соответствии с множеством классов эквивалентности параметризуемых объектов; б) для каждой схемы N и морфизма функторов $\psi\colon \mathcal{M} \to h_N$ существует единственный морфизм $\chi\colon h_M \to h_N$ такой, что $\psi = \chi \circ \varphi$. Аналогично определяются грубая схема комплексного и алгебраического пространств модулей.

Грубая схема модулей хотя и параметризует однозначно классы изучаемых объектов с заданными дискретными инвариантами, но естественное семейство над ней не обладает (в отличие от семейства над тонкой схемой модулей) сильным свойством универсальности.

Грубая схема (пространство) модулей существует уже в достаточно большом числе случаев.

Примеры. 1) Модули алгебраических кривых. Пусть $A/R = \mathfrak{M}_g$ (соответственно $\overline{\mathfrak{M}}_g$) — множество классов изоморфных проективных неособых кривых (соответственно стабильных кривых) рода $g \geqslant 2$ над алгебраически замкнутым полем K. Семейство над S — это гладкий (плоский) собственный морфизм схем $f: X \to S$, слоями к-рого являются гладкие (стабильные) кривые рода g. Тогда существует грубая (но не тонкая) схема модулей M_g (соответственно M_g), являющаяся квазипроективным (проективным) неприводимым и нормальным многообразием над K. (см. [3], [5], [6]).

2) Модули алгебраических кривых с якобиевой жесткостью. Пусть $f: X \to S$ — гладкое семейство проективных кривых (соответственно плоское семейство стабильных кривых) рода $g \geqslant 1$, n — целое число, обратимое на S, и $R^1 f_* (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ — первый прямой образ постоянного пучка $\mathbb{Z}\ n\mathbb{Z}$ в этальной топологии. Тогда $R^1 f_* (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ локально свободен, имеет ранг $2g$ и снабжен локально невырожденной симплектич. формой со значением в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, с точностью до обратимого элемента из $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Якобиева структура уровня n на X — это задание симплектич. изоморфизма

$$R^1 f_* (\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}.$$

Пусть $\mathscr{M}_{g,n}$ (соответственно $\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$) — функтор семейств гладких (стабильных) кривых рода $g \geqslant 2$ с якобиевой жесткостью уровня n. Тогда при $n \geqslant 3$ функтор $\mathscr{M}_{g,n}$ (соответственно $\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$) представим квазипроективной (проективной) схемой $M_{g,n}$ (соответственно $\overline{M}_{g,n}$) над $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[1/n, \xi_n]$, где ξ_n — первообразный корень n-й степени из 1, т. е. существует тонкая схема модулей $M_{g,n}$ (соответственно $\overline{M}_{g,n}$) для гладких (стабильных) кривых рода $g \geqslant 2$ над полем характеристики взаимно простой с n, снабженных якобиевой жесткостью уровня n. Для достаточно больших n схема $M_{g,n}$ является гладкой [5].

3) Поляризованные алгебраические многообразия. Поляризованным семейством наз. пара $(X/S, \mathfrak{L}/S)$, где X/S — гладкое семейство многообразий, т. е. гладкий собственный морфизм $f: X \to S$, а $\mathfrak{L}/S$ — класс относительно обильного обратимого пучка $\mathscr{L}_{X/S}$ в $\operatorname{Hom}(S, \operatorname{Pic} X/S)$ по модулю $\operatorname{Hom}(S, \operatorname{Pic}^\circ X/S)$, где $\operatorname{Pic} X/S$ — относительная схема Пикара, а $\operatorname{Pic}^\circ X/S$ — ее связная компонента нулевого сечения. В этом случае строится функтор поляризованных семейств $\mathscr{M}_h$ с заданным многочленом Гильберта h. Без дополнительных ограничений этот функтор не представим. Существование грубого пространства модулей известно (1982) лишь в отдельных случаях.

Для поляризованных алгебраич. многообразий также существует понятие жесткости уровня n.

4) Векторные расслоения. Пусть A/R — множество классов векторных расслоений ранга n на алгебраич. многообразии X. Семейство над S — это векторное расслоение E на $X \times S$. Грубое пространство модулей $M_{d,n}$ существует здесь как нормальное проективное многообразие для полустабильных векторных расслоений ранга n и степени d на неособой проективной алгебраич. кривой X над алгебраически замкнутым полем K. Стабильные векторные расслоения в $\overline{M}_{d,n}$ параметризуются открытым гладким подмногообразием $M_{d,n} \subset \overline{M}_{d,n}$. Если d и n взаимно просты, то $M_{d,n} = \overline{M}_{d,n}$. Аналогичные результаты получены и для стабильных векторных расслоений на алгебраич. поверхности. Более того, в этом случае существует тонкая схема модулей (см. [7], [10] — [14]).

Локальная и глобальная теории. Локальная теория возникла как теория деформаций комплексных структур (см. *Деформация* 1) и 2)). Основными методами глобальной теории являются теория представимых функторов и геометрич. теория инвариантов, теория алгебраич. стеков и алгебраизация формальных модулей.

Метод построения глобального пространства модулей восходит к классической *инвариантов теории*. Он заключается в следующем. Строится достаточно большое семейство $X \to H$, содержащее представителей всех классов эквивалентности изучаемых объектов, причем такое, что отношение эквивалентности на H сводится к действию алгебраич. группы G. Затем развивается теория действия алгебраич. групп на алгебраич. многообразиях (схемах, пространствах) с целью выяснения условий существования фактора H/G в соответствующей категории. Основным инструментом построения семейства $X \to H$ является теория *Гильберта схем*. При таком подходе трудности построения семейства $X \to H$ сводятся к проблеме одновременного погружения изучаемых объектов в проективное пространство. Важным результатом о возможности такого одновременного погружения является теорема Мацусаки. Трудной проблемой остается и проблема существования фактора H/G. Имеются понятия категорного и геометрич. факторов. Конструкция грубого пространства модулей сводится к задаче о существовании геометрич. фактора, при этом используется понятие стабильности точек, соответствующее понятию орбиты общего положения. Результаты о действиях редуктивных групп на алгебраич. многообразиях над полями характеристики 0 распространяются и на случай полей характеристики $p>0$.

Другой подход к глобальной М. т.— метод алгебраич. стеков, т. е. метод глобализации локальной теории деформаций. Первый шаг в исследовании представимости глобального функтора семейств при таком подходе — установление алгебраизуемости формальной версальной деформации для каждого объекта X_0. Трудностью для построения глобального пространства модулей является то, что не всегда факторизация базы семейства по отношению эквивалентности будет отделимым пространством. В таких случаях заменой объекта, представляющего функтор $\mathscr{M}$, служит алгебраич. стек, изучение свойств к-рого позволяет получить нек-рую информацию о пространстве модулей.

Один из подходов к глобальной М. т. над $\mathbb{C}$ — это теория *отображения периодов*. Основным объектом здесь является классифицирующее пространство D поляризованных *Ходжа структур* веса k для заданных чисел Ходжа. Для семейства $X \to S$ поляризованных алгебраич. многообразий над $\mathbb{C}$ периоды определяют отображение S в соответствующее классифицирующее пространство D структур Ходжа. Проблема модулей сводится к изучению условий биективности отображений периодов. Наличие локальной (глобальной) инъективности для отображения периодов — это т. н. л о к а л ь н а я (г л о б а л ь н а я) п р о б л е м а Т о р е л л и. На этом пути существование грубых пространств модулей доказано для кривых, абелевых многообразий и $K3$-поверхностей.

Задача компактификации многообразия модулей M заключается в нахождении естественного и полного (проективного или компактного в теории над полем $\mathbb{C}$) многообразия $\overline{M}$, содержащего M в качестве плотного открытого подмножества, а также в описании и геометрич. интерпретации границы $\overline{M} \setminus M$. В примере 1) естественной компактификацией грубого многообразия модулей M_g кривых рода $g \geqslant 2$ служит проективное многообразие модулей $\overline{M}_g$ стабильных кривых. В примере 4) многообразие стабильных векторных расслоений

ранга n и степени d на алгебраич. кривой само является проективным и гладким, если $(d, n)=1$. Для поляризованных абелевых многообразий над $\mathbb{C}$ известны несколько способов компактификации многообразий модулей.

Лит.: [1] Artin M., Algebraization of formal moduli I. Global Analysis, Tokyo, 1969, p. 21—71; [2] его же, «Invent. math.», 1974, v. 27, p. 165—89; [3] Делинь П., Мамфорд Д., «Математика», 1972, т. 16, № 3, с. 13—53; [4] Дьёдонне Ж., Кэррол Дж., Мамфорд Д., Геометрическая теория инвариантов, пер. с англ., М., 1974; [5] Mumford D., Geometric invariant theory, B. [a.o.], 1965; [6] его же, «Enseignement math.», 1977, v. 23; [7] Gieseker D., «Invent. math.», 1977, v. 43, p. 233—82; [8] его же, «Ann. Math.», 1977, v. 106, p. 45—60; [9] Matsusaka T., «Amer. J. Math.», 1972, v. 94, № 4, p. 1027—77; [10] Newstead P. E., Lectures on introduction to moduli problems and orbit spaces, B.—[a.o.], 1978; [11] Okonek C., Schneider M., Spindler H., Vector budles on complex projective spaces, Boston, 1980; [12] Popp H., Moduli theory and classification theory of algebraic varieties, B.—[a. o.], 1977; [13] Seshadri C. S., «Ann. Math.», 1967, v. 85, p. 302—36; [14] Тюрин А. Н., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 6, с. 59—88.

В. А. Исковских.

МОДУЛИ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ — численные характеристики (параметры), одни и те же для всех конформно эквивалентных римановых поверхностей, в своей совокупности характеризующие конформный класс эквивалентности данной римановой поверхности. При этом две римановы поверхности R_1 и R_2 наз. конформно эквивалентными, если существует конформное отображение R_1 на R_2. Напр., конформные классы компактных римановых поверхностей топологич. рода $g>1$ характеризуются $6g-6$ действительными М. р. п.; риманова поверхность типа тора ($g=1$) характеризуется двумя модулями; n-связная плоская область, рассматриваемая как риманова поверхность с краем, при $n\geqslant 3$ характеризуется $3n-6$ модулями. О структуре пространства М. р. п. см. *Римановых поверхностей конформные классы*.

Необходимым условием конформной эквивалентности двух плоских областей является одинаковая связность этих областей. Согласно *Римана теореме* все односвязные области с более чем одной граничной точкой конформно эквивалентны друг другу: каждую такую область можно конформно отобразить на одну и ту же канонич. область, в качестве к-рой обычно рассматривают единичный круг. Для областей связности n, $n\geqslant 2$, точного эквивалента теоремы Римана не существует: нельзя указать какую-либо фиксированную область, на к-рую можно однолистно и конформно отобразить все области данного порядка связности. Это привело к более гибкому определению канонич. n-связной области, к-рое указывает общую геометрич. структуру этой области, но не фиксирует ее модулей (см. *Конформное отображение*).

Каждая двусвязная область D плоскости z с невырожденными граничными континуумами может быть конформно отображена на нек-рое круговое кольцо $r<|w|<R$, $0<r<R<\infty$. Отношение R/r радиусов граничных окружностей этого кольца является конформным инвариантом и наз. модулем двусвязной области D. Пусть D — область связности n, $n\geqslant 3$, с невырожденной границей. Область D можно конформно отобразить на нек-рую n-связную круговую область Δ, представляющую собой круговое кольцо $r<|w|<R$ с $n-2$ выброшенными кругами, ограниченными окружностями $C_k=\{w:|w-w_k|\ r_k\}$, $k=1, \ldots, n-2$; окружности C_k, $k=1, \ldots, n-2$, лежат в кольце $r<|w|<R$ и попарно не имеют общих точек. При этом можно считать, что $R=1$ и $w_1>0$. Тогда область Δ зависит от $3n-6$ действительных параметров: от $n-1$ чисел r, $r_1, \ldots, r_{n-2}$ и от $2n-5$ действительных параметров, определяющих центры w_k окружностей C_k, $k=1, \ldots, n-2$. Эти $3n-6$ действительных параметров

и являются модулями n-связной области D в случае $n \geqslant 3$.

В качестве модулей n-связной области D можно взять и другие μ действительных параметров ($\mu = 1$, если $n = 2$, и $\mu = 3n-6$, если $n \geqslant 3$), определяющих конформное отображение области D на нек-рую канонич. n-связную область другого вида.

Лит.: [1] Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, пер. с англ., М., 1960, с. 74, 325; [2] Берс Л., «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 4, с. 153—98; [3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [4] Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, пер. с англ., М., 1953. *Г. В. Кузьмина, Е. Д. Соломенцев.*

МОДУЛЬ — числовая характеристика какого-либо математич. объекта. Обычно значение М.— неотрицательное действительное число — элемент $\mathbb{R}^+$, обладающий нек-рыми характеристич. свойствами, обусловленными свойствами множества Ω рассматриваемых объектов. Понятие М. фигурирует в различных разделах математики, хотя иногда и под другими названиями — *абсолютное значение*, *норма* и т. п. Все они, в сущности, являются обобщениями понятия *абсолютной величины* действительного или комплексного числа (но термин М. обычно означает обобщение специального вида). При этом функция $\Omega \to \mathbb{R}^+$ оказывается морфизмом нек-рой структуры в Ω на одну из (алгебраических) структур в $\mathbb{R}^+$, среди к-рых важнейшие — это порядок, аддитивность и мультипликативность. При этом необходимо сохранение основных свойств абсолютной величины (см. ниже α) — ε)). В более абстрактных ситуациях вместо $\mathbb{R}^+$ естественно использовать упорядоченные полукольца (такой концепции М. удовлетворяют, напр., *мера*, *емкость*, *масса* и т. д.). Наконец, термином М. обозначаются числовые характеристики и др. объектов: таковы, напр., модуль плоской области, *модуль кольца*, *модули римановой поверхности*, *непрерывности модуль*, *гладкости модуль* (и даже — М. в теории упругости (сжатия, сдвига)). Однако во всех таких случаях можно ввести величины, функционально зависящие от такого М. и более адекватно отражающие природу рассматриваемых объектов (напр., экстремальную длину вместо М. семейства кривых).

Примеры. 1) М. элемента x *полуупорядоченного пространства* P — число

$$|x| = x^+ + x^-,$$

где x^+ (x^-) — положительная (отрицательная) часть x. При этом, как и для действительных чисел,

α) $|x| \geqslant x, -x$; $|x| = |-x|$;

β) $|x| = 0 \iff x = 0$ (0 — нуль в P).

2) М. элемента x отделимого *предгильбертова пространства* H, в частности конечномерного векторного пространства, — число

$$|x| = \langle x, x\rangle^{1/2},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в H. Это — одна из норм в H, и потому

γ) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

δ) $|\lambda x| = |\lambda| \|x\|$, λ — скаляр.

3) М. элемента x локально компактного тела — число

$$|x| = \mu(xS)/\mu(S) \quad (x \neq 0) \text{ или } 0 \quad (x = 0),$$

где μ — мера Хаара на аддитивной группе K, S — измеримое множество в ней. При этом, как и для чисел из $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$,

ε) $|xy| = |x||y|$.

Обобщением этого понятия является *модуль автоморфизма*.

4) М. эндоморфизма A векторного пространства V над полем K (частный случай М. автоморфизма) — число $\mathrm{mod}_V\ (A)$, оказывающееся равным просто $\mathrm{mod}_K\ (\det A)=|\det A|$, где $|\cdot|$ означает М. элемента из примера 3). *М. И. Войцеховский.*

МОДУЛЬ — абелева группа с кольцом операторов. М. является обобщением (линейного) векторного пространства над полем K для случая, когда K заменяется нек-рым кольцом.

Пусть задано кольцо A. Аддитивная абелева группа M наз. л е в ы м A-м о д у л е м, если определено отображение $A\times M\to M$, значение к-рого на паре (a, m) для $a\in A$, $m\in M$ записывается как am, причем выполняются аксиомы:

1) $a(m_1+m_2)=am_1+am_2$,
2) $(a_1+a_2)m=a_1m+a_2m$,
3) $a_1(a_2m)=(a_1a_2)m$.

Если кольцо A обладает единицей, то обычно требуют дополнительно, чтобы для любого $m\in M$ выполнялось равенство $1m=m$. М. с этим свойством наз. у н и т а р н ы м, или у н и т а л ь н ы м.

Аналогично определяются п р а в ы е A-м о д у л и; при этом аксиома 3) заменяется условием $(ma_1)a_2=m(a_1a_2)$. Любой правый A-модуль можно рассматривать как левый A^0-модуль над кольцом A^0, антиизоморфным кольцу A, поэтому любому утверждению о правых A-модулях соответствует нек-рое утверждение о левых A^0-модулях и наоборот. В случае, когда кольцо A коммутативно, любой левый A-модуль можно рассматривать как правый A-модуль, и различие между левыми и правыми М. исчезает. Ниже будут рассматриваться только левые A-модули.

Простейшие примеры М. (конечные абелевы группы, т.е. $\mathbb{Z}$-м о д у л и) появляются уже у К. Гаусса (C. Gauss) как группы классов бинарных квадратичных форм. Общее понятие М. встречается впервые в 60—80-х гг. 19 в. в работах Р. Дедекинда (R. Dedekind) и Л. Кронекера (L. Kronecker), посвященных арифметике полей алгебраич. чисел и алгебраич. функций. Проводившееся примерно в это же время исследование конечномерных ассоциативных алгебр, и в частности групповых алгебр конечных групп (Б. Пирс, B. Peirce, Ф. Фробениус, F. Frobenius), привело к изучению идеалов нек-рых некоммутативных колец. Первоначально теория М. развивалась преимущественно как теория идеалов нек-рого кольца. Лишь позднее в работах Э. Нётер (E. Noether) и В. Крулля (W. Krull) было замечено, что многие результаты удобнее формулировать и доказывать в терминах произвольных М., а не только идеалов. Последующее развитие теории М. связано с применением методов и идей теории категорий, в частности методов гомологич. алгебры.

П р и м е р ы м о д у л е й. 1) Любая абелева группа M является М. над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Для $a\in\mathbb{Z}$ и $m\in M$ произведение am определяется как результат сложения m a раз.

2) В случае, когда A — поле, понятие унитарного A-модуля в точности эквивалентно понятию линейного векторного пространства над A.

3) Координатное n-мерное векторное пространство V над полем K можно рассматривать как М. над кольцом $M_n(K)$ всех $(n\times n)$-матриц с коэффициентами из K. Для $v\in V$ и $X\in M_n(K)$ произведение Xv определяется как умножение матрицы X на столбец координат вектора v.

4) Ассоциативное кольцо A является левым A-модулем. Умножение элементов кольца на элементы М. совпадает с обычным умножением в A.

5) Дифференциальные формы на гладком многообразии X снабжены естественной структурой М. над кольцом всех гладких функций на X.

6) С любой абелевой группой M связано ассоциативное кольцо с единицей $\mathrm{End}(M)$ всех эндоморфизмов группы M. Группа M снабжена естественной структурой $\mathrm{End}(M)$-модуля.

Если на M задана структура A-модуля для нек-рого кольца A, то отображение $m \to am$ является эндоморфизмом M для любого $a \in M$. Сопоставляя элементу $a \in A$ порождаемый им эндоморфизм M, получают гомоморфизм φ кольца A в $\mathrm{End}(M)$. Наоборот, любой гомоморфизм $\varphi: A \to \mathrm{End}(M)$ определяет на M структуру A-модуля. Таким образом, задание структуры A-модуля на абелевой группе M равносильно заданию гомоморфизма $\varphi: A \to \mathrm{End}(M)$. Такой гомоморфизм наз. также представлением кольца A, а M наз. модулем представления. С любым представлением φ связан двусторонний идеал $\mathrm{Ann}(M) = \mathrm{Ker}\,\varphi$, состоящий из элементов $a \in A$ таких, что $am = 0$ для всех $m \in M$. Этот идеал наз. аннулятором модуля M. В случае, когда $\mathrm{Ann}(M) = 0$, представление наз. точным, M — точным модулем.

Очевидно, что модуль M можно рассматривать также как М. над факторкольцом $A/\mathrm{Ann}(M)$. В частности, хотя определение М. и не предполагает ассоциативности кольца A, кольцо $A/\mathrm{Ann}(M)$ всегда ассоциативно. Поэтому в большинстве случаев достаточно ограничиться рассмотрением М. над ассоциативными кольцами. Ниже, везде, где не оговорено противное, кольцо A будет предполагаться ассоциативным.

G-модули. Пусть G — нек-рая группа. Аддитивная абелева группа M наз. левым G-модулем, если задано отображение $G \times M \to M$, значение к-рого на паре (g, m), где $g \in G$, $m \in M$, записывается как gm, причем для любого $g \in G$ отображение $m \to gm$ является эндоморфизмом группы M, для любых $g_1, g_2 \in G$, $m \in M$, $(g_1 g_2)m = g_1(g_2 m)$ и для всех $m \in M$, $1m = m$, где 1 — единица группы G. Для любого $g \in G$ отображение $m \mapsto gm$ является автоморфизмом группы M.

Аналогично можно определить правые G-модули. При $gm = mg^{-1}$ любой правый G-модуль будет левым G-модулем.

Примеры G-модулей. 1) Пусть K — расширение Галуа нек-рого поля k с группой Галуа G. Тогда аддитивная и мультипликативная группы поля K снабжены естественной структурой G-модуля. Если k — поле алгебраич. чисел, то G-модулями также являются аддитивная группа кольца целых чисел поля K, группа единиц поля K, группа дивизоров и группа классов дивизоров поля K, и т. д. М. над группой Галуа наз. также модулями Галуа.

2) Пусть задано нек-рое расширение абелевой группы M, т. е. точная последовательность групп

$$1 \to M \to F \to G \to 1,$$

где M — абелев нормальный делитель группы F и G — произвольная группа. Тогда группу M можно снабдить естественной структурой G-модуля, положив для $g \in M$, $m \in M$, $gm = g\bar{m}g^{-1}$, где $\bar{g}$ — нек-рый прообраз элемента g в группе F.

В тех случаях, когда групповая операция в абелевой группе M записывается мультипликативно (напр., M — мультипликативная группа нек-рого поля), вместо записи gm используют также запись m^g, т. е. операторы из группы G записывают как показатели.

Пусть задан G-модуль M. Сопоставляя элементу $g \in G$ автоморфизм $m \mapsto gm$ группы M, получают гомоморфизм группы G в группу обратимых элементов кольца $\mathrm{End}(M)$. Наоборот, любой гомоморфизм группы G в группу обратимых элементов кольца $\mathrm{End}(M)$ задает на M структуру G-модуля.

Понятия М. над кольцом и G-модуля тесно связаны. Именно, любой G-модуль M можно рассматривать как

М. над групповым кольцом $\mathbb{Z}G$, если распространить действие группы G на M по линейности, т. е. положить

$$\left(\sum a_i g_i\right) m = \sum a_i (g_i m),$$

где $a_i \in Z$, $g_i \in G$, $m \in M$. Наоборот, если на M задана структура унитарного $\mathbb{Z}G$-модуля, то M можно рассматривать как G-модуль.

В случае, когда M является K-модулем над нек-рым коммутативным кольцом K и одновременно G-модулем, причем действие элементов группы G на M перестановочно с действием элементов K, M можно снабдить структурой KG-модуля, распространяя действие с G на KG по линейности. Напр., если V — линейное векторное пространство над полем K, то задание структуры KG-модуля на V эквивалентно заданию представления G в пространстве V.

Используя стандартную инволюцию $g \to g^{-1}$ в группе G, любой левый G-модуль M можно превратить в правый G-модуль, положив $mg = g^{-1}m$ для $m \in M$, $g \in G$. Аналогично, любой правый G-модуль можно превратить в левый G-модуль.

Модуль над алгеброй Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над коммутативным кольцом K и M — нек-рый K-модуль. Задание структуры $\mathfrak{g}$-модуля на M состоит в задании K-эндоморфизма $m \longmapsto gm$ группы M для каждого $g \in \mathfrak{g}$, причем требуется выполнение аксиомы

$$[g_1, g_2]m = g_1(g_2 m) - g_2(g_1 m)$$

для любых $g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$, $m \in M$. Это определение отличается от данного ранее определения A-модуля. Задание на M структуры $\mathfrak{g}$-модуля равносильно заданию K-гомоморфизма $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли кольца $\mathrm{End}(M)$. Модуль M над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ можно рассматривать также как М. в обычном смысле над универсальной обертывающей алгеброй алгебры $\mathfrak{g}$.

Конструкции в теории модулей. Исходя из заданных A-модулей, можно получать новые A-модули при помощи ряда стандартных построений. Так, с любым модулем M связана *решетка* всех его подмодулей. Напр., если кольцо A рассматривать как левый М. над собой, то его левые подмодули — это в точности левые идеалы кольца A. Ряд важных типов М. определяется в терминах решетки подмодулей. Напр., условие обрыва убывающих (возрастающих) цепей подмодулей определяет *артиновы модули* (*нётеровы модули*). Условие отсутствия нетривиальных подмодулей, т. е. подмодулей, отличных от 0 и всего М., выделяет *неприводимые модули*.

Для модуля M и любого его подмодуля N факторгруппу M/N можно снабдить структурой A-модуля. Этот модуль наз. фактормодулем M по N.

Гомоморфизм A-модулей определяется как гомоморфизм абелевых групп $f: M \to N$, перестановочный с умножением на элементы кольца A, т. е. удовлетворяющий условию $f(am) = af(m)$ для всех $m \in M$, $a \in A$. Если заданы два гомоморфизма $f_1, f_2: M \to N$, то их сумма, определяемая формулой $(f_1+f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m)$, снова будет гомоморфизмом A-модулей. Это сложение задает на множестве $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ всех гомоморфизмов модуля M в N строение абелевой группы. Для любого гомоморфизма $f: M \to N$ определены подмодули $\mathrm{Ker}\, f$ (ядро f) и $\mathrm{Im}\, f$ (образ f), а также фактормодули $\mathrm{Coker}\, f = N/\mathrm{Im}\, f$ (коядро f) и $\mathrm{Coim}\, f = M/\mathrm{Ker}\, f$ (кообраз f). М. $\mathrm{Im}\, f$ и $\mathrm{Coim}\, f$ канонически изоморфны, поэтому их обычно отождествляют. Напр., для любого левого идеала J кольца A определен фактормодуль A/J. М. A/J неприводим тогда и только тогда, когда J — максимальный левый идеал. Если M — нек-рый неприводимый A-модуль, не аннулируемый кольцом A, то M изоморфен М. A/J для нек-рого максимального левого идеала J.

Для любого семейства A-модулей $\{M_i\}$, где i пробегает нек-рое множество индексов J, в категории A-модулей существуют прямая сумма и прямое произведение семейства $\{M_i\}$. При этом элементы прямого произведения $\prod_{i\in J} M_i$ можно интерпретировать как векторы $(\ldots, m_i, \ldots)$, компоненты к-рых занумерованы множеством J, причем для каждого индекса i, $m_i \in M_i$. Сложение таких векторов и умножение их на элементы кольца определяются покомпонентно. Прямую сумму $\coprod_{i\in J} M_i$ семейства $\{M_i\}$ можно интерпретировать как подмодуль прямого произведения, состоящий из векторов, у к-рых все компоненты, кроме конечного числа, равны нулю.

Для проективной (индуктивной) системы A-модулей проективный (индуктивный) предел этой системы можно естественным образом снабдить структурой A-модуля. Прямое произведение и прямая сумма М. могут рассматриваться как частные случаи понятий проективного и индуктивного пределов.

Образующие и соотношения. Пусть X — нек-рое подмножество A-модуля M. Подмодулем, порожденным множеством X, наз. пересечение всех подмодулей модуля M, содержащих X. Если этот подмодуль совпадает с M, то X наз. семейством (или системой) образующих модуля M. М., допускающий конечное семейство образующих, наз. конечно порожденным модулем. Напр., в нётеровом кольце любой идеал является конечно порожденным М., прямая сумма конечного числа конечно порожденных М. снова конечно порождена. Любой фактормодуль конечно порожденного М. также конечно порожден. Для построения системы образующих модуля M часто оказывается полезной лемма Накаямы: для любого идеала $\mathfrak{A}$, содержащегося в радикале кольца A, из условия $\mathfrak{A}M = M$ следует $M = 0$. В частности, в условиях леммы Накаямы элементы $m_1, \ldots, m_r$ являются системой образующих для M, если их образы порождают модуль $M/\mathfrak{A}M$. Это соображение особенно часто используется в случае, когда A — локальное кольцо и $\mathfrak{A}$ — максимальный идеал в A.

Пусть M — модуль с системой образующих $\{x_i\}_{i\in J}$. Тогда отображение $\varphi: y_i \to x_i$ определяет эпиморфизм φ свободного A-модуля F с образующими $\{y_i\}_{i\in J}$ на M (М. F можно определить как множество формальных конечных сумм $\Sigma a_i y_i$, $a_i \in A$, отображение φ распространяется с образующих на элементы М. F по линейности). Элементы М. $R = \operatorname{Ker}\varphi$ наз. соотношениями между образующими $\{x_i\}$ модуля M. Если модуль M можно представить как фактормодуль конечно порожденного свободного М. F так, чтобы М. соотношений R также был конечно порожден, что M наз. конечно представимым модулем. Напр., над нётеровым кольцом A любой конечно порожденный М. конечно представим. В общем случае конечная представимость не следует из конечной порожденности.

Замена кольца. Существуют стандартные конструкции, позволяющие рассматривать A-модуль M как М. над нек-рым другим кольцом. Напр., пусть задан гомоморфизм колец $\varphi: B \to A$. Тогда, полагая $bm = \varphi(b)m$, можно рассматривать M как B-модуль. Если модуль M — унитарный A-модуль, и гомоморфизм φ переводит единицу в единицу, то M станет унитарным B-модулем.

Пусть задан нек-рый гомоморфизм колец $\varphi: A \to B$ и A-модуль M. Тогда B можно снабдить структурой (B, A)-модуля, полагая $ba = b\varphi(a)$ для $b \in B$, $a \in A$, и можно рассмотреть левый B-модуль $B \otimes_A M$. Говорят, что этот М. получен из M расширением скаляров.

Категория модулей. Класс всех М. над заданным кольцом A с гомоморфизмами М. в качестве морфизмов образует *абелеву категорию*, обозначаемую A-mod. Из функторов, определенных на этой категории, наиболее важны функторы Hom (гомоморфизмы) и $\otimes$ (тензорное произведение). Функтор Hom принимает значения в категории абелевых групп и сопоставляет паре A-модулей M, N, группу $\mathrm{Hom}_A(M, N)$. Для $f: M_1 \to M$ и $\varphi: N \to N_1$ очевидным образом определяются отображения

$$f': \mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$$

и

$$\varphi': \mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, N_1),$$

т. е. функтор Hom контравариантен по первому аргументу и ковариантен по второму. В случае, когда M или N несет структуру бимодуля, группа $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ обладает дополнительной модульной структурой. Если N есть (A,B)-модуль, то $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ — правый B-модуль, а если M есть (A, B)-бимодуль, то $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ — левый B-модуль.

Функтор $\otimes_A$ ставит в соответствие паре M, N, где M — правый A-модуль, а N — левый A-модуль, тензорное произведение $M \otimes_A N$ модулей M и N над кольцом A. Этот функтор принимает значения в категории абелевых групп и ковариантен как по M, так и по N. В случае, когда M или N — бимодули, группу $M \otimes_A N$ можно снабдить дополнительной структурой. Именно, если M есть (B, A)-модуль, то $M \otimes_A N$ есть B-модуль, а если N есть (A, B)-бимодуль, то $M \otimes_A N$ — правый B-модуль. Изучение функторов Hom и $\otimes$, а также их производных функторов является одной из основных задач гомологич. алгебры.

Многие важные типы М. характеризуются в терминах функторов Hom и $\otimes$. Так, *проективный модуль* M определяется требованием, чтобы функтор $\mathrm{Hom}_A(M, X)$ (от X) был точным. Аналогично, *инъективный модуль* N определяется требованием точности $\mathrm{Hom}_A(X, N)$ (от X). *Плоский модуль* M определяется требованием точности функтора $M \otimes_A X$.

М. над данным кольцом A можно рассматривать с двух точек зрения.

1) Можно изучать М. с точки зрения их внутренней структуры. Основной задачей здесь является полная классификация М., т. е. построение для каждого М. системы инвариантов, характеризующей этот М. с точностью до изоморфизма, и умение по заданному набору инвариантов строить М. с этими инвариантами. Для нек-рых типов колец такое описание возможно. Напр., если M — конечно порожденный М. над групповым кольцом KG конечной группы G, где K — нек-рое поле, характеристика к-рого взаимно проста с порядком G, то M представим в виде конечной прямой суммы неприводимых подмодулей (модуль M вполне приводим). Это представление определено однозначно с точностью до изоморфизма (сами неприводимые подмодули в общем случае не определяются однозначно). Все неприводимые подмодули также допускают простое описание: все они содержатся в регулярном представлении группы G и находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми характерами этой группы. Также простое описание допускают М. над кольцом главных идеалов и над дедекиндовым кольцом. Именно, любой конечно порожденный модуль M над кольцом главных идеалов A изоморфен конечной прямой сумме М. вида $A/\mathfrak{A}_i$, где $\mathfrak{A}_i$ — нек-рые идеалы кольца A (возможно, нулевые), причем $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_m \neq A$ и идеалы $\mathfrak{A}_i$ однозначно определяются последним условием. Таким образом, набор инвариантов $\{\mathfrak{A}_i\}$ полностью определяет модуль M. Если M — конечно порожденный М. над дедекиндовым кольцом

A, то $M = M_1 \oplus M_2$, где M_2 — периодич. М., а M_1 — М. без кручения (выбор модуля M_1 не однозначен). Модуль M_2 аннулируется нек-рым идеалом $\mathfrak{A}$ кольца A и, следовательно, является М. над кольцом главных идеалов $A/\mathfrak{A}$ и допускает описание, указанное выше, а модуль M_1 представим в виде $\oplus^n A(\oplus)\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — нек-рый идеал A, а $\oplus^n$ — прямая сумма n раз. Модуль M_1 с точностью до изоморфизма однозначно определяется двумя инвариантами: числом n и классом идеала $\mathfrak{B}$ в группе классов идеалов.

2) Другой подход к изучению М. состоит в изучении категории A-mod и данного модуля M как объекта этой категории. Такое изучение является предметом гомологич. алгебры и алгебраич. K-теории. На этом пути было получено много важных и глубоких результатов.

Часто рассматривают М., несущие нек-рую дополнительную структуру. Так рассматриваются *градуированные модули*, *фильтрованные модули*, *топологические модули*, модули с *полуторалинейной формой* и т. д.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [2] его же, Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] его же, Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976; [4] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [5] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [6] Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; [7] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [8] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [9] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1 -2, М., 1977 -79; [10] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; [11] Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; [12] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [13] Милнор Дж., Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974.

Л. В. Кузьмин.

МОДУЛЬ АВТОМОРФИЗМА — действительное положительное число, ставящееся в соответствие автоморфизму локально компактной группы. Если G — такая группа и α — нек-рый автоморфизм группы G как топологич. группы, то модуль автоморфизма α определяется формулой

$$\mathrm{mod}_G(\alpha) = \frac{\mu(\alpha S)}{\mu(S)},$$

где μ — левоинвариантная мера Хаара на группе G и S — любое компактное подмножество группы G положительной меры (причем $\mathrm{mod}_G(\alpha)$ не зависит от S). Если G компактна или дискретна, то всегда $\mathrm{mod}_G(\alpha) = 1$, т. к. для компактной группы можно положить $S = G$, а для дискретной $S = \sigma$, где σ — любой элемент G.

Если α и β — два автоморфизма группы G, то

$$\mathrm{mod}_G(\alpha\cdot\beta) = \mathrm{mod}_G(\alpha)\,\mathrm{mod}_G(\beta).$$

Если Γ — нек-рая топологич. группа, к-рая непрерывно действует на группу G автоморфизмами, то $\mathrm{mod}_G(\alpha)$ определяет непрерывный гомоморфизм $\Gamma \to R_+^*$, где R_+^* — мультипликативная группа действительных положительных чисел. В частности, сопоставляя каждому элементу $\sigma \in G$ порождаемый им внутренний автоморфизм группы G и рассматривая модуль этого автоморфизма, получают непрерывный гомоморфизм G в группу R_+^*. Этот гомоморфизм тривиален тогда и только тогда, когда левоинвариантная мера Хаара на группе G является одновременно и правоинвариантной. Группы, удовлетворяющие последнему условию, наз. унимодулярными.

Другой пример — локально компактное тело K, каждый ненулевой элемент α к-рого определяет автоморфизм умножения на α аддитивной группы тела K. Функция $\mathrm{mod}_K(\alpha)$ используется при изучении структуры локально компактных тел.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления, пер. с франц., М., 1970; [2] Вейль А., Интегрирование в топологи-

ческих группах и его применения, пер. с франц., М., 1950; [3] его же, Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972.

Л. В. Кузьмин.

МОДУЛЬ БЕЗ КРУЧЕНИЯ — модуль M над кольцом A без делителей нуля такой, что из равенства $am=0$, где $a\in A$ и $m\in M$, следует $a=0$ или $m=0$. Примерами таких модулей (левых) являются само кольцо A, а также все его ненулевые левые идеалы. Подмодуль М. б. к., а также прямая сумма и прямое произведение М. б. к.— также М. б. к. Если кольцо A коммутативно, то для любого модуля M определен подмодуль кручения

$$T(M)=\{m\in M \mid \exists a\in A,\quad a\neq 0,\ am=0\}.$$

Тогда фактормодуль $M/T(M)$ является М. б. к.

Л. В. Кузьмин.

МОДУЛЬ КОЛЬЦА — величина, обратная экстремальной длине семейства замкнутых кривых в кольце $r_1\leqslant|z|\leqslant r_2$, разделяющих граничные окружности; М. к. равен

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

С помощью конформного отображения на соответствующее кольцо K получается модуль m_G кольцевой области G. Оказывается, что $m_G=\frac{1}{2\pi}D(u)$, где $D(u)$ — *Дирихле интеграл* от действительной части функции u, отображающей G на K: $\{1<|w|<e^{m_G}\}$. (Таким образом, данная кольцевая область отображается на кольцо с определенным отношением радиусов граничных окружностей. Этот факт может быть принят за другое определение М. к., обобщение к-рого ведет к понятию модуля плоской области.)

Обобщением понятия модуля кольцевой области является модуль m_γ граничного элемента γ открытой римановой поверхности R относительно его окрестности. В зависимости от того, конечна или бесконечна величина m_γ, граничный элемент имеет гиперболич. или параболич. тип, а R обладает или нет *Грина функцией*.

Для односвязной области D гиперболич. типа определяется т. н. приведенный модуль m_{z_0} относительно $z_0\in D$ как предел

$$\lim_{r\to 0}\left(m(r)+\frac{1}{2\pi}\ln r\right),$$

где $m(r)$ — модуль кольцевой области $D(r)=D\cap\{|z-z_0|>r\}$. Оказывается, что $m_{z_0}=\frac{1}{2\pi}\ln R$, где R — *конформный радиус* D относительно $z_0\in D$.

М. П. Войцеховский.

МОДУЛЬ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ — конформно инвариантная числовая характеристика семейства кривых; величина, обратная *экстремальной длине* этого семейства.

МОДУЛЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА — параметр k, входящий в выражение эллиптич. интеграла в нормальной форме Лежандра, напр. в неполный эллиптич. интеграл 1-го рода

$$F(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}. \qquad (*)$$

Число k^2 иногда наз. лежандровым модулем, $k'=\sqrt{1-k^2}$ наз. дополнительным модулем. В приложениях обычно имеет место нормальный случай, когда $0<k<1$; при этом острый угол θ такой, что $\sin\theta=k$, наз. модулярным углом. Модуль k входит и в выражения *Якоби эллиптических функций*, возникающих при обращении эллиптич. интегралов вида (*).

Е. Д. Соломенцев.

МОДУЛЯРНАЯ ГРУППА — группа Γ всех дробно-линейных преобразований γ вида

$$z \longrightarrow \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1, \qquad (1)$$

где a, b, c, d — целые рациональные числа. М. г. отождествляется с факторгруппой $\mathrm{SL}_2(Z)/\{\pm E\}$, где $E=\left\|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right\|$, и является *дискретной подгруппой* в группе Ли $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})=\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm E\}$. Здесь $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (соответственно $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) — группа матриц $\left\|\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right\|$, a, b, c, d — действительные (соответственно целые) числа, $ad-bc=1$. М. г. является *дискретной группой* преобразований верхней комплексной полуплоскости $H=\{z=x+iy \mid y>0\}$ (плоскости Лобачевского) и допускает представление образующими $T: z \to z+1$ и $S: z \to -1/z$ и соотношениями $S^2=(ST)^3=1$, т. е. является свободным произведением циклич. группы порядка 2, порожденной S, и циклич. группы порядка 3, порожденной ST (см. [2]).

Интерес к М. г. связан с изучением *модулярных функций*, *римановой поверхностью* к-рых является факторпространство H/Γ, отождествляемое с фундаментальной областью G М. г. Компактификация $X_\Gamma = (H/\Gamma) \cup \infty$ аналитически изоморфна комплексной проективной прямой, причем изоморфизм задается основной модулярной функцией $J(z)$. Фундаментальная область G имеет конечную площадь Лобачевского

$$\int_G y^{-2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{3},$$

т. е. М. г. есть фуксова группа 1-го рода (см. [3]). Для решетки $L=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}z$, $z \in H$, решетка $L_1=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\gamma(z)$, $\gamma=\left\|\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right\| \in \Gamma$, эквивалентна L, т. е. получается из L умножением элементов последней на ненулевое комплексное число $\lambda=(cz+d)^{-1}$.

Каждой решетке соответствует комплексный тор $\mathbb{C}/L$, аналитически эквивалентный неособой кубич. кривой (эллиптич. кривой). Это дает взаимнооднозначное соответствие между точками факторпространства H/Γ, классами эквивалентных решеток и классами (аналитически) эквивалентных эллиптич. кривых (см. [3]).

Исследование подгруппы М. г. представляет интерес в теории *модулярных форм* и *алгебраических кривых*. Главной конгруэнц-подгруппой $\Gamma(N)$ М. г. уровня $N \geqslant 1$ (N — целое число) наз. группа преобразований $\gamma(z)$ вида (1), у к-рых $a \equiv d \equiv 1 \pmod N$, $c \equiv b \equiv 0 \pmod N$. Подгруппа $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ наз. конгруэнц-подгруппой, если $\tilde{\Gamma} \supset \Gamma(N)$ для нек-рого числа N; наименьшее такое N наз. уровнем $\tilde{\Gamma}$. Примеры конгруэнц-подгрупп уровня N: группа $\Gamma_0(N)$ преобразований (1) с c, делящимся на N, группа $\Gamma_1(N)$ преобразований (1) с $a=d \equiv 1 \bmod N$ и $c \equiv 0 \bmod N$. Индекс подгруппы $\Gamma(N)$ в М. г. равен $(N^3/2)\prod_{p|N}(1-p^{-2})$, если $N>2$, p — простые числа и 6, если $N=2$, поэтому каждая конгруэнц-подгруппа имеет конечный индекс в М. г.

Каждой подгруппе $\tilde{\Gamma}$ конечного индекса в М. г. соответствует полная алгебраич. кривая $X_{\tilde{\Gamma}}$ (*модулярная кривая*), полученная из факторпространства $H/\tilde{\Gamma}$, и накрытие $X_{\tilde{\Gamma}} \to X_\Gamma$. Изучение ветвления этого накрытия позволяет найти для конгруэнц-подгрупп Γ образующие и соотношения, род кривой $X_{\tilde{\Gamma}}$ и доказать, что существуют подгруппы конечного индекса в М. г., не являющиеся конгруэнц-подгруппами (см. [3], [8], [7] т. 2). Изучение представлений М. г. началось в

работах (см. [4], [6]) в связи с теорией модулярных форм. Такие представления интенсивно изучаются в рамках теории автоморфных форм (см. [7]). Многие результаты, относящиеся к М. г., переносятся на случай арифметич. подгрупп в алгебраич. группах Ли.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [2] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972; [3] Шимура Г., Введение в арифметическую теорию автоморфных функций, пер. с англ., М., 1973; [4] Hecke E., Mathematische Werke, 2 Aufl., Gött., 1970, S. 789—918; [5] Klein F., Fricke R., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd 1—2, Lpz., 1890—92; [6] Kloosterman H. D., «Ann. Math.», 1946, v. 47, p. 317—447; [7] Modular functions of one variable, [v.] 1—6, B.— Hdlb. — N. Y., 1973—77; [8] Rankin R., Modular forms and functions, Camb., 1977.

А. А. Панчишкин.

МОДУЛЯРНАЯ КРИВАЯ — полная алгебраич. кривая $X_{\tilde{\Gamma}}$, униформизуемая подгруппой $\tilde{\Gamma}$ конечного индекса модулярной группы Γ; точнее, М. к. есть полная алгебраич. кривая, получаемая из факторпространства $H/\tilde{\Gamma}$, где H — верхняя полуплоскость, присоединением конечного числа параболич. точек (классов эквивалентности относительно $\tilde{\Gamma}$ рациональных точек границы области H). Наиболее известные примеры подгрупп $\tilde{\Gamma}$ конечного индекса в Γ — конгруэнц-подгруппы, содержащие для нек-рого целого $N\geqslant 1$ главную конгруэнц-подгруппу $\Gamma(N)$ уровня N, представимую матрицами

$$A\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\quad A\equiv \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \bmod N$$

(см. *Модулярная группа*). Наименьшее такое N наз. уровнем подгруппы $\tilde{\Gamma}$. В частности, подгруппа $\Gamma_0(N)$, представимая матрицами, к-рые сравнимы с верхними треугольными матрицами по $\bmod N$, имеет уровень N. Каждой подгруппе $\tilde{\Gamma}$ конечного индекса соответствует накрытие М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}\to X_{\Gamma}$, к-рое разветвлено только над образами точек $z=i$, $z=(1+i\sqrt{3})/2$, $z=\infty$. Для конгруэнц-подгрупп $\tilde{\Gamma}$ ветвление этого накрытия позволяет определить род М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}$, доказать существование подгрупп $\tilde{\Gamma}$ конечного индекса в Γ, не являющихся конгруэнц-подгруппами (см. [4] т. 2 и [2]). Род кривой $X_{\Gamma(N)}$ равен 0 для $N\leqslant 2$ и равен

$$1+\frac{N^2(N-6)}{24}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2}),$$

p — простые, при $N>2$. М. к. всегда определена над полем алгебраич. чисел (обычно над $\mathbb{Q}$ или его круговым расширением). Рациональные функции на М. к. поднимаются до модулярных функций (высшего уровня) и образуют поле; автоморфизмы этого поля изучены (см. [2]). Голоморфная дифференциальная форма на М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}$ задается на H дифференциалом $f(z)dz$ (где $f(z)$ — голоморфная функция), инвариантным относительно преобразований $z\to\gamma(z)$ из $\tilde{\Gamma}$; при этом $f(z)$ есть модулярная форма веса 2 относительно $\tilde{\Gamma}$. Дзета-функция М. к. есть произведение *Меллина преобразований* модулярных форм и, следовательно, она имеет мероморфное продолжение и удовлетворяет функциональному уравнению. Этот факт послужил отправной точкой теории Ленглендса — Вейля о связи модулярных форм и рядов Дирихле (см. [7], [8]). В частности, есть предположение, что каждая эллиптич. кривая над полем $\mathbb{Q}$ (кондуктора N) униформизуется модулярными функциями уровня N. Гомологии М. к. связаны с модулярными символами, что позволяет исследовать арифметику значений дзетафункции М. к. в центре критич. полосы и построить p-адическую дзета-функцию М. к. (см. [1]).

М. к. параметризует семейство эллиптич. кривых, являясь их многообразием модулей (см. [7] т. 2). В частности, для $\tilde{\Gamma}=\Gamma(N)$ точки z факторпространства $H/\Gamma(N)$ взаимно однозначно соответствуют парам, состоящим из эллиптич. кривой E_z (аналитически эквивалентной комплексному тору $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}z)$) и точки порядка N на E_z (образа точки z/N).

Над каждой М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}$ имеется естественное алгебраич. расслоение $E_{\tilde{\Gamma}} \to X_{\tilde{\Gamma}}$ на эллиптич. кривые, компактифицированное вырожденными кривыми над параболич. точками М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}$. Его расслоенные степени $E_{\tilde{\Gamma}}^{(w)}$, где w — целое $\geqslant 1$, наз. многообразиями Куги (см. [3], [5]). Дзета-функции многообразий $E_{\Gamma}^{(w)}$ связаны с преобразованиями Меллина модулярных форм, а их гомологии — с периодами модулярных форм (см. [3], [7]).

Рациональные точки на М. к. соответствуют эллиптич. кривым, имеющим рациональные точки конечного порядка (или рациональные подгруппы точек), их описание (см. [6]) позволило решить проблему кручения эллиптич. кривых над $\mathbb{Q}$.

Исследование геометрии и арифметики М. к. основано на использовании группы автоморфизмов проективного предела кривых $X_{\tilde{\Gamma}}$ по убывающим $\tilde{\Gamma}$, к-рая (по существу) совпадает с группой $\mathrm{SL}_2(A)$ над кольцом A рациональных аделей. На каждой М. к. $X_{\tilde{\Gamma}}$ это дает нетривиальное кольцо соответствий $R_{\tilde{\Gamma}}$ (кольцо Гекке), имеющее приложения в теории *модулярных форм* (см. [2]).

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1972, т. 36, № 1, с. 19—66; [2] Шимура Г., Введение в арифметическую теорию автоморфных функций, пер. с англ., М., 1973; [3] Шокуров В. В., «Матем. сб.», 1976, т. 101, № 1, с. 131—157; [4] Klein F., Fricke R., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd 1—2, Lpz., 1890—92; [5] Kuga M., Shimura G., «Ann. Math.», 1965, v. 82, p. 478—539; [6] Mazur B., Serre J.-P., в кн.: Séminaire Bourbaki, 1974/75, B. -[u. a.], 1976, p. 238—55; [7] Modular functions of one variable, [v.] 1—6, B.— Hdlb.— N. Y., 1973—77; [8] Weil A., «Math. Ann.», 1967, Bd 168, S. 149—56.

А. А. Панчишкин, А. Н. Паршин.

МОДУЛЯРНАЯ РЕШЕТКА, модулярная структура,— то же, что *дедекиндова решетка*.

МОДУЛЯРНАЯ ФОРМА одного комплексного переменного, эллиптическая модулярная форма,— функция f на верхней полуплоскости $H=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\, z>0\}$, удовлетворяющая при нек-ром фиксированном k условию автоморфности:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^k f(z) \qquad (1)$$

для любого элемента $\left\|\begin{matrix} a & b \\ c & d\end{matrix}\right\|$ группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем $ad-bc=1$, и такая, что

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n,$$

где $q=\exp(2\pi iz)$, $z\in H$, $a_n\in\mathbb{C}$. Целое число $k\geqslant 0$ наз. весом М. ф. f. Если $a_0=0$, то М. ф. f наз. параболической модулярной формой. Имеется также [8] определение М. ф. для всех действительных значений k.

Пример М. ф. веса $k\geqslant 4$ дает ряд Эйзенштейна (см. [4])

$$G_k(z)=\sum_{m_1,\ m_2\in\mathbb{Z}}^{*}(m_1+m_2z)^{-k},$$

где звездочка означает, что при суммировании пара

$(m_1,\ m_2)\neq(0,\ 0)$ отбрасывается. При этом $G_k(z)\equiv 0$ для нечетных k и

$$G_k(z)=\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\left[-\frac{B_k}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)\,q^n\right],$$

где $\sigma_{k-1}(n)=\sum_{d\mid n}d^{k-1}$, а B_k — число Бернулли.

Множество М. ф. веса k есть комплексное векторное пространство, обозначаемое M_k; при этом $M_kM_l\subset M_{k+l}$. Прямая сумма $\bigoplus_{k=0}^{\infty}M_k$ образует градуированную алгебру, к-рая изоморфна кольцу многочленов от независимых переменных G_4 и G_6 (см. [3]).

Для каждого $z\in H$ *комплексный тор* $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}z)$ аналитически изоморфен эллиптич. кривой, задаваемой уравнением

$$y^2=4x^3-g_2(z)x-g_3(z), \tag{2}$$

где $g_2(z)=60G_4(z)$, $g_3(z)=140G_6(z)$. Дискриминант кубич. многочлена в правой части равенства (2) есть параболич. М. ф. веса 12:

$$2^{-4}\left(g_2^3-27g_3^2\right)=2^{-4}(2\pi)^{12}\,q\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^{2k}=$$

$$=2^{-4}(2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\,q^n,$$

где $\tau(n)$ — функция Рамануджана (см. [1]).

Для каждого целого $N\geqslant 1$ вводятся **модулярные формы высшего уровня** N, удовлетворяющие условию (1) лишь для элементов $\left\|\begin{matrix}a & b\\ c & d\end{matrix}\right\|$ конгруэнц-подгруппы $\tilde{\Gamma}$ уровня N модулярной группы. В этом случае с М. ф. f связан голоморфный дифференциал $f(z)(dz)^{k/2}$ на модулярной кривой $X_{\tilde{\Gamma}}$. Известный пример М. ф. высшего уровня дают тэта-ряды $f(z)$ целочисленных положительно определенных квадратичных форм $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$:

$$f(z)=\sum_{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m\in\mathbb{Z}}\exp\left(2\pi iF(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)\right),$$

к-рые суть М. ф. высшего уровня веса $k=m/2$. В этом примере a_n есть целое число, равное числу решений диофантова уравнения $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)=n$.

Теория М. ф. позволяет получать оценки, а иногда и точные формулы для чисел типа a_n (такие, как сравнение Рамануджана $\tau(n)\equiv\sum_{d\mid n}d^{11}\bmod 691$), а также исследовать их свойства делимости (см. [7]). Получена наилучшая оценка для чисел типа a_n (см. [2]).

Важные арифметич. приложения М. ф. связаны с рядами Дирихле

$$L_f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}$$

преобразований Меллина М. ф. f. Такие ряды Дирихле поддаются детальному изучению (оценки коэффициентов, свойства аналитичности, функциональное уравнение, разложения в эйлеровские произведения) ввиду наличия на модулярных кривых нетривиального кольца соответствий R. Для кривой X_{Γ} это кольцо порождается соответствиями $T_n(z)=\sum_{\gamma}\gamma(z)$, где γ пробегает все представители элементов фактормножества

$$\{A\in M_2(\mathbb{Z}):\det A=n\}/\mathrm{SL}(2,\ \mathbb{Z}).$$

Соответствия индуцируют действующие на пространстве М. ф. линейные операторы (**операторы Гекке**), к-рые самосопряжены относительно скалярного произведения Петерсона (см. [3], [7]). М. ф., являющиеся собственными функциями операторов Гекке, характеризуются тем, что их преобразования Меллина разлагаются в эйлеровское произведение.

Другие продвижения в теории М. ф. связаны с изучением модулярных кривых и ассоциированных с ними расслоений — многообразий Куги, а также с

теорией бесконечномерных представлений адельных алгебраич. групп. При этом теория М. ф. одного переменного успешно переносится на случай многих переменных (см. [6]). Обзор теоретико-числовых приложений М. ф. дан в [5].

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [2] Делинь П., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 5, с. 159—90; [3] Ленг С., Введение в теорию модулярных форм, пер. с англ., М., 1979; [4] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972; [5] Итоги науки и техники, Алгебра. Топология, Геометрия, т. 15, М., 1977; [6] Modular functions of one variable, [v.] 1—6, B.— Hdlb.— N. Y., 1973—77; [7] Ogg A., Modular forms and Dirichlet series, N. Y., 1969; [8] Rankin R., Modular forms and functions, Camb., 1977.

А. А. Панчишкин.

МОДУЛЯРНАЯ ФУНКЦИЯ, эллиптическая модулярная функция, одного комплексного переменного — *автоморфная функция* комплексного переменного $z=x+iy$, ассоциированная с группой Γ всех дробно-линейных преобразований γ вида

$$z \longrightarrow \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1, \tag{1}$$

где a, b, c, d — целые действительные числа (эта группа наз. модулярной). Преобразования группы Γ переводят действительную ось в себя, и областью определения М. ф. можно считать верхнюю полуплоскость $\{z: \operatorname{Im} z>0\}$. Группа Γ порождается двумя образующими $z \to z+1$, $z \to -1/z$. Фундаментальная область G модулярной группы изображена на рис. 1; это криволинейный четырехугольник $ABCDA$ с вершинами $A(\infty)$, $B(-1/2+i\sqrt{3}/2)$, $C(i)$, $D(1/2+i\sqrt{3}/2)$, две стороны к-рого AB и DA — отрезки прямых соответственно $x=-1/2$ и $x=1.2$, а BD — дуга окружности $|z|=1$. Участки границы AB и BC включаются в G, а CD и DA не включаются. Образы области G при всевозможных отображениях группы Γ покрывают всю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ без пересечений.

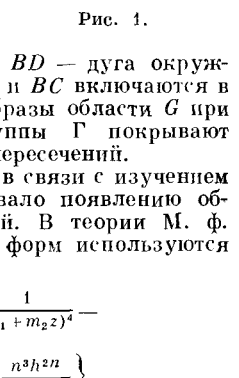


Рис. 1.

Изучение М. ф. началось в 19 в. в связи с изучением эллиптич. функций и предшествовало появлению общей теории автоморфных функций. В теории М. ф. в качестве основных модулярных форм используются следующие *мета-ряды*:

$$g_2(z) = 60 \sum\nolimits^{*}_{m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_1+m_2 z)^4} =$$

$$= (2\pi)^4 \left\{ \frac{1}{12} + 20 \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 h^{2n}}{1-h^{2n}} \right\},$$

$$g_3(z) = 140 \sum\nolimits^{*}_{m_1,\ m_2 \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m_1+m_2 z)^6} =$$

$$= (2\pi)^6 \left\{ \frac{1}{216} - \frac{7}{3} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 h^{2n}}{1-h^{2n}} \right\},$$

$$\Delta(z) = g_2^3(z) - 27 g_3^2(z),$$

где $h = e^{i\pi z}$, а звездочка означает, что нулевая пара $(m_1,\ m_2) = (0,\ 0)$ отбрасывается. Согласно терминологии К. Вейерштрасса (K. Weierstrass) это — относительные инварианты, играющие важную роль в его теории эллиптич. функций (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*), а Δ наз. также дискриминантом. С точки зрения теории автоморфных функций это — автоморфные формы соответственно веса 2, 3 и 6, ассоциированные с модулярной группой. Основная М. ф. имеет вид

$$J(z) = \frac{g_2^3(z)}{\Delta(z)} \quad 1 + \frac{27 g_3^2(z)}{\Delta(z)}. \tag{2}$$

Функция $J(z)$ наз. также а б с о л ю т н ы м и н в а р и а н т о м. Она регулярна в верхней полуплоскости, а внутри фундаментальной области G принимает каждое конечное значение, кроме 0 и 1, в точности один раз; кроме того, $J(-1/2+i\sqrt{3}/2)=0$, $J(i)=1$.

В теории эллиптич. функций М. ф. $J(z)$ играет важную роль, позволяя по заданным вейерштрассовым относительным инвариантам $a=g_2$, $b=g_3$, $a^3-27b^2\neq 0$, определить периоды $2\omega_1$, $2\omega_3$, а следовательно, и построить все эллиптич. функции Вейерштрасса. Если τ — единственное в фундаментальной области решение уравнения

$$J(\tau)=a^3/(a^3-27b^2),$$

то при $a\neq 0$, $b\neq 0$ имеем $\omega_1^2=a/b$, $\omega_3=\omega_1\tau$; при $a=0$ имеем $\tau=-1/2+i\sqrt{3}/2$, и ω_1 определяется из уравнения

$$\omega_1^6=\frac{140}{b}\sum{}^{*}_{m_1,\ m_2\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m_1+m_2\tau)^6},\quad \omega_3=\omega_1\tau;$$

при $b=0$ имеем $\tau=i$, и ω_1 определяется из уравнения

$$\omega_1^4=\frac{60}{a}\sum{}^{*}_{m_1,\ m_2\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(m_1+m_2\tau)^4},\quad \omega_3=\omega_1\tau.$$

Для построения *Якоби эллиптических функций* удобнее, вместо $J(z)$, функция

$$\lambda(z)=k^2(z)=1-\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-h^{2n-1}}{1+h^{2n+1}}\right)^8,\qquad h=e^{\pi iz},\qquad (3)$$

также называемая М. ф. На самом деле $\lambda(z)$ является автоморфной функцией только относительно подгруппы Γ_2 модулярной группы Γ, причем к Γ_2 относятся все те преобразования вида (1), у к-рых (в качестве дополнительного условия) a и d — нечетные числа, b и c — четные. Фундаментальная область G_2 группы Γ_2 изображена на рис. 2; это — криволинейный четырехугольник $ABOCA$ с вершинами $A(\infty)$, $B(-1)$, 0, $C(1)$, две стороны к-рого AB и CA — отрезки прямых соответственно $x=-1$ и $x=1$, а BO и OC — дуги окружностей соответственно $|z+1/2|=1/2$ и $|z-1/2|=1/2$. Участки границы слева от мнимой оси включаются в G_2, а OC и CA не включаются. Функция $\lambda(z)$ также регулярна в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Внутри области G_2 она принимает каждое конечное значение, кроме 0 и 1, в точности один раз; кроме того, $\lambda(\infty)=0$ и $\lambda(0)=1$. При заданном модуле эллиптич. функций Якоби k для их построения необходима величина $\tau=\omega_3/\omega_1$ или $h=e^{\pi i\tau}$, к-рая однозначно определяется из уравнения $\lambda(\tau)=k^2$. Практически, в нормальном случае $0<k<1$ определяют сначала $\varepsilon=(1-\sqrt{k'})/(1+\sqrt{k'})$, где $k'=\sqrt{1-k^2}$, а затем строят решение этого уравнения в виде ряда $h=\varepsilon+2\varepsilon^5+15\varepsilon^9+150\varepsilon^{13}+O(\varepsilon^{17})$. М. ф. $\lambda=\lambda(z)$ и $J(z)$ связаны формулой

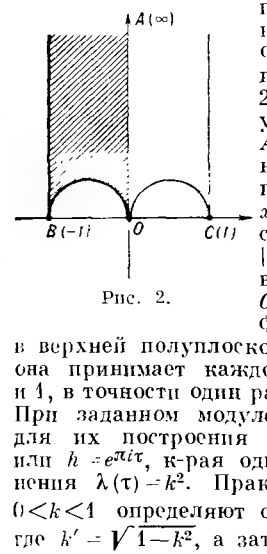


Рис. 2.

$$J(z)=\frac{4}{27}\cdot\frac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

М. ф. $w=J(z)$ дает наиболее удобное представление конформных классов римановых поверхностей эллиптич. функций, когда род $g=1$ и эйлерова характеристика $\chi=0$. Каждому значению w соответствует решение $\tau=\omega_3/\omega_1$ уравнения $J(\tau)=w$, определяющее конформный класс и соответствующее поле эллиптич. функций. Напр., $w=0$ соответствует параллелограмм периодов в виде ромба с углами 120° и 60°, а $w=1$ — квадрат.

М. ф. применяются также при изучении *конформных отображений*, *граничных свойств аналитических функций* и *предельных множеств*. М. ф. $w=J(z)$ дает конформное отображение левой половины фундаментальной области G (рис. 1), т. е. криволинейного треугольника $ABCA$, на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$, причем точки B, C, A переходят соответственно в 0, 1, ∞. М. ф. $w=\lambda(z)$ отображает конформно криволинейный треугольник $ABOA$ (рис. 2) на верхнюю полуплоскость, причем точки B, O, A переходят соответственно в 0, 1, ∞.

В геометрич. вопросах часто удобнее принять за область определения М. ф. единичный круг. При этом модулярная группа (1) переходит в модулярную группу автоморфизмов единичного круга. Напр., удобно применить дробно-линейное преобразование

$$\zeta=\zeta(z)=\frac{i\left(z-e^{i\pi/3}\right)}{z-e^{-i\pi/3}},$$

переводящее верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ в единичный круг $|\zeta|<1$, причем точки 0, 1, ∞ переходят соответственно в точки $A\left(e^{-i5\pi/6}\right)$, $B\left(e^{-i\pi/6}\right)$, $C(i)$ на единичной окружности $|\zeta|=1$ (рис. 3). Тогда сложная функция $w=\mu(\zeta)=\lambda(z(\zeta))$ есть М. ф., регулярная в единичном круге и принимающая в нем все значения, кроме 0, 1, ∞. Она отображает конформно криволинейный треугольник $ABCA$ (рис. 3) на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$. Именно эта М. ф. $\mu(\zeta)$ используется при доказательстве *Пикара теорем* и в ряде других геометрических вопросов.

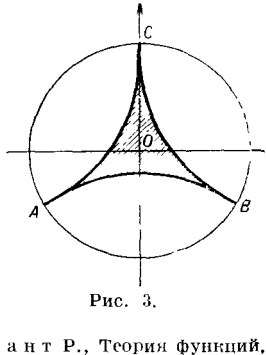


Рис. 3.

Лит.: [1] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. [с нем.], М., 1968; [2] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [3] Форд Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936; [4] Klein F., Fricke R., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd 1—2, Lpz., 1890—92. *Е. Д. Соломенцев.*

МОДУЛЯРНЫЙ ИДЕАЛ — правый (левый) идеал J кольца R, обладающий следующим свойством: в кольце R найдется хотя бы один такой элемент e, что для всех x из R разность $x-ex$ принадлежит J (соответственно $x-xe\in J$). Элемент e наз. левой (правой) единицей по модулю идеала J. В кольце с единицей всякий идеал является модулярным. Всякий собственный модулярный правый (левый) идеал можно вложить в максимальный правый (левый) идеал, к-рый автоматически будет модулярным. Пересечение всех максимальных модулярных правых идеалов ассоциативного кольца совпадает с пересечением всех максимальных левых идеалов модулярных и является *Джекобсона радикалом* этого кольца. М. и. иногда наз. также регулярными идеалами.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961. *К. А. Жевлаков.*

МОДУС ПОНЕНС (modus ponens), правило отделения,— *вывода правило* в формальных логич. системах. Правило М. п. записывается в виде схемы

$$\frac{A\quad A\supset B}{B},$$

где A и B — обозначения для формул формальной логич. системы, а $\supset$ — логич. связка *импликации*. М. п. разрешает выводить B из посылок A (малая посылка) и $A\supset B$ (большая посылка). Если в нек-рой интерпретации формальной системы формулы A и $A\supset B$ истинны, то по смыслу импликации истинна формула B. М. п. вместе с другими правилами

вывода и аксиомами формальной системы определяет класс формул, выводимых из множества формул M, как наименьший класс, содержащий формулы из M, аксиомы и замкнутый относительно правил вывода.

М. п. можно рассматривать как операцию над выводами данной формальной системы, позволяющую образовывать вывод формулы B из вывода α формулы A и вывода β формулы $A \supset B$. *В. Н. Гришин.*

МОМЕНТ — числовая характеристика распределения вероятностей. Момент порядка k ($k>0$ — целое) случайной величины X определяется как математич. ожидание $\mathsf{E}X^k$, если оно существует. Если $F(x)$ функция распределения случайной величины X, то

$$\mathsf{E}X^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, dF(x). \qquad (*)$$

При определении М. в теории вероятностей используется прямая аналогия с соответствующим понятием, играющим важную роль в механике: формулой (*) определяется М. распределения масс. М. 1-го порядка (статич. момент в механике) случайной величины X — математич. ожидание $\mathsf{E}X$. Величина $\mathsf{E}(X-a)^k$ наз. моментом порядка k относительно a, $\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^k$ — центральным моментом порядка k. Центральный М. 2-го порядка $\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^2$ наз. *дисперсией* $\mathsf{D}X$ (М. инерции в механике). Величина $\mathsf{E}|X|^k$ наз. *абсолютным моментом* порядка k (абсолютный М. определяется и для нецелых k). Аналогично определяется М. совместного распределения случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ (см. *Многомерное распределение*): для любых целых $k_i \geqslant 0$, $k_1+\ldots+k_n=k$ математич. ожидание $\mathsf{E}(X_1^{k_1}, \ldots, X_n^{k_n})$ наз. смешанным моментом порядка k, а $\mathsf{E}(X_1-\mathsf{E}X_1)^{k_1}\ldots(X_n-\mathsf{E}X_n)^{k_n}$ — центральным смешанным моментом порядка k. Смешанный М. $\mathsf{E}(X_1-\mathsf{E}X_1)(X_2-\mathsf{E}X_2)$ наз. *ковариацией* и служит одной из основных характеристик зависимости между случайными величинами (см. *Корреляция*). Многие свойства М. (в частности, неравенства для М.) являются следствием того факта, что для любой случайной величины X функция $g(k)=\log\mathsf{E}|X|^k$ выпукла по k в каждом конечном интервале, где эта функция определена; $(\mathsf{E}|X|^k)^{1/k}$ является неубывающей функцией от k. Моменты $\mathsf{E}X^k$ и $\mathsf{E}(X-a)^k$ существуют тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}|X|^k<\infty$. Из существования М. $\mathsf{E}|X|^{k_0}$ вытекает существование всех М. порядка $k \leqslant k_0$. Если $\mathsf{E}|X_i|^k<\infty$ при всех $i=1, \ldots, n$, то существуют смешанные М. $\mathsf{E}X_1^{k_1}\ldots X_n^{k_n}$ для всех целых $k_i \geqslant 0$, $k_1+\ldots+k_n \leqslant k$. В нек-рых случаях для определения М. бывает полезна т. н. производящая функция моментов — функция $M(t)$, для к-рой М. распределения служат коэффициентами при разложении ее по степеням: для целочисленных случайных величин эта функция связана с производящей функцией $P(s)$ соотношением $M(t)=P(e^t)$. Если $\mathsf{E}|X|^k<\infty$, то характеристич. функция $f(t)$ случайной величины X имеет непрерывные производные до порядка k включительно, при этом М. порядка k является коэффициентом при $(it)^k/k!$ в разложении $f(t)$ по степеням t

$$\mathsf{E}X^k = (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} f(t)\Big|_{t=0}.$$

Если существует производная характеристич. функции порядка $2k$ в нуле, то $\mathsf{E}|X|^{2k}<\infty$.

О связи М. с семиинвариантами см. ст. *Семиинвариант*.

Если известны М. распределения, то можно сделать нек-рые утверждения о вероятностях отклонения слу-

чайной величины от ее математич. ожидания в терминах неравенств; наиболее известны *Чебышева неравенство*

$$\mathsf{P}\{|X-\mathsf{E}X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2},\quad \varepsilon>0,$$

и его обобщения.

Задача, состоящая в определении распределения вероятностей последовательностью его М., носит название *моментов проблемы*. Впервые эта задача была рассмотрена П. Л. Чебышевым (1874) в связи с исследованиями по предельным теоремам. Для того чтобы распределение вероятностей случайной величины X однозначно определялось своими М. $\alpha_k=\mathsf{E}X^k$, достаточно, напр., выполнение условия Карлемана

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_{2k})^{-1/2k}=\infty.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для М. случайных векторов.

Использование М. при доказательстве предельных теорем основывается на следующем факте. Пусть F_n, $n=1, 2, \ldots$, последовательность функций распределения, все М. к-рых $\alpha_k(n)$ конечны, и пусть при каждом целом $k\geqslant 1$ имеет место сходимость

$$\alpha_k(n)\longrightarrow\alpha_k\quad\text{при}\quad n\longrightarrow\infty,$$

где α_k конечны. Тогда существует подпоследовательность F_{n_i}, слабо сходящаяся к функции распределения F, имеющей α_k своими М. Если М. определяют F однозначно, то последовательность F_n слабо сходится к F. На этом основан т. н. *моментов метод*, используемый, в частности, в математич. статистике при изучении отклонений эмпирич. распределения от теоретического и для статистич. оценки параметров распределения (о выборочных М. как об оценках М. нек-рого распределения см. *Эмпирическое распределение*).

А. В. Прохоров.

МОМЕНТОВ МЕТОД — метод определения распределения вероятностей по его *моментам*. В теоретич. отношении М. м. основан на единственности решения *моментов проблемы*: если $\alpha_0=1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$,— нек-рые постоянные, то при каких условиях существует единственное распределение P такое, что

$$\alpha_n=\int x^n P(dx)$$

суть моменты распределения P при всех n? Существуют различные типы условий, достаточных для того, чтобы распределение однозначно определялось своими моментами, напр. условие Карлемана

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{2n})^{-1/2n}=\infty.$$

Использование М. м. при доказательстве предельных теорем теории вероятностей и математич. статистики основано на соответствии между сходимостью распределений и моментов: если $F_n(x)$ — последовательность функций распределения с конечными моментами $\alpha_k(n)$ любого порядка $k\geqslant 1$ и $\alpha_k(n)\to\beta_k$ при $n\to\infty$ и каждом k, то β_k — моменты нек-рой функции распределения $F(x)$; если $F(x)$ однозначно определяется своими моментами, то при $n\to\infty$ $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x)$. Впервые М. м. для случая сходимости к нормальному распределению был разработан П. Л. Чебышевым (1887), а доказательство центральной предельной теоремы М. м. было осуществлено А. А. Марковым (1898).

М. м. в математич. статистике — один из общих методов нахождения статистич. оценок для неизвестных параметров распределения вероятностей по ре-

зультатам наблюдений. Впервые в этих целях М. м. был использован К. Пирсоном (K. Pearson, 1894) при решении задачи аппроксимации эмпирич. распределений с помощью системы распределений Пирсона. Процедура М. м. такова: определяются моменты эмпирич. распределения (выборочные моменты) и в количестве, равном числу оцениваемых параметров, приравниваются к соответствующим моментам распределения вероятностей, являющимся функциями от неизвестных параметров; полученная система уравнений решается относительно параметров, и полученные решения суть искомые оценки. На практике М. м. приводит часто к весьма простым вычислениям. При нек-рых довольно общих условиях М. м. позволяет найти оценки, к-рые асимптотически нормальны, имеют математич. ожидание, лишь величиной порядка $1/n$ отличающееся от истинного значения параметра, и стандартное отклонение — порядка $1/\sqrt{n}$. Однако оценки, найденные по М. м., не являются наилучшими из возможных с точки зрения их эффективности — их дисперсия не является минимальной. В случае нормального распределения М. м. приводит к оценкам, совпадающим с оценками *максимального правдоподобия метода*, т. е. к асимптотически несмещенным и асимптотически эффективным оценкам.

Лит.: [1] Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., [2 изд.], М., 1975; [3] Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966. *А. В. Прохоров.*

МОМЕНТОВ МЕТОД — то же, что *Галеркина метод.*

МОМЕНТОВ ПРОБЛЕМА — одна из интерполяционных задач в действительной или комплексной области.

Первая четкая постановка начального варианта М. п. в действительной области принадлежит Т. Стилтьесу (T. Stieltjes, 1894). Им в связи с исследованиями цепных дробей поставлена и фактически решена следующая задача: дана последовательность действительных чисел $\{\mu_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, найти ограниченную и неубывающую на $[0, +\infty)$ функцию $\psi(x)$ такую, что

$$\int_0^\infty x^n\, d\psi(x) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Как и в каждой интерполяционной задаче, решение М. п. (1) распадается на два этапа.

Задача А. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех последовательностей действительных чисел $\{\mu_n\}$, для каждой из к-рых бесконечная система уравнений (1) имеет по крайней мере одно решение $\psi(x)$ с указанными выше свойствами; найти необходимые и достаточные (конструктивные) условия, к-рым должны удовлетворять числа μ_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, для того чтобы $\{\mu_n\}\in\mathfrak{M}$.

Задача В. Найти множество всех решений в классе ограниченных и неубывающих на $[0, +\infty)$ функций $\psi(x)$, удовлетворяющих бесконечной системе уравнений (1) при заданных μ_n, $n=0, 1, 2, \ldots, \{\mu_n\}\in\mathfrak{M}$.

Левые части равенства (1) названы Т. Стилтьесом «моментами». Этот термин заимствован им из механики. Если интерпретировать $d\psi(x)$ как массу, размещенную на $[x, x+dx]$, то интеграл $\int_0^X d\psi(t)$ — масса, размещенная на $[0, X]$. И тогда интегралы (1) для $n=1$ и $n-2$ представляют собой соответственно первый (статический) и второй (инерции) моменты относительно начала координат $x=0$ всей массы $\int_0^\infty d\psi(x)$ (она отвечает значению $n=0$ в (1)), размещенной на $[0, \infty)$. Обобщая эти понятия, Т. Стилтьес называл интеграл

$$\int_0^\infty x^n\, d\psi(x)$$

моментом n-го порядка (относительно $x=0$) данной массы $\int_0^\infty d\psi(x)$, распределение к-рой на $[0, +\infty)$ характеризуется функцией $\psi(x)$.

Т. Стилтьес связал решение М. п. (1) следующим образом с «природой» цепной (или непрерывной) дроби, отвечающей интегралу

$$I(z, \psi) = \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} \sim$$

$$\sim \frac{\mu_0}{z} - \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} - \frac{\mu_3}{z^4} + \dots, \qquad (2)$$

а точнее — формальному ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu_n}{z^{n+1}}.$$

Интегралам $I(z, \psi)$ соответствует цепная дробь

$$I(z, \psi) \sim \frac{1}{|a_1 z} + \frac{1}{|a_2} + \frac{1}{|a_3 z} + \frac{1}{|a_4} + \dots, \qquad (3)$$

а также «тесно примыкающая» к (3) цепная дробь

$$I(z, \psi) \sim \frac{\lambda_1}{|z+c_1} - \frac{\lambda_2}{|z+c_2} - \frac{\lambda_3}{|z+c_3} - \dots \qquad (4)$$

Цепная дробь (4) получается из (3) в результате «сокращений» вида

$$z - \frac{\alpha}{|1} - \frac{\beta}{|z-\gamma} = z - \alpha - \frac{\alpha\beta}{z-(\beta+\gamma)}.$$

Опираясь на теорию цепных дробей, Т. Стилтьес доказал, что в определенном смысле необходимым и достаточным условием разрешимости системы (1) (что эквивалентно $\{\mu_n\} \in \mathfrak{M}$) является положительность всех a_n в формуле (3), что, в свою очередь,— следствие положительности λ_n и c_n в (4). В терминах μ_n эти условия равносильны положительности определителей

$$\Delta_n = \det \| \mu_{i+j} \|_{i+j=0}^{n}$$

и

$$\Delta_n^{(1)} = \det \| \mu_{i+j+1} \|_{i+j=0}^{n}.$$

М. п. (1) наз. определенной для данной последовательности $\{\mu_n\}$, $\{\mu_n\} \in \mathfrak{M}$, если система (1) имеет единственное решение $\psi(x)$. В противном случае показано, что если при заданных μ_n, $\{\mu_n\} \in \mathfrak{M}$, система (1) имеет более одного решения, то тогда необходимо система (1) имеет бесконечное множество решений.

Пример: две функции

$$\psi_1(x) = \int_0^x t^{-\ln t} \, dt$$

и

$$\psi_2(x) = \int_0^x t^{-\ln t} [1 - \theta \sin(\pi \ln t)] \, dt, \quad \theta \in [0, 1],$$

имеют равные моменты

$$\int_0^\infty x^n \, d\psi_1(x) = \int_0^\infty x^n \, d\psi_2(x)$$

при всех $n=0, 1, 2, \dots$.

Т. Стилтьес привел эффективное построение нек-рых решений М. п. (1), к-рые, разумеется, все в известном смысле совпадают, если М. п. (1) является определенной. В случае же, когда М. п. (1) неопределенна, решения Т. Стилтьеса обладают рядом экстремальных свойств. Затем Т. Стилтьес показал, что М. п. (1) является определенной или цепной в зависимости от сходимости или расходимости цепной дроби (3) (что равносильно сходимости или расходимости ряда $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$).

При этом дробь (3) может быть сходящейся к $I(z, \psi)$ в то время, как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n}{z^{n+1}}$$

может расходиться для всех z, $z \in \mathbb{C}$.

До работы Т. Стилтьеса [1] М. п. в действительной области рассматривалась в менее общей и менее четкой постановке; таковы, напр., серия работ П. Л. Чебышева [2] и А. А. Маркова [3]. Ими в основном была исследована следующая задача: дать описание свойств класса U функций, определенных на $(-\infty, +\infty)$, такого, что соотношения

$$p(x) \in U$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}\, dx; \qquad (5)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

приводят к тождеству

$$p(x) = e^{-x^2}.$$

Другими словами, здесь идет речь о максимально полной и конструктивной характеристике класса единственности U интерполяционной задачи (5). Решение М. п. (5) играет важную роль в теории вероятностей и математич. статистике. Имеют важное значение также многочлены $\omega_n(x)$, являющиеся знаменателями последовательных приближений (т. н. аппроксимант) цепной дроби (4). Изучение свойств систем многочленов $\{\omega_n(x)\}$ впоследствии открыло широкое поле исследований в теории ортогональных многочленов.

Г. Гамбургером (G. Hamburger, 1920) М. п. (1) была обобщена на случай всей действительной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, при этом рассмотрение отрицательных значений x внесло ряд особенностей и не было тривиальным. Г. Гамбургер, существенно используя принцип выбора Хелли, исследовал необходимые и достаточные условия разрешимости системы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, d\psi(x) = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (6)$$

решив полностью задачу о сходимости цепных дробей (3) и (4), порожденных (6). Объединение задач A и B, относящихся к (6), называют п р о б л е м о й м о м е н т о в (6). Г. Гамбургер нашел критерий существования единственного решения М. п. (6). При этом М. п. (6) может быть неопределенной в то время, как соответствующая М. п. (1) (с теми же μ_n) является определенной (имеет единственное решение). Р. Неванлинна (R. Nevanlinna, 1922) представил решение М. п. (6) с помощью интегралов

$$I(z, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{z - x}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

и изучил свойства этих решений. Ему принадлежит важное замечание о т. н. «экстремальных решениях» М. п. (6).

М. Рисс (M. Riesz, 1921) нашел решение М. п. (6), опираясь на теорию квазиортогональных многочленов, состоящих из линейных комбинаций вида $A_n \omega_n(x) + A_{n-1} \omega_{n-1}(x)$, где A_k — константы, а $\omega_k(x)$ — знаменатель k-й аппроксиманты цепной дроби (4), отвечающей М. п. (6). Он заметил тесную связь между решениями М. п. (6) и справедливостью формулы Парсеваля для системы ортогональных многочленов $\{\omega_n(x)\}$. Т. Карлеман (T. Carleman, 1923—26) установил связь между М. п. (6), теорией квазианалитич. функций и теорией квадратичных форм от счетного множества переменных. Ему же принадлежит наиболее общий критерий определенности М. п. (6). Ф. Хаусдорф (F. Hausdorff, 1923) нашел критерий разрешимости

М. п. (6) ($\Longleftrightarrow \{\mu_n\}\in\mathfrak{M}$) при условии, что функция $\psi(x)$ в (6) постоянна вне заданного интервала. Он дал эффективную конструкцию решения $\psi(x)$ М. п. (6)(к-рое при сделанных им предположениях, отмеченных выше, всегда единственно); это дает возможность найти критерии того, чтобы решение $\psi(x)$ М. п. (6) дополнительно обладало рядом специальных свойств (было непрерывным, дифференцируемым и т. п.). Т. Карлеман, а затем М. Стоун (M. Stone, 1932) провели весьма полное исследование М. п. (6), базируясь на результатах теории квадратичных форм Якоби и теории сингулярных интегральных уравнений. Э. К. Хэвиленд (E. K. Haviland, 1935) и Х. Крамер (H. Cramer, 1937) распространили теорию Рисса М. п. (6) на многомерный случай.

Рассмотрены также многочисленные различные обобщения М. п. В основном упомянутые обобщения являлись вариациями (или комбинациями) следующих двух направлений:

замена степеней x^n в интегралах (6) «моментными» последовательностями функций $\{\varphi_n(x)\}$ другого вида, и замена левых частей равенств (6) интегралами иной природы (напр., изучался случай, когда $d\psi(x)$ заменено на $\varphi(x)dx$, где $\varphi(x)\in L_p$, $p\geqslant 1$) или даже операторами, действующими в абстрактных пространствах.

Так, в связи с первым направлением находится т. н. тригонометрическая проблема моментов, к-рая состоит в следующем: дана бесконечная числовая последовательность $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$; найти неубывающую на $[-\pi, \pi]$ функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,d\psi(x) = c_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{7}$$

т. е. решить задачи A и B для системы (7).

Точные формулировки нек-рых предложений из теории М. п. в действительной области таковы. Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство. Функция множества $\Phi(e)$, определенная на семействе $\mathfrak{B}=\{e\}$ всех борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$, наз. функцией распределения, если $\Phi(e)\geqslant 0$ для всех $e\in\mathfrak{B}$, и

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(e_i) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{\infty} e_i\right),$$

если $e_i\cap e_j=\varnothing$, $i\neq j$, где $e_i\in\mathfrak{B}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots$.

Спектром $\sigma(\Phi)$ функции распределения Φ наз. множество всех точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n$ таких, что $\Phi(G)>0$ для произвольного открытого множества G, $G\in\mathbb{R}^n$, содержащего x. Пусть

$$\{\mu_{i_1 i_2 \ldots i_n}\}, \quad i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

— n-кратная бесконечная последовательность действительных чисел. Спрашивается, каковы необходимые и достаточные условия, к-рым должны удовлетворять числа (8) для того, чтобы существовала функция распределения Φ со спектром $\sigma(\Phi)$, содержащемся в наперед заданном замкнутом множестве F, являющаяся решением системы

$$\int_{\mathbb{R}^n} t_1^{i_1} t_2^{i_2}\ldots t_n^{i_n}\,d\Phi = \mu_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \quad i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

(задача A для системы (9)). Аналогичным образом формулируется задача B для системы (9). Объединение задач A и B для системы (9) наз. F-проблемой моментов. F-М. п. (9) определена, если ее решение в нек-ром смысле единственно. В противном случае F-М. п. (9) наз. неопределенной.

Теорема. Необходимым и достаточным условием разрешимости F-М. п. (9) в $\mathbb{R}^2$ является выполнение

условия:

$$\sum a_i b_j \mu_{ij} \geqslant 0$$

для любого многочлена

$$P(u, v) = \sum a_i b_j u^i v^j,$$

принимающего неотрицательные значения при всех (u, v), $(u, v) \in F$.

Эта теорема является основой получения условий разрешимости (т. е. решения задачи А) различных вариаций М. п. (9). Вот нек-рые из них.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы М. п. (6) ($F = \mathbb{R}$) имела решение, необходимо, чтобы

$$\Delta_n \quad \det \| \mu_{i+j} \|_{i+j=0}^{n} \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для существования решения М. п. (6) со спектром, отличным от конечного числа точек, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для существования решения М. п. (6) со спектром, состоящим в точности из $k+1$ различных точек, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_0 > 0, \ \Delta_1 > 0, \ \ldots, \ \Delta_k > 0, \ \Delta_{k+1} = \Delta_{k+2} = \ldots = 0.$$

В последнем случае М. п. (6) всегда является определенной.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы М. п. (1) ($F = [0, \infty)$) была разрешима, необходимо, чтобы

$$\Delta_n = \det \| \mu_{i+j} \|_{i, \ j=0}^{n} \geqslant 0$$

и

$$\Delta_n^{(1)} = \det \| \mu_{i+j+1} \|_{i, \ j=0}^{n} \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Для существования решения М. п. (1) со спектром, отличным от конечного числа точек, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\Delta_n > 0 \text{ и } \Delta_n^{(1)} > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдены также необходимые и достаточные условия существования решения М. п. (1) со спектром $\sigma(\psi)$, состоящем в точности из $k+1$ различных точек, отличных от $x = 0$. Эти условия подобны приведенным в заключительной части теоремы 1.

Т е о р е м а 3. Необходимым и достаточным условием разрешимости хаусдорфовой М. п. в $\mathbb{R}$:

$$\int_0^1 x^n \, d\Phi = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad F = [0, 1],$$

является выполнение соотношений $\Delta^k \mu_\nu \geqslant 0$ для всех k, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ (здесь через Δ^k обозначена операция взятия k-й разности).

Т е о р е м а 4. Необходимым и достаточным условием разрешимости хаусдорфовой М. п. в $\mathbb{R}^2$:

$$\int_0^1 \int_0^1 u^i v^j \, d\Phi = \mu_{ij}, \quad i, \ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$F = [0, 1] \times [0, 1],$$

является выполнение соотношений

$$\Delta_1^n \Delta_2^m \mu_{ij} \geqslant 0, \quad n, \ m, \ i, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Т е о р е м а 5. М. п. (6) определенна, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n}^{-1/2n} = +\infty. \tag{10}$$

Известны (см., напр., [4]) необходимые и достаточные условия, к-рым должны удовлетворять μ_n для того, чтобы М. п. (6) (М. п. (1)) была определенной; однако они менее обозримы по сравнению с условием

(10), носящим достаточный характер, а их формулировка несколько громоздка.

М. п. в комплексной области наз. обширный класс интерполяционных задач, описываемый следующим образом. Пусть D — открытая односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\infty \notin D$; $A(D)$ — пространство функций, аналитических в D, с топологией, определяемой равномерной сходимостью на произвольном компакте K, $K \subset D$; пусть $A^*(D)$ — пространство всех функций $\gamma(z)$, аналитических в окрестности $V^\infty = V^\infty(\gamma)$ бесконечно удаленной точки, причем $\gamma(\infty) = 0$ и $\operatorname{supp} \gamma \subset D$ для любой γ, $\gamma \subset A^*(D)$ (последняя запись эквивалентна тому, что множество особенностей функции γ, $\gamma \in A^*(D)$ лежит в D). Топология в $A^*(D)$ определяется равномерной сходимостью на одной из кривых семейства простых замкнутых жордановых кривых $\{\Gamma_\alpha\} \subset D$, обладающего свойством: для произвольного компакта K, $K \subset D$ существует $\Gamma_{\alpha_0} = \Gamma_{\alpha_0}(K) \in \{\Gamma_\alpha\}$ такая, что $K \subset \operatorname{int} \Gamma_{\alpha_0}(D)$ (здесь через $\operatorname{int} \Gamma_{\alpha_0}$ обозначена открытая односвязная область с границей Γ_{α_0}, являющаяся «внутренней» по отношению к Γ_{α_0}). Известно, что пространства $A(D)$ и $A^*(D)$ — взаимно сопряженные.

М. п. в комплексной области такова. Пусть заданы целое число p, $p > 1$; функции $0 \neq A_s(D) \subset A(D)$, $s = 0, 1, \ldots, p-1$, однолистная в D функция $W(z) \in A(D)$ и совокупность из p последовательностей комплексных чисел

$$\alpha_p = \{\{\alpha_{ns}\},\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ s = 0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Спрашивается, существует ли функция $\gamma(z)\gamma(z) \in A^*(D)$, для к-рой имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma [W(z)]^{np} A_s(z)\, \gamma(z)\, dz = a_{ns}, \qquad (11)$$

$$n = 0, 1, \ldots;\ s = 0, 1, \ldots, p-1,$$

где

$$\operatorname{supp} \gamma \subset \operatorname{int} \Gamma \subset \Gamma \subset \operatorname{int} \Gamma \subset D?$$

Вообще говоря, не для всякой заранее взятой совокупности α_p бесконечная система уравнений (11) имеет хотя бы одно решение $\gamma(z)$, $\gamma(z) \in A^*(D)$. Поэтому совокупность α_p наз. D-допустимой, если существует (хотя бы одна) $\gamma(z) \in A^*(D)$, удовлетворяющая соотношениям (11).

Задача А. Найти необходимые и достаточные условия (конструктивного характера) D-допустимости совокупности α_p.

Задача В. Пусть α_p D-допустима. Спрашивается, как по числам a_{ns}, находящимся в правых частях равенств (11), отыскать все множество функций $\gamma(z)$, $\gamma(z) \in A^*(D)$, удовлетворяющих соотношениям (11)?

Объединение задач А и В наз. М. п. в комплексной области. Задача В для случая, когда $p = 1$, а $A_0(z) \equiv 1$, впервые была рассмотрена в 1937 А. О. Гельфондом [6]; им было указано на принципиальную возможность решения задачи В (при $p = 1$ и $A_0(z) \equiv 1$ система (11) всегда имеет единственное решение при D-допустимых правых частях a_{ns}). Исследованы многочисленные частные случаи задач А и В (см. [7] — [10]). Использование аппарата теории краевых задач позволило провести (см. [11] — [14]) достаточно полное исследование М. п. в комплексной области.

Область G, $G \subset \mathbb{C}$, наз. $2\pi/p$-инвариантной [$G \in \operatorname{Inv}(2\pi/p)$], если $\exp(2\pi i/p) G \equiv G$.

Исчерпывающее решение М. п. в комплексной области D при весьма естественных предположениях относительно функций $A_s(z)$, $s = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, дано [10] для случая $W(D) = G \in \operatorname{Inv}(2\pi/p)$, а также для областей, образы к-рых $W(D)$ погружаемы в нек-рую область G, $G \in \operatorname{Inv}(2\pi/p)$. Привлечение теории краевых задач к решению М. п. в комплексной области

позволило найти в квадратурах полное решение задачи В для областей указанных типов. В частности, при $p=1$ всякая область G принадлежит классу $\mathrm{Inv}(2\pi/p)$. Также найдены необходимые и достаточные условия единственности решения системы (11) для важных в приложениях областей D, W-образы к-рых не являются погружаемыми. Здесь принципиально различны два случая: $0\in W(D)$ и $0\notin W(D)$ (в последней из отмеченных возможностей вопрос о единственности решения системы (11) исчерпывающе исследован в предположении, что $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Возможны различные вариации М. п. (11), относящиеся к поведению соответствующих функций на Г.

К М. п. в комплексной области с помощью преобразования Бореля и его обобщений (см. *Сравнения функций*) сводится ряд широко известных интерполяционных задач, напр.:

$$F^{(n)}(hn)=a_n;\ F^{(n)}(\omega^n)=a_n;$$
$$F(\omega^n)=a_n;\ \Delta^n F(hn)=a_n;$$
$$F^{(np+l_s)}(\alpha_s)=a_{ns},$$
$$n=0,\ 1,\ \ldots,\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1,\ 0\leqslant l_s\leqslant 1;$$
$$\Delta^{2n+l_s}F(\alpha_s+2hn)=a_{ns},\ s=0,\ 1;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Кроме того, многие из теорем о целозначных функциях сводятся к весьма частным случаям задачи А.

Лит.: [1] Стилтьес Т. И., Исследования о непрерывных дробях, пер. с франц., Хар.— К., 1936; [2] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 3, М.— Л., 1948; [3] Марков А. А., Избр. труды по теории непрерывных дробей..., М. – Л., 1948; [4] Shohat J. A., Tamarkin J. D., The Problem of Moments, N. Y., 1950; [5] Ахиезер Н. И., Классическая проблема моментов..., М., 1961; [6] Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; [7] Buck R. C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1948, v. 64, p. 283—98; [8] его же, «Duke Math. J.», 1948, v. 15, p. 879—91; [9] его же, «Comment. math. helv.», 1953, t. 27, p. 75—80; [10] Лохин И. Ф., «Матем. сб.», 1954, т. 35, № 2, с. 223—230; [11] Казьмин Ю. А., «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, с. 1251—54; [12] его же, там же, 1972, т. 204, № 6, с. 1309—1312; [13] его же, там же, т. 205, №1, с. 19—22; [14] Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967; [15] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [16] Крейн М. Г., Нудельман А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973. *Ю. А. Казьмин.*

МОНЖА КОНУС, направляющий конус,— огибающая касательных плоскостей к интегральной поверхности в точке (x_0, y_0, z_0) дифференциального уравнения

$$F(x, y, z, p, q)=0, \qquad (*)$$

где $p=\partial z/\partial x$, $q=\partial z/\partial y$. Если функция F нелинейна по p, q, то имеет место общий случай: касательные плоскости образуют однопараметрич. семейство плоскостей, проходящих через фиксированную точку; его огибающей является конус. Если функция F линейна по p, q, то получается пучок плоскостей, проходящих через прямую, т. е. М. к. вырождается в т. н. ось Монжа. Направления образующих М. к., соответствующего нек-рой точке (x_0, y_0, z_0), наз. характеристическими направлениями. Линия на интегральной поверхности, касающаяся в каждой своей точке соответствующей образующей М. к., наз. характеристической линией, характеристикой, фокальной кривой, или кривой Монжа.

Геометрич. трактовку (см. рис.) уравнения (*) как поля конусов направлений дал Г. Монж (G. Monge, 1807). *А. Б. Иванов.*

МОНЖА УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение вида

$$F(x,\ y,\ z,\ dx,\ dy,\ dz)=0.$$

Г. Монж (G. Monge, см. [1]) изучал такие уравнения в связи с построением геометрич. теории дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка. Частным случаем М. у. является *Пфаффа уравнение*.

Напр., если рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными 1-го порядка для неизвестной функции z двух независимых переменных x, y:

$$\Phi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

то направления образующих *Монжа конуса* (характеристич. направления) в нек-рой точке подчиняются М. у., к-рое можно записать в форме

$$M\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right)=0.$$

Это соотношение представляет собой одно обыкновенное дифференциальное уравнение с двумя неизвестными функциями, т. е. является простейшим случаем недоопределенной системы. Часто М. у. наз. произвольная недоопределенная система обыкновенных дифференциальных уравнений, в к-рой число уравнений меньше числа неизвестных функций.

Лит.: [1] Монж Г., Приложение анализа к геометрии, пер. с франц., М.— Л., 1936; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Рашевский П. К., Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., 1947. *Н. Х. Розов.*

МОНЖА — АМПЕРА УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка вида

$$rt-s^2-ar+2bs+ct+\varphi,$$

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

коэффициенты к-рого зависят от переменных x, y, неизвестной функции $z(x,\ y)$ и ее первых производных

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Тип М.— А. у. зависит от знака выражения

$$\Delta=\varphi+ac-b^2.$$

Если $\Delta>0$, М.—А. у. есть уравнение эллиптич. типа, если $\Delta<0$,— гиперболического, если $\Delta=0$ — параболического. М.—А. у. инвариантно относительно преобразования прикосновения. В частности, преобразование

$$\xi=p,\quad \eta=q,\quad \zeta=z-px-qy$$

переводит уравнение

$$rt-s^2=\varphi(p,\ q)$$

в уравнение

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\frac{1}{\varphi(\xi,\ \eta)}.$$

Развитие теории М.—А. у. связано главным образом с решением различных задач геометрии, к-рые в аналитич. постановке сводятся к рассмотрению таких уравнений. Напр., построение поверхности с данным линейным элементом сводится к решению уравнения Дарбу, к-рое является М.—А. у. В случае полугеодезич. параметризации (линейный элемент $ds^2=du^2+c^2dv^2$) это уравнение имеет вид

$$r\left(t+cc_u p-\frac{c_v}{c}q\right)-\left(s-\frac{c_u}{c}q\right)^2+$$

$$+\frac{c_{uu}}{c}(c^2-c^2p^2-q^2)=0.$$

Тип уравнения Дарбу зависит от знака гауссовой кривизны $k=-c_{uu}/c$. В случае гиперболич. типа уравнения Дарбу (гауссова кривизна отрицательна) характеристиками являются асимптотич. линии. Применение теоремы Коши — Ковалевской к уравнению Дарбу дает теорему существования поверхности с данным линейным элементом, коэффициенты к-рого являются аналитич. функциями.

Особенно высокого уровня развития теория М.—А. у. эллиптич. типа получила благодаря введению понятия обобщенного решения и применению геометрич. методов его изучения. В простейшем случае уравнения $rt-s^2=\varphi$ обобщенное решение определяется как выпуклая функция $z(x,\ y)$, удовлетворяющая равенству

$$\int\int_{M^*} dp\,dq-\int\int_{M}\varphi\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,dx\,dy,$$

где M — произвольное борелевское множество плоскости xy в области, где рассматривается решение, а M^* — т. н. нормальное изображение множества M, к-рое состоит из тех точек плоскости pq, для к-рых p и q являются угловыми коэффициентами опорных плоскостей поверхности $z=z(x,\ y)$ в точках $(x,\ y,\ z)$, проектирующихся в M. Регулярное (дважды дифференцируемое) решение является обобщенным. Обобщенное решение в случае непрерывной положительной функции φ является гладким, однако вторые производные могут не существовать. Построение обобщенного решения в своей существенной части сводится к чисто геометрич. задаче о построении бесконечного выпуклого многогранника с заданными направлениями конечных граней и заданной функцией на этих гранях. В частности, если правая часть φ уравнения зависит только от x и y, этой функцией является площадь грани. Предельным переходом от таких многогранников получается график обобщенного решения уравнения. Для обобщенных решений получаются достаточно общие теоремы существования и единственности решения задачи Дирихле. В частности, имеет место следующая теорема. Задача Дирихле для уравнения

$$rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$$

в выпуклой области G разрешима при любых непрерывных граничных значениях, если кривизна кривой, ограничивающей область G, положительна, функция φ непрерывна, положительна, неубывающая по z и при $p^2+q^2\to\infty$ имеет порядок роста не более $p^{2-\varepsilon}q^2$. При заданном направлении выпуклости это решение является единственным.

Существенным результатом теории М.—А. у. эллиптич. типа является теорема о регулярности обобщенных решений. Для простейшего уравнения

$$rt-s^2=\varphi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$$

эта теорема гласит: при $\varphi>0$, $\varphi_z>0$ всякое обобщенное решение с регулярной правой частью (φ) является регулярным. Именно, если φ есть k раз дифференцируемая функция ($k\geqslant 3$), то обобщенное решение по крайней мере $k-1$ раз дифференцируемо. Если φ — аналитич. функция, то обобщенное решение — аналитическое.

Среди общих М.—А. у. эллиптич. типа наиболее изучены сильно эллиптические уравнения. Это — уравнения, у к-рых $\varphi>0$ и квадратичная форма

$$a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2$$

неотрицательна. Основные результаты, приведенные для простейшего М.—А. у., распространены на случай сильно эллиптич. уравнений. Для них введено понятие обобщенного решения, при весьма общих

условиях доказано существование и единственность решения задачи Дирихле, а также доказана регулярность обобщенного решения в зависимости от регулярности коэффициентов уравнения. Уравнение Дарбу для линейного элемента с положительной кривизной, вообще говоря, не является сильно эллиптическим. Его обобщенное решение определяется как z-координата поверхности, реализующей данный линейный элемент. Уравнение Дарбу имеет обобщенное решение в любой области, выпуклой в смысле заданной метрики (геодезич. кривизна края положительна). В любой такой области при достаточно общих условиях доказывается разрешимость задачи Дирихле. Обобщенное решение является регулярным, если коэффициенты линейного элемента являются регулярными. Обобщенное решение — аналитическое, если коэффициенты — аналитические.

Важные результаты получены для М.—А. у. эллиптич. типа на многообразиях, гомеоморфных сфере. К таким уравнениям приводят, в частности, две классич. проблемы: *Вейля проблема* и *Минковского проблема*. Решения этих проблем, полученные предельным переходом от многогранников, являются обобщенными. Регулярность этих решений получается из теорем о регулярности обобщенных решений.

М.—А. у. рассматривались Г. Монжем (G. Monge, 1784) и А. Ампером (A. Ampère, 1820).

Лит.: [1] Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., т. 3, ч. 1, М.— Л., 1933; [2] Погорелов А. В., Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа, Хар., 1960; [3] его же, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969.

А. В. Погорелов.

МОНОГЕННАЯ ПОЛУГРУППА, циклическая полугруппа,— полугруппа, порожденная одним элементом. М. п., порожденная элементом a, обозначается обычно $\langle a\rangle$ (иногда $[a]$) и состоит из всевозможных степеней a^k с натуральными показателями. Если все эти степени различны, то $\langle a\rangle$ изоморфна аддитивной полугруппе натуральных чисел. В противном случае $\langle a\rangle$ конечна, и тогда число ее элементов наз. порядком полугруппы $\langle a\rangle$, а также порядком элемента a. Если $\langle a\rangle$ бесконечна, то говорят, что элемент a имеет бесконечный порядок. Для конечной М. п. $A=\langle a\rangle$ существует наименьшее число h с тем свойством, что $a^h=a^k$ при нек-ром $k>h$; число h наз. индексом элемента a (а также полугруппы A). Если при этом d — наименьшее число с тем свойством, что $a^h=a^{h+d}$, то d наз. периодом элемента a (полугруппы A). Пара (h, d) наз. типом элемента a (полугруппы A). Для любых натуральных чисел h и d существует М. п. типа (h, d); две конечные М. п. изоморфны тогда и только тогда, когда их типы совпадают. Если (h, d) — тип М. п. $A=\langle a\rangle$, то элементы $a, \ldots, a^{h+d-1}$ различны, и, следовательно, порядок A равен $h+d-1$; множество

$$G=\{a^h, a^{h+1}, \ldots, a^{h+d-1}\}$$

является в A наибольшей подгруппой и наименьшим идеалом; единица e группы G будет единственным идемпотентом в A, причем $e=a^{ld}$ при любом l таком, что $ld\geqslant h$; группа G — *циклическая группа*, ее порождающим элементом будет, напр., ae. Идемпотент конечной М. п. является в ней единицей (нулем) тогда и только тогда, когда ее индекс (соответственно период) равен 1; это эквивалентно тому, что данная М. п. есть группа (соответственно *нильпотентная полугруппа*). Всякая подполугруппа бесконечной М. п. является конечно порожденной полугруппой.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1, М., 1972; [2] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960.

Л. Н. Шеврин.

МОНОГЕННАЯ ФУНКЦИЯ – функция комплексного переменного, имеющая конечную производную.

Точнее, функция $f(z)$, определенная на множестве E комплексной плоскости $\mathbb{C}$, наз. моногенной (относительно множества E) в конечной неизолированной точке $\zeta \in E$, если она имеет в этой точке конечную производную $f'_E(\zeta)$ по переменному $z \in E$:

$$f'_E(\zeta) = \lim_{z \to \zeta,\ z \in E} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Функция, моногенная в каждой неизолированной точке множества E, наз. моногенной на E.

Если $E = G$ — область плоскости $\mathbb{C}$, то функция, моногенная на G, наз. *аналитической функцией* в области G.

Если E не является областью, то моногенные на E функции, вообще говоря, уже не обладают характерными свойствами аналитич. функций. Однако если множество E, не содержащее в своем составе областей, является достаточно «массивным» вблизи большинства своих точек (точнее, если дополнение к E в плоскости $\mathbb{C}$ является достаточно разреженным вблизи большинства точек $\zeta \in E$), то функции, моногенные на E, обладают в ослабленном виде многими свойствами аналитич. функций. В попытках разобраться в глубинных связях между основными свойствами аналитич. функций понятие аналитич. функции обобщалось различными путями: посредством обобщения ее области определения, обобщения самого понятия производной, ослабления условий Коши — Римана, ослабления условий теоремы Мореры и т. п. (см. [13] § 6). С этой же целью для «тощих» множеств E, напр. для отрезка $E = [a, b] \subset \subset (-\infty, \infty)$, выделялись т. н. *квазианалитические классы* функций. Изучались также функции, определенные на нигде не плотных достаточно массивных компактах E, близкие к аналитич. функциям в том смысле, что они могут быть с любой точностью равномерно на E приближены аналитич. функциями или, что то же самое, рациональными функциями переменной z.

Ниже приведены нек-рые результаты из перечисленных направлений.

1. Функции, моногенные в области. Если $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ (при этом $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — действительнозначные функции), то для аналитичности $f(z)$ в области G достаточно (и необходимо) выполнения в каждой точке $x + iy \in G$ одновременно двух условий: 1) $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют полные дифференциалы $du(x, y)$ и $dv(x, y)$ по совокупности действительных переменных (x, y); 2) выполнены условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Условия этой теоремы ослаблялись и обобщались. Напр., показано, что требование существования полных дифференциалов у u и v можно заменить существенно более слабым условием ограниченности u и v в G и, сохранив требование существования первых частных производных функций u и v всюду в G, потребовать выполнение условий Коши — Римана лишь почти всюду в G (в смысле плоской меры Лебега) (см. [6]).

Пусть $L(z)$ — какая-либо пара различных прямых, пересекающихся в точке z, $R(z)$ — какая-либо тройка выходящих из z попарно неколлинеарных лучей и $E(z)$ — какое-либо измеримое множество, имеющее z своей точкой плотности в смысле Лебега. Аналитичность непрерывной в G функции $f(z)$ обеспечивается каждым из следующих условий в отдельности (см. [3] — [5]): а) всюду в G существует $f'_{L(z)}(z) \neq \infty$; б) всюду в G существует $f'_{R(z)}(z) \neq \infty$; в) всюду в G существует $f'_{E(z)}(z) \neq \infty$. Здесь каждое из множеств $L(z)$, $R(z)$, $E(z)$ — свое для каждой точки. Следует заметить, что

$f'_{E(z)}(z)$ зависит от f и z, но не зависит от $E(z)$; производная

$$f'_{as}(z)=f'_{E(z)}(z)$$

наз. асимптотической (аппроксимативной) производной, а функция, имеющая асимптотич. производную в точке z (соответственно в области G), наз. асимптотически моногенной в точке z (соответственно в G). Вместо условия б) достаточно потребовать существования предела для

$$\arg\left((f(z')-f(z))/(z'-z)\right) \text{ при } z'\to z,\ z'\in R(z).$$

2. Функции, моногенные на нигде не плотных множествах. Э. Борель [8] построил такое совершенное связное множество (континуум) E без внутренних точек и такую расширяющуюся последовательность $E_1\subset E_2\subset\ldots\subset E$ совершенных множеств, что площадь $\mathrm{mes}_2 E$ множества E положительна,

$$\mathrm{mes}_2\left(E\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0,$$

и из моногенности $f(z)$ на E (или хотя бы на каждом множестве E_n, $n=1, 2, \ldots$) следует бесконечная дифференцируемость $f(z)$ по $z\in E_{n_0}$ при каждом фиксированном n_0. Можно указать нек-рые сравнительно общие достаточные условия на E, чтобы E обладало этим свойством или более слабым свойством k-кратной дифференцируемости по $z\in E_n$, где k — наперед заданное натуральное число. Найдены также достаточные условия на нигде не плотный континуум E для того, чтобы для функций, моногенных на нем, были справедливы аналоги интегральной теоремы Коши, разложения в ряд Тейлора и различные формы теоремы единственности, напр. такая: если моногенные на E функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают на нек-рой порции множества E (т. е. на непустом пересечении E с нек-рым открытым кругом), то $f_1(z)\equiv f_2(z)$ на E (см. [9]).

3. Функции, близкие к аналитическим. Как известно, любая аналитическая в области G функция $f(z)$ является пределом нек-рой последовательности рациональных функций $r_n(z)$, к-рая сходится к $f(z)$ равномерно на каждом компакте $K\subset G$. Рассматривая достаточно массивный нигде не плотный континуум E и класс $R(E)$ функций $f(z)$, $z\in E$, для каждой из к-рых существует последовательность рациональных функций $r_n(z, f)$, равномерно сходящаяся к $f(z)$, получают еще одно обобщение понятия области и понятия функции $f(z)$, аналитической на E. Если E — нигде не плотное множество на $\mathbb{C}$, то всегда найдется функция $f\in R(E)$, не имеющая производной $f'_E(z)$ ни в одной точке $z\in E$ (см. [10]). Однако для каждого m, $2\leqslant m\leqslant\infty$, можно указать условие на E, при выполнении к-рого каждая функция $f\in R(E)$ будет иметь производные $f^{(k)}_E(z)$, где $1\leqslant k<m$, а E_n замкнуто, $E_n\subset E$, $\mathbf{mes}_2(E\setminus E_n)<1/n$ (см. [11]). М. В. Келдыш построил пример нигде не плотного континуума E, на к-ром для функций f_1, $f_2\in R(E)$ справедлива теорема единственности в форме, приведенной в конце п. 2 (см. также [12]). (По поводу моногенных свойств функций из $R(E)$ в терминах функционального анализа см. [12] ч. I, § 17.) Исследовалась также зависимость моногенных свойств функций $f\in R(E)$ от скорости приближения ее посредством рациональных функций.

Лит.: [1] Федоров В. С., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 7—16; [2] Bohr H., «Math. Z.», 1918, Bd 1, S. 403—20; [3] Меньшов Д. Е., «Fundam. math.», 1935, v. 25, p. 59—97; [4] его же, Les conditions de monogénéité, P., 1936; [5] его же, «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 189—210; [6] Толстов Г. П., О криволинейном и повторном интеграле, М.— Л., 1950 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 35); [7] Трохимчук Ю. Ю., Непрерывные отображения и условия моногенности, М., 1963; [8] Borel E., Leçons sur les fonctions monogè-

nes uniformes d'une variable complexe, P., 1917; [9] Селезнев А. И., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 4, с. 591—94; [10] Долженко Е. П., там же, 1959, т. 125, № 5, с. 970—973; [11] его же, там же, 1962, т. 143, № 4, с. 771—74; [12] Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 4, М., 1975, с. 143—250; [13] Бермант А. Ф., Маркушевич А. И., в кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947, М.—Л., 1948, с. 401—406. *Е. П. Долженко.*

МОНОГЕННОСТИ МНОЖЕСТВО — множество всех производных чисел данной функции комплексного переменного в данной точке. Точнее, пусть E — множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ζ — неизолированная его точка, $f(z)$ — комплекснозначная функция переменного $z \in E$. Комплексное число a (собственное или равное ∞) наз. производным числом функции f в точке ζ относительно множества E, если существует последовательность $z_n \in E$ со свойствами: $z_n \neq \zeta$, $z_n \to \zeta$,

$$\frac{f(z_n)-f(\zeta)}{z_n-\zeta} \longrightarrow a \text{ при } n \to \infty.$$

Множество $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)$ всех производных чисел функции f в точке ζ относительно E наз. множеством моногенности функции f в точке ζ относительно E (см. [1]). Множество $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)$ состоит из единственной конечной точки a тогда и только тогда, когда $f(z)$ — *моногенная функция* в точке ζ относительно E и $f'_E(\zeta)=a$. Множество $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)$ всегда замкнуто, и для каждого замкнутого множества A расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, каждого множества $E \subset \mathbb{C}$ и каждой конечной неизолированной точки ζ этого множества найдется такая функция $f(z)$, $z \in E$, что $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)=A$. Если ζ — внутренняя точка E, то для любой непрерывной в нек-рой окрестности этой точки функции $f(z)$ множество $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)$ является замкнутым и связным (континуумом) на $\overline{\mathbb{C}}$, и обратно, для любого континуума $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ найдется функция $f(z)$, непрерывная в нек-рой окрестности ζ, для к-рой $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)=K$. Если функция $f(z)=f(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)$ дифференцируема по совокупности действительных переменных (x, y) во внутренней точке $\zeta=\xi+i\eta$ множества E, то $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)$ представляет собой окружность $\gamma(r, c) = \{w: |w-c|=r\}$ (возможно, вырожденную в точку при $r=0$) с центром $c=\partial f(\zeta)/\partial z$ и радиусом $r=|\partial f(\zeta)/\partial \bar{z}|$, где

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

— т. н. формальные производные. Верно и обратное: каждая окружность является М. м. для нек-рой функции f, дифференцируемой по (x, y) в заданной внутренней точке ζ множества E.

Если $f(z)$ непрерывна в области G, то почти в каждой точке $\zeta \in G$ множество $\mathfrak{M}(\zeta, f, G)$ есть либо нек-рая окружность $\gamma(r, c)$, $0 \leqslant r < \infty$, либо $\overline{\mathbb{C}}$ (см. [2]). В общем случае произвольного (необязательно измеримого) множества E и произвольной (необязательно измеримой) конечной функции $f(z)$, $z \in E$, почти в каждой точке $\zeta \in E$ имеет место один из следующих трех случаев: а) $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)=\gamma(r, c)$, $c \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < \infty$; б) $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)=\overline{\mathbb{C}}$; в) $\mathfrak{M}(\zeta, f, E)=\gamma(r, c) \cup \infty$, $c \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant r < \infty$. При этом почти в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)=f(x+iy)$ по совокупности $(x, y) \in E$ выполнен случай а), почти же в каждой точке непрерывности функции $f(z)$ — один из первых двух случаев. Каждый из случаев а) — в) в отдельности может реализоваться почти в каждой точке $\zeta \in E$.

Лит.: [1] Федоров В. С., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2, с. 7—16; [2] Трохимчук Ю. Ю., Непрерывные отображения и условия моногенности, М., 1963; [3] Долженко Е. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1962, т. 26, с. 347—60.
Е. П. Долженко.

МОНОДРОМИИ ГРУППА обыкновенного линейного дифференциального уравнения или линейной системы уравнений — группа $(n\times n)$-матриц, к-рая отвечает системе n-го порядка

$$\dot{x} = A(t)x \qquad (*)$$

и определяется следующим образом. Пусть матрица $A(t)$ голоморфна в области $G\subset\mathbb{C}$, точка $t_0\in G$ и $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (*), заданная в малой окрестности t_0. Если $\gamma\subset G$ — замкнутая кривая с началом в точке t_0, то при аналитич. продолжении вдоль γ, $X(t)\to X(t)C_\gamma$, где C_γ — постоянная $(n\times n)$-матрица. Если кривые γ_1, γ_2 гомотопны в G, то $C_{\gamma_1}=C_{\gamma_2}$; если $\gamma=\gamma_1\gamma_2$, то $C_\gamma=C_{\gamma_1}C_{\gamma_2}$. Отображение $\gamma\to C_\gamma$ есть гомоморфизм *фундаментальной группы* области G:

$$\pi^1(G,\ t_0)\to \mathrm{GL}(n,\ C),$$

где $\mathrm{GL}(n,\ C)$ — группа $(n\times n)$-матриц с комплексными элементами; образ этого гомоморфизма наз. группой монодромии $M(t_0,\ G)$ системы (*). При этом

$$M(t_1,\ G)=T^{-1}M(t_0,\ G)T,$$

где T — постоянная матрица. М. г. вычислена для уравнений Эйлера, Папперитца (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1950; [2] Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939.
М. В. Федорюк.

МОНОДРОМИИ МАТРИЦА — постоянная $(n\times n)$-матрица $X(\omega)$, к-рая является значением в точке $t=\omega$ фундаментальной матрицы $X(t)$, нормированной в нуле, линейной системы дифференциальных уравнений

$$x' = A(t)\,x,\ t\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}^n,$$

с ω-периодической матрицей $A(t)$, суммируемой на каждом компактном промежутке из $\mathbb{R}$. *Ю. В. Комленко.*

МОНОДРОМИИ ОПЕРАТОР — линейный ограниченный оператор $U(T)$, ставящий в соответствие начальному значению $x(0)=x_0$ решения дифференциального уравнения $\dot{x}=A(t)x$ в банаховом пространстве с ограниченным оператором $A(t)$, непрерывно и периодически с периодом T зависящим от t, его значение в момент времени T: $x(T)=U(T)x_0$. Для всякого решения справедливо: $x(t+T)=U(T)x(t)$. В конечномерном случае оператору $U(T)$ отвечает *монодромии матрица*. Расположение спектра М. о. влияет на существование периодич. решений уравнения, на поведение его решений на бесконечности, на приводимость уравнения к уравнению с постоянными коэффициентами, на наличие экспоненциальной дихотомии. В терминах спектра М. о. решается также вопрос о существовании и единственности периодич. решений неоднородного уравнения $\dot{x}=A(t)x+f(t)$ с периодическими $A(t)$ и $f(t)$. См. также *Качественная теория дифференциальных уравнений* в банаховом пространстве. *С. Г. Крейн.*

МОНОДРОМИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — преобразование слоев (или их гомотопич. инвариантов) расслоенного пространства, соответствующее нек-рому пути в базе. Более точно, пусть $p:E\to B$ — локально тривиальное расслоение и пусть $\gamma:[0,\ 1]\to B$ — путь в B с началом в точке $a=\gamma(0)$ и концом в $b=\gamma(1)$. Тривиализация расслоения γ^*E определяет гомеоморфизм T_γ слоя $p^{-1}(a)$ на слой $p^{-1}(b)$, $T_\gamma:p^{-1}(a)\to p^{-1}(b)$. При изменении тривиализации γ^*E гомеоморфизм T_γ заменяется на гомотопически эквивалентный го-

меоморфизм; это же происходит и при замене пути γ гомотопным путем. Гомотопич. тип гомеоморфизма T_γ и наз. **преобразованием монодромии**, соответствующим пути γ. Когда $a=b$, т. е. когда путь γ является петлей, М. п. T_γ — гомеоморфизм слоя F $p^{-1}(a)$ в себя (определенный, опять-таки, с точностью до гомотопии). Это отображение, а также гомоморфизмы, индуцированные им в гомологиях и когомологиях слоя F, также наз. М. п. Сопоставление петле γ преобразования T_γ задает представление фундаментальной группы $\pi_1(B, a)$ на $H^*(F)$.

Понятие М. п. возникло при изучении многозначных аналитич. функций (см. *Монодромии теорема*). Если $S \to P^1(\mathbb{C})$ — риманова поверхность такой функции, то выбрасыванием из сферы Римана $P^1(\mathbb{C})$ особых точек функции получается неразветвленное накрытие. М. п. в этом случае наз. также **преобразованием наложения или скольжения**.

Наиболее часто М. п. возникает в следующей ситуации. Пусть $D=\{z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$ — диск в комплексной плоскости, X — аналитич. пространство, а $f:X\to D$ — собственное голоморфное отображение, X_t — слой $f^{-1}(t)$, $t\in D$, $D^*=D\setminus\{0\}$ и $X^*=f^{-1}(D^*)$. Уменьшая, если нужно, радиус D, можно добиться, чтобы расслоение $f:X^*\to D^*$ стало локально тривиальным. М. п. T, связанное с обходом вокруг O в D, наз. **монодромией семейства** $f:X\to D$ в точке $O\in D$; оно действует в когомологиях (или гомологиях) слоя X_t, где $t\in D^*$. Более других изучен случай, когда пространство X гладкое, как и все слои X_t, $t\neq 0$. Действие монодромии T на пространстве $H^*(X_t, \mathbb{Q})$ в этом случае **квазиунипотентно** [4], т. е. существуют целые положительные числа k и N такие, что $(T^k-1)^N=0$. В свойствах монодромии проявляются многие характерные черты вырождения семейства $f:X\to D$. Монодромия семейства $X\to D$ тесно связана со смешанной структурой Ходжа в когомологиях $H^*(X_0)$ и $H^*(X_t)$ (см. [5] — [7]).

В случае, когда особенности $f:X\to D$ изолированы, М. п. может быть локализовано. Пусть x — особая точка отображения f (или, что то же, слоя X_0) и пусть B — шар достаточно малого радиуса в X с центром в x. Уменьшая, если нужно, радиус D, можно определить локальную тривиализацию расслоения $B\cap f^{-1}(D^*)\to D^*$, согласованную на границе с тривиализацией расслоения $\partial B\cap f^{-1}(D)\to D$. Это дает диффеоморфизм T многообразия «исчезающих циклов» $V_t=B\cap X_t$ в себя, тождественный на его крае ∂V_t и называемый **локальной монодромией** f в точке x. Действие М. п. на когомологиях $H^*(V_t)$ отражает важнейшее свойство особенности отображения f в точке x (см. [1], [2], [7]). Известно, что многообразие V_t гомотопически эквивалентно букету μ n-мерных сфер, где $n+1=\dim X$, а μ — число Милнора ростка f в x.

Простейшим является случай особенности Морса, когда функция f в окрестности точки x приводится к виду $f=z_0^2+z_1^2+\ldots+z_n^2$. В этом случае $\mu=1$, а внутренность V_t^0 многообразия V_t диффеоморфна касательному расслоению к n-мерной сфере S^n. **Исчезающим циклом** δ наз. образующая группы когомологий с компактными носителями $H_c^n(V_t^0, \mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$, определенная с точностью до знака. Вообще, если $f:X\to D$ — собственное голоморфное отображение (как выше, имеющее единственную морсовскую особенность в точке x), то **исчезающим в точке** x циклом δ_x наз. также образ цикла $\delta\in H_c^n(V_t^0)$ при естественном отображении $H_c^n(V_t^0)\to H^n(X_t)$. В этом случае гомо-

морфизм специализации $r_t^*: H^i(X_0) \to H^i(X_t)$ является изоморфизмом при $i \neq n$, $n-1$, и последовательность

$$0 \longrightarrow H^n(X_0) \longrightarrow H^n(X_t) \xrightarrow{(\ ,\delta_x)} \mathbb{Z} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{n+1}(X_0) \longrightarrow H^{n+1}(X_t) \longrightarrow 0$$

точна. М. п. T действует на $H^i(X_t)$ тривиально при $i \neq n$, а его действие на $H^n(X_t)$ задается формулами Пикара—Лефшеца: для $z \in H^n(X_t)$

$$T_z = z \pm (z,\ \delta_x)\,\delta_x.$$

$n \bmod 4$	0	1	2	3
$\pm$	$-$	$-$	$+$	$+$
(δ_x, δ_x)	2	0	-2	0

Знаки в этой формуле и значения (δ_x, δ_x) собраны в таблице.

М. п. T сохраняет форму пересечения на $H^n(X_t)$.

Исчезающие циклы и М. п. используются в теории Пикара — Лефшеца, сравнивающей когомологии проективного комплексного многообразия и его гиперплоского сечения. Пусть $X \subset P^N$ — гладкое многообразие размерности $n+1$, а $\{X_t\}$, $t \in P^1$, — пучок гиперплоских сечений многообразия X с базисным множеством (осью пучка) $Y \subset X$; и пусть выполняются следующие условия: а) Y — гладкое подмногообразие в X; б) существует такое конечное множество $S \subset P^1$, что X_t гладкое при $t \in P^1 - S$; в) для $s \in S$ многообразие X_s имеет единственную невырожденную квадратичную особую точку x_s, причем $x_s \in Y$. Пучки с такими свойствами (пучки Лефшеца) всегда существуют. Пусть $\sigma: \overline{X} \to X$ — моноидальное преобразование с центром в оси пучка Y, а $f: \overline{X} \to P^1$ — морфизм, определяемый пучком $\{X_t\}$; при этом $f^{-1}(t) \cong X_t$ для всех $t \in P^1$. Фиксируется точка $o \in P^1 - S$; тогда М. п. задает действие фундаментальной группы $\pi_1(P^1 - S,\ o)$ на $H^i(X_0)$ (нетривиальное лишь при $i = n$). Для описания действия монодромии на $H^n(X_0)$ выбираются точки s', расположенные около $s \in S$, и пути γ_s', ведущие из o в s'. Пусть $\gamma_s \in \pi_1(P^1 - S,\ o)$ — петля, устроенная так: сначала она идет по γ_s', затем обходит один раз вокруг s и, наконец, возвращается по γ_s' в o. Кроме того, пусть δ_s — исчезающий в точке x_s цикл (точнее, нужно взять исчезающий цикл в $H^n(X_{s'})$ и перенести его в $H^n(X_0)$ при помощи М. п., соответствующего пути γ_s'). Пусть, наконец, $E \subset H^n(X_0, \mathbb{Q})$ — подпространство, порожденное исчезающими циклами δ_s, $s \in S$ (пространство исчезающих когомологий). Тогда имеют место следующие утверждения:

1) группа $\pi_1(P^1 - S,\ o)$ порождается элементами γ_s, $s \in S$;

2) действие γ_s задается формулой

$$\gamma_s(z) = z \pm (z,\ \delta_s)\delta_s;$$

3) пространство $E \subset H^n(X_0)$ инвариантно относительно действия группы монодромии $\pi_1(P^1 - S,\ o)$;

4) подпространство инвариантных относительно монодромии элементов $H^n(X_0)$ совпадает с ортогональным дополнением к E относительно формы пересечения на $H^n(X_0)$, а также с образами естественных гомоморфизмов $H^n(\overline{X}) \to H^n(X_0)$ и $H^n(X) \to H^n(X_0)$;

5) исчезающие циклы $\pm\delta_s$ сопряжены (с точностью до знака) относительно действия $\pi_1(P^1 - S,\ o)$;

6) действие $\pi_1(P^1 - S,\ o)$ на E абсолютно неприводимо.

Формализм исчезающих циклов, М. п. и теория Пикара — Лефшеца построены также для l-адических когомологий алгебраич. многообразий над любым полем (см. [3]).

Лит.: [1] Арнольд В. И., «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 2, с. 11—49; [2] Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, пер. с англ., М., 1971; [3] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, B.— Hdlb.— N. Y., 1973 (Lect. Notes Math., № 340); [4] Clemens C. H., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 136, p. 93—108; Schmid W., «Invent. Math.», 1973, Bd 22, S. 211—319; [6] Steenbrink J., «Invent. Math.», 1976, Bd 31, S. 229—57; [7] Symposium in Mathematics, Oslo, 1976, p. 524—63; [8] Lefschetz S., L'Analysis situs et la géométrie algébrique, P., 1924; [9] Лефшец С., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, № 6, с. 193—215.

В. И. Данилов.

МОНОДРОМИИ ТЕОРЕМА — достаточный признак однозначности *ветви аналитической функции*. Пусть D — односвязная область комплексного числового пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$. Тогда, если нек-рый элемент аналитич. функции $\Sigma(z^0; r)$ с центром $z^0 \in D$ аналитически продолжаем вдоль любого пути, расположенного в D, то возникающая при этом аналитич. продолжении ветвь аналитич. функции $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$ однозначна в D. Иначе говоря, ветвь аналитич. функции $f(z)$, определяемая односвязной областью D и элементом $\Sigma(z^0; r)$ с центром $z^0 \in D$, обязательно однозначна. Другая равносильная формулировка: если элемент $\Sigma(z^0; r)$ аналитически продолжается вдоль всех путей, принадлежащих произвольной области $D \subset \mathbb{C}^n$, то результат этого продолжения в любую точку $z^* \in D$ (т. е. элемент аналитич. функции $\Sigma(z^*; r^*)$ с центром z^*) один и тот же для всех гомотопных путей в D, соединяющих точки z^0 и z^*.

М. т. справедлива и для аналитич. функций $f(z)$, определенных в областях D на римановых поверхностях или на римановых областях. См. также *Полная аналитическая функция*.

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [2] Стоилов С., Теория функций комплексного переменного, пер. с рум., т. 1, М., 1962; [3] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

МОНОДРОМНАЯ ФУНКЦИЯ в области D комплексной плоскости — однозначная и непрерывная функция в области D (исключая, быть может, полюсы). Термин «М. ф.» применялся О. Коши (A. Cauchy) в связи с необходимостью подразделения класса *аналитических функций* на М. ф. и многозначные аналитич. функции; в настоящее время (1982) он вышел из употребления.

См. также *Монодромии теорема*.

Е. Д. Соломенцев.

МОНОИД — термин, используемый для сокращения словосочетания «полугруппа с единицей». Таким образом, моноидом наз. множество M, на к-ром задана бинарная ассоциативная операция, обычно именуемая умножением, и в к-ром существует такой элемент e, что $ex=x=xe$ для любого $x \in M$. Элемент e наз. единицей и часто обозначается 1. В любом М. имеется ровно одна единица. Если заданная в М. операция коммутативна, то ее часто наз. сложением, а единицу — нулем М. и обозначают 0.

Примеры М. 1) Множество всех отображений произвольного множества S в себя является М. относительно операции последовательного выполнения (суперпозиции) отображений. Единицей служит тождественное отображение. 2) Множество эндоморфизмов любой универсальной алгебры A является М. относительно операции суперпозиции, единица — тождественный эндоморфизм. 3) Всякая группа является М.

Всякую полугруппу P без единицы можно вложить в М. Для этого достаточно выбрать символ 1, не принадлежащий P, и на множестве $P \cup \{1\}$ задать умножение следующим образом: $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ для любого $x \in P$, на элементах из P операция остается прежней. Всякий М. можно представить как М. всех эндоморфизмов нек-рой универсальной алгебры.

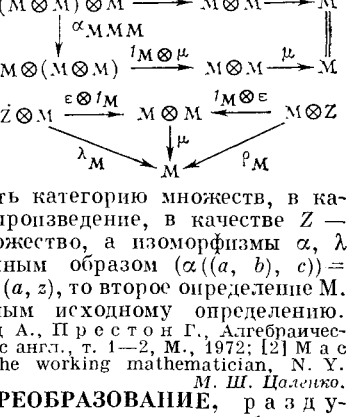
Произвольный М. можно рассматривать также как категорию с одним объектом. Это позволяет сопоста-

вить моноид M дуальный (двойственный) моноиду M^{Op}. Элементы обоих М. совпадают, а произведение x и y в M^{Op} полагается равным произведению yx в M.

Развитие теории М. и сопряженных функторов выявило полезность определения М. в т. н. моноидальных категориях. Пусть в категории $\mathfrak{M}$ задан бифунктор $\otimes: \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$, выделен объект Z и фиксированы естественные изоморфизмы

$$\alpha_{ABC}: (A\otimes B)\otimes C \longrightarrow A\otimes(B\otimes C),$$
$$\lambda_A: Z\otimes A \longrightarrow A,\ \rho_A: A\otimes Z\longrightarrow A,$$

удовлетворяющие условиям когерентности. Объект M наз. М. категории $\mathfrak{M}$, если существуют такие морфизмы $\mu: M\otimes M\to M$ и $\varepsilon: Z\to M$, что следующие диаграммы коммутативны:



Если в качестве $\mathfrak{M}$ взять категорию множеств, в качестве $\otimes$ — декартово произведение, в качестве Z — любое одноточечное множество, а изоморфизмы α, λ и ρ выбрать естественным образом $(\alpha((a, b), c)) = (a, (b, c))$, $\lambda(z, a) = a - \rho(a, z)$, то второе определение М. оказывается равносильным исходному определению.

Лит.: [1] Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; [2] Mac Lane S., Categories for the working mathematician, N. Y. [a. o.], 1971.

М. Ш. Цаленко.

МОНОИДАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, раздутие, σ-процесс,— специального вида *бирациональный морфизм* алгебраич. многообразий или бимероморфный морфизм аналитич. пространств. Пусть, напр., X — алгебраич. многообразие (или произвольная схема), а $D\subset X$ — замкнутое подмногообразие, задаваемое пучком идеалов J. Моноидальным преобразованием X с центром в D наз. X-схема $X' = \mathrm{Proj}\,(\bigoplus_{n\geqslant 0} J^n)$ — проективный спектр градуированного пучка O_X-алгебр $\bigoplus_{n\geqslant 0} J^n$. Если $f: X'\to X$ — структурный морфизм X-схемы X', то пучок идеалов $f^*(J) = J\cdot O_{X'}$ на X' (определяющий исключительную подсхему $f^{-1}(D)$ в X') обратим. Это значит, что $f^{-1}(D)$ является *дивизором* в X'; кроме того, f индуцирует изоморфизм между $X' - f(D)$ и $X - D$. М. п. $f: X'\to X$ схемы X с центром в D характеризуется следующим свойством универсальности [1]: пучок идеалов $f^*(J)$ обратим и для любого морфизма $g: X''\to X$, для к-рого $g^*(J)$ обратим, существует единственный морфизм $h: X''\to X'$ такой, что $g = f\circ h$.

Аналогично определяется и характеризуется М. п. алгебраич. или аналитич. пространства X с центром в замкнутом подпространстве $D\subset X$.

Важный класс М. п. составляют допустимые моноидальные преобразования, к-рые выделяются тем условием, что центр D таких преобразований неособый, а X — нормально плоская схема вдоль D. Последнее означает, что все пучки J^n/J^{n+1} являются плоскими (O_X/J)-модулями. Важность допустимых М. п. объясняется тем, что они не ухудшают особенности многообразия. Более того, доказано (см. [1]), что подходящая последовательность допустимых М. п. улучшает особенности, что позволило доказать теорему о разрешении особенностей алгебраич. многообразий над полем нулевой характеристики.

Особенно просто устроены допустимые М. п. неособых многообразий. Если $f: X'\to X$ М. п. с неособым центром $D\subset X$, то X' снова неособое, а исключительное подмногообразие $f^{-1}(D)$ канонически изоморфно проективизации конормального пучка к D в X. В частном случае, когда D состоит из одной точки, М. п.

заключается в «раздутии» этой точки в целое проективное пространство касательных направлений. О поведении различных инвариантов неособых многообразий (таких как кольцо Чжоу, когомологии, K-функтор, классы Чжэня) при допустимом М. п. см. [2] — [5].

Лит.: [1] Хиронака Х., «Математика», 1965, т. 9, № 6, с. 2—70; [2] Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, B.— Hdlb.— L., 1967; [3] Cohomologie l-adique et fonctions L (SGA-5), B.— Hdlb.— L., 1977; [4] Porteous I., «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1960, v. 56, № 2, p. 118—24; [5] Манин Ю. И., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 5, с. 3—86.

В. И. Данилов.

МОНОМИАЛЬНАЯ ГРУППА ПОДСТАНОВОК — подгруппа группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{Z}[H])$ всех обратимых матриц порядка m над целочисленным групповым кольцом $\mathbb{Z}[H]$ (см. *Групповая алгебра*) нек-рой группы H, состоящая из всевозможных матриц, содержащих в каждой строке и каждом столбце точно один ненулевой элемент из H. Каждой такой матрице, содержащей на (i, j)-м месте ненулевой элемент $h_{ij} \in H$, может быть поставлена в соответствие нек-рая мономиальная подстановка, т. е. отображение $\psi: u_i \to h_{ij}u_j$, где $j = j(i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а $u_i \to u_j$ — подстановка конечного множества $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Произведение таких отображений вычисляется по формуле

$$\psi_1\psi_2 : u_i \longrightarrow (h_{ij}h_{ik})\,u_k$$

($\psi_1 : u_i \to h_{ij}u_j$, $\psi_2 : u_j \to h_{ik}u_k$), и ему будет соответствовать произведение матриц, сопоставляемых отображениям ψ_1 и ψ_2. В М. г. п. изоморфно вкладывается любая группа G, содержащая H в качестве подгруппы индекса m. М. г. п. является (прямым) сплетением группы H с симметрич. группой $S(m)$ степени m.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977; [2] Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962.

Н. Н. Вильямс.

МОНОМИАЛЬНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица над ассоциативным кольцом с единицей, каждая строка и каждый столбец к-рой содержат только один ненулевой элемент. Если ненулевые элементы М. м. равны 1, то эта матрица наз. матрицей-подстановкой. Любая М. м. есть произведение матрицы-подстановки и диагональной матрицы.

Д. А. Супруненко.

МОНОМИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ конечной группы G — такое представление ρ группы G в конечномерном векторном пространстве V, что в нек-ром базисе $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ этого пространства матрица $M^{(e)}_{\rho(g)}$ оператора $\rho(g)$ для любого элемента $g \in G$ имеет точно один ненулевой элемент в каждой строке и в каждом столбце. Иногда М. п. наз. непосредственно матричное представление $g \longmapsto M^{(e)}_{\rho(g)}$. М. п. является частным случаем импримитивного представления (см. *Импримитивная группа*). А именно, набор одномерных подпространств в V, порожденных векторами $e_1, \ldots, e_n$, является системой импримитивности для ρ. Наоборот, если для нек-рого представления φ группы G в векторном пространстве W существует система импримитивности, состоящая из одномерных подпространств, то φ — М. п. Пусть H — какая-либо подгруппа в G. Примером М. п. может служить представление G, индуцированное каким-нибудь одномерным представлением подгруппы H (см. *Индуцированное представление*). Такие представления наз. также индуцированными М. п. (см. [1]). Не всякое М. п. ρ является индуцированным М. п. (однако, если М. п. ρ неприводимо, то оно будет индуцированным М. п.). Данное выше определение М. п. возникло в классич. теории представлений конечных групп. Часто, однако, это определение изменяют, называя М. п. произвольное представление группы G, индуцированное одномерным представлением какой-либо подгруппы H в G. В таком виде определение М. п. имеет смысл уже не только для конечных групп и их

конечномерных представлений, но и, напр., для групп Ли и их представлений в гильбертовых пространствах (подгруппа H при этом предполагается замкнутой). Для достаточно широкого класса групп конструкция М. п. оказывается достаточной для описания всех унитарных неприводимых представлений. А именно, группы, все унитарные неприводимые представления к-рых мономиальны, наз. мономиальными группами, или M-группами. К их числу относятся, напр., все конечные нильпотентные группы и все связные нильпотентные группы Ли. Все конечные M-группы, а также все мономиальные группы Ли разрешимы (см. [2]).

Лит.: [1] Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978.

В. Л. Попов.

МОНОМОРФИЗМ в категории — морфизм $\mu: A \to B$ категории $\mathfrak{K}$, для к-рого из всякого равенства $\alpha\mu=\beta\mu$ (α, β из $\mathfrak{K}$) следует, что $\alpha=\beta$ (другими словами, на μ можно сокращать справа). Другое эквивалентное определение М.: для любого объекта X категории $\mathfrak{K}$ индуцируемое морфизмом μ отображение множеств

$$\mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(X, B)$$

должно быть инъективным. Произведение двух М. является М. Каждый левый делитель М. есть М. Класс всех объектов и класс всех М. произвольной категории $\mathfrak{K}$ составляют подкатегорию категории $\mathfrak{K}$ (обозначаемую обычно Mon $\mathfrak{K}$).

В категории множеств роль М. играют *инъекции*. Двойственным к понятию М. является понятие *эпиморфизма*.

Лит.: [1] Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; [2] Букур И., Деляну А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972.

О. А. Иванова.

МОНОСПЛАЙН — разность между функцией x^n и полиномиальным *сплайном* $S_{n-1}(x)$ степени $n-1$. М. возникают при изучении квадратурных формул для дифференцируемых функций.

Ю. Н. Субботин.

МОНОТОННАЯ БУЛЕВА ФУНКЦИЯ — булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, обладающая следующим свойством: если для нек-рых наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $\beta_j \in \{0, 1\}$, выполнено условие $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех i (в этом случае пишут $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$), то $f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$. Напр., функция $f(x_1, x_2)=x_1 \oplus x_2$ (сложение по модулю 2) не является монотонной, т. к. $(0, 1) \leq (1, 1)$, но $1=f(0, 1) > f(1, 1)=0$.

Примеры М. б. ф.: константы 0 и 1, тождественная функция $f(x)=x$, дизъюнкция $x_1 \vee x_2$, конъюнкция $x_1 \& x_2$ и т. д. Примеры немонотонных булевых функций: отрицание $\bar{x}$, импликация $x_1 \to x_2$ и т. д. Любая функция, полученная с помощью операции суперпозиции из М. б.ф., сама является монотонной. Другими словами, класс всех М. б. ф. является замкнутым. Более того, класс всех М. б. ф. является одним из пяти максимальных (предполных) классов в множестве всех булевых функций, т. е. не существует замкнутого класса булевых функций, содержащего все М. б. ф. и отличного от класса М. б. ф. и класса всех булевых функций. Сокращенная дизъюнктивная нормальная форма любой М. б. ф., отличной от констант 0 и 1, не содержит отрицаний переменных. Множество функций $\{0, 1, x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2\}$ является полной системой (и, более того, базисом) в классе всех М. б. ф.

Для числа $\psi(n)$ М. б. ф., зависящих от n переменных, известно, что

$$\psi(n) = 2^{C_n^{[n/2]}(1+\varepsilon(n))},$$

где $0 < \varepsilon(n) < c\frac{\log n}{n}$, c — нек-рая константа (см. [2]).

Для сложности реализации класса М. б. ф. схемами из функциональных элементов и контактными схемами получены более низкие значения, чем для сложности реализации произвольных булевых функций (см. *Синтеза задачи*). Нек-рые дискретные экстремальные задачи сводятся к задаче расшифровки М. б. ф. В этой задаче требуется, зная, что нек-рая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является М. б. ф., выяснить ее значения на всех наборах, задав как можно меньше вопросов вида: «Чему равно значение $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ на нек-ром наборе $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$?». Был предложен [3] алгоритм, к-рый требует для расшифровки произвольной М. б. ф. задания не более $C_n^{[n/2]}+C_n^{[n/2]+1}$ вопросов. С другой стороны, не существует алгоритма расшифровки, к-рый отличал бы функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{i=1}^n x_i \leqslant [n/2], \\ 1, & \text{если } \sum_{i=1}^n x_i \geqslant [n/2]+1 \end{cases}$$

от всех остальных М. б. ф. менее чем за $C_n^{[n/2]}+C_n^{[n/2]+1}$ вопросов.

Обобщением понятия М. б. ф. являются монотонные функции k-значной логики. Если на множестве $E_k=\{0, 1, \ldots, k-1\}$ задано произвольное частичное упорядочение S (пишут $\leqslant_S$), то, по определению, для любых двух наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha_i \in E_k$, $\beta_j \in E_k$, запись $\tilde{\alpha} \preceq_S \tilde{\beta}$ означает, что $\alpha_i \leqslant_S \beta_i$ для всех i. Функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ (т. е. определенная и принимающая значение на E_k) наз. монотонной относительно S, если для любых наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из условия $\tilde{\alpha} \preceq_S \tilde{\beta}$ вытекает $f(\tilde{\alpha}) \leqslant_S f(\tilde{\beta})$. Класс всех функций, монотонных относительно нек-рого частичного упорядочения S на E_k, всегда является замкнутым классом; он является предполным классом в k-значной логике в том и только в том случае, если в S имеются ровно один минимальный и ровно один максимальный элементы. Для числа $\psi_S(n)$ функций k-значной логики, зависящих от n переменных и монотонных относительно S, при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\log_2 \psi_S(n) \sim C(S) \frac{k^n}{\sqrt{n}},$$

где $C(S)$ — константа, эффективно вычисляемая по данному частичному упорядочению S (см. [5]).

Лит.: [1] Яблонский С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979; [2] Клейтмен Д., «Кибернетич. сб.», 1970, в. 7, с. 43—52; [3] Ансел Ж., там же, 1968, в. 5, с. 47—52, 53—57, 58—63; [4] Мартынюк В. В., «Проблемы кибернетики», 1960, в. 3, с. 49—60; [5] Алексеев В. Б., там же, 1974, в. 28, с. 5—24.

В. Б. Алексеев.

МОНОТОННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — такая последовательность x_n, что для всех $n=1, 2, \ldots$ выполняется

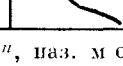
$x_n < x_{n+1}$ (строго возрастающая последовательность),
$x_n \leqslant x_{n+1}$ (неубывающая последовательность),
$x_n > x_{n+1}$ (строго убывающая последовательность),
$x_n \geqslant x_{n+1}$ (невозрастающая последовательность).

МОНОТОННАЯ ФУНКЦИЯ — функция одного переменного, определенная на нек-ром подмножестве действительных чисел, приращение к-рой $\Delta f(x)=f(x')-f(x)$ при $\Delta x=x'-x>0$ не меняет знака, т. е. либо всегда неотрицательно, либо всегда неположительно. Если $\Delta f(x)$ строго больше (меньше) нуля, когда $\Delta x>0$, то М. ф. наз. строго монотонной (см. *Возрастающая функция*, *Убывающая функция*). Различные типы М. ф. представлены в таблице.

Если функция f в каждой точке нек-рого промежутка имеет производную, к-рая не меняет знака (соответ-

ственно сохраняет постоянный знак), то функция f монотонна (строго монотонна) на этом промежутке.

Понятие М. ф. действительного переменного обобщается на функции различных классов. Напр., функция

$\Delta f(x)\geqslant 0$	Возрастающая (неубывающая)	
$\Delta f(x)\leqslant 0$	Убывающая (неубывающая)	
$\Delta f(x)>0$	Строго возрастающая	
$\Delta f(x)<0$	Строго убывающая	

$f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на $\mathbb{R}^n$, наз. монотонной, если из условия $x_1\leqslant x_1', \ldots, x_n\leqslant x_n'$ следует, что всегда $f(x_1, \ldots, x_n)\leqslant f(x_1', \ldots, x_n')$ или всегда $f(x_1', \ldots, x_n)\geqslant f(x_1', \ldots, x_n')$. Подобным же образом определяется М. ф. *алгебры логики*.

М. ф. многих переменных, возрастающие или убывающие относительно нек-рой точки, определяются следующим образом. Пусть функция f определена на n-мерном замкнутом кубе Q^n, $x_0\in Q^n$, $E_t=\{x: f(x)=t, x\in Q^n\}$ — множество уровня функции f. Функция f наз. возрастающей (соответственно убывающей) относительно точки x_0, если для любого числа t и любой точки $x'\in Q^n\setminus E_t$, не отделенной в кубе Q^n множеством E_t от x_0, имеет место $f(x')<t$ (соответственно $f(x')>t$), а для любой точки $x''\in Q^n\setminus E_t$, отделенной в кубе Q^n множеством E_t от x_0, имеет место $f(x'')>t$ (соответственно $f(x'')<t$). Функции, возрастающие или убывающие относительно нек-рой точки, наз. монотонными относительно этой точки.

Л. Д. Кудрявцев.

МОНОТОННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — то же, что *изотонное отображение*.

МОНОТОННЫЙ ОПЕРАТОР — одно из понятий нелинейного функционального анализа.

Пусть E — банахово пространство, E^* — его сопряженное, (y, x) — значение линейного функционала $y\in E^*$ на элементе $x\in E$. Оператор A, вообще говоря, нелинейный и действующий из E в E^*, наз. монотонным, если

$$\operatorname{Re}(Ax_1-Ax_2,\ x_1-x_2)\geqslant 0 \qquad (1)$$

для любых x_1, $x_2\in E$. Оператор A наз. полунепрерывным, если для любых u, v, $w\in E$ числовая функция $(A(u+tv),\ w)$ непрерывна по t. Примером полунепрерывного М. о. является градиент выпуклого дифференцируемого в смысле Гато функционала. Многие функционалы вариационного исчисления выпуклы и потому порождают М. о.; они полезны при решении нелинейных интегральных уравнений и именно к ним впервые применялись.

Различные приложения М. о. к вопросам разрешимости нелинейных уравнений основаны на следующей теореме (см. [1], [2]). Пусть E — рефлексивное банахово пространство и A — полунепрерывный М. о., обладающий свойством коэрцитивности,

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\operatorname{Re}(Au,\ u)}{\|u\|}=\infty.$$

Тогда для любого $f\in E$ уравнение $Au=f$ имеет хотя бы одно решение.

Определенный на множестве $D\subset E$ оператор A со значениями в E^* наз. монотонным на D, если неравенство (1) имеет место для любых x_1, $x_2\in D$, и максимальным монотонным, если он монотонный на D и не имеет строгого монотонного расширения.

Исследование уравнений с М. о. во многом стимулировалось задачами теории квазилинейных эллиптич. и параболич. уравнений. Так, напр., краевые задачи для квазилинейных параболич. уравнений приводят к уравнению вида

$$\Lambda x + Ax = f \qquad (2)$$

в подходящем банаховом пространстве E. Такое же уравнение естественным образом возникает и при исследовании задачи Коши для абстрактных *эволюционных уравнений* с нелинейными операторами в банаховых пространствах. Если пространство E рефлексивно, A — ограниченный, полунепрерывный и коэрцитивный М. о., а Λ — линейный максимальный М. о. с плотной в E областью определения, то уравнение (2) разрешимо при любом $f \in E^*$. Идеи монотонности применялись также в задаче о почти периодических решениях нелинейных параболич. уравнений.

Лит.: [1] Browder F., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1963, v. 69, p. 858—61; [2] Minty G. J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1963, v. 50, p. 1038—41; [3] Вайнберг М. М., Качуровский Р. И., «Докл. АН СССР», 1959, т. 129, № 6, с. 1199—1202; [4] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972; [5] Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [6] Левитан Б. М., Жиков В. В., Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1978; [7] Качуровский Р. И., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 2, с. 121—168.

В. В. Жиков.

МОНТЕ-КАРЛО МЕТОД, метод статистических испытаний,— численный метод, основанный на моделировании случайных величин и построении статистич. оценок для искомых величин. Принято считать, что М.-К. м. возник в 1949 (см. [1]), когда в связи с работами по созданию атомных реакторов Дж. Нейман (J. Neumann) и С. Улам (S. Ulam) предложили использовать аппарат теории вероятностей для решения прикладных задач с помощью ЭВМ. М.-К. м. получил свое название по имени города Монте-Карло, известного своими игорными заведениями.

Моделирование случайных величин с заданными распределениями. Как правило, такое моделирование осуществляется путем преобразования одного или нескольких независимых значений случайного числа α, распределенного равномерно в интервале (0, 1). Последовательности «выборочных» значений α обычно получают на ЭВМ с помощью теоретико-числовых алгоритмов, среди к-рых наибольшее распространение получил т. н. метод вычетов, напр. в таком виде:

$$u_0 = 1,\ u_n \equiv u_{n-1} \cdot 5^{2p+1} \pmod{2^m},\ \alpha_n = u_n \cdot 2^{-m}.$$

Здесь m — число разрядов мантиссы ЭВМ, а

$$p = \max\{q : 5^{2q+1} < 2^m\}.$$

Числа такого типа наз. псевдослучайными числами; они проверяются статистич. тестами и решением типовых задач (см. [2] — [6]). Длина периода для указанного варианта метода вычетов равна 2^{m-2}. В М.-К. м. используются также физич. генераторы и таблицы случайных чисел, а также квазислучайные числа. Существуют М.-К. м. с малым числом разыгрываемых параметров (см. [7]).

Стандартный метод моделирования дискретной случайной величины ξ с распределением $P\{\xi = x_k\} = p_k$, $k = 0, 1, \ldots$, состоит в следующем: полагают $\xi = x_m$, если для выбранного значения α выполняется соотношение

$$\sum_{k=0}^{m-1} p_k \leqslant \alpha < \sum_{k=0}^{m} p_k.$$

Стандартный метод моделирования непрерывной случайной величины (иногда наз. методом обратной функции) состоит в использовании легко проверяемого представления: $\xi = F^{-1}(\alpha)$, где F — функ-

ция распределения с заданной плотностью $f(x)$. Иногда полезна *рандомизация* моделирования (иначе — м е т о д с у п е р п о з и ц и и) на основе выражения

$$f(x)=\sum_k p_k f_k(x);$$

при этом сначала выбирают номер m с распределением $P\{m=k\}=p_k$, а затем получают выборочное значение ξ из распределения с плотностью $f_m(x)$. При других способах рандомизации нек-рые параметры детерминированного способа решения задачи рассматривают как случайные величины (см. [7] — [9]).

Другим общим методом моделирования непрерывной случайной величины является м е т о д и с к л ю ч е н и я (м е т о д о т б о р а), в основе к-рого лежит утверждение: если точка (ξ, η) распределена равномерно в области $G=\{(x, y): 0\leqslant y\leqslant g(x)\}$, то $f_\xi(x)=g(x)/\bar{G}$. В методе исключения выбирают точку (ξ_0, η) равномерно по области $G_1\supset G$ и полагают $\xi=\xi_0$, если $(\xi_0, \eta)\in G$; в противном случае повторяют выбор (ξ_0, η) и т. д. Напр., если $a\leqslant\xi\leqslant b$ и $g(x)\leqslant cf(x)\leqslant R$, то можно полагать $\xi_0=a+(b-a)\alpha_1$, $\eta=R\alpha_2$. Среднее число операций в методе исключения пропорционально величине $\bar{G}_1/\bar{G}$.

Для многих случайных величин получены специальные представления вида $\xi=\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Напр., случайные величины

$$\sqrt{-2\ln\alpha_1}\cdot\cos 2\pi\alpha_2 \text{ и } \sqrt{-2\ln\alpha_2}\cdot\sin 2\pi\alpha_2$$

имеют стандартное нормальное распределение и независимы; случайная величина $\ln(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ имеет гамма-распределение с параметром n; случайная величина $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ распределена с плотностью nx^{n-1}, $0\leqslant x\leqslant 1$; случайная величина $\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\alpha_k}{p+k-1}\right)$ имеет бета-распределение с параметрами p, n (см. [3] — [6]).

Стандартный алгоритм моделирования непрерывного случайного вектора $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ состоит в последовательном выборе значений его компонент из условных распределений соответственно представлению

$$f_\xi(x_1, \ldots, x_n)=f_1(x_1)\,f_2(x_2\mid x_1)\ldots f_n(x_n\mid x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Метод исключения переносится на многомерный случай без изменений, надо лишь в его формулировке рассматривать ξ, ξ_0 и x как векторы. Многомерный нормальный вектор можно моделировать с помощью специального *линейного* преобразования вектора независимых стандартных нормальных случайных величин. Разработаны также специальные приемы приближенного моделирования стационарных гауссовских процессов (см., напр., [3], [6]).

Если в расчете по М.-К. м. моделируются случайные величины, определяемые реальным содержанием явления, то расчет представляет собой прямое моделирование (имитацию) этого явления. Разработано моделирование на ЭВМ процессов переноса, рассеяния и размножения частиц: нейтронов, гамма-квантов, фотонов, электронов и др. (см., напр., [11] — [18]); моделирование эволюции ансамблей молекул для решения различных задач классической и квантовой статистич. физики (см., напр., [10], [18]); моделирование массового обслуживания и производственных процессов (см., напр., [2], [6], [18]); моделирование различных случайных процессов в технике, гидрологии, метеорологии, геологии, химии, биологии и т. д. (см. [18]). Алгоритмы моделирования обычно тщательно обрабатывают, напр. табулируют сложные функции, изменяют стандартные процедуры и т. д. Тем не менее часто прямое моделирование не может обеспечить требуемой точности оценок искомых ве-

личин. Разработано много способов повышения эффективности моделирования.

Алгоритмы М.-К. м. для оценки многократных интегралов. Пусть необходимо оценить интеграл $J=\int h(x)dx$ по мере Лебега в евклидовом s-мерном пространстве X и $f_\xi(x)$ — плотность вероятности такая, что J можно записать в виде математич. ожидания следующим образом:

$$J=\int_X f_\xi(x)\frac{h(x)}{f_\xi(x)}\,dx=\mathsf{E}\zeta,$$

где $\zeta=h(\xi)/f_\xi(\xi)$. Моделируя ξ на ЭВМ, можно получить N выборочных значений $x_1, \ldots, x_N$. В смысле закона больших чисел

$$J\approx J_N=\frac{\sum_{k=1}^{N} h(x_k)/f(x_k)}{N}.$$

Одновременно можно оценить среднеквадратичную погрешность J_N, т. е. величину $\sigma_N=(\mathsf{D}\zeta/N)^{1/2}$, и приближенно построить подходящий доверительный интервал для J. Выбором плотности f можно распорядиться для получения оценки с возможно меньшей дисперсией. Напр., если $0<m_1\leqslant h/f\leqslant m_2<+\infty$, то $\mathsf{D}\zeta\leqslant(m_2-m_1)^2/4$, и если $f=h/J$, то $\mathsf{D}\zeta=0$. Соответствующие алгоритмы наз. существенной выборкой (выборкой по важности). Другая общая модификация — метод выделения главной части — строится в тех случаях, когда определена функция $h_0\approx h$ с известным значением интеграла. Иногда полезны сочетания М.-К. м. с классич. квадратурами — т. н. случайные квадратурные формулы, основная идея к-рых состоит в том, что узлы и коэффициенты какой-либо квадратурной суммы (напр., интерполяционной) выбираются случайно из распределения, обеспечивающего несмещенность получаемой оценки интеграла [3]. Частными случаями этих формул являются: т. н. метод слоистой выборки, в к-ром узлы выбираются по одному в каждой части фиксированного разбиения области интегрирования, а коэффициенты пропорциональны соответствующим объемам; так наз. метод симметричной выборки, к-рый в случае интегрирования по интервалу $(0, 1)$ определяется выражением (см. [10])

$$2J=\mathsf{E}[(h(\xi)+h(1-\xi))/f_\xi(\xi)].$$

При этом порядок скорости сходимости М.-К. м. повышается и в нек-рых случаях становится максимально возможным на рассматриваемом классе задач.

В общем случае область интегрирования разбивается на параллелепипеды. В каждом параллелепипеде значение интеграла вычисляется через среднее значение в случайной точке и точке, симметричной ей относительно центра параллелепипеда.

Ряд модификаций М.-К. м. основан на (может быть, формальном) представлении искомой величины в виде двукратного интеграла:

$$J=\int_X\int_Y f(x,\ y)\ h(x,\ y)\,dx\,dy=\mathsf{E}\zeta,$$

где $\zeta=h(\xi, \eta)$, а вектор (ξ, η) распределен с плотностью $f(x, y)$. Известно, что $\mathsf{E}\zeta=\mathsf{EE}(\zeta|\xi)$ и

$$\mathsf{D}\zeta=\mathsf{DE}(\zeta\mid\xi)+\mathsf{ED}(\zeta\mid\xi)=A_1+A_2, \qquad (1)$$

где $\mathsf{E}(\zeta|\xi)$ — условное математич. ожидание, а $\mathsf{D}(\zeta|\xi)$ — условная дисперсия ζ для фиксированного значения ξ. Формула (1) широко используется в М.-К. м. В частности, она показывает, что $\mathsf{DE}(\zeta|\xi)<\mathsf{D}\zeta$, т. е. аналитич. осреднение по какой-либо переменной увели-

чивает точность М.-К. м. Однако при этом может значительно возрасти объем вычислений. Для ЭВМ время, необходимое для достижения заданной погрешности, пропорционально величине $t\mathsf{D}\zeta$, где t — среднее время получения одного значения ζ. По этому критерию оптимизируется метод расщепления, простейший вариант к-рого состоит в использовании несмещенной оценки:

$$\zeta_n = \left[\sum_{k=1}^{n} h(\xi, \eta_k)\right]/n,$$

где $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — условно независимы и распределены как η при фиксированном значении ξ. С помощью (1) можно получить оптимальное значение

$$n = [(A_2/A_1)(t_1 t_2)]^{1/2},$$

где t_1, t_2 — средние времена ЭВМ, соответствующие выборкам ξ, η (см., напр., [4]).

Если подинтегральная функция зависит от параметра, то целесообразно использовать метод зависимых испытаний, т. е. оценивать интегралы для различных значений параметра по одним и тем же случайным узлам [20]. Важным свойством М.-К. м. является сравнительно относительно слабая зависимость среднеквадратич. погрешности σ_N от числа измерений, причем порядок сходимости по числу узлов N всегда один и тот же: $N^{-1/2}$. Это позволяет оценивать (после предварительных преобразований задачи) интегралы очень высокой и даже бесконечной кратности. Напр., разработана методика оценки интегралов Винера [19].

Алгоритмы М.-К. м. для решений интегральных уравнений 2-го рода. Пусть необходимо оценить линейный функционал $J_h = (\varphi, h)$, где $\varphi = K\varphi + f$, причем для интегрального оператора K с ядром $k(x', x)$ выполняется условие, обеспечивающее сходимость ряда Неймана: $\|K^{n_0}\| < 1$. Цепь Маркова $\{x_n\}$ определяется начальной плотностью $\pi(x)$ и переходной плотностью $p(x', x) = p(x' \to x)$; вероятность обрыва цепи в точке x' равна

$$g(x') = 1 - \int p(x, x')\, dx;$$

N — случайный номер последнего состояния. Далее определяется функционал от траектории цепи, математич. ожидание к-рого равно J_h. Чаще всего используется т. н. оценка по столкновениям

$$\xi = \sum_{n=0}^{N} Q_n h(x_n),$$

где

$$Q_0 = \frac{f(x_0)}{\pi(x_0)}, \quad Q_n = Q_{n-1}\frac{k(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)}.$$

Если $p(x', x) \neq 0$ при $k(x', x) \neq 0$ и $\pi(x) \neq 0$ при $f(x) \neq 0$, то при нек-ром дополнительном условии

$$\mathsf{E}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f, h) = (\varphi, h) = \int_X \varphi(x) h(x)\, dx$$

(см. [3]—[5]). Возможность достижения малой дисперсии в знакопостоянном случае показывает следующее утверждение: если

$$\pi(x) = \frac{f(x)\varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)} \quad \text{и} \quad p(x', x) = \frac{k(x', x)\varphi^*(x)}{[K^*\varphi^*](x')},$$

где $\varphi^* = K^*\varphi^* + h$, то $\mathsf{D}\xi = 0$, а $\mathsf{E}\xi = J_h$ (см. [4]). Моделируя подходящую цепь Маркова на ЭВМ, получают статистич. оценки линейных функционалов от решения интегрального уравнения 2-го рода. Это дает возможность и локальной оценки решения на основе представления: $\varphi(x) = (\varphi, h_x) + f(x)$, где $h_x(x') = k(x', x)$. В ряде случаев при решении таких задач наряду с М.-К. м. применяются теоретико-числовые методы (см. [21]).

М.-К. м. оценка 1-го собственного значения интегрального оператора осуществляется итерационным методом на основе соотношения [22]:

$$\mathsf{E}\,[Q_n h(x_n)] = (K^n f,\ h).$$

Все рассмотренные результаты почти автоматически распространяются на системы линейных алгебраич. уравнений вида $x + Hx = h$ (см. [23]).

Модификации М.-К. м. в теории переноса излучения (см. [11]—[17]). Для плотности среднего числа столкновений частиц в фазовом пространстве координат $\boldsymbol{r}$ и скоростей $\boldsymbol{\omega}$ справедливо интегральное уравнение 2-го рода, ядро к-рого в односкоростном случае имеет вид

$$\frac{\sigma_s(r')\, g(\mu) \exp(-\tau(r', r))\, \sigma(r)}{\sigma(r')\, 2\pi\, |r'-r|^2}\, \delta\left(\omega - \frac{r-r'}{|r-r'|}\right).$$

Здесь $\sigma_s(\boldsymbol{r})$ — коэффициент (сечение) рассеяния, $\sigma(\boldsymbol{r})$ — коэффициент ослабления, $g(\mu)$ — индикатриса рассеяния, $\tau(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$ — оптич. длина пути от $\boldsymbol{r}'$ до $\boldsymbol{r}$ (см. [3], [4]). Для построения оценок с малой дисперсией используются, напр., асимптотич. решения сопряженного уравнения переноса [4]; простейший алгоритм такого типа представляет собой т. н. экспоненциальное преобразование (см. [4], [11]). Разработаны модификации локальной оценки потока частиц (см. [3], [4], [11]—[13], [17], [18]). С помощью моделирования одной цепи Маркова (напр., физич. процесса переноса в нек-рой среде) можно одновременно получать зависимые оценки функционалов для различных значений параметров; дифференцируя «веса» Q_n, иногда можно строить несмещенные оценки соответствующих производных (см. [4], [12]). Это дает возможность использовать М.-К. м. при решении нек-рых обратных задач [12]. Для решения ряда задач теории переноса эффективно используется «расщепление» траекторий и аналитич. осреднение [11]. Моделирование траекторий частиц в сложных средах иногда существенно упрощается методом максимального сечения (см. [3]—[5]).

Алгоритмы М.-К. м. для решения уравнений эллиптического типа строятся на основе соответствующих интегральных соотношений. Напр., стандартная пятиточечная разностная аппроксимация для уравнения Лапласа имеет вид формулы полного математич. ожидания, соответствующей симметричному блужданию по сетке с поглощением на границе (см., напр., [2], [3]). Непрерывным аналогом этой формулы является соотношение

$$u(P) = \int_{S(P)} u(\boldsymbol{r}(s))\, ds \Big/ \int_{S(P)} ds, \qquad (2)$$

где интеграл берется по поверхности сферы, целиком лежащей в заданной области, с центром в точке P. Формула (2) и другие аналогичные соотношения дают возможность использовать процесс изотропного «блуждания по сферам» для решения эллиптич. и параболич. уравнений (см. [24], [4]). М.-К. м. эффективен, напр., для оценки решения многомерной краевой задачи в одной точке.

Моделирование марковских ветвящихся процессов позволяет строить оценки решения нек-рых нелинейных уравнений, напр. уравнения Больцмана в теории разреженных газов [3].

Лит.: [1] Neumann J., «NBS Appl. Math. series», 1951, № 12, p. 36—38; [2] Бусленко Н. П. [и др.], Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), М., 1962; [3] Ермаков С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, М., 1971; [4] Михайлов Г. А., Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло, Новосиб., 1971; [5] Соболь И. М., Численные методы Монте-Карло, М., 1973; [6] Поллияк Ю. Г., Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах, М., 1971; [7] Бахвалов Н. С., в сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и

квадратурные формулы, М., 1964, с. 5—63; [8] его же, «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1961, т. 1, № 1, с. 64—77; [9] его же, «Вестник МГУ. Сер. матем., механики, астрономии, физ., хим.», 1959, № 4, с. 3—18; [10] Hammersley J. M., Handscomb D. C., Monte Carlo methods, L. — N. Y., 1964; [11] Метод Монте-Карло в проблеме переноса излучений, М., 1967; [12] Марчук Г. И. [и др.], Метод Монте-Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976; [13] Спанье Дж., Гелбард Э., Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов, пер. с англ., М., 1972; [14] Чавчанидзе В. В., «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 1955, т. 19, № 6, с. 629—38; [15] Прохождение излучений через неоднородности в защите, М., 1968; [16] Франк-Каменецкий А. Д., «Атомная энергия», 1964, т. 16, № 2, с. 119—22; [17] Kalos M. H., «Nuclear Sci. and Eng.», 1968, v. 33, p. 284—90; [18] Методы Монте-Карло и их применения. Тезисы докл. на III Всесоюзн. конф. по методам Монте-Карло, Новосиб., 1971; [19] Гельфанд И. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н., «Изв. вузов. Сер. матем.», 1958, № 5, с. 32—45; [20] Фролов А. С., Ченцов Н. Н., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 4, с. 714—17; [21] Коробов Н. М., Теоретико-числовые методы в приближенном анализе, М., 1963; [22] Владимиров В. С., «Теория вероятн. и ее примен.», 1956, т. 1, в. 1, с. 113—30; [23] Curtiss J. H., «J. Math. Phys.», 1954, v. 32, № 4, p. 209—32; [24] Muller M. E., «Ann. Math. Stat.», 1956, v. 27, № 3, p. 560—89.

Г. А. Михайлов.

МОНТЕЛЯ ПРОСТРАНСТВО — *бочечное пространство* (в частности, *Фреше пространство*), в к-ром каждое замкнутое ограниченное множество компактно. Пространство $H(G)$ всех голоморфных функций в области G с топологией равномерной сходимости на компактах является пространством Фреше и в силу *Монтеля теоремы* 2 всякая ограниченная последовательность голоморфных функций компактна в $H(G)$, так что $H(G)$ — М. п. Пространство $C^\infty(\Omega)=\mathscr{E}(\Omega)$ всех бесконечно дифференцируемых в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ функций, пространство $D(\Omega)$ финитных функций, пространство $S(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций — также М. п. в естественных топологиях.

М. п. рефлексивно. Сильно сопряженное пространство к М. п. является М. п., в частности пространства обобщенных функций $\mathscr{E}'(\Omega)$, $D'(\Omega)$, $S'(\Omega)$ — М. п. Нормированное пространство является М. п. в том и только в том случае, когда оно конечномерно.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [2] Робертсон А.-П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967; [3] Эдвардс Р.-Э., Функциональный анализ. Теория и приложения, пер. с англ., М., 1969.

С. Г. Крейн.

МОНТЕЛЯ ТЕОРЕМА — 1) М. т. о приближении аналитических функций многочленами: если D — открытое множество точек комплексной плоскости z, не содержащее точку $z=\infty$, а $f(z)$ — однозначная функция, аналитическая в каждой точке $z\in D$, то существует последовательность многочленов $\{P_n(z)\}$, сходящаяся к $f(z)$ в каждой точке $z\in D$. Эта теорема является одной из основных в теории приближения функций комплексного переменного; получена П. Монтелем [1].

2) М. т. об условиях компактности семейства голоморфных функций (принцип компактности, см. [2]): пусть $\varphi=\{f(z)\}$ — бесконечное семейство голоморфных функций в области D комплексной плоскости z; тогда для того чтобы семейство φ было компактным, т. е. чтобы из любой последовательности $\{f_k(z)\}\subset\varphi$ можно было выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри D, необходимо и достаточно, чтобы φ было равномерно ограничено внутри D. Эта М. т. обобщается на области D в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$ (см. *Компактности принцип*).

3) М. т. об условиях нормальности семейства голоморфных функций (принцип нормальности, см. [2]): пусть $\varphi=\{f(z)\}$ — бесконечное семейство голоморфных функций в области D комплексной плоскости z. Если существуют два различных значения a и b, к-рые не принимаются ни одной функцией $f(z)\in\varphi$, то φ — нормальное семейство, т. е. из любой последовательности $\{f_k(z)\}\subset\varphi$

можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри D к голоморфной функции или к ∞. Условие этой М. т. можно несколько ослабить: достаточно потребовать, чтобы все функции $f(z) \in \varphi$ не принимали одного из значений, напр. a, а другое значение b принимали не более m раз, $1 \leqslant m < \infty$. Эта М. т. обобщается на случай областей D в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$.

Лит.: [1] Montel P., Leçons sur les séries de polynomes à une variable, P., 1910; [2] Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, пер. с франц., М.—Л., 1936.

Е. Д. Соломенцев.

МОПЕРТЮИ ПРИНЦИП — принцип наименьшего действия, первая словесная формулировка к-рого дана П. Мопертюи (P. Maupertuis). Первоначально (1744) П. Мопертюи вывел из М. п. законы отражения и преломления света, согласующиеся, по его словам, «с важным принципом, по к-рому природа при осуществлении своих действий идет всегда наиболее простыми путями» (см. [1]), а затем (1746) объявил его универсальным законом движения и равновесия: «Общий принцип. Когда в природе происходит нек-рое изменение, количество действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим возможным. Количество действия есть произведение массы тел на их скорость и на расстояние, к-рое они пробегают» (см. [2]). Универсальность М. п. обосновывалась П. Мопертюи туманными рассуждениями метафизич. характера с помощью телеологич. и теологич. аргументов, к-рые в последовавшей затем дискуссии о М. п. вызвали резкие возражения со стороны ряда его современников. Кроме законов распространения света П. Мопертюи вывел из М. п. лишь известные законы удара тел и равновесия рычага. По мнению Ж. Лагранжа (J. Lagrange), «указанные применения носят слишком специальный характер, чтобы на них можно было построить доказательство общего принципа; кроме того, они несколько неопределенны и произвольны, что придает некоторую ненадежность и выводам, которые можно было бы сделать на основании их о точности самого принципа» (см. [3]).

Первая математич. идея принципа наименьшего действия для частного случая изолированных тел принадлежит Л. Эйлеру (L. Euler). Он показал (1744), что под действием центральных сил тела описывают траектории, для к-рых интеграл $\int v ds$ достигает минимума или максимума (см. [4]); здесь v — скорость, ds — элемент кривой.

Для общего случая движения любой системы тел, действующих одно на другое каким угодно образом так, что полная механич. энергия системы сохраняется, принцип наименьшего действия установил Ж. Лагранж (1760). Исходя из законов механики, он доказал, что сумма произведений масс на интегралы скоростей, умноженных на элементы пройденных путей, является всегда максимумом или минимумом (см. [5]), т. е.

$$\delta \sum_i m_i \int v_i ds_i - 0.$$

«Этот принцип, будучи соединен с принципом живых сил и развит по правилам вариационного исчисления, дает тотчас же все уравнения, необходимые для разрешения каждой проблемы; отсюда возникает столь же простой, как и общий, метод разрешения проблем, касающихся движения тел» (см. [3]).

Принцип наименьшего действия в форме Лагранжа *(Лагранжа принцип)* принято математически записывать в форме равенства (14) (см. *Вариационные принципы классической механики*). Исключением времени из (14) с помощью интеграла энергии (13) К. Якоби (C. Jacobi, 1837) представил принцип наименьшего действия в форме (16) (см. также *Якоби принцип*).

Лит.: [1] Мопертюи П., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959, с. 23—30; [2] его же, там же, с. 41—55;

[3] Лагранж Ж., Аналитическая механика, пер. с франц., т. 1, М.—Л., 1950; [4] Эйлер Л., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959, с. 31—40; [5] Lagrange J., Œuvres, t. 1, P., 1867, p. 335—62; [6] Jacobi C., «C. r. Acad. sci.», 1837, t. 5, p. 61—67.
В. В. Румянцев.

МОРДЕЛЛА ГИПОТЕЗА — гипотеза о конечности множества рациональных точек на алгебраич. кривой рода $g>1$. Выдвинута Л. Морделлом [1] для случая, когда основное поле K — поле рациональных чисел. В настоящее время под М. г. понимается утверждение о конечности множества рациональных точек $X(L)$ неприводимой алгебраич. кривой X рода $g>1$, определенной над полем K конечного типа над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, в любом конечном расширении L K. В такой форме М. г. не доказана (1982) ни для одной кривой. Получена редукция М. г. к наиболее трудному случаю, когда K — поле алгебраич. чисел (см. [3]). Известен ряд частных результатов, относящихся к М. г. Так, доказано [2], что множество $X(K)$ конечно, если ранг группы K-изоморфизмов из X в эллиптич. кривую Y больше ранга группы $Y(K)$. Установлена [7] конечность $X(K)$ для широкого класса *модулярных кривых* и их поля определения K. Найдена [8] оценка роста высот

$$h(x_n) \geqslant \exp(an+b)$$

рациональных точек $x_n \in X(K)$, показывающая, что они расположены гораздо «реже», чем на кривых рода $g \leqslant 1$. Доказано также, что М. г. является следствием гипотезы Шафаревича о конечности числа алгебраич. кривых, имеющих заданный род $g>1$, поле определения (конечное расширение $\mathbb{Q}$) и множество точек плохой редукции (см. [4], а также *Зигеля теорема* о целых точках).

Геометрич. аналогом М. г. является утверждение о конечности числа сечений у расслоения

$$f : V \to B,$$

где V — неособая проективная поверхность, B — кривая, а общий слой отображения f — неприводимая кривая рода $g>1$. Это утверждение верно, если расслоение непостоянно, т. е. не является прямым произведением после нек-рого накрытия базы B, и характеристика основного поля k равна 0 (см. [3], [6]). Для постоянных расслоений можно утверждать лишь конечность числа классов, состоящих из сечений, алгебраически эквивалентных как кривые на V. Если же характеристика поля k положительна, то геометрич. аналог М. г. для постоянных расслоений неверен [4].

Лит.: [1] Mordell L. J., «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1922, v. 21, p. 179—92; [2] Демьяненко В. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 6, с. 1373—96; [3] Манин Ю. И., там же, 1963, т. 27, № 6, с. 1395—1440; [4] Паршин А. Н., в кн.: Actes du Congrès International des mathématiciens. 1970, t. 1, P., 1971, p. 467—71; [5] Grauert H., «Publ. Math. IHES», 1965, № 25, p. 131—50; [6] Lang S., Diophantine geometry, N. Y.— L., 1962; [7] Mazur B., в кн.: Modular functions of one variable, [v. 5], B.— Hdlb.— N. Y., 1977, p. 107—48; [8] Mumford D., «Amer. J. Math.», 1965, v. 87, № 4, p. 1007—16.
А. Н. Паршин.

МОРЕРЫ ТЕОРЕМА: если (однозначная) функция $f(z)$ комплексного переменного z в области D непрерывна и интеграл от нее по любому замкнутому спрямляемому контуру $\Gamma \subset D$ равен нулю, т. е.

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0, \quad \Gamma \subset D, \qquad (*)$$

то $f(z)$ — аналитич. функция в D. Эта теорема была получена Дж. Морерой [1].

Условие сформулированной М. т. можно ослабить, ограничившись требованием, чтобы обращались в нуль интегралы (*), взятые по границе $\Gamma = \partial\Delta$ любого треугольника Δ, компактно принадлежащего области D, т. е. такого, что $\Delta \subset \overline{\Delta} \subset D$. М. т. представляет собой (неполное) обращение *Коши интегральной теоремы* и является одной из основных теорем теории аналитич. функций.

М. т. обобщается на случай функций многих комплексных переменных. Пусть функция $f(z)=f(z_1, \ldots, z_n)$ комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$, $n\geqslant 1$, непрерывна в области D комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ и такова, что обращается в нуль интеграл от нее, взятый по границе ∂T_ν любой компактно принадлежащей D призматич. области вида

$$T_\nu=[a_1, z_1]\times\ldots\times[a_{\nu-1}, z_{\nu-1}]\times\Delta_\nu\times$$
$$\times[a_{\nu+1}, z_{\nu+1}]\times\ldots\times[a_n, z_n],\ \nu=1, 2, \ldots, n,$$

где $[a_\mu, z_\mu]$, $\mu\neq\nu$, $\mu=1, \ldots, n$,— прямолинейные отрезки в плоскостях $\mathbb{C}(z_\mu)$ с концами a_μ и z_μ, а Δ_ν — треугольник в плоскости $\mathbb{C}(z_\nu)$. Тогда $f(z)$ — голоморфная функция в D.

Лит.: [1] Morera G., «Rend. Ist. Lomb.», 1886, t. 19, p. 304—308; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; [4] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

МОРИТЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ — отношение эквивалентности на классе всех колец, определяемое следующим образом: кольца R и S наз. Морита-эквивалентными, если категории левых (правых) R- и S-модулей эквивалентны. Важнейший пример М. э. колец: кольцо R и кольцо всех $(n\times n)$-матриц над ним. Для существования М. э. между кольцами R и S необходимо и достаточно, чтобы в категории левых R-модулей существовал такой конечно порожденный проективный образующий U, что его кольцо эндоморфизмов изоморфно кольцу S. При этом левому R-модулю A ставится в соответствие левый S-модуль $\mathrm{Hom}_R(U, A)$. Среди свойств, сохраняющихся при переходе к кольцу, эквивалентному в смысле Мориты: артиновость, нётеровость, первичность, простота, классич. полупростота, регулярность, самоинъективность, наследственность, примитивность.

Наряду с М. э. рассматривается двойственность в смысле Мориты, связывающая нек-рые подкатегории категорий левых R-модулей и правых S-модулей (чаще всего подкатегории конечно порожденных модулей). Однако само существование такой двойственности накладывает определенные ограничения на кольца R и S. В частности, при $R=S$ это ведет к тому, что R — *квазифробениусово кольцо*.

Общая концепция М. э. была разработана К. Моритой [1].

Лит.: [1] Morita K., «Sci. Repts Tokyo Kyoiku Dajgaku A», 1958, v. 6, p. 83—142; [2] Басс Х., Алгебраическая K-теория, пер. с англ., М., 1973; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; [4] Cohn P., Morita equivalence and duality, L., 1976.

Л. А. Скорняков.

МОРСА ИНДЕКС — число, сопоставляемое *критической точке* гладкой функции на многообразии или геодезической на римановом (или финслеровом) многообразии.

1) М. и. критической точки p гладкой функции f на многообразии M равен, по определению, отрицательному индексу инерции *гессиана* функции f в точке p, т. е. размерности максимального из подпространств касательного пространства TM_p многообразия M в точке p, на к-ром гессиан отрицательно определен. Это определение имеет смысл и для дважды дифференцируемой (по Фреше) функции на бесконечномерном банаховом многообразии. Отличие состоит лишь в том, что для индекса допускается значение $+\infty$. В этом случае целесообразно ввести понятие коиндекса критич. точки p функции f как положительного индекса инерции гессиана (2-го дифференциала Фреше) функции f в точке p.

2) Пусть V_0 и V_1 — два гладких подмногообразия полного риманова пространства M. Для кусочно гладкого пути $\omega: [0, 1]\to M$ с $\omega(i)\in V_i$, $i=0, 1$, трансверсального к V_0 и V_1 на своих концах $\omega(0)$ и $\omega(1)$, аналогом касательного пространства является векторное

пространство $T_\omega = T_{\omega,\, V_0, V_1}$ всех таких кусочно гладких векторных полей W вдоль ω, что $W(\omega(i)) \in (TV_i)_{\omega(i)}$, $i=0,\ 1$. Для любой геодезической $\gamma : [0,\ 1] \to M$ с $\gamma(i) \in V_i$, ортогональной в своих концах $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ к V_0 и V_1 соответственно, 2-я вариация $\delta^2 E$ функционала действия (см. *Морса теория*) определяет симметричный билинейный функционал E_{**} на T_γ (аналог гессиана). М. и. геодезической равен, по определению, отрицательному индексу инерации этого функционала. Нулевое пространство N_γ гессиана E_{**} на T_γ (множество $X \in T_\gamma$, для к-рого $E_{**}(X,\ Y) = 0$ для всех $Y \in T_\gamma$) в точности состоит из *Якоби полей* $J \in T_\gamma$. При $N_\gamma \neq 0$ геодезическая наз. $(V_0,\ V_1)$-в ы р о ж д е н н о й, и $\dim N_\gamma$ наз. с т е п е н ь ю в ы р о ж д е н и я геодезической.

Геометрич. интерпретация М. и. в общем случае весьма тяжеловесна и, по-видимому (1982), не окончательна [2]. Поэтому здесь рассматривается случай, когда V_1 является точкой $q \in M$. Пусть ν — *нормальное расслоение* к многообразию $V - V_0$ в многообразии M, а $\nu(p)$ — его слой над точкой $p \in V$. Сужение *экспоненциального отображения* $TM \to M$ определяет отображение $\exp : \nu \to M$. Геодезическая $\gamma(t) = \exp(t\xi)$, $\xi \in \nu(p)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, тогда и только тогда $(V, \exp\xi)$-вырождена, когда ядро дифференциала $d\xi \exp : T\nu_\xi \to TM_{\exp\xi}$ отображения exp в точке ξ отлично от нуля; при этом размерность этого ядра равна степени вырождения геодезической γ. Точка $s = \gamma(t_0)$, $0 < t_0 \leqslant 1$, наз. ф о к а л ь н о й т о ч к о й многообразия V вдоль геодезической γ, если геодезическая $\gamma' : t \to \gamma(t/t_0)$ $(V,\ s)$-вырождена; степень вырождения геодезической γ' наз. к р а т н о с т ь ю ф о к а л ь н о й т о ч к и s. По *Сарда теореме* множество фокальных точек имеет меру нуль, так что типичная геодезическая невырождена. Если V тоже состоит из одной точки $p \in M$ (случай $p = q$ не исключается), то фокальная точка наз. с о п р я ж е н н о й с p вдоль геодезической γ. Т е о р е м а М о р с а о б и н д е к с е [1] утверждает, что М. и. геодезической конечен и равен числу сосчитанных с учетом кратности фокальных точек $\gamma(t)$ многообразия V, $0 < t < 1$.

Лит.: [1] M o r s e M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] A m b r o s e W., «Ann. Math.», 1961, v. 73, p. 49—86.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА ЛЕММА — утверждение, описывающее строение ростка дважды непрерывно дифференцируемой функции. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — функция класса C^2, имеющая точку $0 \in \mathbb{R}^n$ своей невырожденной *критической точкой*. Тогда в нек-рой окрестности U точки O существует такая система локальных координат (карта) $x_1,\ \ldots,\ x_n$ с центром в O, что для всех $x \in U$ имеет место равенство

$$f(x) = f(0) - x_1^2 - \ldots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \ldots + x_n^2.$$

При этом число λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant n$, является *Морса индексом* критич. точки O функции f. Справедлив также аналог М. л. для функций $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^1$, именно: если f голоморфна в нек-рой окрестности своей невырожденной критич. точки (в другой терминологии — точки перевала, см. *Перевала метод*) $0 \in \mathbb{C}^n$, то в нек-рой окрестности U точки O существует такая система локальных координат $z_1,\ \ldots,\ z_n$, что

$$f(x) = f(0) + z_1^2 + \ldots + z_n^2.$$

М. л. справедлива и для функций $f : E \to \mathbb{R}$ на сепарабельном (бесконечномерном) гильбертовом пространстве E. Пусть f дважды дифференцируема (по Фреше) в нек-рой окрестности своей невырожденной критич. точки $0 \in E$. Тогда существуют такая выпуклая окрестность нуля $V \subset E$, такая окрестность нуля $U \subset E$ и такой диффеоморфизм (карта) $\theta : U \to V$ с $\theta(0) = 0$, что для всех $x \in U$ имеет место равенство

$$f(x) = \| P(\theta(x)) \|^2 - \| (I - P)(\theta(x)) \|^2,$$

где $P \to E : E$ — непрерывный ортогональный проек-

тор, а I — тождественный оператор. При этом размерность $\dim \mathrm{Im}\,(I-P)$ совпадает с индексом Морса критич. точки $0 \in E$ функции f, а размерность $\dim \mathrm{im}\, P$ — с ее коиндексом.

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА НЕРАВЕНСТВА — вытекающие из теории Морса неравенства, связывающие число *критических точек* функции Морса на многообразии с его гомологич. инвариантами.

Пусть f — *Морса функция* на гладком n-мерном многообразии (без края) M, имеющая конечное число критич. точек. Тогда *гомологий группы* $H_\lambda(M)$ конечно порождены и потому определены их ранги $r_\lambda = rk(H_\lambda(M))$ и периодич. ранги $t_\lambda = t(H_\lambda(M))$ (периодический ранг абелевой группы A с конечным числом образующих — минимальное число циклич. групп, в прямую сумму к-рых может быть разложена максимальная периодич. подгруппа группы A). М. н. связывают число m_λ критич. точек функции f, имеющих *Морса индекс* λ, с этими рангами, и имеют вид:

$$r_\lambda + t_\lambda + t_{\lambda-1} \leqslant m_\lambda, \quad \lambda = 0, 1, \ldots, n;$$

$$\sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} r_i \leqslant \sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} m_i, \quad \lambda = 0, 1, \ldots, n.$$

При $\lambda = n$ последнее М. н. всегда является равенством, так что

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i m_i = \chi(M),$$

где $\chi(M)$ — *эйлерова характеристика* многообразия M.

М. н. имеют место и для функций Морса триад (W, V_0, V_1), достаточно заменить группы $H_\lambda(M)$ группами относительных гомологий $H_\lambda(W, V_0)$.

Согласно М. н. многообразие, имеющее «большие» группы гомологий, не допускает функций Морса с малым числом критич. точек. Замечательно, что даваемые М. н. оценки точны: на замкнутом односвязном многообразии размерности $\geqslant 6$ существует функция Морса, для к-рой М. н. являются равенствами (Смейла теорема, см. [2]). В частности, на любом замкнутом многообразии, гомотопически эквивалентном сфере S^n с $n \geqslant 6$, существует функция Морса с двумя критич. точками, откуда непосредственно следует (см. *Морса теория*), что многообразие M гомеоморфно сфере S^n (см. *Пуанкаре гипотеза*). Аналогичное применение теоремы Смейла позволяет доказать и теоремы об h- и s-кобордизмах.

Аналоги М. н. имеют место также для функций Морса $f : X \to \mathbb{R}$ на бесконечномерных гильбертовых многообразиях и связывают (для любых регулярных значений $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, функции f) числа $m_\lambda(a, b)$ лежащих в $f^{-1}[a, b]$ критич. точек конечного индекса λ с рангом $r_\lambda(a, b)$ и периодич. рангом $t_\lambda(a, b)$ группы $H_\lambda(M^b, M^a)$, где $M^c = f^{-1}(-\infty, c]$. Именно,

$$r_\lambda(a, b) + t_\lambda(a, b) + t_{\lambda-1}(a, b) \leqslant m_\lambda,$$

$$\sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} r_i(a, b) \leqslant \sum_{i=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-i} m_i;$$

$$\lambda = 0, 1, \ldots,$$

При достаточно больших λ последнее неравенство становится равенством.

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Смейл С., «Математика», 1964, т. 8, № 4, с. 95—108.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА ПЕРЕСТРОЙКА, хирургия,— преобразование гладких многообразий, к-рому подвергается многообразие уровня гладкой функции при переходе через невырожденную *критическую точку*; важнейшая конструкция в топологии многообразий.

Пусть V — гладкое n-мерное многообразие (без края), в к-рое (гладко) вложена $(\lambda-1)$-мерная сфера $S^{\lambda-1}$.

Предположим, что *нормальное расслоение* сферы $S^{\lambda-1}$ в многообразии V тривиально, т. е. что замкнутая *трубчатая окрестность* T сферы $S^{\lambda-1}$ в V разлагается в прямое произведение $T=S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda+1}$, где $D^{n-\lambda+1}$ — диск размерности $n-\lambda+1$. Выбрав такое разложение, вырежем из V внутренность окрестности T. Получится многообразие, край к-рого разложен в произведение $S^{\lambda-1}\times S^{n-\lambda}$ сфер. Но точно такой же край имеет многообразие $D^{\lambda}\times S^{n-\lambda}$. Отождествив края многообразий $V\setminus \operatorname{int} T$ и $D^{\lambda}\times S^{n-\lambda}$ по диффеоморфизму, сохраняющему структуру прямого произведения $S^{\lambda-1}\times S^{n-\lambda}$, снова получим многообразие V' без края, к-рое и наз. р е з у л ь т а т о м п е р е с т р о й к и М о р с а многообразия V вдоль сферы $S^{\lambda-1}$.

Для осуществления М. п. необходимо задать разложение окрестности T сферы $S^{\lambda-1}$ в прямое произведение, т. е. т р и в и а л и з а ц и ю нормального расслоения сферы $S^{\lambda-1}$ в многообразии V, при этом разные тривиализации (оснащения) могут давать существенно различные (даже гомотопически) многообразия V'.

Число λ наз. и н д е к с о м М. п., а пара $(\lambda, n-\lambda+1)$ ее т и п о м. Если V' получается из V М. п. типа $(\lambda, n-\lambda+1)$, то V получается из V' М. п. типа $(n-\lambda+1, \lambda)$. При $\lambda=0$ многообразие V' является дизъюнктным объединением многообразия V (к-рое может быть в этом случае пустым) и сферы S^n. Конструкция М. п. может быть проведена также для кусочно линейных и топологич. многообразий.

П р и м е р. При $V=S^2$ и $\lambda=2$ в результате М. п. получается дизъюнктное объединение двух сфер, а при $\lambda=1$ — тор. При $V=S^3$ и $\lambda=2$ получается произведение $S^1\times S^2$. Случай $V=S^3$ и $\lambda=1$ сложнее: если сфера $S^{\lambda-1}=S^1$ вложена в S^3 стандартным образом (большая окружность), то в зависимости от выбора ее тривиализации нормального расслоения получаются всевозможные *линзовые пространства*; если же допустить заузливание сферы S^1, то получается еще больший набор трехмерных многообразий.

Если V является краем $(n+1)$-мерного многообразия M, то V' будет краем многообразия M', полученного из M приклеиванием ручки индекса M'. В частности, если f — гладкая функция на многообразии M и $a<b$ — такие числа, что множество $f^{-1}[a, b]$ компактно и содержит единственную критич. точку p, к-рая невырождена, то многообразие $V^b=f^{-1}(b)$ получается из многообразия $V^a=f^{-1}(a)$ М. п. индекса λ, где λ — *Морса индекс* критич. точки p. Более общим образом, любая перестройка V' многообразия V индекса λ определяет нек-рый *бордизм* $(W; V, V')$ (получающийся из произведения $V\times[0, 1]$ приклеиванием ручки индекса λ к его «правому краю» $V\times\{1\}$), и на триаде $(W; V, V')$ существует *Морса функция*, обладающая единственной критич. точкой индекса λ, причем любой бордизм $(W; V, V')$, на к-ром существует такого рода функция Морса, получается этим способом. Отсюда (и из существования на триадах функций Морса) следует, что два многообразия тогда и только тогда бордантны, когда одно из них получается из другого конечной последовательностью М. п.

При известных предосторожностях в обращении с ориентациями результат М. п. ориентированного многообразия будет снова ориентированным многообразием. Вообще, для любой структурной серии (B, φ) (см. *(B, φ)-структуры*) можно определить понятие (B, φ)-п е р е с т р о й к и М о р с а; при этом два многообразия тогда и только тогда (B, φ)-бордантны, когда они связаны друг с другом конечной последовательностью (B, φ)-М. п.

Важная роль М. п. в топологии многообразий объясняется тем, что они позволяют «деликатно» (не нарушая тех или иных свойств многообразия) уничтожать «лишние» гомотопич. группы (обычно используемая с этой

целью в теории гомотопий операция «приклеивания клетки» мгновенно выводит из класса многообразий). Практически все теоремы классификации структур на многообразиях основываются на изучении вопроса, когда для отображения $f : M \to X$ замкнутого многообразия M в клеточное пространство X существуют такой бордизм $(W; M, N)$ и такое отображение $F : W \to X$, что $F|_M = f$, а $F|_N : N \to X$ является гомотопич. эквивалентностью. Естественный путь решения этой задачи состоит в том, чтобы последовательностью М. п. уничтожить ядра гомоморфизмов $f_* : \pi_i(M) \to \pi_i(X)$ (где π_i — гомотопич. группы). Если это удается, то результирующее отображение будет гомотопич. эквивалентностью. Изучение соответствующих препятствий (лежащих в т. н. группах Уолла, см. [4]) явилось одним из главнейших стимулов в развитии *алгебраической К-теории*.

Лит.: [1] Морс М., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Новиков С. П., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 365—474; [3] Kervaire M. A., Milnor J. W., «Ann. Math.», 1963, v. 77, p. 504—37; [4] Мищенко А. С., «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 2, с. 69—134.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА ТЕОРИЯ — общее название для трех различных теорий, основывающихся на идеях М. Морса [1] и описывающих связь алгебро-топологич. свойств топологич. пространства с экстремальными свойствами функций (функционалов) на нем. М. т. является разделом *вариационного исчисления в целом*; однако последнее шире: напр., оно включает в себя теорию *категорий* в смысле Люстерника — Шнирельмана.

1) М. т. *критических точек* гладких функций f на гладком многообразии M (сокращенно — М. т. 1) разбивается на две части: локальную и глобальную. К локальной части относятся понятия критич. точки гладкой функции, *гессиана* функции в ее критич. точке, *Морса индекса* критич. точки и т. п. Основным результатом ее является *Морса лемма*, описывающая строение гладкой функции в окрестности невырожденной критич. точки.

Изучение гладких функций в окрестностях вырожденных точек не относится собственно к М. т. и выделяется в отдельную теорию *особенностей дифференцируемых отображений*.

Основными утверждениями глобальной М. т. являются следующие. Пусть f — функция на гладком многообразии M. Если множество $f^{-1}(a)$ не содержит критич. точек функции f и не пересекается с краем многообразия M, то $M^a = f^{-1}(-\infty, a)$ является гладким многообразием с краем $f^{-1}(a)$. Если множество $f^{-1}[a, b]$ компактно, не пересекается с краем многообразия M и не содержит критич. точек функции f, то существует такая гладкая изотопия $h_t : M \to M$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (осуществляемая сдвигом по траекториям градиента функции f), что $h_0 = id_M$ и h_1 диффеоморфно отображает M^b на M^a. В частности, M^a диффеоморфно M^b и включение $M^a \subset M^b$ является гомотопич. эквивалентностью.

Если множество $f^{-1}[a, b]$ компактно, не пересекается с краем многообразия M и содержит ровно одну критич. точку $p \in f^{-1}(a, b)$, имеющую индекс Морса λ, то M^b диффеоморфно многообразию, полученному из M^a приклеиванием ручки индекса λ. В частности, если p — единственная точка глобального минимума функции f, то при малом $\varepsilon > 0$ множество $M^{f(p)+\varepsilon}$ диффеоморфно диску D^n, где $n = \dim M$. Отсюда следует, что если M — замкнутое гладкое многообразие, обладающее функцией с ровно двумя критич. точками (причем обе невырожденные), то M получается склейкой двух гладких дисков по их общей границе и потому гомеоморфно (но, вообще говоря, не диффеоморфно) сфере S^n.

Поскольку приклеивание ручки индекса λ гомотопически эквивалентно приклеиванию клетки размерности λ, отсюда непосредственно вытекает следующая о с-

новная теорема М. т. 1: каждой *Морса функции* f на гладком многообразии M (без края) отвечает гомотопически эквивалентное многообразию M *клеточное пространство*, клетки к-рого находятся в биективном соответствии с критич. точками функции f, причем размерность клетки равна индексу соответствующей критич. точки. *Морса неравенства* являются непосредственным следствием этой теоремы. Аналогичная теорема справедлива и для функций Морса триад (W, V_0, V_1).

2) М. т. геодезических на римановом многообразии (сокращенно — М. т. 2) описывает гомотопич. тип петель пространства ΩM гладкого многообразия M с римановой метрикой g_{ij}. Ее цель — перенести на случай этого пространства (вернее, его подходящей модели) результаты М. т. 1. Роль функции f играет при этом определенный на пространстве $\mathrm{PS}(M)$ кусочно гладких путей $\omega : t \to \omega(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; функционал действия E (иногда неправильно наз. функционалом энергии [5]), значения к-рого на пути $\omega \in \mathrm{PS}(M)$ определяются в локальных координатах $x^1, \ldots, x^h$ формулой

$$E(\omega) = \int_0^1 g_{ij}\, dx^i dx^j.$$

В первоначальном построении М. т. рассматривался функционал длины

$$L(\omega) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}\, dx^i\, dx^j}\ ,$$

но по многим технич. причинам функционал E оказывается предпочтительнее. Вместе с тем экстремали функционала E (т. е. пути $\omega \in \mathrm{PS}(M)$, для к-рых определенный вариацией δE функционала E линейный функционал E_* на пространстве T_ω равен нулю) совпадают с геодезическими метрики g_{ij} (экстремалями функционала длины L) в их натуральной параметризации.

Пусть p, q — две (не обязательно различные) точки из M и $\Omega^{\mathrm{PS}}(M;\ p,\ q) \subset \mathrm{PS}(M)$ — пространство кусочно гладких путей, соединяющих p с q. Для каждого $l \in \mathbb{R}$ полагается

$$\Omega_l = \Omega_l^{PS}(M;\ p,\ q) = E^{-1}[0,\ l] \bigcap \Omega^{PS}(M;\ p,\ q).$$

Если риманово многообразие M полно, то пространство $\Omega_l^0 = E^{-1}[0,\ l) \bigcap \Omega_l$ (внутренность множества Ω_l) деформационно ретрагируется на нек-рое гладкое многообразие B, точками к-рого являются «ломаные геодезические» с фиксированным числом звеньев, соединяющие p с q (так что, в частности, B содержит все геодезические из $\mathring{\Omega}_l$). При этом функция $E' = E|_B : B \to \mathbb{R}$ гладкая; для любого $a < l$ множество $B^a = (E')^{-1}[0,\ a]$ компактно и является деформационным ретрактом множества Ω_a; критич. точки функции E' совпадают с экстремалями функционала $E : \mathring{\Omega}_l \to \mathbb{R}$ и представляют собой геодезические, соединяющие p с q и имеющие длину $< \sqrt{l}$; индекс Морса критич. точки функции E' равен индексу Морса соответствующей геодезической; нулевое пространство N_γ функционала E_{**} на геодезической $\gamma \in \mathring{\Omega}_l$ конечномерно и изоморфно нулевому пространству гессиана функции E' в соответствующей критич. точке; в частности, если p и q не сопряжены ни на одной соединяющей их геодезической γ, то E' — функция Морса. Применяя М. т. 1 и переходя к пределу при $l \to \infty$ и замечая, что пространство $\Omega^{\mathrm{PS}}(M;\ p,\ q)$ гомотопически эквивалентно пространству $\Omega(M;\ p,\ q)$ всех непрерывных путей, соединяющих p с q, получаем следующую основную теорему М. т. 2: пусть M — полное риманово многообразие и p, q — две его точки, не сопряженные ни на какой соединяющей их геодезической. Пространство $\Omega(M;\ p,\ q)$ всех путей, соединяющих p с q, гомотопически эквивалентно клеточному пространству, клетки размерности λ к-рого находятся в биективном соответствии с геодезическими индекса λ, соединяющими p с q. Так как гомотопич. тип простран-

ства $\Omega(M;\ p,\ q)$ не зависит от выбора точек p и q, то теорема дает, в частности, описание гомотопич. типа пространства петель ΩM.

Известно [10], что для нестягиваемого многообразия M пространство ΩM имеет нетривиальные группы гомологий в сколь угодно больших размерностях. В силу основной теоремы М. т. 2 отсюда следует, что несопряженные точки в полном римановом нестягиваемом многообразии соединены бесконечным числом геодезических (на примере сферы видно, что, вообще говоря, эти геодезические могут быть отрезками одной периодической геодезической).

В даваемом основной теоремой описании гомотопич. типа фигурируют (хотя и неявно) поля Якоби, поэтому М. т. устанавливает связь между кривизной многообразия и его топологией. Напр., если M — полное односвязное риманово многообразие, кривизна к-рого по всем двумерным направлениям неположительна, то любое поле Якоби, обращающееся в нуль в двух точках геодезической, является тождественно нулевым. Поэтому пространство петель ΩM такого многообразия имеет тип нульмерного клеточного пространства и, следовательно (ввиду односвязности M), стягиваемо. Поэтому M также стягиваемо, т. е. гомотопически эквивалентно пространству $\mathbb{R}^n$. Более тонкое использование соображений М. т. показывает, что M даже диффеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$ (см. [3], [5]).

Весьма эффективным оказалось применение М. т. к топологии групп Ли [3]. Напр., для любой односвязной группы Ли G пространство ΩG имеет гомотопич. тип клеточного пространства без нечетномерных клеток. Апофеозом здесь является теорема Ботта о периодичности, играющая основополагающую роль в K-теории и, следовательно, во всей дифференциальной топологии. Пусть U — предел последовательности вложенных унитарных групп $\dots U_n \subset U_{n+1} \subset \dots$, а O — предел последовательности вложенных ортогональных групп $\dots O_n \subset O_{n+1} \subset \dots$. Теорема периодичности Ботта утверждает, что имеют место гомотопич. эквивалентности $\Omega^2 U \sim U$, $\Omega^8 O \sim O$, где Ω^n есть n-кратная итерация функтора перехода к пространству петель. Эта теорема позволяет вычислить гомотопич. группы $\pi_i U$ и $\pi_i O$ и, следовательно, гомотопич. группы $\pi_i U_n$ и $\pi_j O_n$ при $i<2n$, $j<n$.

М. т. 2 обобщается также на случай, когда вместо точек p, q рассматриваются гладкие подмногообразия V_0, V_1 многообразия M. Изучается функционал действия на пространство $\Omega^{\mathrm{PS}}(M;\ V_0,\ V_1)$ всех кусочно гладких путей $\omega : t \to \omega(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\omega(l) \in V_i$, $i=0,\ 1$, трансверсальных на концах к V_0 и V_1, и устанавливается связь экстремалей этого функционала с гомотопич. типом пространства $\Omega(M;\ V_0,\ V_1)$. Соответствующая основная теорема аналогична сформулированной выше основной теореме М. т. 2; трудность состоит в геометрич. интерпретации индекса Морса геодезической.

3) Естественным развитием М. т. 2 является М. т. критич. точек гладких функций на банаховых (бесконечномерных) многообразиях — М. т. 3, представляющая собой уже не аналог, а непосредственное обобщение М. т. 1. К настоящему времени (1982) М. т. 3 находится в стадии становления и построена лишь в весьма предварительном контексте при очень сильных (и явно не необходимых) условиях на модельное банахово пространство (типа сепарабельности и гильбертовости), когда не возникает специфических функционально-аналитич. трудностей [9], хотя имеются и попытки построения М. т. 3 в довольно общей ситуации. Поэтому в современном виде М. т. 3 является почти дословным повторением М. т. 1. Единственное заслуживающее быть отмеченным отличие состоит в том, что в М. т. 3 условие компактности множеств $f^{-1}[a,\ b]$ заменяется условием C Пале — Смейла (см. *Морса функция*), к-рое, впрочем, выпол-

няется не во всех интересных ситуациях. Кроме того, хотя для банаховых многообразий приходится приклеивать и ручки бесконечного индекса, в силу гомотопич. тривиальности бесконечномерных сфер эти ручки на гомотопич. тип не влияют. Поэтому в основной теореме М. т. 3 участвуют лишь критич. точки конечного индекса.

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Милнор Дж., Теория Морса, пер. с англ., М., 1965; [3] его же, Теорема об h-кобордизме, пер. с англ., М., 1969; [4] Зейферт Г., Трельфалль В., Вариационное исчисление в целом, пер. с нем., М., 1947; [5] Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971; [6] Бишоп Р.-Л., Криттенден Р.-Дж., Геометрия многообразий, пер. с англ., М., 1967; [7] Постников М. М., Введение в теорию Морса, М., 1971; [8] его же, Вариационная теория геодезических, М., 1965; [9] Иллс Дж., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 3, с. 157—210; [10] Серр Ж.-П., Сингулярные гомологии расслоенных пространств, в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, пер. с франц., М., 1958, с. 9—98.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА ФУНКЦИЯ — гладкая функция, обладающая нек-рыми специальными свойствами. М. ф. возникают и используются в *Морса теории*.

Пусть W — гладкое гильбертово полное (относительно нек-рой римановой метрики) многообразие (напр., конечномерное), край к-рого ∂W является несвязным объединением (возможно, пустых) многообразий V_0 и V_1. М. ф. триады $(W; V_0, V_1)$ — такая гладкая (класса C^2 по Фреше) функция $f: W \to [a, b]$, $-\infty < a, b < +\infty$ (или $f: W \to [a, \infty]$) при $V_1 = \varnothing$, что:

1) $f^{-1}(a) = V_0$, $f^{-1}(b) = V_1$;

2) все *критические точки* функции f лежат в $W \setminus \partial W = f^{-1}[a, b]$ и невырождены;

3) условие C Пале — Смейла (см. [2], [3]): на любом замкнутом множестве $S \subset W$, где функция f ограничена, а нижняя грань функции $x \to \|df(x)\|$ равна нулю, существует критич. точка функции f.

Напр., если функция f собственная, т. е. все множества $f^{-1}[c, d]$, $-\infty < c, d < \infty$, компактны (что возможно только при $\dim W < \infty$), то f удовлетворяет условию C. М. ф. достигает минимума (глобального) на каждой компоненте связности многообразия W. Если многообразие V конечномерно, то для $k \geqslant 2$ множество М. ф. класса C^k является множеством 2-й категории (а если W компактно, то даже плотным открытым множеством) в пространстве всех функций

$$f: (W; V_0, V_1) \to ([a, b], a, b)$$

в C^k-топологии.

Лит.: [1] Morse M., The calculus of variations in the large, N. Y., 1934; [2] Palais R., «Topology», 1963, v. 2, p. 299—340; [3] Smale S., «Ann. Math.», 1964, v. 80, p. 382—96.

М. М. Постников, Ю. Б. Рудяк.

МОРСА — СМЕЙЛА СИСТЕМА динамическая — гладкий *поток* $\{S_t\}$ или *каскад* $\{S^n\}$ (порожденный диффеоморфизмом S, к-рый в этом случае наз. диффеоморфизмом Морса — Смейла) на компактном (обычно замкнутом) дифференцируемом m-мерном многообразии M^m, имеющий следующие свойства.

1) Система имеет конечное число периодич. траекторий (включая сюда в случае каскада и неподвижные точки) и (в случае потока) положений равновесия.

2) Каждая траектория из перечисленных в 1) обладает *локальной грубостью* (обычно в определении фигурируют эквивалентные этому свойства соответствующих линеаризованных систем). Это гарантирует существование у траектории устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий W^s и W^u (если траектория устойчива или вполне неустойчива, то считается, что W^u, соответственно W^s, сводится к ней самой); размерность W^u наз. ее индексом. Индекс обобщает понятие *Морса индекса* невырожденной критической (стационарной) точки w_0 гладкой функции $f: M \to \mathbb{R}$, ибо

последний совпадает с индексом w_0 как положения равновесия *градиентной динамической системы*

$$\dot{w} = -\operatorname{grad} f(w), \qquad (1)$$

где градиент берется по отношению к какой-нибудь римановой метрике на M.

3) Инвариантные многообразия траекторий из перечисленных в 1) пересекаются трансверсально (т. е. если $w \in W_1^s \cap W_2^u$, то касательные пространства $T_w W_1^s + T_w W_2^u - T_w M$).

4) Все остальные траектории при $t \to \pm\infty$ или при $n \to \pm\infty$ стремятся к траекториям из перечисленных в 1).

5) Если M имеет край, то нужны еще нек-рые условия о поведении системы вблизи края. Для потоков (до сих пор в этом случае только они и рассматривались) обычно требуют, чтобы вектор фазовой скорости был всюду трансверсален к краю.

М.— С. с. являются *грубыми системами* [1]. Именно в связи с изучением последних впервые рассматривались частные случаи М.— С. с.— потоки в плоских областях (см. более позднее подробное изложение в [2]) и каскады на окружности (см. [4] – [6]). В общем случае М.— С. с. введены С. Смейлом [7], ограничившимся тогда М. — С. с. на замкнутом M, для к-рых были доказаны следующие неравенства Морса — Смейла. Пусть m_i для каскада — число периодич. точек индекса i, а в случае потока — сумма числа положений равновесия индекса i и числа периодич. траекторий индексов i и $i+1$; тогда при $i=0, 1, \ldots, m$

$$\sum_{j=0}^{i} (-1)^j m_{i-j} \geqslant \sum_{j=0}^{i} (-1)^j b_{i-j}, \qquad (2)$$

где b_i есть i-е *Бетти число* многообразия M (если среди W^u, W^s, введенных в 2), имеются неориентируемые, то числа Бетти надо брать над полем характеристики два). При $i=m$ неравенство (2) обращается в равенство.

Неравенства (2) обобщают обычные *Морса неравенства* для гладкой функции $f : M \to \mathbb{R}$ с невырожденными критич. точками. Именно, неравенства Морса можно получить применением (2) к системе (1) (к-рая, правда, не обязательно является М.— С. с., так что требуется небольшое дополнительное рассуждение, см. [7],[8]).

Исследовался вопрос, когда в данном классе изотопий диффеоморфизмов существует диффеоморфизм Морса — Смейла (см. [9], [10]), а для M^m с нулевой эйлеровой характеристикой — и аналогичный вопрос о гомотопич. классе неособых векторных полей (здесь при $m \geqslant 4$ ответ всегда положительный, см. [11]). Для потоков при $m=2$ (см. [12], [13]) и нек-рых специальных типов потоков при $m \geqslant 3$ (см. [14], [15]) выяснено, какие топологич. инварианты определяют топологич. эквивалентность двух М.— С. с. [В двумерном случае этот вопрос решен для более широкого класса потоков (см. [3], [16]), а случай $m=1$ тривиален.]

Лит.: [1] Пэйлис Дж., Смейл С., «Математика», 1969, т. 13, № 2, с. 145—55; [2] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, М., 1967; [3] их же, Качественная теория динамических систем второго порядка, М., 1966; [4] Майер А. Г., «Уч. зап. Горьк. гос. ун-та», 1939, в. 12, с. 215—29; [5] Плисс В. А., «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем.», 1960, № 13, в. 3, с. 15—23; [6] Арнольд В. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1961, т. 25, № 1, с. 21—86; 1964, т. 28, № 2, с. 479—480; [7] Смейл С., «Математика», 1967, т. 11, № 4, с. 79—87; [8] Smale S., «Ann. Math.», 1961, v. 74, № 1, p. 199—206; [9] Шуб М., в кн.: Гладкие динамические системы, М., 1977, с. 118—39; [10] Шуб М., Сулливан Д., там же, с. 140—180; [11] Asimov D., «Ann. Math.», 1975, v. 102, № 1, p. 55—65; [12] Peixoto M., «C. r. Acad. sci.», 1971, t. 272, № 3, p. A 262—265; [13] его же, в кн.: Dynamical systems, N. Y.—L., 1973, p. 389—419; [14] Уманский Я. Л., «Докл. АН СССР», 1976, т. 230, № 6, с. 1286—89; [15] Пилюгин С. Ю., «Дифференциальные уравнения», 1978, т. 14, № 2, с. 245—54; [16] Neumann D., O'Brien Th., «J. differential equations», 1976, v. 22, № 1, p. 89—110.

Д. В. Аносов.

МОРФИЗМ категории — термин, используемый для обозначения элементов произвольной категории, играющих роль отображений множеств друг в друга, гомоморфизмов групп, колец, алгебр, непрерывных отображений топологич. пространств и т. п. М. категории — неопределяемое понятие. Каждая категория состоит из элементов двух классов, наз. классом объектов и классом морфизмов соответственно. Класс М. категории $\mathfrak{K}$ обычно обозначается $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$.

Любой М. α категории $\mathfrak{K}$ имеет однозначно определенное начало — объект A и однозначно определенный конец — объект B. Все М. с общими началом A и концом B образуют подмножество $H_{\mathfrak{K}}(A, B)$ класса $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{K}$. Тот факт, что М. α имеет начало A и конец B, можно записать обычным образом: $\alpha \in H_{\mathfrak{K}}(A, B)$, или с помощью стрелок: $\alpha : A \to B$, $A \xrightarrow{\alpha} B$ и т. п.

Деление элементов категории на М. и объекты имеет смысл только в пределах фиксированной категории, т. к. М. одной категории могут быть объектами другой и наоборот. М. любой категории образуют систему, замкнутую относительно частичной бинарной операции — умножения. В зависимости от свойств М. по отношению к этой операции выделяются специальные классы М., напр. *мономорфизм*, *эпиморфизм*, *биморфизм*, *изоморфизм*, нулевой морфизм, *нормальный мономорфизм*, *нормальный эпиморфизм* и т. д. *М. Ш. Цаленко.*

МОТИВОВ ТЕОРИЯ — обобщение различных теорий *когомологий* алгебраич. многообразий. М. т. систематически обобщает идею использования якобиана алгебраич. кривой X в качестве замены когомологий $H^1(X, \mathbb{Q})$ в классич. теории соответствий и использовании этой теории для изучения дзета-функции кривой X над конечным полем. М. т. универсальна в том смысле, что всякая геометрич. теория когомологий типа классич. сингулярных когомологий алгебраич. многообразий над полем $\mathbb{C}$ с постоянными коэффициентами, l-адических когомологий для различных простых чисел l, отличных от характеристики основного поля, кристаллич. когомологий и т. п. (см. *Вейля когомологии*) является функтором на категории мотивов.

Пусть $V(k)$ — категория гладких проективных многообразий над полем k и $X \to C(X)$ — контравариантный функтор глобальной теории пересечений из $V(k)$ в категорию коммутативных Λ-алгебр, где Λ — нек-рое фиксированное кольцо. Напр., $C(X)$ — кольцо Чжоу классов алгебраич. циклов на X по модулю подходящего (рационального, алгебраического, численного и т. п.) отношения эквивалентности, или $C(X) = K(X)$ — кольцо Гротендика, или $C(X) = H^{ev}(X)$ — кольцо классов когомологий четной размерности и т. д. Категория $V(k)$ и функтор $X \to C(X)$ позволяют определить новую категорию — категорию соответствий $CV(k)$, объектами к-рой являются многообразия $X \in V(k)$, обозначаемые через $\overline{X}$, а морфизмы определяются формулой

$$\mathrm{Hom}\,(\overline{X}, \overline{Y}) = C(X \times Y)$$

с обычным законом композиции соответствий (см. [1]). Пусть функтор C принимает значения в категории коммутативных градуированных Λ-алгебр $A(\Lambda)$, тогда категория $CV(k)$ будет Λ-аддитивной категорией градуированных соответствий. Более того, $CV(k)$ будет обладать прямыми суммами и тензорными произведениями.

Категория, объектами к-рой являются многообразия из $V(k)$, а морфизмами — соответствия степени 0, обозначается $CV^0(k)$. Из $V(k)$ определен естественный функтор в $CV^0(k)$, и функтор C продолжается до функтора T из $CV^0(k)$ в $A(\Lambda)$. Категория $CV^0(k)$, как и $CV(k)$, не является абелевой. Рассматривается ее псевдоабелево пополнение — категория $M_C^+(k)$, к-рая получается из $CV^0(k)$ формальным добавлением образов всех проекто-

ров p. Точнее, объектами $M_C^+(k)$ являются пары $(\bar{X}, p)$, где $\bar{X} \in CV^0(k)$ и $p \in \mathrm{Hom}(\bar{X}, X)$, $p^2 = p$, а $\mathrm{Hom}((\bar{X}, p), (Y, q))$ — это множество соответствий $f : \bar{X} \to \bar{Y}$ таких, что $f \circ p = q \circ f$, по модулю соответствий g с $g \circ p = p \circ g = 0$. Категория $CV^0(k)$ вкладывается в $M_C^+(k)$ посредством функтора $\bar{X} \to (\bar{X}, id)$. Естественный функтор $h : V(k) \to M_C^+(k)$ наз. функтором мотивных когомологий, а $M_C^+(k)$ — категорией эффективных мотивов.

Пусть $p = (1 \times e)$, где e — класс любой рациональной точки на проективной прямой P^1, а $L = (P^1, p)$. Тогда

$$h(P^n) = 1 \oplus L \oplus L^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus L^{\otimes n}.$$

Если $X = P(E)$ — проективизация локально свободного пучка E ранга r на Y, то

$$h(X) = \oplus_{i=0}^{r-1} \left(h(Y) \otimes L^{\otimes i} \right).$$

Вычислены также мотивы моноидального преобразования с неособым центром и мотивы кривых (см. [1]), мотивы абелева многообразия (см. [2]) и мотивы гиперповерхностей Вейля.

Категория мотивов $M_C(k)$ получается из $M_C^+(k)$ формальным добавлением отрицательных степеней мотива L. По аналогии с l-адическими когомологиями, $T = L^{\otimes -1}$ наз. мотивом Тейта. Операция тензорного умножения на мотив T наз. скручиванием с помощью мотива Тейта. Скручивание позволяет определить понятие уровня мотива, как в l-адических когомологиях. Любой функтор когомологий Вейля пропускается через функтор $h : V(k) \to M_C(k)$. Имеется гипотеза, что $M_C(k)$ в нек-ром смысле не зависит от теории пересечений C и что сам функтор $X \to h(X)$ является (универсальной) теорией когомологий Вейля. Эта гипотеза тесно связана со стандартными гипотезами Гротендика (см. [5]) об алгебраич. циклах (также пока, 1982, не доказанными).

Лит.: [1] Манин Ю. И., «Матем. сб.», 1968, т. 77, № 4, с. 475—507; [2] Шермен ёв А. М., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, № 3, с. 215—16; [3] Domazure M., Motives des variétés algèbrique, Sèm. Bourbaki, 365, P., 1969; [4] Kleiman S. L., Motives, «Proceeding of the 5-th Nordic Summer-School in Math. Algebraic geometry», *Oslo*, 1970, p. 52—82; [5] его же, Algebraic cycles and the Weil conjectures, в кн.: Dix exposés sur la cohomologie des schèmas, Amst. — P., 1968.

В. А. Исковских.

МОЩНОСТИ КРИТЕРИЯ ФУНКЦИЯ — функция, характеризующая качество *статистического критерия*. Пусть по реализации x случайного вектора X, принимающего значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta \in \Theta$, надлежит проверить гипотезу H_0, согласно к-рой распределение вероятностей P_θ случайного вектора X принадлежит подмножеству $H_0 = \{\mathsf{P}_\theta, \theta \in \Theta_0 \subset \Theta\}$, против альтернативы H_1, согласно к-рой

$$\mathsf{P}_\theta \in H_1 = \{\mathsf{P}_\theta, \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0\},$$

и пусть $\varphi(\cdot)$ — критич. функция статистич. критерия, предназначенного для проверки H_0 против H_1. Тогда

$$\beta(\theta) = \int_{\mathfrak{X}} \varphi(x)\, dP_\theta(x), \quad \theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1, \qquad (*)$$

наз. функцией мощности статистического критерия, имеющего критич. функцию φ. Из $(*)$ следует, что М. к. ф. $\beta(\theta)$ показывает, с какими вероятностями статистич. критерий, предназначенный для проверки H_0 против H_1, отклоняет проверяемую гипотезу H_0, если X подчиняется закону P_θ, $\theta \in \Theta$.

В теории проверки статистических гипотез, основанной Ю. Нейманом (J. Neyman) и Э. Пирсоном (E. Pearson), задача проверки сложной гипотезы H_0 против

сложной альтернативы H_1 формулируется в терминах М. к. ф. и заключается в построении статистич. критерия максимизирующего М. к. ф. $\beta(\theta)$, когда $\theta \in \Theta_1$ при условии, что $\beta(\theta) \leqslant \alpha$ для всех $\theta \in \Theta_0$, где число α ($0 < \alpha < 1$), наз. уровнем значимости критерия, — заданная допустимая вероятность ошибочного отклонения гипотезы H_0, когда она в действительности верна.

Лит.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [3] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960.

М. С. Никулин.

МОЩНОСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА топологического пространства — функция, сопоставляющая этому пространству бесконечное *кардинальное число* и принимающая одинаковые значения на гомеоморфных пространствах. М. х. наз. также кардинальными инвариантами. Областью определения М. х. может служить класс всех топологич. пространств или нек-рый его подкласс. Следующие М. х. были выделены уже на первом этапе развития общей топологии. Пусть X — произвольное топологич. пространство. Его мощность $|X|$ есть мощность множества всех его точек — тривиальный инвариант. Вес $w(X)$ — минимум мощностей всевозможных *баз* пространства X. Плотность $d(X)$ — минимум мощностей всюду плотных в X множеств. Число Суслина $c(X)$ — наименьший бесконечный кардинал τ такой, что мощность всякого семейства попарно не пересекающихся непустых открытых множеств в X не превосходит τ. Число Линделёфа $l(X)$ — наименьший бесконечный кардинал τ такой, что из всякого открытого покрытия пространства X можно выделить подпокрытие мощности $\leqslant \tau$. Эти простые понятия сразу доказали свою важность, войдя решающим образом в формулировки фундаментальных теорем и проблем. Примеры: регулярное пространство счетного веса метризуемо (теорема Урысона — Тихонова, 1925), бикомпакт метризуем в том и только в том случае, если вес его счетен; для пространства X любой бикомпактной группы число Суслина счетно; число Линделёфа $l(X)$ счетно (т. е. равно $\aleph_0$) для всякого пространства X счетного веса. Проблема Суслина: верно ли, что всякий связный упорядоченный бикомпакт X такой, что $c(X) = \aleph_0$ гомеоморфен обычному отрезку $[0, 1]$, сводится к вопросу о соотношении между двумя М. х.: плотностью и числом Суслина. Для положительного решения проблемы Суслина достаточно в указанных выше предположениях установить, что $d(X) \leqslant c(X)$. Вопрос о сравнении М. х. между собой — решение к-рого, как видно из приведенного примера, может иметь ключевое значение для окончательного заключения о строении пространства — занимает центральное место в теории М. х. Причина этому находится в самой природе понятия М. х.: значениями М. х. являются кардинальные числа, совокупность к-рых вполне упорядочена по величине. Следовательно, любые две М. х. φ_1 и φ_2 можно пытаться сравнить по величине. Возникает серия взаимосвязанных вопросов. Верно ли, что для любого X $\varphi_1(X) \leqslant \varphi_2(X)$, для каких X $\varphi_1(X) \leqslant \varphi_2(X)$, когда $\varphi_1(X) = \varphi_2(X)$, и т. д.

С кардинальными числами можно производить вычисления: перемножать их, складывать, возводить в степень. Соответственно, можно производить вычисления и с кардинальными инвариантами — перемножать и складывать их как функции и т. д. Это открывает новые возможности для сравнения М. х.— с помощью вычислений. Всегда

$$c(X) \leqslant d(X) \leqslant w(X), \quad l(X) \leqslant w(X),$$

— т. е. число Суслина не превосходит плотности, плотность не превосходит веса и число Линделёфа не пре-

восходит веса. Но плотность и число Линделёфа в этом смысле не сравнимы: существуют пространства X, Y, Z, для к-рых

$$d(X)<l(X),\ l(Y)\leqslant d(Y)=c(Y),\ l(Z)=d(Z)=c(Z).$$

Неожиданной на первый взгляд представляется несравнимость мощности и веса: существуют нормальные счетные T_1-пространства несчетного веса. Но всегда $d(X)\leqslant |X|$ и $l(X)\leqslant|X|$. Для всякого T_0-пространства X, $|X|\leqslant\exp(w(X))$ (пишут $\exp\tau$ вместо 2^τ). Для всякого хаусдорфова пространства X, $|X|\leqslant\exp(\exp(d(X)))$. Всегда $w(X)\leqslant\exp|X|$.

В задачу сравнения могут быть естественно вовлечены не два, а большее число М. х. На этом пути получаются особенно тонкие, красивые и часто неожиданные результаты, поражающие своей общностью: для каждого хаусдорфова пространства X, $|X|\leqslant\exp(c(X)\cdot\chi(X))$, где $\chi(X)$ — наименьший бесконечный кардинал τ такой, что в каждой точке пространства X имеется база мощности $\leqslant\tau$ (см. [1], [2]). Исследования в теории М. х. стимулировала проблема оценки мощности бикомпакта с первой аксиомой счетности, остававшаяся нерешенной с 1923 по 1969. Оказалось: для каждого хаусдорфова пространства X, $|X|\leqslant\exp(l(X)\cdot\chi(X))$ (теорема Архангельского, см. [2], [4]).

Вычисления М. х. возникают во всех разделах общей топологии в силу теоретико-множественной природы последней. Поэтому и применения теория М. х. находит практически во всех областях общей топологии и при любых подходах к исследованию пространств.

В частности, при изучении пространств методом покрытий на первый план выступают число Линделёфа, плотность и число Суслина. При исследовании и классификации пространств методом непрерывных отображений (в частности, при построении теории диадич. бикомпактов и теории абсолютов) возникли и сыграли ключевую роль новые М. х.: спрэд и π-вес. Спрэд $s(X)$ пространства X есть точная верхняя грань мощностей дискретных подпространств пространства X, а π-вес $\pi w(X)$ этого пространства — минимум мощностей всевозможных семейств γ (наз. π-базами) непустых открытых в X множеств таких, что для каждого непустого открытого в X множества U найдется $V\in\gamma$ такое, что $V\subset U$. При исследовании пространств методом обратных спектров важную роль играют число Суслина, характер, вес. Но имеется подход к общей топологии, при к-ром М. х. выступают и как главное средство исследования строения пространств, и как основной язык, на к-ром выражаются свойства пространств из тех или иных классов и, наконец, как средство классификации и выделения новых естественных классов топологич. пространств. В основе и здесь лежит задача сравнения М. х. Основной вопрос ставится следующим образом. Дан класс $\mathcal{P}$ топологич. пространств, к-рым ограничивается область определения М. х. Как выглядят основные соотношения между кардинальными инвариантами в этих условиях? Развивая теорию М. х. для класса $\mathcal{P}$, мы как бы получаем «кардинальный портрет» класса $\mathcal{P}$. Сравнение кардинальных портретов каких-либо классов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ дает возможность судить о соотношениях между этими классами, а также доставляет эффективные средства доказательства для конкретных пространств принадлежности их тому или иному классу.

Этот подход демонстрируется на примере класса метризуемых пространств. Характерной чертой здесь является совпадение для этого класса ряда основных М. х.: число Суслина равно плотности, весу и числу Линделёфа. Этот факт часто применяется, напр. чтобы доказать, что нек-рое пространство неметризуемо, достаточно показать, что на нем различаются хотя бы два из названных выше инвариантов.

Если в классе метризуемых пространств теория М. х. отличается главным образом упрощениями, то в классе бикомпактов она совершенно и нетривиальным образом меняет свой вид. Ответственны за это фундаментальные положения этой теории — совпадение для бикомпактов характера и псевдохарактера, веса и сетевого веса. При этом п с е в д о х а р а к т е р о м $\psi(x, X)$ пространства X в точке x наз. наименьшее число открытых множеств, дающих эту точку в пересечении, а х а р а к т е р о м $\chi(x, X)$ пространства X в точке x наз. минимум мощностей баз пространства в этой точке. С е т е в ы м в е с о м $nw(X)$ наз. минимум мощностей семейств S множеств в X, удовлетворяющих условию: если $x\in X$ и $x\in U\subset X$, где U открыто в X, то найдется $P\in S$, для к-рого $x\in P\subset U$ (такие семейства наз. с е т я м и в X). Для всякого бикомпакта X верно следующее: 1) $\psi(x, X)=\chi(x, X)$ для всех $x\in X$; 2) $nw(X)=w(X)$. Поэтому при непрерывном отображении на бикомпакт вес не может возрастать, и если бикомпакт X представлен в виде объединения двух своих подпространств X_1 и X_2, то вес $X_1\cup X_2$ не превосходит максимума весов X_1 и X_2 (а д д и ц и о н н а я т е о р е м а д л я в е с а). По той же причине вес бикомпакта всегда не превосходит его мощности — в частности, всякий счетный бикомпакт метризуем. Ни одно из перечисленных выше положений теории М. х. в классе бикомпактов не распространяется на класс всех вполне регулярных пространств. Важным специфич. результатом является следующий: если X — бикомпакт, τ — кардинал, $\tau\geqslant\aleph_0$ и $\chi(x, X)\geqslant\tau$ для всех $x\in X$, то $|X|\geqslant\exp\tau$ (т е о р е м а Ч е х а — П о с п и ш и л а). Почти все критерии метризуемости бикомпактов также являются теоремами о М. х. Так, метризуемость бикомпакта X равносильна любому из следующих условий: а) $w(X)=\aleph_0$; б) $nw(X)=\aleph_0$; в) диагональ в $X\times X$ является множеством типа G_δ; г) X обладает точечно-счетной базой.

В исследовании строения бикомпактов важная роль принадлежит тесноте. Т е с н о т о й $t(X)$ (см. [2], [4]) пространства X наз. наименьший кардинал $\tau\geqslant\aleph_0$ такой, что если $x\in X$, $A\subset X$ и $x\in[A]$, то найдется $B\subset A$, для к-рого $x\in[B]$ и $|B|\leqslant\tau$. Теснота не возрастает при возведении бикомпакта в любую конечную степень (в классе вполне регулярных пространств это — не так).

Если теснота бикомпакта X не превосходит τ, то для каждой точки $x\in X$ найдется семейство γ непустых открытых в X множеств такое, что $|\gamma|\leqslant\tau$ и каждая окрестность O_x точки x содержит элемент семейства γ. Поэтому π-вес каждого сепарабельного бикомпакта счетной тесноты равен $\aleph_0$. Спрэд бикомпакта мажорирует его тесноту.

Особыми свойствами диадич. бикомпактов также в большой степени управляют теоремы о М. х. Так, для всякого диадич. бикомпакта его вес совпадает со спрэдом и с теснотой. К числу диадич. бикомпактов относятся пространства любых бикомпактных групп, так что, в частности, каждая бикомпактная группа счетной тесноты метризуема.

Для теории диадич. бикомпактов и других разделов теории М. х. важное значение имеет вопрос о поведении последних при операции умножения. Существенную роль играют здесь следующие две теоремы, первая из к-рых влечет вторую. Если F — семейство пространства такое, что $d(X)\leqslant\tau$ для каждого $X\in F$ и $|F|\leqslant\exp\tau$, то плотность произведения всех пространств из F не превосходит τ (см. [1]—[4]). Если X — произведение какого-нибудь множества пространств, плотность каждого из к-рых не превосходит τ, то $c(X)\leqslant\tau$. В последнем утверждении нет никаких ограничений на число сомножителей. В частности, получается, что число Суслина любого тихоновского куба (произведения произвольного множества отрезков) счетно. Таким образом, условие

$c(X)$—$\aleph_0$ не несет в себе ограничения на мощность пространства.

Многие просто формулируемые вопросы о поведении М. х. при операции умножения оказываются весьма деликатными. Например, верно ли, что всегда $c(X\times X)=c(X)$ оказывается связанным с гипотезой Суслина и континуум-гипотезой?

Напротив, поведение М. х. при переходе от пространства X к его образу Y при непрерывном отображении $f: X\to Y$, где $f(X)=Y$, подчиняется в основном простым общим правилам.

Напр., всегда $c(Y)\leqslant c(X)$, $d(Y)\leqslant d(X)$, $nw(Y)\leqslant nw(X)$, $l(Y)\leqslant l(X)$. Если f факторно, то $t(Y)\leqslant t(X)$. То обстоятельство, что основу теории М. х. составляет система простых универсальных правил этого рода, также можно рассматривать как одну из причин, обеспечивающих широкую применимость этой теории.

Значительная информация о строении пространств получается при рассмотрении вопроса: как ведут себя М. х. при переходе к подпространству. Те М. х. φ, для к-рых из $Y\subset X$ всегда следует, что $\varphi(Y)\leqslant\varphi(X)$, наз. монотонными. К ним относятся: вес, сетевой вес, теснота, характер, спрэд. Немонотонны число Суслина, плотность, число Линделёфа. Возникают следующие вопросы: каковы те пространства X, для к-рых $c(Y)\leqslant\tau$ для всех $Y\subset X$; каковы те X, для к-рых $d(Y)\leqslant\tau$ для всех $Y\subset X$; как отражается на топологии пространства X требование: $l(Y)\leqslant\tau$ для всех $Y\subset X$. Ответ на первый вопрос прост: сформулированное условие означает, что спрэд X не превосходит τ. Но двумя последующими требованиями выделяются новые классы пространств. Исследование их оказалось зависящим от специальных гипотез теории множеств — в частности, от аксиомы Мартина.

Своеобразный характер приобретает теория М. х. на пространствах топологич. групп. Так, критерий метризуемости сводится здесь просто к требованию счетности характера. На языке М. х. формулируются важные свойства линейных топологич. пространств, в частности пространств $C(X)$ непрерывных действительных функций на пространстве X. Сюда относятся теоремы о бикомпактах Эберлейна (каждый бикомпакт Эберлейна является пространством Фреше — Урысона, вес бикомпакта Эберлейна равен его числу Суслина), теорема: если X — бикомпакт, то теснота пространства $C(X)$ в топологии поточечной сходимости счетна.

Между рядом М. х. пространств X и $C(X)$ имеет место соответствие типа двойственности.

Лит.: [1] Juhász I., Cardinal functions in topology, Amst., 1971; [2] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [3] Engelking R., General topology, Warsz., 1977; [4] Архангельский А. В., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 6, с. 29—84; [5] Engelking R., General topology, Warsz., 1977.

А. В. Архангельский.

МОЩНОСТЬ, кардинальное число, множества A — такое свойство этого множества, к-рое присуще любому множеству B, эквивалентному A. При этом два множества наз. эквивалентными (или равномощными), если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие. Таким образом, «определяя через абстракцию», можно сказать, что М.— это то, что есть общего у всех эквивалентных множеств. Так как у всех эквивалентных между собою конечных множеств этим общим является количество элементов, или одинаковое число, из к-рых они состоят, то в применении к бесконечным множествам понятие М. является аналогом понятия количества. М. есть фундаментальное понятие теории множеств, принадлежащее Г. Кантору (G. Cantor). Множества, эквивалентные множеству всех натуральных чисел, наз. счетными. Соответствующая М. обозначается $\aleph_0$ (алеф-нуль). М. множеств, эквивалентных множеству

всех действительных чисел, наз. М. континуума и обозначается $\mathfrak{c}$ или $2^{\aleph_0}$. Напр., счетную М. имеет множество всех алгебраич. чисел, а М. континуума имеет множество всех замкнутых подмножеств n-мерного евклидова пространства. Теорема Кантора — Бернштейна: если из двух множеств A и B каждое эквивалентно части другого, то эти два множества эквивалентны. В этом случае говорят, что множества A и B имеют одинаковую М. Если множество A эквивалентно части множества B, тогда как множество B не эквивалентно никакой части множества A, то говорят, что М. множества B больше М. множества A. Теорема Кантора: М. множества всех подмножеств любого непустого множества A больше М. множества A. Эта теорема дает возможность построить иерархию М. (см. *Кардинальное число*).

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977. *Б. А. Ефимов.*

МОЩНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ — вероятность, с к-рой *статистический критерий*, предназначенный для проверки простой гипотезы H_0 против сложной альтернативы H_1, отклоняет H_0, когда в действительности верна гипотеза H_1. В случае, когда гипотеза H_1, конкурирующая с проверяемой гипотезой H_0, является сложной (при этом сама гипотеза H_0 может быть как простой, так и сложной, что символически записывают следующим образом: $H_0: \theta\in\Theta_0\subset\Theta$, $H_1: \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$), М. с. к., предназначенного для проверки H_0 против H_1, определяется как сужение функции мощности $\beta(\theta)$, $\theta\in\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$, этого статистич. критерия на множество Θ_1.

Кроме этого определения широко распространено следующее: М. с. к., предназначенного для проверки гипотезы $H_0: \theta\in\Theta_0\subset\Theta$ против сложной альтернативы $H_1: \theta\in\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$, есть $\inf\limits_{\theta\in\Theta_1}\beta(\theta)$, где $\beta(\theta)$ — функция мощности этого статистич. критерия (см. *Мощности критерия функция*).

Лит.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [3] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *М. С. Никулин.*

МУАВРА ФОРМУЛА — формула, выражающая правило для возведения в степень n *комплексного числа*, представленного в тригонометрич. форме

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Согласно М. ф. модуль ρ комплексного числа возводится в эту степень, а аргумент φ умножается на показатель степени

$$z^n=[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

М. ф. была найдена А. Муавром (A. Moivre, 1707), современная ее запись предложена Л. Эйлером (L. Euler, 1748).

М. ф. может быть использована для выражения $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через степени $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$:

$$\cos n\varphi=\cos^n\varphi-C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-\ldots,$$

$$\sin n\varphi=C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi-C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi+\ldots$$

Обращение М. ф. приводит к формуле для извлечения корня из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=$$

$$=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,\ 1,\ \ldots,$$

к-рую также иногда наз. М. ф. *БСЭ-3.*

МУАВРА — ЛАПЛАСА ТЕОРЕМА — см. *Лапласа теорема.*

МУЛЬТИАЛГЕБРА — множество, на к-ром задана система (вообще говоря, частичных) мультиопераций. Частичной мультиоперацией на множестве A наз. частичное отображение $f: A^n \to A^m$ декартовых степеней множества A, где n, $m \geqslant 0$. При этом под A^0 понимается одноэлементное множество. Гомоморфизмом $g: A \to B$ мультиалгебр с одной и той же системой мультиопераций наз. такое отображение g, что если f — мультиоперация, отображающая n-ю декартову степень в m-ю, то

$$g^m(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(g(x_1), \ldots, g(x_n))$$

для всех $x_i \in A$. Понятие М. является обобщением понятия *универсальной алгебры*. В то же время М. является частным случаем *алгебраической системы*, поскольку отображение $f: A^n \to A^m$ можно отождествить с $(n+m)$-арным отношением $(x, f(x))$ на A, $x \in A^n$. Наиболее естественно М. возникают в связи с функторным пониманием универсальных алгебр (см. [1]). Именно, пусть C — *категория*, объектами к-рой являются натуральные числа и нуль, причем объект $m+n$ есть прямое произведение объектов m и n. Тогда функтор F из C в категорию множеств, перестановочный с прямыми произведениями, есть М. на множестве $F(1) = A$ с системой мультиопераций $F(f): A^n \to A^m$, где $f: n \to m$ в C. Гомоморфизмами в этом случае будут служить в точности естественные преобразования функторов.

Лит.: [1] Lawvere F. W., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1963, v. 50, № 5, p. 869—72; [2] Белоусов В. Д., Алгебраические сети и квазигруппы, Киш., 1971. *В. А. Артамонов.*

МУЛЬТИГРАФ — *граф*, в к-ром допускаются кратные ребра.

МУЛЬТИМОДАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, многовершинное распределение,— распределение вероятностей с несколькими *модами* или, что то же самое, с несколькими относительными максимумами, соответствующими этим модам. В отличие от *унимодальных распределений* М. р. встречаются сравнительно редко и, как правило, представляют собой смеси распределений вероятностей. *А. В. Прохоров.*

МУЛЬТИОПЕРАТОРНАЯ ГРУППА, Ω-группа,— универсальная алгебра, являющаяся группой относительно операции сложения $+$ (не обязательно коммутативной), в которой задана система операций Ω-арностей $\geqslant 1$. Предполагается, что нулевой элемент 0 аддитивной группы является подалгеброй, т. е. $0 \ldots 0\omega = 0$ для всех $\omega \in \Omega$. Таким образом, М. г. объединяет понятия группы, линейной алгебры и кольца. Идеалом Ω-группы наз. такой нормальный делитель N в аддитивной группе A, что

$$-(x_1, \ldots, x_n\omega) + (x_1, \ldots, x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1} \ldots x_n\omega) \in N$$

для всех $a \in N$, $x_i \in A$, $\omega \in \Omega$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Конгруэнции на М. г. описываются разложениями на смежные классы по идеалам.

Пусть A, B, C суть Ω-подгруппы в Ω-группе G (т. е. подалгебры универсальной алгебры G), причем C порождена A и B. Взаимным коммутантом $[A, B]$ подгрупп A и B наз. идеал в C, порожденный всеми элементами вида

$$-a - b + a + b,$$

$$-(a_1 \ldots a_n\omega) - (b_1 \ldots b_n\omega) + (a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n)\omega,$$

где a, $a_i \in A$, b, $b_i \in B$, $\omega \in \Omega$. Пусть $G' = [G, G]$. М. г. наз. абелевой, если $G' = 0$. Индуктивно определяются идеалы $G_{i+1} = [G_i, G]$, где $G_1 = G'$, и $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$, где $G^{(1)} = G'$. М. г. G наз. нильпотентной, если $G_i = 0$, и разрешимой, если $G^{(i)} = 0$ для нек-рого i. На эти классы М. г. переносятся многие свойства соответствующих классов групп и колец. М. г. A наз. мультиоператорной (линейной) Ω-алгеброй над коммутативно-ассоциативным кольцом k с единицей, если сложение в A коммута-

тивно, Ω_1 k и все операции из Ω полилинейны над k (см. [2] [6]).

Лит.: [1] Higgins Ph. J., «Proc. London Math. Soc.», 1956, v. 6, p. 366—416; [2] Курош А. Г., «Сиб. матем. ж.», 1960, т. 1, № 1, с. 62—70; [3] его же, Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [4] его же, Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974; [5] его же, «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 1, с. 3—15; [6] Баранович Т. М., Бургин М. С., там же, 1975, т. 30, в. 4, с. 61—106; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 14, М., 1976, с. 191—248; [8] Кольца, [т. 1], Новосиб., 1973, с. 41—45.

В. А. Артамонов.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — арифметическая функция одного аргумента $f(m)$, удовлетворяющая условию

$$f(mn) = f(m) \cdot f(n) \qquad (*)$$

для любой пары взаимно простых чисел m, n. Обычно предполагается, что $f(m)$ не равна тождественно нулю (что равносильно условию $f(1)=1$). М. а. ф. наз. сильно мультипликативной, если $f(p^\alpha) = f(p)$ для всех простых p и всех натуральных α. Если условие (*) выполняется для произвольных двух чисел m, n, а не обязательно взаимно простых, то $f(m)$ наз. вполне мультипликативной; в этом случае $f(p^\alpha) = [f(p)]^\alpha$.

Примеры М. а. ф.: функция $\tau(m)$ — число натуральных делителей натурального m, функция $\sigma(m)$ — сумма натуральных делителей натурального m; *Эйлера функция* $\varphi(m)$, *Мёбиуса функция* $\mu(m)$. Функция $\frac{\varphi(m)}{m}$ является сильно М. а. ф., степенная функция $f(m) = m^s$ — вполне М. а. ф.

Й. П. Кубилюс.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ГРУППА тела — группа, элементами к-рой являются все ненулевые элементы данного тела, а операция совпадает с операцией умножения в теле. М. г. поля — абелева группа.

О. А. Иванова.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ПОЛУГРУППА ассоциативного кольца — полугруппа, образуемая всеми элементами данного ассоциативного кольца относительно умножения. Неассоциативное кольцо по умножению является лишь группоидом, называемым мультипликативным группоидом кольца.

О. А. Иванова.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ РЕШЕТКА — *полная решетка* L $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ с дополнительной бинарной коммутативной и ассоциативной операцией, наз. умножением (и обозначаемой $\cdot$), такой, что наибольший элемент решетки играет роль мультипликативной единицы и

$$b \cdot (\vee_{\alpha \in J} b_\alpha) = \vee_{\alpha \in J} b \cdot b_\alpha$$

для любых b, $b_\alpha \in L$ и произвольного множества индексов J. Теория М. р. возникла как результат применения теоретико-структурных методов к изучению решеток идеалов коммутативных колец (см. [2]), и поэтому большинство понятий и результатов имеет аналоги (или приложения) в коммутативных кольцах (см. [1]).

Пусть L — М. р. и a, $b \in L$, тогда $a:b = \vee \{x \mid x \in L, x \cdot b \leqslant a\}$. Элемент $e \in L$ наз. $\vee$-главным (соответственно $\wedge$-главным), если $(a \vee (b \cdot e)) : e = (a:e) \vee b$ (соответственно $(a \wedge (b:e)) \cdot e = (a \cdot e) \wedge b$) для любых a, $b \in L$; $\vee$-главный и $\wedge$-главный одновременно элемент наз. главным. Нётеровой решеткой наз. модулярная и удовлетворяющая условию обрыва возрастающих цепей М. р., в к-рой каждый элемент является объединением нек-рых главных элементов. Полная решетка M наз. модулем над мультипликативной решеткой L, если для любых $\lambda \in L$, $a \in M$ определено произведение $\lambda a \in M$, причем

$$(\lambda_1 \lambda_2)\, a = \lambda_1 (\lambda_2 a),\ 1a = a,\ 0_L a = 0_M,$$

$$(\vee_{\alpha \in I} \lambda_\alpha)(\vee_{\beta \in J} a_\beta) = \vee_{\alpha, \beta} \lambda_\alpha a_\beta$$

(здесь $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_\alpha \in L$, a, $a_\beta \in M$, 1 — наибольший элемент L и M, 0_L, 0_M — нули решеток L и M соответственно).

Наиболее изученный класс М. р.— нётеровы решетки. Здесь можно выделить следующие направления. 1) Вопросы представления нётеровой решетки как решетки идеалов подходящего нётерова кольца (известно, что решетка идеалов любого нётерова кольца — нётерова, однако существуют нётеровы решетки, к-рые не могут быть даже вложены в решетку идеалов нётерова кольца [3]). 2) Изучение нётеровых модулей над М. р. 3) Изучение понятий и свойств, к-рые переносятся на нётеровы решетки из теории идеалов нётеровых колец (понятия простого и примарного элементов, размерности, собственного максимального элемента, полулокальной и локальной решетки). Описаны [4] дистрибутивные регулярные локальные нётеровы М. р. Построена теория локализации и ассоциированных простых элементов для гораздо более широкого, чем нётеровы, класса М. р., включающего в себя решетки идеалов произвольных коммутативных колец.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Dilworth R. P., «Pacific J. Math.», 1962, v. 12, p. 481—98; [3] Bogart K., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 22, № 1, p. 129—33; [4] его же, «Mich. Math. J.», 1968, v. 15, № 2, p. 167—76; 1969, v. 16, № 3, p. 215—23; [5] Фофанова Т. С., в сб.: Упорядоченные множества и решетки, в. 3, Саратов, 1975, с. 22—40. *Т. С. Фофанова.*

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СИСТЕМА — ортонормированная на $[a, b]$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющая условиям:

1) вместе с двумя функциями $\varphi_k(x)$ и $\varphi_l(x)$ система $\{\varphi_n(x)\}$ содержит и их произведение $\varphi_n(x)=\varphi_k(x)\varphi_l(x)$;

2) вместе с каждой функцией $\varphi_k(x)$ система $\{\varphi_n(x)\}$ содержит и функцию $\varphi_m(x)=1/\varphi_k(x)$.

Примеры М. с.: показательная система $\{e^{i2\pi nx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$, ортогональная на отрезке $[0, 1]$, *Уолша система* функций.

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958, с. 459—74; [2] Harmuth H., Transmission of information by orthogonal functions, 2 ed., B.— N. Y., 1972; [3] Applications of Walsh functions. 1971. Proc. of the symposium [National technical information service], Wash., 1971. *А. В. Ефимов.*

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ — предел произведений вида

$$\Pi_\Delta = e^{A(s_n)(s_n - s_{n-1})} e^{A(s_{n-1})(s_{n-1} - s_{n-2})} \dots e^{A(s_1)(s_1 - s_0)},$$

где $A(s)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция со значениями в пространстве ограниченных операторов в банаховом пространстве E, Δ — разбиение отрезка $[a, b]$ точками $s_0=a$, s_1, ..., $s_n=b$. Предел берется, когда диаметр разбиения $|\Delta| \to 0$ и обозначается

$$\overleftarrow{\int_a^b} \exp A(s)\, ds.$$

Если операторы $A(t)$ коммутируют при различных t, то

$$\overleftarrow{\int_a^b} \exp A(s)\, ds = e^{\int_a^b A(s)\, ds}$$

М. и. является удобной формой представления *эволюционного оператора* $U(t, \tau)$ для дифференциального уравнения $X=A(t)X$ (см. [1]). При этом

$$U(t, \tau) = \overleftarrow{\int_\tau^t} A(s)\, ds. \qquad (1)$$

Произведение, пределом к-рого является последний М. и., также является эволюционным оператором для уравнения с кусочно постоянным оператором $\tilde{A}(t)= =A(s_k)$ при $s_{k-1} < t \leqslant s_k$.

Если $A(s)$ и $B(s)$ — две непрерывные оператор-функции, то справедлива формула

$$\int_a^b \exp(A(s)+B(s))\,ds=$$

$$=\lim_{|\Delta|\to 0}\overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}} e^{A(s_k)(s_k-s_{k-1})}e^{B(s_k)(s_k-s_{k-1})}, \quad (2)$$

где знак $\overleftarrow{\ }$ над произведением означает, что множители с меньшими номерами пишутся правее множителей с большими.

Формулы (1), (2) допускают обобщения на нек-рые классы дифференциальных уравнений с неограниченными оператор-функциями, откуда получаются представления решений дифференциальных уравнений с частными производными параболического и шрёдингерова типов в виде интегралов по траекториям (континуальных интегралов) (см. [2]).

Формулы типа (2) лежат также в основе нек-рых численных методов решения уравнений.

Если $f(t)$ — скалярная непрерывная функция, а $F(t)$ операторнозначная непрерывная функция ограниченной вариации, то существует предел

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\overleftarrow{\prod_{k=1}^{n}} e^{f(s_k)(F(s_k)-F(s_{k-1}))}=\overleftarrow{\int_a^b} \exp(f(t)\,dF(t)),$$

наз. мультипликативным интегралом Стилтьеса. Эти интегралы нашли применение в теории J-нерастягивающих матриц и операторов (см. [3], [4]).

Лит.: [1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [2] Далецкий Ю. Л., «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 5, с. 3—115; [3] Потапов В. П., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1955, т. 4, с. 125—236; [4] Гинзбург Ю. П., «Матем. исследования», (Кишинев), 1967, т. 2, № 2, с. 52—83.

С. Г. Крейн.

МУЛЬТИПЛИКАТОР ГРУППЫ, представленной в виде факторгруппы F/R свободной группы F, – факторгруппа

$$R\cap F'/[R,\ F],$$

где F' — коммутант группы F, а $[R,\ F]$ — взаимный коммутант R и F. Мультипликатор группы не зависит от способа представления группы в виде факторгруппы свободной группы. Он совпадает со второй группой гомологий группы F/R с целочисленными коэффициентами. При изучении М. г. важным является вопрос о его нетривиальности.

А. Л. Шмелькин.

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ первого и второго рода — собственные значения *монодромии оператора* канонич. уравнений.

В комплексном гильбертовом пространстве уравнения вида $\dot{x}=iJH(t)x$, где J и $H(t)$ — самосопряженные операторы, $J^2=I$ и $H(t)$ периодичен, наз. каноническими. В конечномерном случае собственные числа оператора монодромии $U(T)$ для этого уравнения наз. мультипликаторами. Если все решения канонич. уравнения являются ограниченными на всей оси (уравнение устойчиво), то М. лежат на единичной окружности. Если рассмотреть канонич. уравнение $\dot{x}=\lambda JH(t)x$ с действительным параметром, то все М. делятся на две группы: М. 1-го (2-го) рода, к-рые движутся против (по) часовой стрелке при увеличении параметра λ.

Канонич. уравнение наз. сильно устойчивым, если оно устойчиво и остается устойчивым при достаточно малых вариациях оператора $H(t)$. Для сильной устойчивости необходимо и достаточно, чтобы все М. лежали на единичной окружности и чтобы не было совпадающих М. разного рода.

Теория М. 1-го и 2-го родов позволила получить ряд тонких признаков устойчивости и оценок зон устойчивости для канонич. уравнений. В терминах М. проведена гомотопич. классификация устойчивых и неустойчивых канонич. уравнений.

Лит.: [1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970; [2] Якубович В. А., Старжинский В. М., Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, М., 1972.

С. Г. Крейн.

МУЛЬТИПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛ — гармоническая функция в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, являющаяся частной производной какого-либо порядка $|m| \geqslant 1$ от главного фундаментального решения уравнения Лапласа, т. е. функция вида

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \frac{1}{r^{n-2}} \quad \text{при} \quad n \geqslant 3,$$

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \ln \frac{1}{r} \quad \text{при} \quad n = 2,$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad |m| = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Пусть для краткости $n = 3$; при $|m| = 1$ потенциалы диполей имеют вид

$$-\frac{x_1}{r^3} = -\frac{\cos\alpha}{r^2}, \quad -\frac{x_2}{r^3} = -\frac{\cos\beta}{r^2}, \quad -\frac{x_3}{r^3} = -\frac{\cos\gamma}{r^2},$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы радиус-вектора точки наблюдения (x_1, x_2, x_3). Функция $-x_1/r^3$, напр., истолковывается как потенциал диполя с моментом 1 и осью Ox_1, то есть как предел при $a \to 0+$ суммы ньютоновых потенциалов массы $-1/2a$, помещенной в точке $(a, 0, 0)$, и массы $1/2a$, помещенной в точке $(-a, 0, 0)$; иначе эту функцию можно представить себе как магнитный потенциал маленького магнита, расположенного вдоль оси Ox_1 в начале координат. Аналогично, функции $-x_2/r^3$ и $-x_3/r^3$ суть потенциалы диполей с осями соответственно Ox_2 и Ox_3. Составляя линейные комбинации этих функций, можно получить потенциал произвольно ориентированного диполя с любым моментом μ. При $|m| = 2$ имеют место квадруполей потенциалы, получаемые предельным переходом для определенных систем четырех точечных масс, сумма которых всегда равна нулю, и т. д.

Ньютонов потенциал $U(x_1, x_2, x_3)$ ограниченного тела G плотности $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$, расположенного так, что $0 \in G$, можно разложить в ряд по М. п.

$$U(x_1, x_2, x_3) = \int\int\int_G \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 + (x_2-\eta)^2 + (x_3-\zeta)^2}} =$$

$$= \frac{M}{r} + \sum_{|m|=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|m|}}{m_1!\, m_2!\, m_3!} a_{m_1 m_2 m_3} \times$$

$$\times \frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \partial x_3^{m_3}} \frac{1}{r}, \qquad (1)$$

где

$$M = \int\int\int_G \rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

— общая масса тела G, а коэффициенты

$$a_{m_1 m_2 m_3} = \int\int\int_G \xi^{m_1} \eta^{m_2} \zeta^{m_3} \rho(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

наз. при $|m| = 1$ дипольными моментами, при $|m| = 2$ — квадрупольными моментами и, вообще, при всех $|m| \geqslant 1$ — мультипольными моментами. Ряд (1) отличается от

разложения потенциала $U(x_1, x_2, x_3)$ по сферич. функциям

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{M}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=-m}^{m} q_{ml} \frac{Y_{ml}(\theta, \lambda)}{r^{m+1}} \quad (2)$$

перегруппировкой членов, и члены ряда (2) можно также истолковывать как потенциалы специальным образом ориентированных мультиполей (см. [1]). Поэтому коэффициенты q_{ml} также часто наз. соответственно д и п о л ь н ы м и, к в а д р у п о л ь н ы м и и, вообще, м у л ь т и п о л ь н ы м и м о м е н т а м и.

Разложения типа (1) и (2) применяются для описания и приближенного представления скалярных или векторных потенциалов не только в связи с фундаментальным решением уравнения Лапласа, но и уравнения Гельмгольца (см. [2]).

В гидродинамике плоских течений идеальной несжимаемой жидкости находят также применение комплексные М. п. вида

$$\frac{\mu e^{i\alpha}}{z^m}, \quad m \geqslant 1,$$

где z — комплексное переменное, μ и α — соответственно момент и угол ориентации мультиполя. Получающийся при $m=1$, $\mu=1$ и $\alpha=0$ дипольный потенциал истолковывается как предел при $a \to 0+$ суммы комплексных потенциалов источника мощности 1 в точке $z=-a>0$ и стока мощности 1 в точке $z=-a$. Разложению (1) здесь соответствует разложение комплексного потенциала скоростей потока, обтекающего плоское тело G, в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$w = f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m e^{i\alpha_m}}{z^m}.$$

При этом действие обтекаемого тела G заменяется суммарным действием М. п., помещенных в начале координат (см. [3]).

Лит.: [1] М о р с Ф. М., Ф е ш б а х Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 2, М., 1960; [2] Д ж е к с о н Д ж., Классическая электродинамика, пер. с англ., М., 1965; [3] М и л н-Т о м с о н Л.-М., Теоретическая гидродинамика, пер. с англ., М., 1964.

Е. Д. Соломенцев.

МУРА ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство M с единственной нетривиальной приведенной группой гомологий

$$\tilde{H}_k(M) = G, \quad \tilde{H}_i(M) = 0, \quad i \neq k.$$

Если $K(\mathbb{Z}, n)$ — *Эйленберга — Маклейна пространство* группы $\mathbb{Z}$ целых чисел, а $M_k(G)$ — М. п. с $\tilde{H}_k(M_k(G)) = G$, то

$$\lim_{N \to \infty} \left[\sum^{N+k} X, K(\mathbb{Z}, N+n) \wedge M_k(G) \right] \cong H^n(X, G),$$

т. е. $\{K(\mathbb{Z}, n) \wedge M_k(G)\}$ — спектр теории когомологий $H^*(\ , G)$. Это позволяет распространить понятие когомологий с произвольными коэффициентами на обобщенные теории когомологий. Для любого спектра E спектр $E \wedge M_k(G)$ определяет теорию когомологий $(E \wedge M_k(G))^*$, наз. т е о р и е й E^*-к о г о м о л о г и й с г р у п п о й к о э ф ф и ц и е н т о в G. Для определения обобщенных теорий гомологий с коэффициентами в группе G используется т. н. к о - М у р а п р о с т р а н с т в о $M^k(G)$, характеризуемое равенствами

$$\tilde{H}^k(M^k(G)) = G, \quad \tilde{H}^i(M^k(G)) = 0, \quad i \neq k.$$

Напр., группа $\pi_i(X; G) = [M^k(G), X]$ наз. г о м о т о п и ч е с к о й г р у п п о й п р о с т р а н с т в а X с к о э ф ф и ц и е н т а м и в G. Однако пространство $M^k(G)$ существует не для всех пар (G, k). Если группа G конечно порождена, то $M^k(G)$ существует.

Лит.: [1] M o o r e J. C., «Ann. Math.», 1954, v. 59, № 3, p. 549—57.

А. Ф. Харшиладзе.

МУФАНГ ЛУПА — лупа, в к-рой выполняются следующие (эквивалентные между собой) тождества:

$$x(y\cdot xz)=(xy\cdot x)z,$$
$$(zx\cdot y)x=z(x\cdot yx),$$
$$xy\cdot zx=x(yz\cdot x).$$

Эти лупы были введены и изучены Р. Муфанг [1]. Она, в частности, доказала следующую теорему, показывающую близость этого класса луп к группам: если три элемента a, b, c М. л. связаны ассоциативным соотношением $ab\cdot c=a\cdot bc$, то они порождают ассоциативную подлупу, т. е. группу (теорема Муфанг). Следствием этой теоремы является диассоциативность М. л., т. е. любые два элемента лупы порождают ассоциативную подлупу.

Для коммутативных М. л., к-рые определяются одним тождеством

$$x^2\cdot yz=xy\cdot xz,$$

верна следующая теорема: всякая коммутативная М. л. с n образующими центрально нильпотентна класса нильпотентности не более $n-1$ (см. [2]). Центральная нильпотентность определяется аналогично нильпотентности в группах.

Если нек-рая лупа изотопна М. л., то она сама есть М. л., т. е. свойство быть М. л. универсально. Более того, изотопные коммутативные М. л. изоморфны.

Лит.: [1] Moufang R., «Math. Ann.», 1935, Bd 110, S. 416—30; [2] Bruck R. H., A survey of binary systems, B.— Hdlb.— Gött., 1958.

В. Д. Белоусов.

МЮНЦА ТЕОРЕМА. теорема о полноте системы степеней $\{x^{\lambda_k}\}$ на отрезке $[a, b]$, $0<a<b<\infty$: пусть $0<\lambda_1<\lambda_2<\dots$; для того чтобы для любой функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, и любого $\varepsilon>0$ нашлась линейная комбинация

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k x^{\lambda_k}$$

такая, что

$$\|f-P\|_C=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|<\varepsilon,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\infty. \qquad (*)$$

В случае отрезка $[a, b]$, $a=0$, к системе $\{x^{\lambda_k}\}$ присоединяют единицу и для полноты пополненной системы

условие (*) остается по-прежнему необходимым и достаточным. Условие $a \geqslant 0$ существенно: так, система $\{x^{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ (для нее выполняется условие (*)) не полна на $[-1, 1]$ (нечетную функцию нельзя приблизить с любой точностью комбинацией четных степеней).

Условие (*) необходимо и достаточно для полноты $\{x^{\lambda_k}\}$, $-1/p < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, на $[a, b]$, $a \geqslant 0$, в метрике L_p, $p > 1$, т. е. чтобы для каждой функции $f(x) \in L_p(a, b)$ и любого $\varepsilon > 0$ нашлась линейная комбинация $P(x)$ такая, что

$$\| f - P \|_{L_p} = \left| \int_a^b | f(x) - P(x) |^p \, dx \right|^{1/p} < \varepsilon.$$

Теорема получена Х. Мюнцем [1].

Лит.: [1] Müntz H., Approximationssatz von Weierstrass [Festschrift H. A. Schwarz], [B.], 1914; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965.

А. Ф. Леонтьев.

МЯГКИЙ ПУЧОК — пучок множеств $\mathcal{F}$ на топологич. пространстве X, любое сечение к-рого над нек-рым замкнутым подмножеством в X может быть продолжено до сечения пучка $\mathcal{F}$ над всем X. Напр., М. п. являются: пучок ростков разрывных сечений произвольного пучка множеств на X; любой *вялый пучок* $\mathcal{F}$ на паракомпактном пространстве X; любой *тонкий пучок* $\mathcal{F}$ абелевых групп на паракомпактном пространстве X. Свойство мягкости пучка $\mathcal{F}$ на паракомпактном пространстве X локально: пучок $\mathcal{F}$ является М. п. тогда и только тогда, когда любая точка $x \in X$ обладает такой открытой окрестностью U, что $\mathcal{F} | U$ — М. п. на U. М. п. на паракомпактном пространстве индуцирует М. п. на любом замкнутом (а если X метризуемо, то и на любом локально замкнутом) подпространстве. Пучок модулей над М. п. колец является М. п.

Если

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \ldots$$

— точная последовательность М. п. абелевых групп на паракомпактном пространстве X, то соответствующая последовательность групп сечений

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0(X) \longrightarrow \mathcal{F}^1(X) \longrightarrow \ldots$$

тоже точна. Когомологии $H^p(X, \mathcal{F})$ любого М. п. $\mathcal{F}$ абелевых групп на паракомпактном пространстве X тривиальны при $p > 0$.

Лит.: [1] Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков, пер. с франц., М., 1961; [2] Уэллс Р., Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях, пер. с англ., М., 1976.

А. Л. Онищик.

НАБЛЮДЕНИЙ ОБРАБОТКА — применение к результатам наблюдений математич. методов для построения выводов об истинных значениях искомых величин. Всякий результат наблюдений, связанных с измерениями, содержит ошибки (погрешности) различного происхождения. По своему характеру ошибки делятся на три группы: грубые, систематические и случайные (о грубых ошибках см. ст. *Ошибок теория*; в дальнейшем будет предполагаться, что наблюдения не содержат грубых ошибок). Обычно результат измерения Y нек-рой величины μ считают случайной величиной; тогда ошибка измерения $\delta = Y - \mu$ будет также случайной величиной. Пусть b $\mathsf{E}\delta$ — математич. ожидание ошибки. Тогда

$$Y = \mu + b + (\delta - b).$$

Величина b наз. систематической ошибкой, а $\delta - b$ — случайной ошибкой; математич. ожидание $\delta - b$ равно нулю. Систематич. ошибка b часто бывает известна заранее и в этом случае легко устраняется. Напр., в астрономии при измерении величины угла между направлением на светило и плоскостью горизонта систематич. ошибка является суммой двух ошибок: систематич. ошибки, к-рую дает прибор при отсчете данного угла (инструментальная ошибка) и систематич. ошибки, обусловленной рефракцией, т. е. преломлением лучей света в атмосфере. Инструментальная ошибка определяется с помощью таблицы или графика поправок для данного прибора; ошибку, связанную с рефракцией (для зенитных расстояний меньших 80°), достаточно точно можно вычислить теоретически.

Влияние случайных ошибок оценивается с помощью методов теории ошибок. Если $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — результаты n независимых измерений величины μ, произведенных в одинаковых условиях и одинаковыми средствами, то обычно полагают

$$\mu \approx \overline{Y} - b = [(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)/n] - b, \qquad (1)$$

где b — систематич. ошибка.

В том случае, когда требуется вычислить значение нек-рой функции $f(y)$ в точке $y = \mu$, причем величина μ оценивается по n независимым наблюдениям $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, приближенно полагают

$$f(\mu) \approx f(\overline{Y} - b). \qquad (2)$$

Пусть B — математич. ожидание величины

$$\Delta = f(\overline{Y} - b) - f(\mu),$$

тогда

$$f(\overline{Y} - b) = f(\mu) + B + (\Delta - B).$$

Поэтому B — систематич. ошибка и $(\Delta - B)$ — случайная ошибка приближенного равенства (2). Если случайные ошибки независимых наблюдений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ подчиняются одному и тому же распределению и функция $f(y)$ в окрестности точки $y = \mu$ мало отличается от линейной, то $B \approx 0$ и

$$\Delta \approx f'(\mu)\,\overline{(\delta - b)},$$

где $\overline{(\delta - b)}$ — арифметич. среднее случайных ошибок исходных наблюдений. Это означает, что если

$$\mathsf{E}(\delta_i - b)^2 = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то

$$\mathsf{E}\,(\Delta - B)^2 \approx \mathsf{E}\Delta^2 \approx [f'\,(\mu)]^2\,\sigma^2/n \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$.

В случае нескольких неизвестных параметров Н. о. часто осуществляется с помощью метода наименьших квадратов.

Если изучается зависимость между случайными величинами X и Y на основе совокупности n независимых наблюдений, каждое из к-рых есть вектор (X_i, Y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, подчиняющийся исследуемому совместному распределению величин X и Y, то соответствующая Н. о. выполняется с помощью теории корреляции.

При Н. о. приходится делать нек-рые предположения и допущения о характере функциональной зависимости, о распределении случайных ошибок и т. д., поэтому Н. о. должна включать в себя проверку согласия сделанных допущений с результатами использованных и др. наблюдений. См. *Статистических гипотез проверка.*

Лит.: [1] Уиттекер Э., Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, пер. с англ., 2 изд., Л.— М., 1935; [2] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962. *Л. Н. Большев.*

НАВЬЕ — СТОКСА УРАВНЕНИЯ — основные уравнения движения вязкой жидкости, представляющие математическое выражение законов сохранения импульса и массы. Для неустановившегося течения сжимаемой жидкости Н.— С. у. в декартовой системе координат могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{du}{dt} &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\operatorname{div} w\right)\right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right], \\
\rho\frac{dv}{dt} &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\operatorname{div} w\right)\right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right], \\
\rho\frac{dw}{dt} &= Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\operatorname{div} w\right)\right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right], \\
\frac{\partial\rho}{\partial t} &+ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где w — вектор скорости с проекциями u, v, w на соответствующие оси координат x, y, z; p — давление, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости; X, Y, Z — проекции вектора массовой силы K на координатные оси; $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + w\ \operatorname{grad} w$ — субстанциональная производная. При выводе уравнений (1) использован обобщенный закон трения Ньютона, предполагающий, что для движущихся жидкостей и газов напряжения пропорциональны скоростям деформаций. Для исследования сжимаемых течений к уравнениям (1) необходимо добавить уравнение состояния, связывающее между собой давление, плотность и температуру, и уравнение энергии.

Уравнения (1), составляющие основу гидродинамики, впервые были получены Л. Навье [1] и С. Пуассоном [2]

на основе соображений о действии межмолекулярных сил. Б. Сен-Венан [3] и Дж. Г. Стокс [4] вывели эти уравнения, допуская только, что нормальные и касательные напряжения линейно связаны со скоростями деформаций.

Для течений несжимаемой изотермич. жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнения (1) в векторной форме могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} &= \boldsymbol{K} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \boldsymbol{w}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{w} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

При анализе Н.— С. у., как правило, рассматриваются в безразмерной форме, к-рая получается путем отнесения всех величин, входящих в уравнения, к соответствующим характерным величинам. Так, в случае стационарных течений несжимаемой жидкости при отсутствии массовых сил в Н.— С. у. появляется один определяющий безразмерный параметр, наз. *Рейнольдса числом*:

$$\mathrm{Re} = \rho V l/\mu = V l/\nu,$$

где V и l — характерные скорости и линейный размер, ν — кинематическая вязкость.

Для исследования двумерных несжимаемых течений часто используются Н.— С. у. в форме Гельмгольца:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \xi, \\ \Delta \psi &= -\xi, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где ψ — функция тока и ξ — вихрь связаны с проекциями скорости u и v следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Основные краевые задачи для стационарных Н.— С. у. связаны с исследованием течений в замкнутых полостях, каналах, течений со свободными поверхностями, с обтеканием тел, течений в струях и следах за телами. При этом интегрирование Н.— С. у. проводится в областях (конечных или бесконечных), на границе к-рых ставятся условия из соображений физич. характера (условия прилипания или скольжения на поверхности тел, вдува или отсоса на проницаемых поверхностях, условия внешнего потока вдали от обтекаемого тела, условия на свободной границе и др.). Для нестационарных задач помимо граничных условий должны задаваться начальные условия.

Строгий математич. анализ разрешимости краевых задач гидроаэромеханики для Н.— С. у. сжимаемого газа отсутствует (1982). Имеются нек-рые результаты в математич. теории динамики вязкой несжимаемой жидкости (см. *Гидродинамики математические задачи*).

Первоначально усилия исследователей были направлены на отыскание точных решений. Напр., для несжимаемой жидкости имеются точные решения для установившихся течений: в плоском канале при заданном постоянном перепаде давления (течение Пуазёйля); между двумя параллельными плоскими стенками, одна из к-рых покоится, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью (течение Куэтта); в прямолинейной трубе с круглым поперечным сечением при постоянном перепаде давления (течение Хагена — Пуазёйля). Найдены также нек-рые автомодельные решения, среди них: плоскопараллельное (и осесимметричное) течение вблизи критической точки (течение Хоуарта); течения в суживающемся и расширяющемся каналах (течение Гамеля).

Приближенные решения Н.— С. у. основаны на упрощающих предположениях. Здесь сле-

дует отметить решения при очень малых числах Рейнольдса ($Re \ll 1$), соответствующие так наз. ползущим движениям, среди к-рых наиболее известно течение Стокса около шара. Предельный случай очень больших чисел Рейнольдса приводит к теории гидродинамического пограничного слоя. Уравнения пограничного слоя позволили решить большой круг практически важных задач на основе широко разработанных приближенных и численных методов.

Для решения нек-рых классов задач динамики вязких жидкостей и газов разработаны достаточно эффективные алгоритмы, основанные на использовании разностных схем. Напр., для задачи расчета ламинарных течений вязких несжимаемых жидкостей в областях простой формы (или около тел простой формы). Наибольшее распространение здесь получили разностные методы для уравнений в форме (3), хотя для этой системы и имеются трудности, связанные с определением граничных условий для ξ. Первые результаты по решению стационарного варианта системы (3) были получены с помощью простейших явных пятиточечных схем и итерационных методов (см. [6]). Решение стационарных задач динамики вязкой несжимаемой жидкости большей частью основано на использовании метода установления и применении явных и неявных схем для системы (3). Среди явных схем используются двухслойные по времени схемы с симметричной аппроксимацией первых производных центральными разностями и решением второго уравнения из (3) на каждом временном слое с помощью метода Зейделя, а также трехслойная схема, в к-рой конвективные члены аппроксимируются по схеме «крест», а диффузионные — по схеме Дюфорта — Франкеля. С помощью уже этих схем были получены нек-рые результаты при решении стационарных задач о ламинарных двумерных течениях в суживающемся и расширяющемся каналах, в прямоугольной выемке с движущейся крышкой, а также нестационарной задаче обтекания в канале плоской пластины, расположенной перпендикулярно к направлению потока.

Неявные схемы, как правило, основаны на применении метода дробных шагов (см. [8]). Общая структура таких схем для уравнения (3) может быть представлена, напр., в виде

$$\frac{\xi^{n+1/2}-\xi^n}{0{,}5\tau} = L_{1\xi}\xi^{n+1/2} + L_{2\xi}\xi^n,$$

$$\frac{\xi^{n+1}-\xi^{n+1/2}}{0{,}5\tau} = L_{1\xi}\xi^{n+1/2} + L_{2\xi}\xi^{n+1},$$

$$\frac{\psi^{s+1/2,\,n+1}-\psi^{s,\,n+1}}{0{,}5\sigma} + L_{1\psi}\psi^{s+1/2,\,n+1} + L_{2\psi}\psi^{s,\,n+1} = -\xi^{n+1},$$

$$\frac{\psi^{s+1,\,n+1}-\psi^{s+1/2,\,n+1}}{0{,}5\sigma} + L_{1\psi}\psi^{s+1/2,\,n+1} + L_{2\psi}\psi^{s+1,\,n+1} = -\xi^{n+1},$$

где $L_{1\xi}$, $L_{2\xi}$, $L_{1\psi}$, $L_{2\psi}$ — разностные одномерные операторы:

$$L_{1\xi} = \frac{\delta^2\xi}{\delta x^2} - \frac{\delta\psi}{\delta y}\frac{\delta\xi}{\delta x}, \quad L_{2\xi} = \frac{\delta^2\xi}{\delta y^2} + \frac{\delta\psi}{\delta x}\frac{\delta\xi}{\delta y},$$

$$L_{1\psi} = -\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}, \quad L_{2\psi} = -\frac{\delta^2\psi}{\delta y^2}.$$

В этих формулах τ — временной шаг, σ — итерационный параметр, s, $s+1/2$, $s+1$ — итерационные индексы при решении уравнения Пуассона из (3) на $(n+1)$-временном слое итерационным методом; $\frac{\delta^2}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2}{\delta y^2}$, $\frac{\delta}{\delta x}$, $\frac{\delta}{\delta y}$ — разностные операторы, аппроксимирующие соответствующие вторые и первые производные. Первое уравнение из (3) используется для нахождения значе-

ний ξ, а второе — значений ψ на последующем временном слое. Аппроксимация вторых производных, как правило, симметричная, а аппроксимация первых производных в уравнении для ξ проводится или симметричными разностями, или односторонними разностями против потока с учетом знака скорости. Хорошо зарекомендовала себя схема в [9] с применением монотонной аппроксимации (см. [10]). Эта схема для первого уравнения (3) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\xi^{n+1}-\xi^n}{\tau}+\frac{u-|u|}{2}\left(\frac{\delta\xi}{\delta x}\right)^+ + \frac{u+|u|}{2}\left(\frac{\delta\xi}{\delta x}\right)^- + \\ + \frac{v-|v|}{2}\left(\frac{\delta\xi}{\delta y}\right)^+ + \frac{v+|v|}{2}\left(\frac{\delta\xi}{\delta y}\right)^- = \\ = -\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{1+\frac{|u|}{2}h}\frac{\delta^2\xi}{\delta x^2}+\frac{1}{1+\frac{|v|}{2}l}\frac{\delta^2\xi}{\delta y^2}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где h и l — шаги сетки по x и y,

$$\left(\frac{\delta\xi}{\delta x}\right)^+ = \frac{\xi^{n+1}_{i+1,\,j}-\xi^{n+1}_{i,\,j}}{h},\quad \left(\frac{\delta\xi}{\delta x}\right)^- = \frac{\xi^{n+1}_{i,\,j}-\xi^{n+1}_{i-1,\,j}}{h},$$

$$\left(\frac{\delta\xi}{\delta y}\right)^+ = \frac{\xi^{n+1}_{i,\,j+1}-\xi^{n+1}_{i,\,j}}{l},\quad \left(\frac{\delta\xi}{\delta y}\right)^- = \frac{\xi^{n+1}_{i,\,j}-\xi^{n+1}_{i,\,j-1}}{l}.$$

Разностные уравнения (4) обычно приводятся к трехдиагональному виду и совместно с соотношениями, аппроксимирующими граничные условия, решаются методом прогонки. При решении стационарных задач методом установления может применяться либо поочередное решение уравнений (4) (без внутренних итераций для определения ψ), либо одновременное решение соответствующих уравнений из (4) для совместного нахождения ξ и ψ с помощью векторной прогонки. Трудности, связанные с постановкой граничных условий для уравнений (3), заключаются в том, что обычные граничные условия прилипания на твердых стенках для Н.— С. у. дают условия только для ψ. Для численного решения уравнения для ξ формально требуют граничные условия для вихря. Эти условия могут быть получены на каждом временном слое либо приближенно на границе области, либо путем интегрирования уравнения для ξ только в области, расположенной внутри основной области интегрирования [9].

Для исследования двумерных течений уравнения в форме (2) используются реже и, как правило, с некоторой регуляризацией уравнения неразрывности. Вариационно-сеточные методы, и в частности метод конечных элементов, нашли свое применение для решения уравнений динамики вязкой жидкости в форме (2) и (3).

С помощью разностных методов исследовались разнообразные задачи течения вязких несжимаемых жидкостей. Среди них задачи обтекания эллиптического и кругового цилиндра (в том числе вращающегося), пластины конечной толщины (в том числе под углом атаки), цилиндрич. торца, капли, плоской ступени и др. Изучались также течения в каверне, в плоском и цилиндрич. канале, в канале с препятствиями на стенках, течения со свободной поверхностью, течения естественной, вынужденной и смешанной конвекции.

Применение разностных методов для расчета течений вязкого сжимаемого газа на основе полных Н.— С. у. сопряжено с нек-рыми дополнительными трудностями по сравнению с расчетами течений несжимаемой вязкой жидкости. Это связано с тем, что в течениях сжимаемого газа существуют не только области пограничных слоев, но и другие области больших градиентов искомых функций, к-рые соответствуют ударным волнам и волнам разрежения в невязких течениях газа. Сложность самой системы Н.— С. у. для сжимаемого вязкого газа предъ-

является повышенные требования к быстродействию и памяти ЭВМ. Использование явных схем в этом случае приводит к более простым алгоритмам. Примером явной схемы, хорошо зарекомендовавшей себя для расчета стационарных течений методом установления, является схема, к-рая для простого модельного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (5)$$

может быть записана в виде

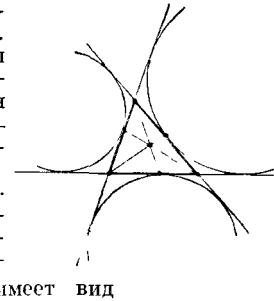
$$\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + \nu\frac{u_{m-1}^n - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}.$$

Эта схема аппроксимирует (5) на гладком установившемся решении с порядком $O(h^2)$ и устойчива при $\tau < h/a$. Условие устойчивости не зависит от ν. Это означает, что при применении этой схемы к Н.— С. у. условие устойчивости не зависит от числа Рейнольдса. Тем не менее ограничение на итерационный шаг по времени для явных схем является существенным. Неявные схемы, как правило, не обладают такими ограничениями и абсолютно устойчивы для соответствующих линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Неявные схемы для расчета двумерных течений вязкого газа используются в сочетании с методом дробных шагов. Построены (1982) различные разностные схемы метода переменных направлений: с полной и неполной аппроксимацией на промежуточных слоях, дивергентные и недивергентные (см. [11]), схемы повышенного порядка точности (выше второго) относительно шагов сетки по пространству (см. [12]). Численное моделирование течений вязкого газа на основе Н.— С. у. связано с расчетом течений сложной структуры и с использованием достаточно подробных сеток, что невозможно в силу ограниченности памяти ЭВМ без применения метода взаимно перекрывающихся областей (см. [13]). Разностные методы решения Н.— С. у. применялись для исследования большого числа задач динамики вязкого газа. Среди них задачи — сверхзвукового обтекания затупленных тел (сферы, торца кругового цилиндра), составных тел (сфера — конус, сфера — цилиндр), клина, передней кромки плоской пластины. Рассмотрены также течения в следах за телами конечных размеров, течения в соплах и воздухозаборниках, течения в полости при внешнем до- и сверхзвуковом потоке, исследовалось взаимодействие пограничного слоя с ударной волной, структура ударной волны в плазме и др. задачи. Перечисленные течения предполагались, как правило, ламинарными.

Лит.: [1] Navier, «Mém. Acad., sci.», 1827, t. 7, p. 375—94; [2] Poisson S. D., «J. Ecole polytechn.», 1831, t. 13, p. 1—174; [3] Saint-Venant, «C. r. Acad. sci.», 1843, t. 17; [4] Stokes G. G., «Trans. Cambr. Phil. Soc.», 1849, v. 8, p. 287—319; [5] Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя, пер. с нем., М., 1974; [6] Том А., Эйплт К., Числовые расчеты полей в технике и физике, пер. с англ., М.— Л., 1964; [7] Брановская Н. Ю., Кускова Т. В., Чудов Л. А., в кн.: Вычислительные методы и программирование, в. 11, М., 1968, с. 3—18; [8] Яненко Н. Н., Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; [9] Полежаев В. И., Грязнов В. Л., «Докл. АН СССР», 1974, т. 219, № 2, с. 301—04; [10] Самарский А. А., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1965, т. 5, с. 548—51; [11] Ковеня В. М., Яненко Н. Н., Метод расщепления в задачах газовой динамики, Новосиб., 1981; [12] Толстых А. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1978, т. 18, № 1, с. 139—53; [13] Кокошинская Н. С., Павлов Б. М., Пасконов В. М., Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом, М., 1980; [14] Темам Р., Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ, пер. с англ., М., 1981; [15] Численное исследование современных задач газовой динамики, М., 1974; [16] Роуч П. Дж., Вычислительная гидродинамика, пер. с англ., М., 1980; [17] Reyret R., Viviand H., «Lect. Notes Comput. Sci.», 1974, № 11, p. 160—84; [18] Burggraf O. R., «Lect. Notes Phys.», 1976, [№ 59], p. 52—64.

В. М. Пасконов.

НАГЕЛЯ ТОЧКА — точка пересечения прямых (см. рис.), соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с внеописанными окружностями. Названа по имени Х. Нагеля (Ch. Nagel, 1836).



А. Б. Иванов.

НАГРУЖЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение, которое в одномерном случае имеет вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds - \lambda \sum_{j=1}^{m} K_1(x, s_j)\varphi(s_j) = f(x), \qquad (1)$$

где φ — искомая, f — заданная в $[a, b]$ непрерывные функции, $s_j \in [a, b]$, $j = 1, \ldots, m$, — заданные фиксированные точки, K, K_1 — заданные непрерывные в квадрате $[a, b]\times[a, b]$ функции. В том случае, когда

$$K_1(x, s_j) = a_j K(x, s_j),$$

где a_j — положительные постоянные, уравнение (1) можно представить в виде

$$\varphi(x) - \lambda {}^{*}\!\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x), \quad x \in [a, b], \qquad (2)$$

где новый символ интегрирования от произвольной конечной интегрируемой функции ψ определяется по формуле (см. [1]):

$${}^{*}\!\int_a^b \psi(s)\,ds = \int_a^b \psi(s)\,ds + \sum_{j=1}^{m} a_j \psi(s_j).$$

Для уравнения (2) остается в силе теория *Фредгольма уравнений*, а также в случае симметричного ядра теория *интегральных уравнений с симметричным ядром*.

В случае многомерных Н. и. у. искомая функция может участвовать под интегралами, к-рые распространены на многообразиях различных размерностей. Напр., в двумерном случае Н. и. у. может иметь вид

$$\varphi(x) - \lambda \iint_D K_1(x, y)\varphi(y)\,d\sigma_y + \lambda \int_\Gamma K_2(x, y)\varphi(y)\,ds_y + \lambda \sum_{j=1}^{m} K_3(x, y_j)\varphi(y_j) = f(x), \quad x \in D,$$

где D — нек-рая область на плоскости, Γ — ее граница, y_j — фиксированные точки, принадлежащие замкнутой области $D \cup \Gamma$. Это уравнение также можно записать в обычной форме

$$\varphi(x) - \lambda \iint_{D\cup\Gamma} K(x, y)\varphi(y)\,d\omega_y = f(x),$$

если соответствующим образом определить функцию K и элемент объема $d\omega_y$ (см [4]), причем и в этом случае остается в силе теория интегральных уравнений Фредгольма.

Лит.: [1] Kneser A., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1914, t. 37, p. 169—97; [2] Lichtenstein L., «Studia math.», 1931, t. 3, p. 212—25; [3] Гюнтер Н. М., там же, 1933, t. 4, p. 8—14; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 6 изд., т. 4, ч. 1, М., 1974. *Б. В. Хведелидзе.*

НАДГРАФИК функции — подмножество в декартовом произведении $\mathbb{R}\times X$, состоящее из точек (α, x), лежащих «над» графиком функции $f : X \to \mathbb{R}$, определенной на нек-ром множестве X и принимающей значения в расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$; Н. иногда наз. эпиграфом и обозначается epi f:

$$\operatorname{epi} f = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R}\times X \mid \alpha \geqslant f(x)\}.$$

Проекция Н. функции f на X наз. эффективной областью f и обозначается $\operatorname{dom} f$:

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}.$$

Функция f наз. собственной, если

$$f(x) > -\infty, \ \forall x, \text{ и } \operatorname{dom} f \neq \varnothing.$$

Выпуклые функции $f: X \to \mathbb{R}$, определенные на векторном пространстве X, характеризуются тем, что $\operatorname{epi} f$ — выпуклое подмножество в $\mathbb{R} \times X$; замкнутые функции $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, определенные на топологич. пространстве X, характеризуются тем, что $\operatorname{epi} f$ — замкнутое множество.

В. М. Тихомиров.

НАДЕЖНОСТИ ТЕОРИЯ — инженерное направление применений математич. методов, в к-ром разрабатываются: а) приемы расчета надежности технич. систем, б) методы оценки надежности изготовленных изделий, в) способы оптимизации и повышения эффективности функционирования сложных технич. систем и составляющих их элементов в процессе эксплуатации (включая в это понятие также хранение и перевозку). В Н. т. вводятся количественные показатели надежности на основе построения соответствующих математич. моделей. При этом учитываются такие факторы, как назначение технич. системы, условия, в к-рых ей придется работать, а также экономич. факторы. В Н. т. используются разнообразные математич. методы, но особое место среди них занимают теория вероятностей и математич. статистика. Это обусловлено тем, что события, описывающие количественные и качественные показатели надежности (отказ, длительность безотказной работы, длительность ремонта, стоимость восстановления и т. п.), случайны. Широкое применение находят также методы теории оптимизации, математич. логики и др.

Понятие надежности включает в себя: 1) безотказность, 2) долговечность, 3) приспособленность к ремонту. Нередко, однако, решающее значение имеет лишь первая характеристика. Так, для всех технич. устройств одноразового использования третье свойство не требуется совсем.

Основным понятием Н. т. является понятие отказа, т. е. постепенной или внезапной потери устройством работоспособности. Формализованное описание этого понятия базируется на следующей общей схеме построения математич. моделей Н. т. Предполагается, что состояние технич. системы определяется точкой x в фазовом пространстве $X = \{x\}$ состояний. Эволюция состояний этой системы во времени описывается процессом $x(t)$, вообще говоря, случайным. В X выделяется подмножество X_0 состояний, соответствующих наступлению отказа. Безотказность — свойство системы непрерывно сохранять работоспособность. Количественно безотказность измеряется временем от данного момента до момента попадания в X_0. Долговечность — свойство технич. системы сохранять работоспособность с необходимыми перерывами для ремонтов и технич. обслуживания при условии экономич. целесообразности дальнейшей эксплуатации. Ремонтоприспособленность технич. системы определяется удобством ее технич. обслуживания и проведения ремонтных работ; количественно измеряется затратами или же временем на поддержание технич. системы в работоспособном состоянии.

Важнейшим количественным показателем надежности является вероятность безотказной работы $R(t)$ технич. системы в течение времени t, т. е. вероятность того, что за время t процесс $x(t)$ не достигнет подмножества X_0. Функция распределения наступления отказа до момента t равна $F(t) = 1 - R(t)$. Если существует плотность распределения $f(t) = F'(t)$, то функция $\lambda(t) = f(t)/R(t)$ наз. функцией интен-

сивности отказа. Вероятностный смысл $\lambda(t)$ состоит в том, что это есть условная плотность распределения отказа при условии, что технич. система проработала безотказно время t. Таким образом, $\lambda(t)dt$ является вероятностью того, что система откажет в промежутке времени $(t, t+dt)$ при условии, что она не отказала до момента t.

В Н. т. используются различные классы функций $R(t)$. Если $-\ln R(t)$ есть выпуклая функция, то функция распределения наступления отказов наз. функцией распределения с возрастающей интенсивностью отказа; класс таких функций распределения обозначается ВФИ. Если же $-\ln R(t)$ есть вогнутая функция, то функция распределения наступления отказа наз. функцией распределения с убывающей интенсивностью отказа; соответствующий класс функций распределения обозначается УФИ. В Н. т. используются и другие непараметрич. классы функций распределения, напр. класс ВФИС (возрастающая функция интенсивности отказа в среднем): для распределений этого класса функция

$$\frac{1}{t}\int_0^t \lambda(s)\,ds$$

возрастает; класс НЛС (новое лучше старого): функции распределения этого класса удовлетворяют условию

$$F(t+s)\geqslant F(t)F(s)$$

для любых t, $s>0$, т. е. распределение отказов при условии, что технич. система уже проработала время t выше, чем безусловное. Это и означает, что для проработавшей технич. системы отказы поступают чаще, чем для новой. Для нек-рых классов функций распределения доказаны теоремы об инвариантности функции распределения наступления отказов при образовании определенных структур (последовательного или параллельного соединения элементов и т. д.). Широкое применение в Н. т. находят модели, в к-рых функция $R(t)$ задается параметрически. В качестве функций распределения внезапных отказов часто используется экспоненциальное распределение

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},\ t>0,\ F(t)=0,\ t\leqslant 0,$$

распределение Вейбулла

$$F(t)=1-\exp[-(at)^p],\quad t>0,\ F(t)=0,\ t<0,$$

и др.

Для увеличения надежности технич. систем используются различные приемы: резервирование, профилактич. осмотры и ремонты, эксплуатация при пониженных нагрузках. Под резервированием понимается метод повышения надежности путем введения избыточности того или иного рода — дополнительных элементов, узлов, устройств, к-рые не требуются для функционирования технич. системы, дополнительного времени на выполнение работы, использование избыточной информации и пр. В связи с этим рассматриваются следующие типы резервирования: структурное (дополнительные элементы), временное (дополнительное время), информационное, функциональное (использующее способность элементов технич. системы выполнять дополнительные функции), нагрузочное. Структурный резерв может находиться в трех следующих состояниях: а) ненагруженном, б) нагруженном, в) облегченном. В нагруженном резерве резервный элемент несет такую же нагрузку, как и основной (рабочий), и интенсивность отказов резервного элемента та же, что у основного. В ненагруженном резерве элемент совсем не несет нагрузки, что соответствует отсутствию отказов. В облегченном резерве элемент несет нагрузку меньшую, чем основной, поэтому для него интенсивность отказов меньше,

чем для основного. Значительное увеличение надежности дает восстановление отказавших элементов — р е з е р в и р о в а н и е с в о с с т а н о в л е н и е м. Если элемент имеет один резервный, находящийся в ненагруженном состоянии, функция распределения длительности безотказной работы каждого из элементов есть $F(t)$, функция распределения длительности восстановления есть $G(t)$, переключатели абсолютно надежны и переключение на работу, на восстановление и в резерв происходит мгновенно, то для длительности безотказной работы дублированной системы (т. е. от начала работы до момента, когда оба элемента окажутся в состоянии отказа) имеет место формула

$$T = a\left(1+\frac{1}{1-\gamma}\right),$$

где

$$a = \int_0^\infty x\,dF(x), \quad \gamma = \int_0^\infty G(x)\,dF(x).$$

Исследование резервированных систем явилось источником ряда чисто математич. исследований — развитие теории линейчатых и полумарковских процессов, предельных теорем для сумм случайного числа случайных величин и др.

П р о ф и л а к т и ч е с к о е о б с л у ж и в а н и е применяется в моменты, когда технич. система еще работоспособна, но имеется основание считать, что появилась повышенная вероятность отказа. Обычно задачи профилактики связаны с решением вопросов оптимизации: как выбрать моменты начала профилактич. обслуживания, чтобы суммарные потери на проведение профилактики и на ущерб от возможного отказа до моментов профилактик за данный промежуток времени T были минимальны; как организовать профилактич. обслуживание, чтобы вероятность безотказной работы за данный промежуток времени была максимальной и т. д. Для нек-рых функций распределения длительностей безотказной работы системы, в том числе для всех распределений класса УФИ, профилактика не увеличивает среднего времени безотказной работы. У функций распределения класса УФИ $\lambda(t)$ является невозрастающей функцией. К ним, в частности, относится функция распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0,\ F(x) = 0,\ x \leqslant 0,$$

при любом постоянном $\lambda > 0$. Ряд оптимизационных задач возникает в связи с поиском неисправностей в сложной системе: как производить поиск неисправности, чтобы затратить на ее обнаружение в среднем наименьшее время; в какой последовательности для этой цели следует проверять работоспособность составляющих систему узлов и элементов и т. д.

Существенное место в Н. т. занимают задачи получения статистич. выводов о функции распределения наступления отказа на основе данных о результатах стендовых испытаний. Простейшие математич. модели с т е н д о в ы х и с п ы т а н и й следующие. Пусть N — число ячеек для испытаний изделий. В процессе испытаний отказавшие изделия не заменяются новыми (класс испытаний Б) или заменяются новыми (класс испытаний В). Продолжительность испытаний определяется правилом остановки, напр. заданием предельного времени испытаний T, предельного числа r наблюдаемых отказов и др. Существенной характеристикой испытаний является с у м м а р н а я н а р а б о т к а $S(t)$, т. е. сумма времен безотказной работы всех испытываемых изделий на интервале $(0, t)$. При испытаниях п о п л а н у $[NБ(r)]$ испытывают N изделий, к-рые при отказах не заменяются новыми. Наблюдения продолжаются до r-го отказа. По п л а н у $[NБ(N)]$ испытания продолжаются до отказа всех N испытываемых изделий, при использовании п л а н а $[NБ(r, T)]$

N изделий испытываются до момента $t=\min(t_r, T)$, где t_r — момент отказа r-го отказавшего объекта. По моментам отказов $t_1, \ldots, t_r$ требуется проверить гипотезы о виде функции распределения наступления отказа, напр. о ее принадлежности классу ВФИ или УФИ и др.; требуется оценить ее параметры. Для оценки функции интенсивности отказа используются методы получения изотонных оценок. При испытаниях по плану $[NБ(r)]$ точечная несмещенная оценка параметра λ экспоненциального распределения имеет вид

$$\hat{\lambda}=(r-1)/S(t_r),$$

где суммарная наработка

$$S(t_r)=t_1+\ldots+t_r+(N-r)\,t_r.$$

Статистич. задачи стендовых испытаний разнообразны и требуют привлечения таких разделов математич. статистики, как теория оценивания и теория проверки статистич. гипотез.

Осложняющим обстоятельством является зависимость вероятности безотказной работы от режима ε проведения испытаний:

$$R(t)-R(t,\ \varepsilon).$$

Более тяжелый режим (повышение температуры, амплитуды вибраций и т. п.) как бы приближает моменты наступления отказов. Проблема пересчета показателей надежности с одних режимов ε на другие ε^* является одной из актуальных задач Н. т. Применяются планы испытаний, в к-рых режимы меняются с течением времени (примерами могут служить планы со ступенчатым нагружением). Разрабатываются математич. модели пересчета результатов ускоренных испытаний на нормальные режимы. Один из подходов к пересчету основан на гипотезе, согласно к-рой испытания в течение времени t_1 в режиме ε_1 эквивалентны испытаниям в режиме ε_2, если время t_2 выбрано из условия $R(t_1,\ \varepsilon_1)=R(t_2,\ \varepsilon_2)$.

В Н. т. проводится расчет показателей функционирования систем, составленных из компонент, не являющихся абсолютно надежными. Одна из задач — оценка надежности системы по результатам стендовых испытаний компонент. Пусть система представлена в виде последовательной цепочки компонент разных типов (резервирования нет). Тогда нижняя γ-доверительная граница вероятности безотказной работы системы $R(t)$, все компоненты к-рой испытывались время t и отказы не наблюдались, совпадает с нижней γ-доверительной границей вероятности безотказной работы компонент того типа, к-рые испытывались в наименьшем числе.

Одним из примеров оптимизации в Н. т. являются задачи оптимального резервирования. Пусть $R_i(t)$ — вероятности безотказной работы элементов i-го типа, x_i — их число. Вероятность безотказной работы системы

$$R(t)=\prod_{i=1}^{m}(1-(1-R_i(t))^{x_i}).$$

Требуется подобрать такие числа x_i, $i=1, 2, \ldots, m$, чтобы $R(t)$ было максимальным и были выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij}x_i \leqslant w_i,\ \ j=1, \ldots, l,$$

к-рые трактуются как ограничения на суммарный вес, объем, общую стоимость элементов и т. п.

Расчет количественных показателей надежности систем с учетом возможности восстановления отказавших компонент во многом аналогичен расчету систем в *массового обслуживания теории*. Моментам поступления заявок в систему соответствуют моменты отказов, а длительностям обслуживания — длительности восста-

новления. Простейшая математич. модель соответствует процессу восстановления (см. *Восстановления теория*). Поскольку основные математич. модели Н. т., учитывающие восстановление отказавших элементов, не допускают явных аналитич. решений, в Н. т. интенсивно развивается направление, связанное с использованием асимптотич. методов. При этом предполагается, что восстановление является «быстрым», т. е. заданные показатели восстановления (напр., среднее время) становятся бесконечно малыми по отношению к аналогичным показателям интервалов безотказной работы.

Лит.: [1] Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А., Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем, М., 1971; [2] Барлоу Р., Прошан Ф., Математическая теория надежности, пер. с англ., М., 1969; [3] Barlow R. E., Proschan F., Statistical theory of reliability and lifetesting: Probability models., N. Y., 1975; [4] Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965; [5] Коваленко И. Н., Исследования по анализу надежности сложных систем, К., 1975; [6] Козлов Б. А., Ушаков И. А., Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики, М., 1975; [7] Шор Я. Б., Статистические методы анализа и контроля качества и надежности, М., 1962. *Ю. К. Беляев, Б. В. Гнеденко.*

НАДЕЖНОСТЬ И КОНТРОЛЬ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ, проблемы надежности управляющих систем,— одно из направлений теории *управляющих систем*, к-рое изучает управляющие системы, подверженные помехам.

Пусть $\mathfrak{U}=\{U\}$ — нек-рый класс управляющих систем (у. с.) и пусть имеется источник помех, или источник неисправностей, к-рый, воздействуя на у. с. U, переводит ее в у. с. $U_1, \ldots, U_r$ из нек-рого класса $\mathfrak{U}'$. Если допустить, что источник помех может также сохранять у. с. неизменной, напр. $U_1=U$, то $\mathfrak{U}\subseteq\mathfrak{U}'$. Пусть каждая у. с. из $\mathfrak{U}'$ вполне определяется своей схемой Σ, тогда воздействие источника помех сводится к воздействию на ее схему Σ. Источник неисправностей преобразует схему, что может проявляться: а) путем нарушения работы элементов, т. е. изменением элементов; б) путем изменения соединений элементов и т. п. В результате действия источника неисправностей исходная схема Σ у. с. U переходит в «неисправные» состояния $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$, где $\Sigma_1=\Sigma$, определяющие соответственно у. с. $U_1, \ldots, U_r$. Пусть этим схемам соответствуют функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$, наз. также функциями неисправностей (здесь $\Phi_1=\Phi$ характеризует функционирование у. с. U). Обычно источник неисправностей дополнительно характеризуется либо распределением вероятностей ошибок, либо ограничениями на возможное число элементарных неисправностей.

Проблемы надежности рассматриваются в основном для трех классов у. с.: *схем из функциональных элементов*, *контактных схем* и *автоматов*.

Пусть $\mathfrak{U}$ — класс схем из функциональных элементов, принадлежащих данному базису Б, где $\text{Б}=\text{Б}_1\cup\text{Б}_2$ и $\text{Б}_1=\{F_1, \ldots, F_s\}$. В случае, если источник неисправностей воздействует только на элементы схемы, то он преобразует элементы F_i из Б_1, $i=1, \ldots, s$, в элементы с таким же числом входов, как и F_i, но, быть может, с иным функционированием, а элементы из Б_2 оставляет неизменными. Таким образом, Б_1 состоит из ненадежных, а Б_2 — из надежных элементов. В этом случае источник можно характеризовать вероятностями $p_1, \ldots, p_s$ выхода из строя соответственно элементов $F_1, \ldots, F_s$. Напр., Б_1 состоит из инверторов, конъюнкторов и дизъюнкторов, а Б_2 — из элементов голосования, реализующих соответственно функции $\bar{x}$, $x_1\&x_2$, $x_1\vee x_2$ и $h(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3$. При этом можно положить, что $p_1=p_2=p_3=p$ — вероятность выхода из строя элементов из Б_1.

В случае, когда $\mathfrak{U}$ — класс контактных схем, рассматривают источник неисправностей, к-рый в качестве элементарных неисправностей дает либо короткое

замыкание контакта, либо разрыв контакта. При этом дополнительно предполагают, что для контактных схем, реализующих функции от n переменных, возможно не более $m(n)$ элементарных повреждений.

В проблематике Н. и к. у. с. можно выделить три направления.

I. Построение надежных схем из ненадежных элементов. Это направление развито для двух классов у. с.: контактных схем и схем из функциональных элементов. В случае схем из функциональных элементов схема Σ характеризуется пек-рой вероятностью p тех случаев, когда она функционирует неправильно. Здесь рассматривают два основных вопроса.

1) Какими свойствами должен обладать базис Б, чтобы для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и любого $\varepsilon>0$ можно было построить схему Σ, реализующую f и такую, что вероятность p ее неправильной работы была бы меньше ε, т. е. каждая булева функция допускала бы сколь угодно надежную реализацию.

Установлено, что существуют базисы, в к-рых для любой функции возможна сколь угодно надежная реализация. Примером такого базиса является базис Б (см. выше): $Б_1$ состоит из инверторов, конъюнкторов и дизъюнкторов с вероятностью ошибки $p<1/3$, а $Б_2$ состоит из абсолютно надежного элемента голосования. Найдены необходимые и достаточные условия на базис Б, при к-рых возможно построение сколь угодно надежных схем для всех булевых функций.

2) Построение метода синтеза минимальных (или в том или ином смысле близких к минимальным) схем, реализующих булевы функции, ненадежность к-рых не превосходит заданной величины ε. Оказывается (напр., для предыдущего базиса с $p<1/9$), что можно построить метод синтеза схем, к-рый для большинства булевых функций и данного ε дает асимптотически (по n) минимальные схемы. В частности, для функции Шеннона $L(n, \varepsilon)$, выражающей минимальное число элементов из Б (см. пример выше), достаточное для реализации любой булевой функции от n переменных с ненадежностью, не большей ε, получена асимптотика

$$L(n, \varepsilon) \sim \frac{1}{2}\frac{2^n}{n}.$$

II. Построение самокорректирующихся схем. Это направление наиболее полно изучено для двух классов у. с.— контактных схем и схем из функциональных элементов. Здесь источник неисправностей характеризуется ограничениями на число элементарных повреждений. Считается, что в пределах рассмотрений дальнейших изменений в схеме не происходит. Схема Σ, реализующая функцию Φ, наз. **самокорректирующейся** относительно данного источника неисправностей, если $\Phi_i=\Phi$, $i=1, \ldots, r$. Другими словами, самокорректирующаяся схема функционирует правильно, несмотря на воздействие источника неисправностей. Напр., контактная схема на рис. 1, реализующая функцию $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, является самокорректирующейся относительно источника, вызывающего не более одного разрыва контакта.

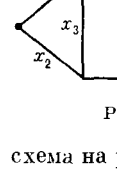


Рис. 1.

Основными задачами этого направления являются: 1) выяснение условий, при к-рых существуют самокорректирующиеся схемы, и 2) разработка методов синтеза минимальных (или в том или ином смысле близких к минимальным) самокорректирующихся схем. Ниже показано решение этих задач на примере контактных схем с источником неисправностей, вызывающим не более $m(n)$ замыканий и разрывов.

Оказывается, что для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить самокорректирующуюся от-

носительно этого источника неисправностей схему. Для этого достаточно взять любую контактную схему Σ, реализующую f, и в ней каждый контакт x^σ заменить на подсхему, состоящую из $m+1$ последовательно соединенных одинаковых блоков, каждый из к-рых является параллельным соединением $m+1$ экземпляров данного контакта x^σ. Такую схему наз. тривиальной самокорректирующейся схемой. Построенная самокорректирующаяся схема будет в $(m+1)^2$ раз сложнее исходной. Предыдущий пример (рис. 1) показывает, что существуют и нетривиальные самокорректирующиеся схемы.

Задача построения самокорректирующихся схем — специальная задача синтеза у. с. с дополнительными требованиями. Главный результат здесь состоит в том, что для большинства булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить самокорректирующуюся схему (относительно нек-рого класса источников), сложность к-рой асимптотически (при $n \to \infty$) равна сложности минимальной схемы, реализующей f без требования самокоррекции. Здесь показано, что при нек-рых ограничениях на порядок роста $m(n)$ имеет место следующая асимптотика для функции Шеннона

$$L_m(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

III. Контроль управляющих систем. Это направление наиболее полно изучено для трех классов у. с.: контактных схем, схем из функциональных элементов и автоматов. Рассмотрение проблем контроля у. с. предполагает: 1) наличие источника неисправностей, к-рый, совершив воздействие на у. с., в течение нек-рого промежутка удерживает неисправное состояние исходной у. с. и не производит других повреждений; 2) задание цели контроля. Последняя определяется как распознавание нек-рого свойства данной у. с. Напр., выяснение, является ли данная у. с. исправной или нет (задача о проверке), или, в случае, если у. с. неисправна, нахождение неисправности (задача о диагностике); 3) фиксацию средств контроля. Контроль может происходить либо без вмешательства в схему, либо допускается возможность вмешательства. Напр., замена элементов на эталонные, перестановка однотипных блоков, использование дополнительных контрольных точек в схеме и т. п. Средства контроля включают в себя также процедуру получения информации о контролируемом объекте. Ими являются эксперименты, к-рые делятся на безусловные и условные. В безусловных экспериментах последовательности, подаваемые на вход контролирующего устройства, определяются заранее и не зависят от последовательности на его выходе. В условных экспериментах каждый последующий символ входной последовательности может выбираться в зависимости от символов, появившихся на выходе в предшествующие моменты времени.

Совокупность экспериментов, позволяющая распознать данное свойство, наз. тестом. Так как обычно существует много различных тестов, распознающих требуемое свойство, то на множестве тестов вводят меру сложности и ищут тест, имеющий минимальную сложность. Основная задача состоит здесь в том, чтобы для каждого свойства уметь строить минимальные или близкие к ним тесты. Эта задача является частью более общей проблемы — построения компактных алгоритмов распознавания тех или иных свойств.

Проследим решение этих задач на примере контактных схем и схем из функциональных элементов для случая, когда нет вмешательства в схему. Исходным пунктом здесь являются функции неисправностей $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ схемы Σ, реализующей Φ, причем $\Phi_1 = \Phi$. При этом возможен случай $\Phi_i = \Phi_j$ для нек-рых пар (i, j), что означа-

ет неразличимость i-й и j-й неисправностей. Таким образом, множество функций $\{\Phi_i\}$ разбивается на классы эквивалентности $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ такие, что Φ_i и Φ_j принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $\Phi_i = \Phi_j$, причем Φ_1 принадлежит классу φ_1. Неисправности, приводящие к функциям из одного класса, неразличимы. Классы $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ приводят к таблице функций неисправностей.

Пример. Контактная схема (рис. 2) реализует функцию

$$\Phi \quad \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3,$$

источник помех вызывает не более одного разрыва. Здесь $\Phi_1 - \Phi_2$, $\Phi_3 - \Phi_4$, $\Phi_5 = \Phi_6$, $\Phi_7 = \Phi_8$, $\Phi_9 = \Phi_{10}$ и $\Phi_{11} = \Phi_{12}$. Таким образом, имеем семь классов: $\varphi_1 = \{\Phi\}$, $\varphi_2 = \{\Phi_1, \Phi_2\}$, ..., $\varphi_7 = \{\Phi_{11}, \Phi_{12}\}$, к-рые дают таблицу функций неисправностей (см. таблицу). Свойство, подлежащее распознаванию, обычно задают через подмножество $\mathfrak{N}$ пар (i, j) номеров классов функций неисправностей, к-рые требуется отличать. Если, напр., $\mathfrak{N} = \{(1, i)\}$, $i = 2, \ldots, l$, то свойство выражает отличимость исправной схемы от любого неисправного состояния (задача проверки). Если $\mathfrak{N} = \{(i, j)\}$, $i \neq j$, $1 \leqslant i, i \leqslant l$, то требуется уметь отличать каждое состояние схемы от любого другого (задача о диагностике). Наконец, если $\mathfrak{N} = \{(i, j)\}$ и $1 \leqslant i \leqslant l_0 < j \leqslant l$, то имеют дело с задачей о диагностике «блока», т. е. с задачей выяснения, в какой части схемы находится поврежденный элемент.

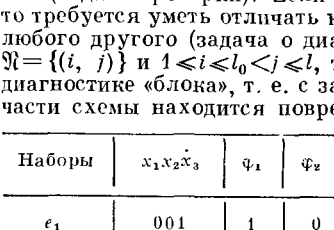


Рис. 2.

Наборы	$x_1 x_2 x_3$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
e_1	001	1	0	1	1	1	1	0
e_2	011	1	0	0	1	1	1	1
e_3	010	1	1	0	0	1	1	1
e_4	110	1	1	1	0	0	1	1
e_5	100	1	1	1	1	0	0	1
e_6	101	1	1	1	1	1	0	0
e_7	000	0	0	0	0	0	0	0
e_8	111	0	0	0	0	0	0	0

Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ — множество наборов, на к-рых определены функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$. Совокупность наборов $T = \{e\}$ из $\{e_1, \ldots, e_k\}$ наз. тестом для данной таблицы функций неисправностей относительно подмножества $\mathfrak{N}$, если для любой пары (i, j) из $\mathfrak{N}$ существует набор e из T такой, что $\varphi_i(e) \neq \varphi_j(e)$. Тест T наз. минимальным, если он содержит наименьшее число наборов. Тест T наз. тупиковым, если при удалении любого набора e из T получается подмножество наборов, не являющееся тестом. Множество $\{e_1, \ldots, e_k\}$ является тестом (тривиальным тестом). Минимальный тест является тупиковым. Проблема нахождения минимального теста связана с необходимостью сокращения времени контроля.

Существует алгоритм для нахождения всех тупиковых (значит и минимальных) тестов. Пусть $\{e_1^{ij}, \ldots, e_{\nu(i,j)}^{ij}\}$ — множество всех наборов, на к-рых отличаются φ_i и φ_j. Если в выражении

$$\&_{(i,j) \in \mathfrak{N}} (e_1^{ij} \vee \ldots \vee e_{\nu(i,j)}^{ij})$$

совершить умножение по правилам булевой алгебры и затем удалить «поглощаемые» члены, пользуясь соотношением $A \& B \vee A = A$, то оставшиеся произведения будут соответствовать тупиковым тестам. Так, если для рассмотренного выше примера взять задачу проверки

$$\mathfrak{N} = \{(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 7)\},$$

то указанный алгоритм дает:

$$(e_1 \vee e_2)\,(e_2 \vee e_3)\,(e_3 \vee e_4)\,(e_4 \vee e_5)\,(e_5 \vee e_6)\,(e_6 \vee e_1) =$$
$$= (e_2 \vee e_1 e_3)\,(e_4 \vee e_3 e_5)\,(e_6 \vee e_1 e_5) =$$
$$= e_1 e_3 e_5 \vee e_2 e_4 e_6 \vee e_1 e_2 e_4 e_5 \vee e_1 e_3 e_4 e_6 \vee e_2 e_3 e_5 e_6.$$

Имеется пять тупиковых тестов: $T_1 = \{e_1, e_3, e_5\}$, $T_2 = \{e_2, e_4, e_6\}$, $T_3 = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$, $T_4 = \{e_1, e_3, e_4, e_6\}$, $T_5 = \{e_2, e_3, e_5, e_6\}$, из к-рых T_1 и T_2 являются минимальными. Описанный алгоритм может быть применен для обнаружения ошибок при монтаже в соединениях элементов. Данный алгоритм с небольшими модификациями годится также для построения тупиковых кратных экспериментов для автоматов. Эффективность алгоритма построения тупиковых тестов резко падает с увеличением размеров таблицы функций неисправностей. Повышение эффективности связано с учетом строения таблицы, а также с учетом информации о структуре схемы. В этом направлении построена серия методов. Другие аспекты Н. и к. у. с. развиваются в рамках теории вероятностей.

Лит.: [1] Чегис И. А., Яблонский С. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51, с. 270—360; [2] Соловьев Н. А., Тесты, Новосиб., 1978; [3] Потапов Ю. Г., Яблонский С. В., «Докл. АН СССР», 1960, т. 134, № 3, с. 544—47; [4] Нейман Дж., в кн.: Автоматы, М., 1956, с. 68—139; [5] Мур Э. Ф., Шеннон К. Э., Кибернетический сборник, в. 1, М., 1960, с. 109—48. *С. В. Яблонский.*

НАДСТРОЙКА над топологическим пространством (клеточным разбиением) X — пространство (клеточное разбиение)

$$[(X \times [0, 1])/(X \times \{0\})]/(X \times \{1\}),$$

где $[0, 1]$ — единичный отрезок, а косая черта обозначает операцию отождествления подпространства с одной точкой. Надстройкой над *пунктированным пространством* (X, x_0) наз. пунктированное пространство

$$S^1 \wedge X =$$
$$= (X \times [0, 1])/[(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (x_0 \times [0, 1])].$$

Оно наз. также приведенной, или стянутой, надстройкой. Н. обозначается символом SX (а иногда ΣX). Соответствие $X \to SX$ определяет функтор из категории топологических (пунктированных) пространств в себя.

Функториальность Н. позволяет определить гомоморфизм $\pi_n(X) \to \pi_{n+1}(SX)$, к-рый также наз. надстройкой. Этот гомоморфизм совпадает с композицией гомоморфизма, индуцированного вложением $X \to \Omega SX$ и изоморфизма Гуревича $\pi_n(\Omega SX) \cong \pi_{n+1}(SX)$ (здесь Ω — операция взятия *петель пространства*). Для любой *гомологии теории* h_* (когомологий h^*) имеет место изоморфизм

$$\delta\colon \tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(SX) = h^{n+1}(CX, X),$$

совпадающий со связывающим гомоморфизмом точной последовательности пары (CX, X), где CX — конус над X. Образ класса $x \in h^n(X)$ при этом изоморфизме наз. надстройкой над x и обозначается δx (или Sx).

Надстройкой над *когомологической операцией* a наз. когомологич. операция, действие к-рой на $\tilde{h}^*$ совпадает с $\delta^{-1} a \delta$, а на $h^*(pt)$ — с a. *Д. Ф. Харшиладзе.*

НАИБОЛЕЕ МОЩНЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий, имеющий наибольшую мощность среди всех критериев с заданным *значимости уровнем*. Пусть по результатам наблюдений надлежит проверить простую гипотезу H_0 против простой альтернативы H_1 и пусть задана допустимая вероятность α ошибки первого рода, к-рую можно совершить в результате отклонения проверяемой гипотезы H_0 по статистич. критерию, построенному для проверки H_0 против H_1,

когда в действительности гипотеза H_0 справедлива. В теории проверки статистич. гипотез наилучшим критерием среди всех статистич. критериев, предназначенных для проверки H_0 против H_1 и имеющих одну и ту же вероятность ошибки первого рода или, что то же самое, один и тот же уровень значимости α, является тот критерий, к-рый имеет наибольшую мощность; т. е. наилучший критерий с наибольшей вероятностью отклоняет проверяемую гипотезу H_0, когда справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Именно этот наилучший критерий наз. Н. м. к. уровня α среди всех статистич. критериев уровня α, предназначенных для проверки простой гипотезы H_0 против простой альтернативы H_1. Так как мощность статистич. критерия равна дополнению до единицы вероятности ошибки второго рода, к-рую можно совершить, принимая H_0, когда она в действительности неверна, то понятие Н. м. к. часто формулируют в терминах вероятностей ошибок первого и второго рода: Н. м. к.— статистич. критерий, предназначенный для проверки простой гипотезы против простой альтернативы и к-рый имеет наименьшую вероятность ошибки второго рода среди всех статистич. критериев с заданной вероятностью ошибки первого рода. Решение задачи о построении Н. м. к. в случае простых гипотез дается *Неймана — Пирсона леммой*, согласно к-рой *отношения правдоподобия критерий* является Н. м. к.

В случае, когда конкурирующие гипотезы H_0 и H_1 являются сложными, задача построения Н. м. к. формулируется в терминах *равномерно наиболее мощного критерия*, если таковой существует.

Лит.: [1] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Neyman J., Pearson E., «Phil. Trans. Roy. Soc. London, A», 1933, v. 231, p. 289—337.

М. С. Никулин.

НАИБОЛЬШЕГО ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА ПРИНЦИП — один из основных принципов принятия решения, используемый в *исследовании операций* и *игр теории*. Н. г. р. п. реализуется в стремлении выбрать такую стратегию, чтобы минимальный выигрыш, получаемый в результате ее применения, был максимальным (см. *Максимин*). В ряде случаев Н. г. р. п. может быть получен как следствие в нек-рой системе аксиом, отдельные аксиомы к-рой указывают на те естественные свойства, к-рыми должен обладать всякий «разумный» принцип оптимального поведения (см. [5]). Конкретизация Н. г. р. п. в различных ситуациях приводит к постановке целого ряда задач на максимин.

Исследование операций, т. е. совокупности действий, ведущих к достижению поставленной цели, проводится исследователем операции в интересах оперирующей стороны, к-рая стремится к достижению цели, математически выражаемой желанием увеличить критерий эффективности — функцию $f(x, y)$, где x — выбор оперирующей стороны, y — неконтролируемый оперирующей стороной фактор. Выбор конкретных значений $x \in X$ в зависимости от информированности оперирующей стороны и исследователя операции о значениях y определяет стратегию $x = x(y)$ оперирующей стороны.

Исходя из информированности исследователя о значениях y, неконтролируемые факторы y подразделяются на три группы: фиксированные факторы, значения к-рых известны; случайные факторы, т. е. случайные процессы с известными законами распределения; неопределенные факторы, для к-рых известна только область Y, к-рой они принадлежат, или область, к-рой принадлежат их законы распределения.

Оценка эффективности стратегий и выбор из них осуществляются исследователем операций на основе получения максимально гарантированной величины критерия эффективности при предполагающейся информи-

рованности оперирующей стороны о неконтролируемых факторах. Если $\tilde{x}$ — стратегия оперирующей стороны, то ее оценкой, когда известно лишь, что $y \in Y$, наз. величина

$$\inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y).$$

Наибольший гарантированный результат (н. г. р.) определяется как величина

$$\sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y); \qquad (*)$$

стратегия $\tilde{x}^*$, для к-рой

$$\inf_{y \in Y} f(\tilde{x}^*, y) = \sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y),$$

является оптимальной в рассматриваемой операции.

В случае, когда оперирующая сторона не ожидает информации о конкретных значениях $y \in Y$, т. е. $x(y) = x$, н. г. р. определяется величиной

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y)$$

(см. *Минимакса принцип*).

Если значение y известно точно, то для (*) выполняется равенство

$$\sup_{x(y)} \inf_{y \in Y} f(x(y), y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y).$$

Если значения y формируются активным противником, исследователь операции и оперирующая сторона информированы о критерии эффективности противника $\varphi(\tilde{x}, y)$, $y \in Y$, и при этом y выбирается противником из условия $\max_{y \in Y} \varphi(\tilde{x}(y), y)$, то н. г. р. определяется величиной

$$\sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y_1(\tilde{x})} f(\tilde{x}, y),$$

где

$$Y_1(\tilde{x}) = \{y \in Y \mid \varphi(x(y), y) = \max_{y \in Y} \varphi(x(y), y)\}.$$

Конкретизация Н. г. р. п. в играх с фиксированной последовательностью ходов игроков и в операциях, когда информация о неопределенных факторах уточняется во времени, приводит к решению весьма сложных минимаксных задач (напр., *дифференциальных игр*).

Пусть в операции, наряду с неопределенным фактором y, $y \in Y$, есть случайный фактор z, $z \in Z$, с известным законом распределения P, и оперирующая сторона производит осреднение по случайностям. В этом случае критерием эффективности является математич. ожидание

$$\bar{f}(\tilde{x}, y) = \int_Z f(\tilde{x}, y, z)\, dP(z),$$

что означает для оперирующей стороны согласие с определенным риском. Как правило, введение $\bar{f}$ применяется в многократно повторяющихся операциях.

Если y при повторениях не меняет своего значения и $\tilde{x} = x(y)$, то н. г. р. равен

$$\sup_{\tilde{x}} \inf_{y \in Y} \bar{f}(\tilde{x}, y).$$

Если же от повторения к повторению y меняется произвольным образом, то н. г. р. имеет вид

$$\sup_{\tilde{x}} \int_Z \inf_{y \in Y} f(\tilde{x}, y, z)\, dP(z).$$

В других случаях (а также в других классах стратегий, напр. вида $\tilde{x} = x(y, z)$) н. г. р. выражается иными комбинациями операций взятия экстремума и интегрирования (см. [1], [3]).

Смешанной стратегией наз. вероятностная мера Ψ на X. Если, как выше, оперирующая сторона согласна на осреднение критерия эффективности

$$f(\Psi, y) = \int_X f(x, y)\, d\Psi(x),$$

то н. г. р. равен

$$\sup_{\Psi} \inf_{y \in Y} f(\Psi, y).$$

Большое значение имеет задача вычисления оптимальн. смешанных стратегий (см. *Антагонистическая игра*).

В многошаговых операциях с конечным числом n шагов критерий эффективности имеет вид

$$f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n),$$

где $x_i \in X_i$ — выбор оперирующей стороны, а $y_i \in Y_i$ — значение некоптролируемого фактора на i-м шаге. Н. г. р. в многошаговых операциях записывается, как правило, в виде кратного (последовательного) максимина. Так, в антагонистич. игре с полной информацией н. г. р. равен

$$\sup_{x_1 \in X_1} \inf_{y_1 \in Y_1} \ldots \sup_{x_n \in X_n} \inf_{y_n \in Y_n} f(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n).$$

К подобным минимаксным задачам приводят и нек-рые проблемы теории дифференциальных игр.

Для нечетко формулируемой цели оперирующей стороны, когда, напр., имеется набор критериев эффективности $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ и неопределенным фактором для исследователя операций является номер i, данный принцип приводит к свертке критериев, и н. г. р. равен

$$\max_x \min_i (f_i(x) - f_i^0),$$

где f_i^0 — уровень, к-рый желательно обеспечить по i-й компоненте. Если величина н. г. р. неотрицательна, желательные уровни достижимы.

Последовательное применение Н. г. р. п. в разных условиях информированности оперирующей стороны позволяет единым образом оценить эффективность стратегий и построить полную теорию принятия решения в условиях неопределенности.

Лит.: [1] Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций, М., 1971; [2] Воробьев Н. Н., «Успехи матем. наук», 1970, т. 25, в. 2, с. 81—140; [3] Гермейер Ю. Б., Игры с непротивоположными интересами, М., 1976; [4] Вентцель Е. С., Исследование операций, М., 1972; [5] Вилкас Э., «Теория вероятн. и ее примен.», 1963, т. 8, № 3, с. 324—327.

Ф. И. Ерешко, В. В. Федоров.

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ — наибольший из общих делителей целых, в частности натуральных, чисел $a_1, \ldots, a_n$. Если данные числа не все равны нулю, то такой делитель существует. Н. о. д. чисел $a_1, \ldots, a_n$ обычно обозначают символом $(a_1, \ldots, a_n)$.

Свойства Н. о. д.:

1) Н. о. д. чисел $a_1, \ldots, a_n$ делится на любой общий делитель этих чисел;

2) $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$;

3) если целые числа $a_1, \ldots, a_n$ представлены в виде

$$a_1 = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s} s, \ldots, a_n = p_1^{\nu_1} \ldots p_s^{\nu_s} s,$$

где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые, $\alpha_i \geqslant 0, \ldots, \nu_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, s$, и $\delta_i = \min(\alpha_i, \ldots, \nu_i)$, то

$$(a_1, \ldots, a_n) = p_1^{\delta_1} \ldots p_s^{\delta_s} s.$$

Н. о. д. двух натуральных чисел можно найти при помощи *Евклида алгоритма*. Число шагов, необходимых для отыскания Н. о. д. двух чисел, превосходит не более чем в пять раз число цифр наименьшего из них, записанного в десятичной системе счисления.

Н. о. д. элементов области целостности наз. тот из общих делителей данных элементов, к-рый делится на

любой из их общих делителей. Так, Н. о. д. двух многочленов над данным полем — тот их общий делитель, к-рый делится на любой из их общих делителей. Если Н. о. д. двух элементов области целостности существует, то он единствен с точностью до обратимого множителя. Н. о. д. идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ данного кольца наз. идеал $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, порожденный объединением множеств $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ (см. *Факториальное кольцо*).

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; [2] Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; [3] Маркушевич А. И., Деление с остатком в арифметике и алгебре, М.— Л., 1949; [4] Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М., Современная математика, пер. с франц., М., 1966; [5] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

А. А. Бухштаб, В. И. Нечаев.

НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — формула вида

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx \approx \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j), \qquad (1)$$

где весовая функция $p(x)$ предполагается неотрицательной на $[a, b]$ и такой, что существуют интегралы

$$\mu_k \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int_a^b p(x)\, x^k\, dx, \quad k=0, 1, 2\ldots,$$

при этом $\mu_0>0$. Узлами x_j квадратурной формулы (1) являются корни ортогонального на $[a, b]$ с весом $p(x)$ многочлена степени N, а коэффициенты определяются тем, что квадратурная формула является интерполяционной. Такая квадратурная формула имеет алгебраич. степень точности $2N-1$, т. е. она является точной для всех алгебраич. многочленов $f(x)$ степени не выше $2N-1$ и не точна для x^{2N}, и наз. квадратурной формулой гауссова типа.

Имеется следующее обобщение квадратурных формул наивысшей алгебраич. степени точности. Пусть в квадратурной формуле

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx \approx \sum_{j=1}^{m} A_j f(a_j) + \sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j) \qquad (2)$$

с числом узлов $N=m+n$ узлы $a_1, \ldots, a_m$ заданы заранее (фиксированные узлы), а узлы $x_1, \ldots, x_n$ выбираются так, чтобы квадратурная формула имела наивысшую алгебраич. степень точности. Пусть

$$\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \prod_{j=1}^{m}(x-a_j), \quad \omega(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \prod_{j=1}^{n}(x-x_j).$$

Чтобы квадратурная формула (2) была точна для всех многочленов степени не выше $m+2n-1$, необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной и многочлен $\omega(x)$ был ортогонален на $[a, b]$ с весом $\sigma(x)p(x)$ ко всем многочленам степени не выше $n-1$. Это приводит вопрос о существовании квадратурной формулы, точной для всех многочленов степени не выше $m+2n-1$, к нахождению многочлена $\omega(x)$ степени n, ортогонального на $[a, b]$ с весом $\sigma(x)p(x)$, и выяснению свойств его корней. Если корни $\omega(x)$ действительные, простые, принадлежат $[a, b]$ и их совокупность имеет пустое пересечение с совокупностью фиксированных узлов, то требуемая квадратурная формула существует. Если, кроме того,

$$\int_a^b p(x)\, \sigma(x)\, \omega^2(x)\, dx \neq 0,$$

то ее алгебраич. степень точности равна $m+2n-1$.

При указанных выше предположениях о весовой функции $p(x)$ ортогональный на $[a, b]$ с весом $\sigma(x)p(x)$ многочлен $\omega(x)$ степени n определяется однозначно (с точностью до отличного от нуля постоянного множителя) в следующих частных случаях.

1) $m=1$, n — любое. Берется один фиксированный узел, совпадающий с концом промежутка $[a, b]$, при этом выбранный конец промежутка должен быть конечным числом.

2) $m=2$, n — любое. В качестве фиксированных узлов берутся оба конца промежутка $[a, b]$, к-рый считается конечным.

3) m — любое, $n=m+1$. В качестве фиксированных узлов берутся корни ортогонального на $[a, b]$ с весом $p(x)$ многочлена $P_m(x)$.

В случаях 1) и 2) многочлен $\omega(x)$ является ортогональным относительно веса $\sigma(x)p(x)$, сохраняющего знак на промежутке интегрирования $[a, b]$, поэтому его корни действительные, простые, лежат внутри (a, b) и, следовательно, не совпадают с a и b. Квадратурная формула (2) существует, ее коэффициенты положительны и алгебраич. степень точности равна $m+2n-1$. Квадратурные формулы, соответствующие случаям 1) и 2), наз. формулами Маркова.

В случае 3) вес $\sigma(x)p(x)$ меняет знак на $[a, b]$, и это осложняет исследование корней $\omega(x)$. Если $[a, b]=-[-1, 1]$ и $p(x)=(1-x^2)^\alpha$, где $-1/2<\alpha\leqslant 3/2$, то корни $\omega(x)$ лежат внутри $(-1, 1)$ и разделяются корнями $P_m(x)$: между любыми двумя соседними корнями $\omega(x)$ лежит точно один корень многочлена $P_m(x)$ (см. [2]). Для рассматриваемого веса квадратурная формула (2) существует и точна для всех многочленов степени не выше $3m+1$; однако нельзя утверждать, что алгебраич. степень точности равна $3m+1$. При $\alpha=-1/2$ и $\alpha=1/2$ узлы и коэффициенты квадратурной формулы можно указать явно (см. [3]), при этом алгебраич. степень точности в первом случае повышается до $4m-1$, а во втором — до $4m+1$. Для $p(x)=1$ и промежутка $[0, 1]$ вычислены (см. [4]) узлы и коэффициенты квадратурной формулы (2) (с фиксированными узлами типа 3)) при $m=1(1)40$ (m меняется от 1 до 40 с интервалом 1); алгебраич. степень точности равна $3m+1$ при m четном и равна $3m+2$ при m нечетном. Квадратурная формула (2) с фиксированными узлами типа 3) существует также для промежутка $[-1, 1]$ и веса $(1-x)^\alpha(1+x)^{-\alpha}$ при $\alpha=\pm 1/2$, при этом узлы и коэффициенты можно указать явно (см. [3]).

Лит.: [1] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; [2] Szegö G., «Math. Ann.», 1934, Bd 110, H. 4, S. 501—13; [3] Мысовских И. П., «Изв. АН БССР. Сер. фіз.-тэхніч. навук», 1964, № 4, с. 125—27; [4] Кронрод А. С., Узлы и веса квадратурных формул. Шестнадцатизначные таблицы, М., 1964. *И. П. Мысовских.*

НАИЛУЧШАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА, оптимальная квадратурная формула,— формула приближенного интегрирования, обеспечивающая на заданном классе функций минимальную погрешность среди всех формул определенного типа. Пусть рассматривается квадратурная формула

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{m} p_{ki} f^{(i)}(x_k)+R(f), \quad (*)$$

где $\rho(x)$ — весовая функция. Остаток (погрешность) $R(f)=R(f,\ X_n,\ P_{nm})$ зависит как от функции $f(x)$, так и от вектора (X_n, P_{nm}) узлов x_k (обычно предполагается, что $x_k\in[a, b]$) и коэффициентов p_{ki}, $k=1, 2, \ldots, n$, $i=0, 1, \ldots, m$. При фиксированных $n\geqslant 1$ и $m\geqslant 0$ через A обозначим нек-рое множество векторов (X_n, P_{nm}) (и, следовательно, квадратурных формул), определяемое теми или иными ограничениями на узлы и коэффициенты (в частности, можно рассматривать множество $A=A(X_n)$ коэффициентов p_{ki} при фиксированном векторе узлов X_n). Пусть $\mathfrak{M}$ — нек-рый класс функций $f(x)$, причем предполагается, что для $f\in\mathfrak{M}$ интеграл и сумма в (*) имеют смысл. Н. к. ф. вида (*) для класса $\mathfrak{M}$ относительно множества A определяется вектором (X_n^*, P_{nm}^*), для к-рого

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}} |R(f,\ X_n^*,\ P_{nm}^*)| =$$

$$= \inf_{(X_n,\ P_{nm})\subset A} \sup_{f\in\mathfrak{M}} |R(f,\ X_n,\ P_{nm})|.$$

Задача отыскания Н. к. ф. тесно связана с нек-рыми задачами *сплайн-аппроксимации*; в ряде случаев она сводится к минимизации нормы моносплайна (см. [1]). Известны Н. к. ф. и соответствующие точные оценки остатка для многих важных классов непрерывных и дифференцируемых функций. С более общей точки зрения отыскание Н. к. ф. и доставляемой ею на классе $\mathfrak{M}$ погрешности можно рассматривать как задачу оптимального восстановления функционала

$$J(f)=\int_a^b \rho(x)\,f(x)\,dx,$$

где $f\in\mathfrak{M}$, по информации $\{f^{(i)}(x_k)\}$, $k=1, 2, \ldots, n$, $i=0, 1, \ldots, m$. Понятие Н. к. ф. естественным образом обобщается на случай функций многих переменных, т. е. на кубатурные формулы.

Лит.: [1] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [2] Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; [3] Лоран П. Ж., Аппроксимация и оптимизация, пер. с франц., М., 1975; [4] Женсыкбаев А. А., «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 4, с. 107—59.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕН, наилучшего приближения полином, – многочлен, осуществляющий наилучшее приближение функции $x(t)$ в той или иной метрике среди всех многочленов, построенных по той же (конечной) системе функций. Если X — линейное нормированное пространство функций (напр., $C[a, b]$ или $L_p(a, b)$, $p\geqslant 1$),

$$U_n=\{u_1(t), \ldots, u_n(t)\}$$

— система линейно независимых функций из X, то для любой $x\in X$ (обобщенный) Н. п. м.

$$\tilde{u}(t)=\tilde{u}(x, t)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{c}_k u_k(t), \qquad (*)$$

определяемый соотношением

$$\|x-\tilde{u}\|=\min_{\{c_k\}}\Big\|x-\sum_{k=1}^{n}c_k u_k\Big\|,$$

существует. Единственность Н. п. м. для всех $x\in X$ имеет место, во всяком случае, если X — пространство со строго выпуклой нормой (т. е. из $\|x\|=\|y\|$ и $x\neq y$ следует, что $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$). Таким является пространство $L_p(a, b)$ при $1<p<\infty$. В пространстве $C[a, b]$, норма к-рого не является строго выпуклой, Н. п. м. для любой $x\in C[a, b]$ единствен, если система U_n является чебышевской на $[a, b]$, т. е. каждый многочлен

$$u(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k u_k(t)\not\equiv 0$$

имеет на отрезке $[a, b]$ не более чем $n-1$ нулей. В частности, единственность имеет место для алгебраич. многочленов в $C[a, b]$, а также для тригонометрич. полиномов в пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных на всей оси 2π-периодических функций с равномерной метрикой. Если Н. п. м. существует и единствен для любой $x\in X$, то он непрерывно зависит от x.

Известны критерии, указывающие необходимые и достаточные признаки Н. п. м. в пространствах C и L_p. Справедлива, напр., теорема Чебышева: если система U_n является чебышевской, то для того, чтобы многочлен (*) являлся для функции $x\in C[a,b]$ Н. п. м. в метрике пространства $C[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы нашлась система из $n+1$ точек $t_i V_i$: $a\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_{n+1}\leqslant b$, в к-рых разность

$$\Delta(t)=x(t)-\tilde{u}(t)$$

принимает значения

$$\pm\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\Delta(t)|,$$

причем

$$\Delta(t_{i+1}) = -\Delta(t_i), \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Многочлен (*) является Н. п. м. для функции $x(t)\in L_p[a, b]$, $p>1$, в метрике этого пространства тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b u_k(t)\,|x(t)-\tilde{u}(t)|^{p-1}\operatorname{sign}[x(t)-\tilde{u}(t)]\,dt=0,$$

$k=1, 2, \ldots, n$. В случае $p=1$, т. е. в пространстве $L_1[a, b]$, условия

$$\int_a^b u_k(t)\operatorname{sign}[x(t)-\tilde{u}(t)]\,dt=0, \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

достаточны, а если мера множества тех точек t из (a, b), где $x(t)-\tilde{u}(t)$, равна нулю, то и необходимы, чтобы $\tilde{u}(t)$ был Н. п. м. для $x\in L_1[a, b]$; см. также *Маркова критерий*.

Существуют алгоритмы приближенного построения многочленов наилучшего равномерного приближения (см., напр., [3], [5]).

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [2] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [3] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [4] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [5] Лоран П. Ж., Аппроксимация и оптимизация, пер. с франц., М., 1975; [6] Ремез Е. Я., Основы численных методов чебышевского приближения, К., 1969.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТ — элемент U_0 данного множества F, доставляющий заданному элементу x метрич. пространства X *наилучшее приближение*, т. е. такой, что

$$\rho(x, u_0)=\inf\{\rho(x, u):\ u\in F\}.$$

Понятие Н. п. э. обобщает классич. понятие *наилучшего приближения многочлена*. Основные вопросы, касающиеся Н. п. э.: существование и единственность Н. п. э., характеристич. свойства Н. п. э. (см. *Чебышева теорема*), свойства оператора, сопоставляющего каждому $x\in X$ множество Н. п. э. (см. *Метрическая проекция*, *Аппроксимативно компактное множество*), численные методы построения Н. п. э.

Ю. Н. Субботин.

НАИЛУЧШЕЕ ПОЛНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ — наилучшее приближение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ k переменных ($k\geqslant 2$) алгебраическими или тригонометрич. многочленами. Пусть X — пространство C или L_p 2π-периодических по каждому переменному функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, непрерывных либо суммируемых со степенью p ($p\geqslant 1$) на k-мерном кубе периодов.

Н. п. п. функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\in X$ тригонометрич. полиномами есть величина

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(f)_X=\inf_{T_{n_1, n_2, \ldots, n_k}}\|f-T_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\|_X,$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным тригонометрич. полиномам порядка n_i от переменных x_i ($1\leqslant i\leqslant k$). Наряду с Н.п.п. функции f рассматриваются частные наилучшие приближения этой функции.

Наилучшее частное приближение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\in X$ — есть наилучшее приближение функциями $T_{n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_r}}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\in X$, являющимися тригонометрич. полиномами степени n_{ν_1}, n_{ν_2}, $\ldots$, n_{ν_r} ($1\leqslant r<k$) соответственно от фиксированных переменных $x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, \ldots, x_{\nu_r}$ с коэффициентами, зависящими от остальных $k-r$ переменных, т. е. величина

$$E_{n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_r}, \infty}(f)_X=\inf_{T_{n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_r}}}\|f-T_{n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_r}}\|_X.$$

Очевидно, что

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots, n_k}(f)_X \geqslant E_{n_1, n_2, \ldots, n_r, \infty}(f)_X.$$

Для непрерывных функций двух переменных С. Н. Бернштейн [1] доказал неравенство

$$E_{n_1, n_2}(f)_C \leqslant A \ln(2+\min\{n_1, n_2\})(E_{n_1,\infty}(f)_C + E_{n_2,\infty}(f)_C), \quad (1)$$

где A — абсолютная константа. Установлено [3], что в неравенстве (1) (и в аналогичном соотношении для пространства L_1) нельзя заменить $\ln(2+\min\{n_1, n_2\})$ на множитель, растущий при $\min\{n_1, n_2\} \to \infty$ медленнее.

В пространстве L_p $(p>1)$ имеет место неравенство

$$E_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(f)_{L_p} \leqslant A_{p,k} \sum_{i=1}^{k} E_{n_i,\infty}(f)_{L_p}, \quad (2)$$

где постоянная $A_{p,k}$ зависит только от p и k.

Аналогично определяются Н. п. п. и наилучшее частное приближение функций, заданных в замкнутой ограниченной области $\Omega \subset R_k$ алгебраическими многочленами, и в этом случае известны неравенства вида (1), (2).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954; [2] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [3] Темляков В. Н., «Докл. АН СССР», 1975, т. 223, № 5, с. 1079—82.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ функции $x(t)$ функциями $u(t)$ из фиксированного множества F — величина

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \mu(x, u),$$

где $\mu(x, u)$ — погрешность приближения (см. *Приближения функций мера*). Можно говорить о Н. п. в произвольном метрич. пространстве X, когда $\mu(x, u)$ определяется расстоянием между элементами x и u, в этом случае $E(x, F)$ — расстояние от элемента x до множества F. Если X — линейное нормированное пространство, то при фиксированном $F \subset X$ Н. п.

$$E(x, F) = \inf_{u \in F} \|x-u\| \quad (1)$$

можно рассматривать как заданный на X функционал (функционал наилучшего приближения).

Функционал Н. п. непрерывен, каково бы ни было множество F. Если F — подпространство, то функционал Н. п. является полунормой, т. е.

$$E(x_1+x_2, F) \leqslant E(x_1, F) + E(x_2, F)$$

и

$$E(\lambda x, F) = |\lambda| E(x, F)$$

для любого $\lambda \in \mathbb{R}^1$. В случае, когда F — конечномерное подпространство, в F для любого $x \in X$ существует элемент u_0 (элемент наилучшего приближения), на к-ром в (1) реализуется нижняя грань:

$$E(x, F) = \|x-u_0\|.$$

В пространстве X со строго выпуклой нормой элемент Н. п. единствен.

С помощью теорем двойственности Н. п. в линейном нормированном пространстве X может быть выражено через верхнюю грань значений нек-рых функционалов из сопряженного пространства X^* (см., напр., [5], [8]). Если F — замкнутое выпуклое множество в X, то для любого $x \in X$

$$E(x, F) = \sup_{f \in X^*, \|f\| \leqslant 1} [f(x) - \sup_{u \in F} f(u)]; \quad (2)$$

в частности, когда F — подпространство, то

$$E(x, F) = \sup_{f \in F^\perp, \|f\| \leqslant 1} f(x), \quad (3)$$

где $F^\perp$ — множество функционалов f из X^* таких, что

$f(u)=0$ для любого $u\in F$. В функциональных пространствах C и L_p правые части (2) и (3) конкретизируются с учетом формы линейного функционала. В гильбертовом пространстве H Н. п. элемента $x\in H$ n-мерным подпространством F_n реализуется оператором ортогонального проектирования на F_n и может быть вычислено:

$$E(x, F_n)=\sqrt{\frac{G(x, u_1, \ldots, u_n)}{G(u_1, \ldots, u_n)}},$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — базис F_n, а $G(u_1, \ldots, u_n)$ — определитель Грама, составленный из скалярных произведений (u_i, u_j), $i, j=1, \ldots, n$. Если базис $\{u_k\}$ ортонормирован, то

$$E^2(x, F_n)=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}(x, u_k)^2.$$

В пространстве $C=C[a, b]$ для величины наилучшего равномерного приближения функции $x(t)\in C$ n-мерным чебышевским подпространством $F_n\subset C$ справедлива оценка (т е о р е м а В а л л е П у с с е н а): если для нек-рой функции $u(t)\in F_n$ существует $n+1$ точек t_k, $a\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_{n+1}\leqslant b$, в к-рых разность

$$\Delta(t)=x(t)-u(t)$$

принимает значения с последовательно чередующимися знаками, то

$$E(x, F_n)\geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant n+1}|\Delta(t_k)|.$$

О Н. п. в пространстве $L_1(a, b)$ см. *Маркова критерий*. В ряде важных случаев Н. п. функций конечномерным подпространством можно оценить сверху через дифференциально-разностные характеристики (напр., модуль непрерывности) приближаемой функции или ее производных.

Понятие наилучшего равномерного приближения непрерывных функций многочленами ввел П. Л. Чебышев (1854), к-рый разработал теоретич. основы Н. п. и установил критерий многочлена Н. п. в метрике пространства C (см. *Наилучшего приближения многочлен*).

Н а и л у ч ш е е п р и б л и ж е н и е к л а с с а ф у н к ц и й — верхняя грань Н. п. функций $f(t)$ из заданного класса $\mathfrak{M}$ фиксированным множеством функций F, т. е. величина

$$E(\mathfrak{M}, F)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}E(f, F)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\inf_{\varphi\in F}\mu(f, \varphi).$$

Величина $E(\mathfrak{M}, F)$ характеризует максимальное отклонение (относительно выбранной метрики) класса $\mathfrak{M}$ от приближающего множества F и показывает, на какую минимально возможную погрешность можно рассчитывать, приближая произвольную функцию $f(t)\in\mathfrak{M}$ функциями из F.

Пусть $\mathfrak{M}$ принадлежит функциональному линейному нормированному пространству X, $U=\{u_1(t), u_2(t), \ldots\}$ — линейно независимая система функций из X и F_n, $n=1, 2, \ldots$, — подпространства, порожденные первыми n элементами этой системы. Исследование числовой последовательности $E(\mathfrak{M}, F_n)$, $n=1, 2, \ldots$, позволяет судить как о структурных и гладкостных характеристиках функций класса $\mathfrak{M}$, так и об аппроксимативных свойствах системы U относительно класса $\mathfrak{M}$. Если X — банахово пространство функций и система U замкнута в X, т. е. $\overline{\bigcup F_n}=X$, то $E(\mathfrak{M}, F_n)\to 0$ при $n\to\infty$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ является компактным в X множеством.

В ряде важных случаев, напр. когда F_n — подпространства тригонометрич. полиномов или периодич. сплайнов, а класс $\mathfrak{M}$ задается ограничениями на норму или модуль непрерывности нек-рой производной $f^{(r)}(t)$, величины $E(\mathfrak{M}, F_n)$ точно вычислены [5]. В непериодич. случае имеются результаты, дающие точную асимптотику $E(\mathfrak{M}, F_n)$ при $n\to\infty$.

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.—Л., 1947; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [3] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; [4] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [5] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [6] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [7] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [8] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [9] Лоран П. Ж., Аппроксимация и оптимизация, пер. с франц., М., 1975.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В СРЕДНЕМ — наилучшее приближение функции $x(t)$ функциями $u(t)$ из фиксированного множества F, когда мера (погрешность) приближения выражается с помощью интегральной метрики (см. *Наилучшее приближение*, *Приближение в среднем*).

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШИЙ ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД — линейный метод приближения, обеспечивающий на заданном множестве $\mathfrak{M}$ приближаемых элементов наименьшую, по сравнению с другими линейными методами, погрешность. В линейном нормированном пространстве X линейный метод приближения элементов $x\in\mathfrak{M}\subset X$ элементами фиксированного подпространства $F\subset X$ задается линейным оператором, отображающим все пространство X или нек-рое, содержащее $\mathfrak{M}$, линейное многообразие в F. Если $\mathscr{L}$ — совокупность всех таких операторов, то Н. л. м. для множества $\mathfrak{M}$ (если он существует) определяется оператором $\tilde{A}\in\mathscr{L}$, для к-рого

$$\sup_{x\in\mathfrak{M}}\|x-\tilde{A}x\|=\inf_{A\in\mathscr{L}}\sup_{x\in\mathfrak{M}}\|x-Ax\|.$$

Метод, определяемый оператором A из $\mathscr{L}$, заведомо является Н. л. м. для $\mathfrak{M}$ относительно приближающего множества F, если для всех $x\in\mathfrak{M}$

$$\|x-Ax\|\leqslant\sup_{x\in\mathfrak{M}}E(x,F)$$

($E(x, F)$ — *наилучшее приближение* элемента x множеством F) и, тем более, если для всех $x\in X$

$$\|x-Ax\|=E(x,F).$$

Последний факт имеет место, когда X — гильбертово пространство, $F=F_n$ есть n-мерное ($n=1, 2, \ldots$) его подпространство, A — линейный оператор ортогонального проектирования на F_n, т. е.

$$Ax=\sum_{k=1}^{n}(x,\ e_k)\,e_k,$$

где $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — ортонормированный базис в F_n.

Пусть X — банахово пространство заданных на всей действительной оси функций с нормой, инвариантной относительно сдвига: $\|x(\cdot-\tau)\|=\|x(\cdot)\|$ (этому условию удовлетворяет, напр., норма пространств $C=C[0, 2\pi]$ и $L_p=L_p(0, 2\pi)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 2π-периодических функций), $F=T_n$ — подпространство тригонометрич. полиномов порядка n. Для класса $\mathfrak{M}$ функций $x(t)$ из X, содержащего вместе с $x(t)$ также и $x(t+\alpha)$ при любом $\alpha\in\mathbb{R}^1$, существуют Н. л. м. (относительно T_n), в частности Н. л. м. вида

$$A(x;\ t;\ \mu,\ \nu)=\frac{\mu_0 a_0}{2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\{\mu_k(a_k\cos kt+b_k\sin kt)+\nu_k(a_k\sin kt-b_k\cos kt)\},\qquad(*)$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $x(t)$ по тригонометрич. системе, μ_k и ν_k — нек-рые числа.

На классах $W_\infty M$ (и $W_1^r M$), $r=1, 2, \ldots$, 2π-периодических функций $x(t)$, у к-рых производная $x^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна, а $x^{(r)}(t)$ по норме в L_∞ (соответственно в L_1) ограничена числом M, Н. л. м.

вида (*) дает в метрике пространства C (соответственно L_1) ту же погрешность (на всем классе), что и наилучшее приближение подпространством T_n; аналогичный факт имеет место для таких классов при любом дробном $r>0$ (производная $x^{(r)}(t)$ понимается в смысле Вейля). При целых $r=1, 2, \ldots$ Н. л. м. вида (*) строится только с помощью коэффициентов μ_k (все $\nu_k=0$).

Если $F=S_n^r$ — подпространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 по разбиению $k\pi/n$, $k=0, \pm 1, \ldots$, то для классов $W_\infty^{r+1}M$ (и $W_1^{r+1}M$), $r=1, 2, \ldots$, Н. л. м. в L_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$ (соответственно в L_1), доставляют сплайны из S_n^r, интерполирующие функцию $x(t)$ в точках $k\pi/n+[1+(-1)^r]\pi/4n$.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [2] Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; [3] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ—числовая последовательность $\{E(x, F_n)\}$, $n=1, 2, \ldots$, где $E(x, F_n)$ — *наилучшее приближение* элемента x линейного нормированного пространства X элементами n-мерного подпространства $F_n\subset X$, причем $F_1\subset F_2\subset\ldots$, так что $E(x, F_1)\geqslant E(x, F_2)\geqslant\ldots$. Обычно F_n есть линейная оболочка первых n элементов нек-рой фиксированной системы $\{u_1, u_2, \ldots\}$ линейно независимых элементов из X.

В случае, когда $X=C[a, b]$, $F_n=F_n^A$ — подпространство алгебраич. многочленов степени $n-1$, Н. п. п. впервые рассматривалась в 50-х гг. 19 в. П. Л. Чебышевым; тот факт, что

$$E(x, F_n^A)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

для любой функции $x(t)\in C[a, b]$, установлен в 1885 К. Вейерштрассом (K. Weierstrass). В общем случае соотношение

$$\lim_{n\to\infty} E(x, F_n) \text{ для всех } x\in X$$

выполняется всегда, когда объединение подпространств F_n, $n=1, 2, \ldots$, всюду плотно в X, т. е.

$$\overline{\bigcup F_n}=X$$

(по существу это эквивалентные утверждения). Однако последовательность $E(x, F_n)$ может стремиться к нулю как угодно медленно. Это вытекает из теоремы Бернштейна: если $\{F_n\}$ — последовательность подпространств размерности $n=1, 2, \ldots$ линейного нормированного пространства X, причем $F_1\subset F_2\subset\ldots$ и $\overline{\bigcup F_n}=X$, то какова бы ни была монотонно стремящаяся к нулю числовая последовательность $\{\mu_n\}$, $\mu_n\geqslant 0$, существует элемент $x\in X$ такой, что $E(x, F_n)=\mu_n$, $n=1, 2, \ldots$. В функциональных пространствах C и L_p скорость стремления к нулю Н. п. п. зависит как от системы подпространств F_n, так и от гладкостных характеристик приближаемой функции x (модуля непрерывности, существования производных до определенного порядка и пр.) и может быть оценена через эти характеристики. Обратно, зная скорость стремления к нулю последовательности $E(x, F_n)$, можно судить о гладкости функции $x(t)$ (см. *Приближение функций*; прямые и обратные теоремы).

Лит.: [1] Бернштейн С. Н., Собр. соч., т. 2, М., 1954; [2] Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, 2 изд., М., 1954; [3] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИМЕНЕЕ БЛАГОПРИЯТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — априорное распределение, максимизирующее функцию риска в статистич. задаче принятия решения.

Пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X},$

$\mathfrak{B}_{\mathfrak{X}}$, P_θ), $\theta \in \Theta$, надлежит принять решение d из пространства решений $(\mathfrak{T}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{D}})$, при этом предполагается, что неизвестный параметр θ является случайной величиной, принимающей значения в выборочном пространстве $(\Theta, \mathfrak{B}_\theta, \pi_t)$, $t \in T$. Пусть функция $L(\theta, d)$ выражает потери, к-рые возникают при принятии решения d, если истинное значение параметра есть θ. Априорное распределение π_{t*} из семейства $\{\pi_t,\ t \in T\}$ наз. наименее благоприятным для решения d в статистической задаче принятия решения при бейесовском подходе, если

$$\sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d) = \rho(\pi_{t*}, d);$$

где

$$\rho(\pi_t, d) = \int_\Theta \int_{\mathfrak{X}} L(\theta, d(x))\, dP_0(x)\, d\pi_t(\theta)$$

— функция риска, выражающая средние потери от принятия решения d. Н. б. р. π_{t*} позволяет вычислить самые «тяжелые» (в среднем) потери $\rho(\pi_{t*}, d)$, возникающие при принятии решения d. В практич. деятельности ориентируются, как правило, не на Н. б. р., а наоборот, стараются принять такое решение, к-рое предохранило бы от максимальных потерь при изменении параметра θ, что приводит к поиску минимаксного решения d^*, минимизирующего максимальный риск, т. е.

$$\inf_{d \in \mathfrak{D}} \sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d) = \sup_{t \in T} \rho(\pi_t, d^*).$$

В задаче проверки сложной статистич. гипотезы против простой альтернативы при бейесовском подходе Н. б. р. определяется с помощью редукции Вальда, к-рая заключается в следующем. Пусть по реализации случайной величины X надлежит проверить сложную гипотезу H_0, согласно к-рой закон распределения X принадлежит семейству $H_0 = \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\}$, против простой альтернативы H_1, согласно к-рой случайная величина X подчиняется закону Q, и пусть

$$p_\theta(x) = \frac{dP_\theta(x)}{d\mu(x)} \quad \text{и} \quad q(x) = \frac{dQ(x)}{d\mu(x)}$$

где $\mu(\cdot)$ — нек-рая σ-конечная мера на $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}_{\mathfrak{X}})$, $\{\pi_t,\ t \in T\}$ — семейство априорных распределений на $(\Theta, \mathfrak{B}_\Theta)$. Тогда для любого $t \in T$ сложной гипотезе H_0 можно сопоставить простую гипотезу H_t, согласно к-рой случайная величина X подчиняется вероятностному закону, имеющему плотность вероятности

$$f_t(x) = \int_\Theta p_\theta(x)\, d\pi_t(\theta).$$

Согласно *Неймана — Пирсона лемме* для проверки простой гипотезы H_t против простой альтернативы H_1 существует *наиболее мощный критерий*, построенный на отношении правдоподобия. Пусть β_t — мощность этого критерия, тогда Н. б. р. есть то априорное распределение π_{t*} из семейства $\{\pi_t, t \in T\}$, для к-рого выполняется неравенство $\beta_{t*} \leqslant \beta_t$ для всех $t \in T$. Н. б. р. обладает тем свойством, что плотность вероятности $f_{t*}(x)$ случайной величины X при гипотезе H_{t*} «наименее удалена» от альтернативной плотности $q(x)$, т. е. гипотеза H_{t*} является самой «близкой» из семейства $\{H_t, t \in T\}$ к конкурирующей гипотезе H_1. См. *Бейесовский подход*.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [2] Заксш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975. *М. С. Никулин.*

НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЙСЯ ОТ НУЛЯ МНОГОЧЛЕН — алгебраический многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным единице, имеющий минимальную норму в пространстве $C[a, b]$ или $L_p[a, b]$.

П. Л. Чебышев [1] установил, что среди всех много членов вида

$$Q_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (1)$$

минимальную норму в пространстве $C[a, b]$ имеет единственный многочлен

$$T_n(x) = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \cos n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a},$$

причем

$$\| T_n \|_{C[a, b]} = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

Многочлен

$$U_n(x) = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \frac{\sin(n+1) \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

является единственным Н. у. от н. м. в пространстве $L_1[a, b]$ среди всех многочленов вида (1), при этом

$$\| U_n \|_{L_1[a, b]} = 4\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

В пространстве $L_p[a, b]$, $1 < p < \infty$, Н. у. от н. м. существует и единствен, известен ряд его свойств (см. [2], [5]).

На множестве многочленов вида (1) интеграл

$$\int_a^b Q_n^2(x)\, \rho(x)\, dx, \quad \rho(x) > 0, \qquad (2)$$

будет минимальным тогда и только тогда, когда $Q_n(x)$ ортогонален с весом $\rho(x)$ на интервале (a, b) всем многочленам степени $n-1$. Если

$$a = -1, \ b = 1, \ \rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta,$$

где $\alpha, \beta > -1$, то интеграл (2) минимизируется *Якоби многочленом* (при $\alpha = \beta = 0$ *Лежандра многочленом*) степени n со старшим коэффициентом, равным единице.

Среди тригонометрич. полиномов вида

$$a \cos nx + b \sin nx + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где a и b фиксированы, минимальную норму в пространствах $C[0, 2\pi]$ и $L_p[0, 2\pi]$ при любом $p \geqslant 1$ имеет полином

$$a \cos nx + b \sin nx.$$

Лит.: [1] Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2, М.— Л., 1947; [2] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976; [3] Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; [4] Сегё Г., Ортогональные многочлены, пер. с англ., М., 1962; [5] Никольский С. М., Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; [6] Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1976.

Н. П. Корнейчук, В. П. Моторный.

НАИМЕНЬШЕГО ЧИСЛА ОПЕРАТОР, μ-оператор, оператор минимизации,— способ построения новых функций из других функций, состоящий в следующем. Пусть g есть $(n+1)$-местная арифметич. функция, т. е. функция, аргументы к-рой так же, как и она сама, принимают значения в множестве натуральных чисел. Функция g предполагается частичной функцией, т. е. определенной не обязательно для всех значений аргументов. Говорят, что n-местная арифметич. функция f получается из функции g с помощью Н. ч. о., если выполнено условие: для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n, k$

$$f(k_1, \ldots, k_n) = k$$

тогда и только тогда, когда для всех $l < k$ значения $g(k_1, \ldots, k_n, l)$ определены и отличны от нуля, а значение $g(k_1, \ldots, k_n, k)$ определено и равно нулю. Если f получается из функции g с помощью Н. ч. о., то пишут:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\, [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0].$$

Важным свойством Н. ч. о. является то, что с его помощью из *вычислимой функции* g всегда получается частичная вычислимая функция f. Именно, если имеется алгоритм для вычисления g, то значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ может вычисляться следующим образом. Вычисляем $g(x_1, \ldots, x_n, 0)$. Если процесс вычисления закончится, т. е. значение $g(x_1, \ldots, x_n, 0)$ определено, и $g(x_1, \ldots, x_n, 0)=0$, то полагаем $f(x_1, \ldots, x_n)=0$, а если $g(x_1, \ldots, x_n, 0)\neq 0$, то начинаем вычислять $g(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Если процесс закончится и $g(x_1, \ldots, x_n, 1)=0$, то полагаем $f(x_1, \ldots, x_n)=1$, а если $g(x_1, \ldots, x_n, 1)\neq 0$, то переходим к вычислению $g(x_1, \ldots, x_n, 2)$ и т. д. Процесс вычисления закончится, если найдется такое y, что для всех $z<y$ значение $g(x_1, \ldots, x_n, z)$ определено и отлично от нуля, а $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ определено и равно нулю. Тогда $f(x_1, \ldots, x_n)=y$.

Н. ч. о. играет важную роль в определении класса *частично рекурсивных функций*. *В. Е. Плиско.*

НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ — наименьшее положительное из общих кратных целых, в частности натуральных, чисел $a_1, \ldots, a_n$. Н. о. к. чисел $a_1, \ldots, a_n$ существует, если $a_1 \ldots a_n \neq 0$. Н. о. к. чисел $a_1, \ldots, a_n$ обычно обозначают символом $[a_1, \ldots, a_n]$.

Свойства Н. о. к.:

1) Н. о. к. чисел $a_1, \ldots, a_n$ — делитель любого общего кратного этих чисел;

2) $[a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}]=[[a_1, \ldots, a_n], a_{n+1}]$;

3) если целые числа $a_1, \ldots, a_n$ представлены в виде

$$a_1 = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}, \ \ldots, \ a_n = p_1^{\nu_1} \ldots p_s^{\nu_s},$$

где $p_1, \ldots, p_s$ — различные простые, $\alpha_i \geqslant 0, \ldots, \nu_i \geqslant 0$, $i=1, \ldots, s$, и $\mu_i = \max(\alpha_i, \ldots, \nu_i)$, то

$$[a_1, \ldots, a_n] = p_1^{\mu_1} \ldots p_s^{\mu_s};$$

4) если $ab>0$, то $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, где (a, b) — *наибольший общий делитель* для a и b.

Последнее свойство позволяет находить Н. о. к. двух чисел при помощи *Евклида алгоритма*. Понятие Н. о. к. может быть введено для элементов области целостности, а также для идеалов коммутативного кольца.

Лит.: [1] Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; [2] Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; [3] Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М., Современная математика, пер. с франц., М., 1966.

В. И. Нечаев, А. А. Бухштаб.

НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ МЕТОД — один из методов *ошибок теории* для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки. Н. к. м. применяется также для приближенного представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений. Н. к. м. предложен К. Гауссом (C. Gauss, 1794—95) и А. Лежандром (A. Legendre, 1805—06). Строгое обоснование и установление границ содержательной применимости Н. к. м. даны А. А. Марковым и А. Н. Колмогоровым. В простейшем случае линейных связей (см. ниже) и наблюдений, не содержащих систематич. ошибок, а подверженных лишь случайным ошибкам, оценки неизвестных величин, полученные с помощью Н. к. м., являются линейными функциями от наблюденных значений. Эти оценки не имеют систематич. ошибок, т. е. являются несмещенными (см. *Несмещенная оценка*). Если случайные ошибки наблюдений независимы и подчиняются нормальному распределению, то Н. к. м. дает оценки неизвестных с наименьшей дисперсией, т. е. эти оценки являются эффективными (см. *Статистическое оценивание*). В этом смысле Н. к. м. является наилучшим среди всех остальных методов, позволяющих находить несмещенные оценки. Однако если распределение случайных ошибок существенно отличается от нормального, то Н. к. м. может и не быть наилучшим.

При обосновании Н. к. м. (по Гауссу) предполагается, что «убыток» от замены точного (неизвестного) значения нек-рой величины μ ее приближенным значением X, вычисленным по результатам наблюдений, пропорционален квадрату ошибки $(X-\mu)^2$; оптимальной оценкой считается такая лишенная систематич. ошибки величина X, для к-рой среднее значение $\mathsf{E}(X-\mu)^2$ «убытка» минимально. Именно это требование и составляет основу Н. к. м. В общем случае отыскание оптимальной в смысле Н. к. м. оценки X — задача весьма сложная, поэтому практически эту задачу сужают и в качестве X выбирают линейную функцию от результатов наблюдений, лишенную систематич. ошибки, и такую, для к-рой среднее значение убытка минимально в классе всех линейных функций. Если случайные ошибки наблюдений подчиняются нормальному распределению и оцениваемая величина μ зависит от средних значений результатов наблюдений линейно (случай, весьма часто встречающийся в приложениях Н. к. м.), то решение этой задачи будет одновременно являться и решением общей задачи. При этом оптимальная оценка X также подчиняется нормальному распределению со средним значением μ и, следовательно, плотность вероятности случайной величины X

$$p(x;\ \mu,\ \sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

достигает максимума в точке $x=\mu$ (это свойство и выражает точное содержание распространенного в теории ошибок утверждения: «оценка X, вычисленная согласно Н. к. м.,— наиболее вероятное значение неизвестного параметра μ»).

С л у ч а й о д н о г о н е и з в е с т н о г о. Пусть для оценки значения неизвестной величины μ произведено n независимых наблюдений, давших результаты $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, т. е. $Y_1=\mu+\delta_1$, $Y_2=\mu+\delta_2$, $\ldots$, $Y_n=\mu+\delta_n$, где $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — случайные ошибки (по определению, принятому в классич. теории ошибок, с л у ч а й н ы е о ш и б к и — независимые случайные величины с нулевым математич. ожиданием: $\mathsf{E}\delta_i=0$; если же $\mathsf{E}\delta_i\neq 0$, то $\mathsf{E}\delta_i$ наз. с и с т е м а т и ч е с к и м и о ш и б к а м и). Согласно Н. к. м. в качестве оценки величины μ принимают такое X, для к-рого будет наименьшей сумма квадратов (отсюда и само название метода):

$$S(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i(X-Y_i)^2,$$

где

$$p_i=k/\sigma_i^2 \text{ и } \sigma_i^2=\mathsf{D}\delta_i=\mathsf{E}\delta_i^2$$

(коэффициент $k>0$ можно выбирать произвольно). Величину p_i наз. в е с о м, а σ_i — к в а д р а т и ч н ы м о т к л о н е н и е м измерения с номером i. В частности, если все измерения равноточны, то $\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_n$, и в этом случае можно положить $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$; если же каждое Y_i — арифметич. среднее из n_i равноточных измерений, то полагают $p_i=n_i$.

Сумма $S(X)$ будет наименьшей, если в качестве X выбрать взвешенное среднее:

$$X=\overline{Y}=\frac{1}{P}\sum p_iY_i, \text{ где } P=\sum p_i.$$

Оценка $\overline{Y}$ величины μ лишена систематич. ошибки, имеет вес P и дисперсию $D\overline{Y}=k/P$. В частности, если все измерения равноточны, то Y — арифметич. среднее результатов измерений:

$$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum Y_i \text{ и } \mathsf{D}\overline{Y}=\sigma^2/n.$$

При нек-рых общих предположениях можно показать, что если количество наблюдений n достаточно велико, то распределение оценки $\overline{Y}$ мало отличается от

нормального с математич. ожиданием μ и дисперсией k/P. В этом случае абсолютная погрешность приближенного равенства $\mu \approx \overline{Y}$ меньше $t\sqrt{k/P}$ с вероятностью, близкой к значению интеграла

$$I(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-u^2/2} du \qquad (1)$$

(напр., $I(1{,}96) = 0{,}950$; $I(2{,}58) = 0{,}990$; $I(3{,}00) - 0{,}997$).

Если веса измерений p_i заданы, а множитель k до наблюдений остается неопределенным, то этот множитель и дисперсия оценки $\overline{Y}$ могут быть оценены по формулам:

$$k \approx S(\overline{Y})/(n-1)$$

и

$$\mathrm{D}\overline{Y} = k/P \approx s^2 = S(\overline{Y})/[(n-1)P]$$

(обе оценки лишены систематич. ошибок).

В том практически важном случае, когда ошибки δ_i подчиняются нормальному распределению, можно найти точное значение вероятности, с к-рой абсолютная погрешность приближенного равенства $\mu \approx \overline{Y}$ окажется меньше ts (t — произвольное положительное число):

$$I_{n-1}(t) = C_{n-1} \int_0^t \left(1 + \frac{v^2}{n-1}\right)^{-n/2} dv, \qquad (2)$$

где постоянная C_{n-1} выбрана таким образом, чтобы выполнялось условие $I_{n-1}(\infty) = 1$ (*Стьюдента распределение* с $n-1$ степенями свободы). При больших n формулу (2) можно заменить формулой (1). Однако применение формулы (1) при небольших n привело бы к грубым ошибкам. Так, напр., согласно (1) значению $I = 0{,}99$ соответствует $t = 2{,}58$; истинные значения t, определяемые при малых n как решения соответствующих уравнений $I_{n-1}(t) = 0{,}99$, приведены в таблице:

n	2	3	4	5	10	20	30
t	63,66	9,92	5,84	4,60	3,25	2,86	2,76

Пример. Для определения массы нек-рого тела произведено 10 независимых равноточных взвешиваний, давших результаты Y_i (в $г$):

Y_i	18,41	18,42	18,43	18,44	18,45	18,46
n_i	1	3	3	1	1	1

(здесь n_i — число случаев, в к-рых наблюдалась масса Y_i; $n - \Sigma n_i = 10$). Так как все взвешивания равноточные, то следует положить $p_i = n_i$ и в качестве оценки для неизвестного веса μ выбрать величину $Y = \Sigma n_i Y_i / \Sigma n_i = 18{,}431$. Задавая, напр., $I_9 = 0{,}95$, по таблицам распределения Стьюдента с девятью степенями свободы можно найти, что $t = 2{,}262$, и поэтому в качестве предельной абсолютной погрешности приближенного равенства $\mu \approx 18{,}431$ следует принять величину

$$ts = t\sqrt{\sum n_i (Y_i - \overline{Y})^2/90} = 2{,}262 \cdot 0{,}0048 = 0{,}011.$$

Таким образом, $18{,}420 < \mu < 18{,}422$.

Случай нескольких неизвестных (линейные связи). Пусть n результатов измерений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ связаны с m неизвестными величинами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ($m < n$) независимыми линейными соотношениями

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + \delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3)$$

где a_{ij} — известные коэффициенты, а δ_i — независимые случайные ошибки измерений. Требуется оценить неиз-

вестные величины x_j (эту задачу можно рассматривать как обобщение предыдущей, в к-рой

$$\mu = x_1 \text{ и } m = a_{i1} = 1;\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как $\mathsf{E}\delta_i = 0$, то средние значения результатов измерений $y_i = \mathsf{E}Y_i$ связаны с неизвестными величинами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейными уравнениями (линейные связи):

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Следовательно, искомые величины x_i представляют собой решение системы (4), уравнения к-рой предполагаются совместными. Точные значения измеряемых величин y_i и случайные ошибки δ_i обычно неизвестны, поэтому вместо систем (3) и (4) принято записывать так наз. условные уравнения

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Согласно Н. к. м. в качестве оценок для неизвестных x_j применяют такие величины X_j, для к-рых сумма квадратов отклонений

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(Y_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j \right)^2$$

будет наименьшей (как и в предыдущем случае, p_i — вес измерения, Y_i — величина, обратно пропорциональная дисперсии случайной ошибки δ_i). Условные уравнения, как правило, несовместны, т. е. при любых значениях X_j разности

$$\Delta_i = Y_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

не могут, вообще говоря, все обратиться в нуль. Н. к. м. предписывает в качестве оценок выбрать такие значения X_j, к-рые минимизируют сумму S. В тех исключительных случаях, когда условные уравнения совместны и, значит, обладают решением, это решение совпадает с оценками, полученными согласно Н. к. м.

Сумма квадратов S представляет собой квадратичный многочлен относительно переменных X_j; этот многочлен достигает минимума при таких значениях $X_1, X_2, \ldots, X_m$, при к-рых обращаются в нуль все первые частные производные:

$$\frac{\partial S}{\partial X_j} = -2 \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta_i = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Отсюда следует, что оценки X_j, полученные согласно Н. к. м., должны удовлетворять системе т. н. нормальных уравнений, к-рая в обозначениях, предложенных К. Гауссом, имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m} [p a_j a_l] X_j = [pY a_l], \quad l = 1, 2, \ldots, m, \qquad (5)$$

где

$$[p a_j a_l] = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} a_{il}$$

и

$$[pY a_l] = \sum_{i=1}^{n} p_i Y_i a_{il}.$$

Оценки, получающиеся в результате решения системы нормальных уравнений, лишены систематич. ошибок ($\mathsf{E}X_j = x_j$); дисперсии $\mathsf{D}X_j$ величин X_j равны kd_{jj}/d, где d — определитель системы (5), а d_{jj} — минор, соответствующий диагональному элементу $[p a_j a_j]$ (иными словами, d_{jj}/d — вес оценки X_j). Если множитель пропорциональности k (k наз. дисперсией на единицу веса) заранее неизвестен, то для его оценки, а также для оценки дисперсии $\mathsf{D}X_j$ служат формулы

$$k \approx S/(n-m) \quad \text{и} \quad \mathsf{D}X_j \approx s_j^2 = S d_{jj}/d\ (n-m)$$

(S — минимальное значение исходной суммы квадра-

тов). При нек-рых общих предположениях можно показать, что если количество наблюдений n достаточно велико, то абсолютная погрешность приближенного равенства $x_j \approx X_j$ меньше ts_j с вероятностью, близкой к значению интеграла (1). Если случайные ошибки наблюдений δ_i подчиняются нормальному распределению, то все отношения $(X_j - x_j)/s_j$ распределены по закону Стьюдента с $n-m$ степенями свободы (точная оценка абсолютной погрешности приближенного равенства производится здесь с помощью интеграла (2) так же, как в случае одного неизвестного). Кроме того, минимальное значение суммы S в вероятностном смысле не зависит от $X_1, X_2, \ldots, X_m$, и потому приближенные значения дисперсий оценок $\mathsf{D}X_j \approx s_j^2$ не зависят от самих оценок X_j.

Один из наиболее типичных случаев применения Н. к. м.— «выравнивание» таких результатов наблюдений Y_j, для к-рых в уравнениях (3) $a_{ij} = a_j(t_i)$, где $a_j(t)$ — известные функции нек-рого параметра t (если t — время, то $t_1, t_2, \ldots$ — те моменты времени, в к-рые производились наблюдения). Особенно часто встречается в приложениях случай т. н. параболической интерполяции, когда $a_j(t)$ — многочлены (напр., $a_1(t) - 1$, $a_2(t) = t$, $a_3(t) = t^2$, ...); если $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots = t_n - t_{n-1}$, а наблюдения равноточные, то для вычисления оценок X_j можно воспользоваться таблицами ортогональных многочленов. Другой важный для приложений случай — т. н. гармоническая интерполяция, когда в качестве $a_j(t)$ выбирают тригонометрич. функции (напр., $a_j(t) = \cos(j-1)t$, $j = 1, 2, \ldots, m$).

Пример. Для оценки точности одного из методов химич. анализа этим методом определялась концентрация CaO в десяти эталонных пробах заранее известного состава. Результаты наблюдений указаны в таблице (i — номер эксперимента, t_i — истинная концентрация CaO, T_i — концентрация CaO, определенная в результате химич. анализа, $Y_i = T_i - t_i$ — ошибка химич. анализа):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	12,5	16	20	25	31	36	40	40
−0,3	−0,2	−0,4	−0,4	−0,2	−0,5	+0,1	−0,5	−0,6	−0,5

Если результаты химич. анализа не имеют систематич. ошибок, то $\mathsf{E}Y_i = 0$. Если же такие ошибки имеются, то в первом приближении их можно представить в виде: $\mathsf{E}Y_i = \alpha + \beta t_i$ (α наз. постоянной ошибкой, а βt_i — методической ошибкой) или, что то же самое,

$$\mathsf{E}Y_i = (\alpha + \beta\bar{t}) + \beta(t_i - \bar{t}),$$

где

$$\bar{t} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} t_i = 23{,}25.$$

Для отыскания оценок α и β достаточно оценить величины $x_1 = \alpha + \beta\bar{t}$ и $x_2 = \beta$. Условные уравнения в данном случае имеют вид

$$Y_i = x_1 + x_2(t_i - \bar{t}), \quad i = 1, 2, \ldots, 10,$$

поэтому $a_{i1} = 1$, $a_{i2} = t_i - \bar{t}$ (согласно предположению о равноточности наблюдений все $p_i = 1$). Так как $[a_1 a_2] = [a_2 a_1] = \Sigma(t_i - \bar{t}) = 0$, то система нормальных уравнений записывается особенно просто:

$$[a_1 a_1] X_1 = [Y a_1]; \quad [a_2 a_2] X_2 = [Y a_2],$$

где

$$[a_1a_1]=10,\ [a_2a_2]-\sum(t_i-\bar{t})^2=1569,$$

$$[Ya_1]=\sum Y_i=-3{,}5,$$

$$[Ya_2]=\sum Y_i\,(t_i-\bar{t})=-8{,}225.$$

Дисперсии компонент решения этой системы суть

$$\mathrm{D}X_1=\frac{k}{[a_1a_1]}=\frac{k}{10}\quad\text{и}\quad \mathrm{D}X_2=\frac{k}{[a_2a_2]}=\frac{k}{1569},$$

где k — неизвестная дисперсия на единицу веса (в данном случае k — дисперсия любой из величин Y_i). Так как в этом примере компоненты решения принимают значения $X_1=-0{,}35$, и $X_2=-0{,}00524$, то

$$k\approx S_j/(n-m)=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{10}[Y_i-X_1-X_2(t_i-\bar{t})]^2=0{,}0427,$$

$$\mathrm{D}X_1\approx s_1^2=0{,}00427,\ \mathrm{D}X_2\approx s_2^2=0{,}000272,$$

$$s_1=0{,}065,\quad s_2=0{,}00522.$$

Если случайные ошибки наблюдений подчиняются нормальному распределению, то отношения $|X_j-x_j|/s_j$, $j=1, 2$, распределены по закону Стьюдента. В частности, если результаты наблюдений лишены систематич. ошибок, то $x_1=x_1=0$, и, значит, закону Стьюдента должны подчиняться отношения $|X_1|/s_1$ и $|X_2|/s_2$. С помощью таблиц распределения Стьюдента с $n-m=8$ степенями свободы можно убедиться, что если действительно $x_1=x_2=0$, то с вероятностью 0,999 каждое из этих отношений не должно превосходить 5,04 и с вероятностью 0,95 не должно превосходить 2,31. В данном случае $|X_1|/s_1=5{,}38>5{,}04$, поэтому гипотезу отсутствия систематич. ошибок целесообразно отвергнуть; в то же время следует признать, что гипотеза об отсутствии методич. ошибки ($x_2=0$) не противоречит результатам наблюдений, т. к. $|X_2|/s_2=1{,}004<2{,}31$. Таким образом, можно заключить, что для определения t по результату наблюдения T целесообразно пользоваться приближенной формулой $t=T+0{,}35$.

Случай нескольких неизвестных (нелинейные связи). Пусть n результатов измерений Y_i связаны с m неизвестными x_j ($m<n$) функциональной зависимостью $Y_i=f_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)+\delta_i$; $i=1, 2, \ldots, n$, где δ_i — независимые случайные ошибки, а функции f_i (в общем случае нелинейные) дифференцируемы. Согласно Н. к. м. в качестве оценок для x_j принимают такие величины X_j, для к-рых сумма квадратов

$$S=\sum_{i=1}^{n}p_i\,[Y_i-f_i\,(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_m)]^2$$

будет наименьшей. Так как функции f_i нелинейные, то решение нормальных уравнений $\partial S/\partial X_j=0$ в этом случае может представлять значительные трудности. Иногда нелинейные связи каким-либо преобразованием могут быть приведены к линейным.

Напр., при намагничивании железа напряженность магнитного поля H связана с магнитной индукцией B эмпирич. формулой $B=H/(x_1+Hx_2)$ (коэффициенты x_1 и x_2 определяются по измеренным значениям B_i при заданных H_i). Индукция B — нелинейная функция от x_1 и x_2. Однако обратная величина индукции зависит от x_1 и x_2 линейно. Применение Н. к. м. к исходному и преобразованному равенствам дает, вообще говоря, различные оценки для неизвестных x_1 и x_2, но если дисперсия случайных ошибок измерения индукции значительно меньше измеряемых величин B_i, то $\mathrm{D}(1/B)\approx\approx B^{-4}$. Поэтому величинам $1/B_i$ следует приписать веса $(1/B_i)^4$; естественно ожидать, что при этих условиях различие оценок в нелинейном и линейном случаях будет практически несущественным.

В тех случаях, когда не удается тождественными преобразованиями заменить нелинейные уравнения линейными, пользуются другим способом линеаризации. Из заданных n уравнений отбирают какие-либо m уравнений, решение к-рых $X_1^0, X_2^0, \ldots, X_m^0$ принимают за нулевое приближение для неизвестных x_j. Если положить $\xi_j = X_j - X_j^0$, то систему условных уравнений можно записать в виде:

$$Y_i = f_i(X_1^0 + \xi_1, X_2^0 + \xi_2, \ldots, X_m^0 + \xi_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Разлагая правые части в ряд по степеням ξ_j и ограничиваясь линейными членами, получают

$$Y_i - (f_i)_0 = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 \xi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $(f_i)_0$ и $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0$ — значение функции f_i и ее производных по x_j при $x_1 = X_1^0$, $x_2 = X_2^0$, ..., $x_m = X_m^0$. Эта система уравнений линейна, и поэтому для оценки неизвестных ξ_j легко может быть применен Н. к. м. Оценив ξ_j, получают первое приближение для неизвестных $X_j^1 = X_j^0 + \xi_j$. Величины X_j^1 берут за исходное приближение, и всю операцию повторяют, пока с заданной точностью не совпадут два последовательных приближения. Если дисперсии ошибок δ_i уменьшаются, то процесс сходится.

Очень часто при малых $D\delta_i$ оказывается вполне достаточным уже первое приближение: не имеет смысла требовать нахождения X_j с точностью, значительно превышающей $\sqrt{DX_j}$.

Во многих практически важных случаях (и в частности, при оценке сложных нелинейных связей) количество неизвестных параметров бывает весьма большим, и поэтому реализация Н. к. м. оказывается эффективной лишь при использовании современной вычислительной техники.

Лит.: [1] Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [2] Колмогоров А. Н., «Успехи матем. наук», 1946, т. 1, в. 1, с. 57—70; [3] Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; [4] Налимов В. В., Применение математической статистики при анализе вещества, М., 1960; [5] Helmert F. R., Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, 3 Aufl., Lpz.— B., 1924.

Л. Н. Большев.

НАИМЕНЬШИХ РЕАКЦИЙ ПРИНЦИП — следствие из *Гаусса принципа*, получаемое из последнего с помощью уравнений, выражающих второй закон Ньютона для точек несвободной системы (см. [1]). Согласно Н. р. п. для действительного движения системы величина

$$\sum_{\nu} \frac{R_\nu^2}{2m_\nu}$$

есть минимум в классе мыслимых по Гауссу движений. Здесь R_ν — реакции связей, m_ν — массы точек системы.

Лит.: [1] Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1962, с. 493.

В. В. Румянцев.

НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА МЕТОД — частный случай метода спуска, когда направление g^k, указывающее спуск, выбирается противоположным $\operatorname{grad} f(x^k)$. Формулы Н. с. м. имеют вид

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k f'(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где параметры $\{\alpha_k\}$ выбираются из условия максимального убывания на каждом шаге функции $f(x)$. Если функция f дважды непрерывно дифференцируема и матрица f'' ее вторых производных удовлетворяет при любых x, y неравенству

$$m\|y\|^2 \leqslant (f''(x)\, y,\, y) \leqslant M\|y\|^2$$

с константами $M \geqslant m > 0$, то (см. [2], [4]) последовательность $\{x^k\}$ сходится к решению x^* задачи минимизации

функции f со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $q<1$.

Широкое применение Н. с. м. нашел при решении систем линейных алгебраич. уравнений $Ax=f$ с эрмитовой и положительно определенной матрицей A. В действительном случае задача решения этой системы эквивалентна нахождению вектора x^*, минимизирующего в пространстве n-мерных векторов функционал

$$f(x)=(Ax,\ x)-2(x,\ f). \qquad (*)$$

Применительно к (*) формулы Н. с. м. принимают вид

$$x^{k+1}=x^k-\alpha_k(Ax^k-f),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

причем значение α_k определяется из условия минимума функционала (*) по формуле

$$\alpha_k=(\xi^k,\ \xi^k)/(A\xi^k,\ \xi^k),\ \xi^k=Ax^k-f.$$

Если спектр матрицы A принадлежит отрезку действительной оси $[m,\ M]$, где $M\geqslant m>0$, то последовательность $\{x^*\}$ сходится к решению x^* со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $q=(M-m)/(M+m)$.

Н. с. м. может быть применен для решения операторного уравнения $Au=f$ с самосопряженным положительно определенным ограниченным оператором A. Если оператор A не удовлетворяет наложенным условиям, задачу можно симметрировать, сведя к задаче

$$A^*Au=A^*f,$$

и уже затем применить Н. с. м. (см. также *Минимальных невязок метод*).

Лит.: [1] Канторович Л. В., «Докл. АН СССР», 1947, т. 56, № 3, с. 233—36; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [3] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963; [4] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [5] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975. *Ю. А. Кузнецов.*

НАЙКВИСТА КРИТЕРИЙ — необходимое и достаточное условие устойчивости замкнутой линейной системы автоматич. регулирования (системы с обратной связью), формулируемое в терминах свойств разомкнутой системы (системы с разомкнутой цепью обратной связи).

Пусть рассматривается нек-рая линейная система автоматич. регулирования с обратной связью и пусть

$$W(p)=\frac{M(p)}{N(p)}$$

— *передаточная функция* соответствующей разомкнутой системы, причем степень многочлена $M(z)$ не выше степени многочлена $N(z)$. Комплекснозначная функция $z=W(i\omega)$ действительного переменного $\omega\in[0,\ \infty)$ (амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы) описывает в комплексной плоскости z кривую, наз. диаграммой Найквиста. Пусть характеристич. многочлен $N(z)$ разомкнутой системы имеет k, $0\leqslant k\leqslant n$, корней с положительными и $n-k$ корней с отрицательными действительными частями. Н. к. гласит: замкнутая система автоматич. регулирования асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда диаграмма Найквиста охватывает точку $z=-1$ против хода часовой стрелки $k/2$ раз (эквивалентное условие: когда вектор с началом -1 и концом $W(i\omega)$ при возрастании ω от 0 до $+\infty$ поворачивается в положительном направлении на угол πk).

Этот критерий впервые был предложен Х. Найквистом [1] для усилителей с обратной связью; он представляет собой один из частотных критериев устойчивости линейных систем автоматич. регулирования (примыкающий, напр., к *Михайлова критерию*, см. [2], [3]). Важно отметить, что если уравнения нек-рых элементов системы неизвестны, то диаграмму Найквиста можно построить экспериментально, подавая гармонич. сигнал с

изменяющейся частотой на вход при разомкнутой цепи обратной связи [4]. Известны обобщения Н. к. на системы автоматич. регулирования с запаздыванием и на импульсные системы (см. [5]).

Лит.: [1] Nyquist H., «Bell System Techn. J.», 1932, v. 11, № 1, p. 126—47; [2] Булгаков Б. В., Колебания, М., 1954; [3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; [4] Ройтенберг Я. Н., Автоматическое управление, 2 изд., М., 1978; [5] Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э., Математические основы теории управляемых систем, М., 1969.

Н. Х. Розов.

НАКЛОННАЯ к прямой l — прямая, пересекающая прямую l под углом, отличным от прямого. **Н. к плоскости** — прямая, пересекающая эту плоскость под углом, отличным от прямого. *БСЭ-3.*

НАКОПЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ при численном решении алгебраических уравнений — суммарное влияние округлений, сделанных на отдельных шагах вычислительного процесса, на точность полученного решения линейной алгебраич. системы. Наиболее распространенным способом априорной оценки суммарного влияния ошибок округления в численных методах линейной алгебры является схема т. н. обратного анализа. В применении к решению системы линейных алгебраич. уравнений

$$Ax=b \tag{1}$$

схема обратного анализа заключается в следующем. Вычисленное прямым методом M решение x_M не удовлетворяет (1), но может быть представлено как точное решение возмущенной системы

$$(A+F_M)\,x=b+k_M. \tag{2}$$

Качество прямого метода оценивается по наилучшей априорной оценке, к-рую можно дать для норм матрицы F_M и вектора k_M. Такие «наилучшие» F_M и k_M наз. соответственно матрицей и вектором эквивалентного возмущения для метода M.

Если оценки для F_M и k_M имеются, то теоретически ошибка приближенного решения x_M может быть оценена неравенством

$$\frac{\|x-x_M\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\|A^{-1}\|\|F_M\|}\left(\frac{\|F_M\|}{\|A\|}+\frac{\|k_M\|}{\|b\|}\right). \tag{3}$$

Здесь $\operatorname{cond}(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы A, а матричная норма в (3) предполагается подчиненной векторной норме $\|\ \|$.

В действительности оценка для $\|A^{-1}\|$ редко бывает известна, и основной смысл (2) состоит в возможности сравнения качества различных методов. Ниже приводится вид нек-рых типичных оценок для матрицы F_M.

Для методов с ортогональными преобразованиями и арифметики с плавающей запятой (в системе (1) A и b считаются действительными)

$$\|F_M\|_E\leqslant f(n)\cdot\|A\|_E\cdot\varepsilon. \tag{4}$$

В этой оценке ε — относительная точность арифметич. операций в ЭВМ, $\|A\|_E=\left(\sum a_{ij}^2\right)^{1/2}$ — евклидова матричная норма, $f(n)$ — функция вида Cn^k, где n — порядок системы. Точные значения константы C и показателя k определяются такими деталями вычислительного процесса, как способ округления, использование операции накопления скалярных произведений и т. д. Наиболее часто $k=1$ или $3/2$.

В случае методов типа Гаусса в правую часть оценки (4) входит еще множитель $g(A)$, отражающий возможность роста элементов матрицы A на промежуточных шагах метода по сравнению с первоначальным уровнем (такой рост отсутствует в ортогональных методах). Чтобы уменьшить значение $g(A)$, применяют различные способы выбора ведущего элемента, препятствующие возрастанию элементов матрицы.

Для *квадратного корня метода*, к-рый применяется обычно в случае положительно определенной матрицы A, получена наиболее сильная оценка

$$\| F_M \|_E \leqslant C \| A \|_E \cdot \varepsilon.$$

Существуют прямые методы (Жордана, окаймления, сопряженных градиентов), для к-рых непосредственное применение схемы обратного анализа не приводит к эффективным оценкам. В этих случаях при исследовании Н. п. применяются и иные соображения (см. [6] – [9]).

Лит.: [1] Givens W., «U. S. Atomic Energy Commiss. Repts. Ser. OR NL», 1954, № 1574; [2] Wilkinson J. H., Rounding errors in algebraic processes, L., 1963; [3] Уилкинсон Дж.-Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [4] Воеводин В. В., Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры, М., 1969; [5] его же, Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; [6] Peters G., Wilkinson J. H., «Communs Assoc. Comput. Math.», 1975, v. 18, № 1, p. 20–24; [7] Broyden C. G., «J. Inst. Math. and Appl.», 1974, v. 14, № 2, p. 131–40; [8] Reid J. K., в кн.: Large Sparse Sets of Linear Equations, L.– N. Y., 1971, p. 231–254; [9] Икрамов Х. Д., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1978, т. 18, № 3, с. 531–45. *Х. Д. Икрамов.*

Н. п. округления или погрешности метода возникает при решении задач, где решение является результатом большого числа последовательно выполняемых арифметич. операций.

Значительная часть таких задач связана с решением алгебраич. задач, линейных или нелинейных (см. выше). В свою очередь среди алгебраич. задач наиболее распространены задачи, возникающие при аппроксимации дифференциальных уравнений. Этим задачам свойственны нек-рые специфич. особенности.

Н. п. метода решения задачи происходит по тем же или по более простым законам, что и Н. п. вычислительной погрешности; Н. п. метода исследуется при оценке метода решения задачи.

При исследовании накопления вычислительной погрешности различают два подхода. В первом случае считают, что вычислительные погрешности на каждом шаге вносятся самым неблагоприятным образом и получают мажорантную оценку погрешности. Во втором случае считают, что эти погрешности случайны с определенным законом распределения.

Характер Н. п. зависит от решаемой задачи, метода решения и ряда других факторов, на первый взгляд могущих показаться несущественными; сюда относятся форма записи чисел в ЭВМ (с фиксированной запятой или с плавающей запятой), порядок выполнения арифметич. операций и т. д. Напр., в задаче вычисления суммы N чисел

$$A_N = a_1 + \ldots + a_N$$

существенен порядок выполнения операций. Пусть вычисления производятся на машине с плавающей запятой с t двоичными разрядами и все числа лежат в пределах $1/2 < |a_n| \leqslant 1$. При непосредственном вычислении A_N с помощью рекуррентной формулы

$$A_{n+1} = A_n + a_n, \quad n = 1, \ldots, N-1,$$

мажорантная оценка погрешности имеет порядок $2^{-t}N$. Можно поступить иначе (см. [1]). При вычислении попарных сумм $A_k^1 = a_{2k-1} + a_{2k}$ (если $N = 2l+1$ нечетно) полагают $A_{l+1}^1 = a_{2l+1}$. Далее вычисляются их попарные суммы $A_k^2 = A_{2k-1}^1 + A_{2k}^1$ и т. д. При $2^{m-1} < N \leqslant 2^m$ после m шагов образования попарных сумм по формулам

$$A_k^q = A_{2k-1}^{q-1} + A_{2k}^{q-1}, \quad A_k^0 \equiv a_k,$$

получают $A_1^m = A_N$; мажорантная оценка погрешности порядка $2^{-t}\log_2 N$.

В типичных задачах величины a_m вычисляются по формулам, в частности рекуррентным, или поступают последовательно в оперативную память ЭВМ; в этих

случаях применение описанного приема приводит к увеличению загрузки памяти ЭВМ. Однако можно организовать последовательность вычислений так, что загрузка оперативной памяти не будет превосходить $\sim\log_2 N$ ячеек.

При численном решении дифференциальных уравнений возможны следующие случаи. При стремлении шага сетки h к нулю погрешность растет как $(a(h))^{h^{-q}}$, где $q>0$, а $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\,|a(h)|>1$. Такие методы решения задач относят к классу неустойчивых. Их применение носит эпизодич. характер.

Для устойчивых методов характерен рост погрешности как $A(h)h^{-q}$, где $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\,|A(h)|<\infty$. Оценка погрешности таких методов обычно производится следующим образом. Строится уравнение относительно возмущения, вносимого или округлением, или погрешностями метода и затем исследуется решение этого уравнения (см. [2], [3]).

В более сложных случаях применяется метод эквивалентных возмущений (см. [1], [4]), развитый в отношении задачи исследования накопления вычислительной погрешности при решении дифференциальных уравнений (см. [3], [5], [6]). Вычисления по нек-рой расчетной схеме с округлениями рассматриваются как вычисления без округлений, но для уравнения с возмущенными коэффициентами. Сравнивая решение исходного сеточного уравнения с решением уравнения с возмущенными коэффициентами получают оценку погрешности.

Уделяется существенное внимание выбору метода по возможности с меньшими значениями q и $A(h)$. При фиксированном методе решения задачи расчетные формулы обычно удается преобразовать к виду, где $q\leqslant 1$ (см. [3], [5]). Это особенно существенно в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, где число шагов в отдельных случаях оказывается очень большим.

Величина $A(h)$ может сильно расти с ростом промежутка интегрирования. Поэтому стараются применять методы по возможности с меньшим значением $A(h)$. В случае задачи Коши ошибка округления на каждом конкретном шаге по отношению к последующим шагам может рассматриваться как ошибка в начальном условии. Поэтому нижняя грань $A(h)$ зависит от характеристики расхождения близких решений дифференциального уравнения, определяемого уравнением в вариациях.

В случае численного решения обыкновенного дифференциального уравнения $y'=f(x,\ y)$ уравнение в вариациях имеет вид

$$\eta'=f_y(x,\ y)\,\eta+S,$$

и потому при решении задачи на отрезке $(x_0,\ X)$ нельзя рассчитывать на константу $A(h)$ в мажорантной оценке вычислительной погрешности существенно лучшую, чем

$$\int_{x_0}^{X} e^{\int_x^X f_y(t,\ y(t))\,dt}\,dx.$$

Поэтому при решении этой задачи наиболее употребительны одношаговые методы типа Рунге — Кутта или методы типа Адамса (см. [3], [7]), где Н. п. в основном определяется решением уравнения в вариациях.

Для ряда методов главный член погрешности метода накапливается по подобному закону, в то время как вычислительная погрешность накапливается существенно быстрее (см. [3]). Область практич. применимости таких методов оказывается существенно уже.

Накопление вычислительной погрешности существенно зависит от метода, применяемого для решения сеточной задачи. Напр., при решении сеточных краевых за-

дач, соответствующих обыкновенным дифференциальным уравнениям, методами стрельбы и прогонки Н. п. имеет характер $A(h)h^{-q}$, где q одно и то же. Значения $A(h)$ у этих методов могут отличаться настолько, что в определенной ситуации один из методов становится неприменимым. При решении методом пристрелки сеточной краевой задачи для уравнения Лапласа Н. п. имеет характер $c^{1/h}$, $c>1$, а в случае метода прогонки Ah^{-q}. При вероятностном подходе к исследованию Н. п. в одних случаях априорно предполагают какой-то закон распределения погрешности (см. [2]), в других случаях вводят меру на пространстве рассматриваемых задач и, исходя из этой меры, получают закон распределения погрешностей округления (см. [8], [9]).

При умеренной точности решения задачи мажорантные и вероятностные подходы к оценке накопления вычислительной погрешности обычно дают качественно одинаковые результаты: или в обоих случаях Н. п. происходит в допустимых пределах, или в обоих случаях Н. п. превосходит такие пределы.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; [2] Шура-Бура М. Р., «Прикл. матем. и механ.», 1952, т. 16, № 5, с. 575–88; [3] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [4] Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970; [5] Бахвалов Н. С., в кн.: Вычислительные методы и программирование, в. 1, М., 1962, с. 69—79; [6] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; [7] Бахвалов Н. С., «Докл. АН СССР», 1955, т. 104, № 5, с. 683—86; [8] его же, «Ж. вычислит. матем. и матем. физики», 1964; т. 4, № 3, с. 399—404; [9] Лапшин Е. А., там же, 1971, т. 11, № 6, с. 1425—36.

Н. С. Бахвалов.

НАКОПЛЕНИЯ ТОЧКА множества A — точка x топологич. пространства X такая, что в любой ее окрестности есть отличная от x точка множества A. У множества A в пространстве может быть много Н. т., но может не быть ни одной. Напр., любое действительное число является Н. т. для множества всех рациональных чисел по отношению к обычной топологии. В дискретном пространстве ни у одного множества нет ни одной Н. т. Множество всех Н. т. множества A в пространстве X наз. производным множеством (от A). В T_1-пространстве любая окрестность Н. т. множества содержит бесконечно много точек этого множества.

Следует отличать понятие Н. т. от понятий *прикосновения точки* и *полного накопления точки*. В частности, всякая точка множества является его точкой прикосновения, точкой же накопления его она может и не быть (пример — дискретное пространство).

А. В. Архангельский.

НАКРЫВАЮЩАЯ ГОМОТОПИЯ для гомотопии F_t отображения $F_0 : Z_t \to Y$ при заданном отображении $p : X \to Y$ — гомотопия $G_t : Z \to X$ такая, что $pG_t = F_t$. При этом, если накрывающее отображение G_0 для отображения F_0 было задано заранее, то G_t продолжает G_0. Аксиома накрывающей гомотопии в сильной форме требует, чтобы для данного отображения $p : X \to Y$ любой гомотопии $F_t : Z \to Y$ с паракомпактным Z и любого $G_0 (pG_0 = F_0)$ имелось бы продолжение G_0 до Н. г. G_t. В этом случае p наз. расслоением Гуревича. Наиболее важным примером их служат *локально тривиальные расслоения*. Если в этом определении требовать лишь, чтобы Z было конечным полиэдром, то p наз. расслоением Серра.

Пусть X и Y линейно связны и p_A — пространство путей в A (т. е. непрерывных отображений $q : [0, 1] \to A$). Пусть задано непрерывное отображение

$$\mu : D \longrightarrow P_X,$$

где

$$D = \{(x, q) \mid x \in X,\ q \in P_Y,\ p(x) = q(0)\} \subset X \times P_Y,$$

и такое, что $\mu(x, q)$ начинается в точке x и накрывает q. Тогда формула $G_t(x) = \mu(G_0(x), F_t(x))$ дает продолжение

накрывающего отображения G_0 до Н. г. G_t. В частности, такое отображение M единственным образом определяется для *накрытий*, а также для гладкого векторного расслоения с фиксированной связностью. Выполнение аксиомы Н. г. в форме Серра позволяет построить точную гомотопич. последовательность расслоения (см. *Гомотопическая группа*). *А. В. Чернавский.*

НАКРЫВАЮЩАЯ ПОВЕРХНОСТЬ — то же, что двумерное *накрытие*.

НАКРЫТИЕ — отображение $p : X \to Y$ пространства X на пространство Y, при к-ром прообраз нек-рой окрестности $U(y)$ каждой точки $y \in Y$ распадается на открытые подмножества, гомеоморфно отображающиеся посредством p на $U(y)$. Эквивалентно: p — *локально тривиальное расслоение* с дискретным слоем.

Обычно Н. рассматривается в предположении связности X и Y и также локальной связности и локальной односвязности Y. При этих предположениях устанавливается связь между фундаментальными группами $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(Y, y_0)$: если $p(x_0)=y_0$, то индуцированный гомоморфизм p_* отображает $\pi_1(X, x_0)$ изоморфно на подгруппу в $\pi_1(Y, y_0)$ и, меняя точку x_0 в $p^{-1}(y)$, можно получить в точности все подгруппы из нек-рого класса сопряженных подгрупп. Если этот класс состоит из одной подгруппы H (т. е. H — нормальный делитель), то Н. наз. регулярным. В этом случае возникает свободное действие группы $G=\pi_1(Y, y_0)/H$ на X, причем p оказывается факторотображением на пространство орбит Y. Это действие порождается поднятием петель: если петле $q : [0, 1] \to Y$, $q(0) \quad q(1)=y_0$, сопоставить единственный путь $\bar{q} : [0, 1] \to X$, для к-рого $\bar{q}(0) = x_0$ и $p\bar{q}=q$, то точка $\bar{q}(1)$ будет зависеть только от класса этой петли в G и от точки x_0. Таким образом, элементу из G отвечает перестановка точек в $p^{-1}(y_0)$. Эта перестановка не имеет неподвижных точек, если $\gamma \neq 1$, и непрерывно зависит от точки y_0. Возникает гомеоморфизм X.

В общем случае эта конструкция определяет лишь перестановку в $p^{-1}(y)$, т. е. имеется действие $\pi_1(Y, y_0)$ на $p^{-1}(y)$, наз. монодромией накрытия. Частным случаем регулярного Н. является *универсальное накрытие*, для к-рого $G=\pi_1(Y, y_0)$. Вообще, по каждой группе $H \subset \pi_1(Y, y_0)$ однозначно строится Н. $p : X, x_0 \to Y, y_0$, для к-рого $p_*(\pi_1(X, x_0))=H$. В качестве точек X берутся классы путей $q : [0, 1] \to Y$, $q(0)=x_0$: два пути q_1 и q_2 отождествляются, если $q_1(1)=q_2(1)$ и петля $q_1 q_2^{-1}$ лежит в элементе из H. Точка $q(1)$ для путей из одного класса считается образом этого класса, что определяет p. Топология в X однозначно задается требованием, чтобы p оказалось Н.: при этом существенна локальная односвязность Y. Для любого отображения f линейно связного пространства Z, z_0 в Y, y_0 поднятие его до отображения $\bar{f} : Z, z_0 \to X, x_0$ существует тогда и только тогда, когда $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset H$. Между накрытиями Y имеется отношение частичного порядка (накрытие накрытия есть накрытие), двойственное включению подгрупп в $\pi_1(Y, y_0)$. В частности, универсальное Н. является единственным максимальным элементом.

Примеры. Параметризация окружности $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ задает ее Н. числовой прямой $\varphi \in \mathbb{R}$, к-рое часто записывают в комплексной форме $e^{i\varphi}$ и наз. экспоненциальным. Аналогично, тор накрывается плоскостью. При отождествлении диаметрально противоположных точек сферы возникает Н. сферой проективного пространства соответствующей размерности. Вообще, свободные действия дискретных групп — обычный источник регулярных Н. (над пространством орбит, хотя и не всякое такое действие задает Н. (пространство орбит может оказаться неотделимым)), но это так для конечных групп. *А. В. Чернавский.*

НАЛОЖЕНИЯ ОБЛАСТЬ, область над $\mathbb{C}^n$,— пара (X, π), где X — линейно связное хаусдорфово пространство, $\pi : X \to \mathbb{C}^n$ — локальный гомеоморфизм, наз. проекцией. Н. о. возникают при аналитич. продолжении голоморфных функций. Каждой аналитической (вообще говоря, многозначной) в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функции f отвечает ее Н. о. $\tilde{D}$ с проекцией $\pi : \tilde{D} \to D$ точно так же, как каждой аналитич. функции одного комплексного переменного соответствует риманова поверхность; на $\tilde{D}$ функция f однозначна. Н. о. наз. также римановой областью.

Лит.: [1] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

В. В. Жаринов.

НАПРАВЛЕНИЕ — бинарное отношение $\leqslant$ на множестве A такое, что 1) если $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ для любых $x, y, z \in A$; 2) для любого $x \in A$ всегда $x \leqslant x$; 3) каковы бы ни были x, $y \in A$, существует $z \in A$ такое, что $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ (свойство Мура — Смита).

В. И. Пономарев.

НАПРАВЛЕНИЙ ПОЛЕ — геометрическая интерпретация множества линейных элементов, соответствующих системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Линейным элементом наз. набор чисел $t, x_1, \ldots, x_n, f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n)$, (2) где $(t, x_1, \ldots, x_n)$ — точка области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в к-рой определены правые части системы (1). Линейный элемент (2) можно представить себе как совокупность точки $(t, x_1, \ldots, x_n) \in G$ и соответствующего ей направления с направляющими косинусами

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{n} f_k^2\right)^{-1/2}, \; f_i \left(1 + \sum_{k=1}^{n} f_k^2\right)^{-1/2}, \; i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

к-рое изображается отрезком малой длины, проходящим через эту точку параллельно вектору

$$(1, f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n)).$$

Для системы в симметричной форме

$$\frac{dt}{f_0(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \ldots, x_n)},$$

в отличие от системы (1), среди направлений поля возможны и ортогональные оси t.

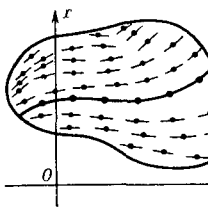
Любая *интегральная кривая* системы (1) в каждой своей точке касается отвечающего этой точке направления поля; всякая кривая, обладающая таким свойством, является интегральной кривой системы (1). Таким образом, задание Н. п. эквивалентно заданию системы (1), а задача интегрирования системы (1) состоит в отыскании таких кривых в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, касательные к к-рым в каждой точке имеют направление, определяемое формулами (3), т. е. имеют направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Особенно наглядной геометрич. картина становится при $n=1$. В этом случае через каждую точку (t, x) области определения $G \subset \mathbb{R}^2$ правой части уравнения 1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{4}$$

можно провести отрезок малой длины с угловым коэффициентом $f(t, x)$, так что (ориентированный) угол между осью t и этим отрезком равен $\operatorname{arctg} f(t, x)$ (см. рис.). Часто дифференциальное уравнение (4) рассматривается в совокупности с дифференциальным уравнением

$$\frac{dt}{dx} = F(t, x), \tag{5}$$



где $F(t, x)=1/f(t, x)$ для точек $(t, x)\in G$, в к-рых $f(t, x)\neq\neq 0$, и $F(t, x)=0$ для точек $(t, x)\in\mathbb{R}^2\setminus G$, в к-рых функцию $F(t, x)$ можно доопределить этим значением по непрерывности. Тем самым для пары уравнений (4), (5) область G расширяется до области G_0 за счет пополнения точками, в к-рых направление параллельно оси x, а интегральным кривым разрешается иметь и точки с вертикальной касательной.

Если в области G для уравнения (4) (или в области G_0 для пары уравнений (4), (5)) изобразить Н. п. достаточно подробно, то по построенным отрезкам можно составить примерное качественное представление о картине поведения интегральных кривых. Это соображение лежит в основе приближенного графич. метода решения уравнения (4) — *метода изоклин*, в к-ром построение Н. п. осуществляется с помощью *изоклин*. На использовании геометрич. связи Н. п. и интегральных кривых базируется приближенный численный метод решения уравнения (4) — *Эйлера метод*.

Для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений более удобна и наглядна геометрич. интерпретация в виде векторного поля — поля фазовых скоростей в фазовом пространстве системы.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974; [2] Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; [3] Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1—2, М., 1953—54.

Н. Х. Розов.

НАПРАВЛЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество A, наделенное *направлением*. Всякое (частично) упорядоченное множество, каждое конечное подмножество к-рого имеет верхнюю (нижнюю) грань, является Н. м. и тогда A наз. *направленным вверх* (*вниз*) множеством. Напр., множество всех открытых покрытий $\{\gamma\}$ топологич. пространства является Н. м., в нем $\gamma'\leqslant\gamma''$, если γ' вписано в γ''; другой пример Н. м.— *предфильтр*, т. е. семейство δ непустых множеств такое, что если U, $V\in\delta$, то существует $W\in\delta$, для к-рого $W\subset U\bigcap V$. Основное назначение Н. м. (равно как и *фильтров*) — служить множеством номеров при определении обобщенных последовательностей точек, или *направленностей*, в топологич. пространствах, сходимости их и т. д.

А. В. Архангельский.

НАПРАВЛЕННОСТЬ, обобщенная последовательность, — отображение *направленного множества* A (в топологическое) пространство X, т. е. соответствие, по к-рому каждому $\alpha\in A$ сопоставляется нек-рое $x_\alpha\in X$. В терминах «Н.» характеризуются *отделимости аксиомы*, свойства типа *компактности*, осуществляются различные построения (напр., *бикомпактные расширения*) и т. д. Так, Н. $\{x_\alpha : \alpha\in A, \leqslant\}$ топологич. пространства X сходится (иногда добавляется: по *направлению* $\leqslant$) к точке $x\in X$ в пространстве X, если для каждой окрестности O_x найдется $\beta\in A$ такое, что $x_\alpha\in O_x$ при $\beta\leqslant\alpha\in A$. Это — сходимость по Муру — Смиту [3] (она представляется более отвечающей интуитивным представлениям, чем теория сходимости, построенная на понятии *фильтра*).

Обычная последовательность — частный случай Н., когда множество A состоит из всех натуральных чисел.

Лит.: [1] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., М., 1968; [2] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, т. 1— Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1977; [3] Moore E., Smith H., «Amer. J. Math.», 1922, v. 44, p. 102—21.

В. И. Пономарев.

НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ МЕТОД — специальный метод для вывода теоремы о разложении по собственным функциям самосопряженного диффе-

ренциального оператора. В частном случае сингулярного дифференциального оператора второго порядка на полуоси соответствующая теорема была впервые получена Г. Вейлем [1]. Общая теорема для случая дифференциального оператора порядка $2n$ была доказана М. Г. Крейном [2] методом, получившим название Н. ф. м. Соответствующий результат формулируется следующим образом (см. [3]). Пусть $l(y)$ — самосопряженное дифференциальное выражение порядка $2n$ на интервале (a, b), $u_1(x, \lambda), \ldots, u_{2n}(x, \lambda)$ — система решений уравнения

$$l(y) = \lambda y,$$

удовлетворяющая начальным условиям:

$$u_j^{[k-1]}(x_0) = \begin{cases} 1 \text{ при } j = k, \\ 0 \text{ при } j \neq k, \end{cases}$$

где x_0 — фиксированная точка интервала (a, b), а $u_j^{[k-1]}$ есть $(k-1)$-я квазипроизводная функции u_j. Тогда для всякого самосопряженного расширения L оператора, порожденного выражением $l(y)$, существует матричная функция распределения

$$\sigma(\lambda) = (\sigma_{jk}(\lambda)), \; j, k = 1, \ldots, 2n,$$

такая, что для любой функции $f(x) \in L^2(a, b)$ справедливы формулы:

$$\varphi_j(\lambda) = \int_a^b f(x)\, u_j(x, \lambda)\, dx, \tag{1}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{2}$$

причем интегралы в формулах (1) и (2) сходятся в смысле метрик в L^2_σ и $L^2(a, b)$ соответственно. При этом имеет место аналог равенства Парсеваля

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, \overline{\varphi_k(\lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Функционалы $\varphi(\lambda)$, заданные на финитных функциях из $L^2(a, b)$, наз. *направляющими функционалами* дифференциального выражения $l(y)$.

Обобщение и развитие Н. ф. м. привело к понятию оснащенного гильбертова пространства и разложения по обобщенным собственным элементам (см. [4], [5], [6]).

Лит.: [1] Weyl H., «Math. Ann.», 1910, Bd 68, S. 220—269; [2] Крейн М., «Докл. АН СССР», 1946, т. 53, № 1, с. 3—6; [3] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [4] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, К., 1965; [5] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы дифференциальных уравнений, М., 1958; [6] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые вопросы гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961; [7] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.— Л., 1950.

А. И. Логинов.

НАПРЯЖЕНИЙ ТЕНЗОР — тензор, определяющий распределение внутренних напряжений в деформируемом теле. Н. т.— симметричный тензор 2-го ранга σ_{ij}. Компонента σ_{ik} Н. т. есть i-я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k. Так, на единичную площадку, перпендикулярную к оси x, действуют нормальная к ней (направленная вдоль оси x) сила σ_{xx} и тангенциальные (направленные по осям y и z) силы σ_{yx} и σ_{zx}. Напряженное состояние, заданное компонентами Н. т., может быть разложено на два напряженных состояния. Первое из них характеризуется компонентами т. н. *сферического (шарового) тензора напряжений*:

$$\sigma'_{ij} = \frac{1}{3}\, \delta_{ij} \sigma_{ll}.$$

Второе напряженное состояние характеризуется компо-

нентами девиатора тензора напряжений:

$$\sigma''_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij}\sigma_{ll}.$$

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория упругости, 3 изд., М., 1965. *А. Б. Иванов.*

НАРОСТ пространства X — множество $Y \setminus X$, где Y — *бикомпактное расширение* X. Свойства Н. связаны со свойствами X: бикомпактность Н. эквивалентна локальной бикомпактности X, нульмерность Н. в нек-рых расширениях связана обычно со свойством периферич. бикомпактности X, существование компактного метризуемого расширения с Н. размерности $\leqslant k$ обеспечивает наличие в X открытой базы, в к-рой компактно пересечение границ любых $k+1$ различных множеств, и т. п. Если всякий связный бикомпакт в $Y \setminus X$ состоит из одной точки (напр., $\operatorname{ind}(Y \setminus X) = 0$), Н. наз. пунктиформным. Если существует хотя бы одно бикомпактное расширение с пунктиформным Н., то среди таких расширений найдется максимальное μX, причем оно является минимальным совершенным расширением. *Е. Г. Скляренко.*

НАСЛЕДСТВЕННО НЕРАЗЛОЖИМЫЙ КОНТИНУУМ, континуум Кнастера,— неразложимый континуум, в к-ром неразложим и каждый собственный подконтинуум. *А. А. Мальцев.*

НАТУРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ кривой — система равенств

$$k_1 = \varphi(s),\ k_2 = \psi(s),$$

задающих кривизну k_1 и кручение k_2 кривой как функции натурального параметра s на кривой. Для любых регулярных функций $\varphi(s) \geqslant 0$ и $\psi(s)$ существует единственная с точностью до движения в пространстве кривая с кривизной $\varphi(s)$ и кручением $\psi(s)$. Необходимым и достаточным условием того, что кривая является плоской, служит тождественное обращение в нуль кручения. Необходимым и достаточным условием совпадения кривой с прямой или ее отрезком является тождественное обращение кривизны в нуль. *Д. Д. Соколов.*

НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО — одно из основных понятий математики. Н. ч. может быть истолковано как *кардинальное число* непустого конечного множества. Множество $N = \{1, 2, \ldots\}$ всех Н. ч. и операции над ними: сложение $(+)$ и умножение $(\cdot)$ образуют систему Н. ч. $\langle N, +, \cdot, 1\rangle$. В этой системе обе бинарные операции ассоциативны, коммутативны и связаны законом дистрибутивности; 1 — нейтральный элемент умножения, т. е. $a \cdot 1 = a$ для любого Н. ч. a; сложение не имеет нейтральных элементов и более того $a + b \neq a$ для любых Н. ч. a и b. При этом выполняется условие (аксиома индукции): любое подмножество множества N, содержащее 1 и вместе с каждым элементом a сумму $a+1$, совпадает с N. См. *Натуральный ряд*, *Арифметика формальная*.

Лит.: [1] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1, М., 1970; [2] Нечаев В. И., Числовые системы, М., 1975. *А. А. Бухштаб, В. И. Нечаев.*

НАТУРАЛЬНЫЙ ПАРАМЕТР на спрямляемой кривой — такой параметр s на кривой γ с параметрич. уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, для к-рого длина дуги кривой между точками $\boldsymbol{r}(s_1)$ и $\boldsymbol{r}(s_2)$ равна $|s_1 - s_2|$. Параметризация кривой с помощью Н. п. наз. естественной параметризацией. Естественная параметризация k раз дифференцируемой (аналитической) кривой без особых точек является также k раз дифференцируемой (аналитической). *Д. Д. Соколов.*

НАТУРАЛЬНЫЙ РЕПЕР, трехгранник (или репер) Френе, естественный трехгранник,— фигура, составленная из касательной, главной нормали, бинормали и трех плоскостей, попарно содержащих эти прямые. Если ребра Н. р. в данной точке кривой принять за оси прямоуголь-

ной декартовой системы координат, то уравнение кривой в естественной параметризации (см. *Натуральный параметр*) имеет в окрестности этой точки вид:

$$x = s + \ldots,\quad y = \frac{k_1}{2}s^2 + \ldots,\quad z = -\frac{k_1 k_2}{6}s^3 + \ldots,$$

где k_1 и k_2 — кривизна и кручение кривой в указанной точке. *А. Б. Иванов.*

НАТУРАЛЬНЫЙ РЯД — непустое множество $N = \{1, \ldots\}$, в к-ром определена унарная операция S (т. е. S — однозначное отображение N в N), удовлетворяющая условиям (Пеано аксиомы):

1) для любого a из N:

$$1 \neq Sa;$$

2) для любых a и b из N: если

$$Sa = Sb,$$

то

$$a = b;$$

3) любое подмножество N, к-рое содержит 1 и вместе с каждым элементом a элемент Sa, совпадает с N.

Элемент Sa множества N обычно наз. элементом, непосредственно следующим за a. Н. р. представляет собой *вполне упорядоченное множество*. Можно доказать, что следующие условия:

$$a + 1 = Sa,\quad a + Sb = S(a + b),$$
$$a \cdot 1 = a,\qquad a \cdot Sb = ab + a,$$

где a и b — любые элементы из N, определяют во множестве N бинарные операции $(+)$ и $(\cdot)$. Система $\langle N, +, \cdot, 1\rangle$ является системой *натуральных чисел*.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979. *А. А. Бухштаб, В. И. Нечаев.*

«НАЧАЛА» ЕВКЛИДА (Στοιχεῖα) — научное произведение, написанное в 3 в. до н. э., содержащее основы античной математики: элементарной геометрии, теории чисел, алгебры, общей теории отношений и метода определения площадей и объемов, включавшего элементы теории пределов. «Н.» Е.— образец дедуктивной системы, содержащей исходные предложения геометрии и других разделов математики, на основе к-рых все теории развиваются строго логически.

«Н.» Е. составлены по определенной схеме, сложившейся еще до Евклида и кратко изложенной в сочинениях Аристотеля: сначала приводятся определения, постулаты и аксиомы, затем формулировки теорем и их доказательства. Помимо теорем в «Н.» Е. имеются и проблемы, решаемые построением или с помощью арифметич. алгоритмов. Вслед за определением основных геометрич. понятий и объектов Евклид доказывает существование остальных объектов геометрии (напр., равностороннего треугольника) путем их построения, к-рое выполняется на основании пяти постулатов. В постулатах утверждается возможность выполнения следующих элементарных построений: 1) через две точки можно провести прямую; 2) отрезок прямой можно неограниченно продолжить; 3) данным радиусом из данной точки можно провести окружность; 4) все прямые углы равны между собой (этим обеспечивается единственность продолжения прямой); 5) если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересечены третьей и если сумма внутренних односторонних углов меньше суммы двух прямых, то прямые пересекутся при неограниченном их продолжении с той стороны, с к-рой эта сумма меньше. Все постулаты (кроме 4-го, к-рый заменяется требованием, чтобы через две точки проходила единственная прямая) вошли в качестве аксиом в современные курсы оснований геометрии. Особенно интересна судьба 5-го постулата. Еще в древности математики пытались его доказать. Аналогичные попытки продолжались

вплоть до работ Н. И. Лобачевского (см. *Лобачевского геометрия*), построившего первую систему неевклидовой геометрии, в к-рой этот постулат не имеет места. За постулатами в «Н.» Е. приводятся аксиомы — предложения о свойствах отношений равенства и неравенства между величинами: 1) равные одному и тому же равны между собой, 2) если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны, 3) если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны, 4) совмещающиеся друг с другом равны между собой, 5) целое больше части (в нек-рых списках «Н.» Е. к этому добавляют еще четыре аксиомы).

«Н.» Е. состоят из тринадцати книг (отделов или частей). В книге I рассматриваются основные свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов и производится сравнение их площадей. Заканчивается книга теоремой Пифагора. В книге II излагается т. н. геометрич. алгебра, т. е. строится геометрич. аппарат для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. При этом величины изображаются отрезками, а произведение двух величин — площадями. Алгебраич. символика в «Н.» Е. отсутствует. В книге III рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд (эти проблемы были исследованы Гиппократом Хиосским во 2-й пол. 5 в. до н. э.), в книге IV — правильные многоугольники. В книге V дается общая теория отношений величин, созданная Евдоксом Книдским (4 в. до н. э.); она отличается особенной логич. завершенностью и в основном эквивалентна теории дедекиндовых сечений, являющейся одним из обоснований учения о действительных числах. Общая теория отношений является основой учения о подобии (книга VI) и метода исчерпывания (книга XII), также восходящих к Евдоксу. В книгах VII—IX изложены начала теории чисел, основанные на алгоритме нахождения наибольшего общего делителя. В эти книги входит теория делимости, включая теоремы об однозначности разложения целого числа на простые множители и бесконечности числа простых чисел, а также строится учение об отношении целых чисел, эквивалентное по существу теории рациональных чисел. В книге X на этой основе дается классификация квадратичных и биквадратичных иррациональностей и обосновываются нек-рые правила их преобразования. Результаты книги X применяются в книге XIII для определения ребер пяти правильных многогранников. Значительная часть книг X и XIII (а вероятно, и VII) принадлежит Теэтету (начало 4 в. до н. э.). В книге XI излагаются начала стереометрии. В книге XII определяются с помощью метода исчерпывания отношение площадей двух кругов и отношений объемов пирамиды и призмы, конуса и цилиндра. Эти теоремы были впервые доказаны Евдоксом. Наконец, в книге XIII определяется отношение объемов двух шаров, строятся пять правильных многогранников и доказывается, что иных правильных тел не существует. Последующими греч. математиками к «Н.» Е. были присоединены книги XIV и XV, не принадлежащие Евклиду. Они часто и теперь издаются совместно с основным текстом «Н.» Е. Содержание их не представляет большого научного интереса.

«Н.» Е. получили широкую известность уже в древности. Архимед, Аполлоний Пергский и другие ученые опирались на них при своих исследованиях в области математики и механики. В кон. 8 — нач. 9 вв. появляются переводы «Н.» Е. на арабский язык. Первый перевод на латинский язык был сделан с арабского в 1-й четверти 12 в. Старинные списки «Н.» Е. отличаются существенными разночтениями; подлинный текст их точно не восстановлен. Первое печатное издание «Н.» Е. в переводе на латинский язык появилось в 1482 с чертежами на полях книги. Наилучшим считается издание Й. Хейберга (5 тт., 1883—88), в к-ром приводится как

греческий текст, так и его латинский перевод. На русском языке имеются следующие переводы: И. Астарова — «Евклидовы елементы», сокращенные проф. А. Фархварсоном (8 кн., 1739, пер. с латин.), Н. Курганова — «Евклидовы елементы геометрии» (8 кн., 1769, пер. с франц.), П. Суворова и В. Никитина — «Евклидовы стихии» (осьм книг, 1—6, 11, 12; 1784, пер. с греч.), Ф. Петрушевского — «Эвклидовых начал восемь книг, а именно: первые шесть, одиннадцатая и двенадцатая, содержащие в себе основания геометрии» (1819, пер. с греч.), Ф. Петрушевского — «Эвклидовых начал три книги, а именно: седьмая, осьмая и девятая, содержащие общую теорию чисел древних геометров» (1835, пер. с греч.), М. Е. Ващенко-Захарченко — «Начала Евклида» (1880), Д. Д. Мордухай-Болтовского — «Начала Евклида» (3 тт., 1948—50, пер. с греч.).

По материалам одноименной статьи И. Г. Башмаковой и А. П. Маркушевича из БСЭ-2.

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ — условия при постановке задачи Коши для дифференциальных уравнений. Для обыкновенного дифференциального уравнения, разрешенного относительно старшей производной:

$$u^{(m)} = F(t, u, u', \ldots, u^{(m-1)}), \qquad (1)$$

Н. у. состоят в задании производных (данных Коши)

$$u(t_0) = u_0,\ u'(t_0) = u_0',\ \ldots,\ u^{(m-1)}(t_0) = u_0^{(m-1)}, \qquad (2)$$

где $(t_0, u_0, u_0', \ldots, u_0^{(m-1)})$ — произвольная фиксированная точка области определения функции F; эта точка наз. начальной точкой искомого решения. Задачу Коши (1), (2) часто наз. также начальной задачей.

Для дифференциального уравнения с частными производными, записанного в нормальной форме относительно выделенной переменной t:

$$Lu = \frac{\partial^m u}{\partial t^m} - F\left(x, t, \frac{\partial^{\alpha+k} u}{\partial x^\alpha\, \partial t^k}\right) = 0,$$

$$|\alpha| + k \leqslant N,\ 0 \leqslant k < m,\ x = (x_1, \ldots, x_n),$$

Н. у. состоят в задании производных (данные Коши):

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x),\ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

от искомого решения $u(x, t)$ этого уравнения на гиперплоскости $t = 0$ (носителя начальных условий). *А. П. Солдатов.*

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел геометрии, в к-ром пространственные фигуры, а также методы решения и исследования пространственных задач изучаются при помощи построения их изображений на плоскости. Построение изображений осуществляется при помощи центрального или параллельного проектирования фигуры (натуры, объекта, оригинала) на плоскость *проекций*. Наиболее распространенным видом технич. чертежа является комплексный чертеж, к-рый строится с помощью ортогональной проекции. Сущность этого способа заключается в следующем: выбирают две взаимно перпендикулярные плоскости проекций $П_1$ и $П_2$. Плоскость $П_1$ наз. горизонтальной плоскостью проекций, а плоскость $П_2$ — фронтальной плоскостью проекций. Произвольную точку A пространства ортогонально проектируют на эти плоскости (см. рис. 1); получают

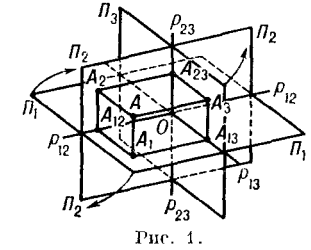


Рис. 1.

горизонтальную проекцию A_1 и фронтальную проекцию A_2. Часто бывает полезным добавить третью — профильную проекцию A_3 — на профильную плоскость Π_3, перпендикулярную к плоскостям Π_1 и Π_2. Для получения комплексного чертежа, состоящего из трех указанных проекций, плоскости Π_1 и Π_3 совмещают с плоскостью Π_2 («главной» плоскостью) путем вращения их вокруг линий p_{12} и p_{23} пересечения этих плоскостей с плоскостью Π_2 (см. рис. 2). Обычно на практике не указывается положение осей проекций p_{12} и p_{13}, т. е. положение проекций определяется с точностью до параллельного переноса.

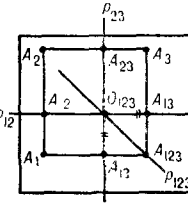


Рис. 2.

Для построения более наглядных изображений в Н. г. применяется *аксонометрия*. Для изображения объектов, обладающих большой протяженностью, применяют изображения, выполненные в центральной проекции — перспективе.

Лит.: [1] Монж Г., Начертательная геометрия, пер. с франц., М., 1947; [2] Глаголев Н. А., Начертательная геометрия, 3 изд., М., 1953; [3] Курс начертательной геометрии, М., 1956. *А. Б. Иванов.*

НЕАБЕЛЕВО ЧИСЛОВОЕ ПОЛЕ — поле алгебраич. чисел, имеющее неабелеву *Галуа группу* над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, или же поле, не являющееся нормальным над $\mathbb{Q}$. Иногда вместо $\mathbb{Q}$ рассматривается нек-рое другое основное поле k алгебраич. чисел и термин «неабелевость» понимается как неабелевость (в определенном выше смысле) над k. *Л. В. Кузьмин.*

НЕАБЕЛЕВЫ КОГОМОЛОГИИ — когомологии со значениями в неабелевой группе, пучке неабелевых групп и т. д. Наиболее известные примеры Н. к.— это когомологии групп, топологич. пространств и, более общо, топологизированных категорий в размерностях 0, 1. Единый подход к Н. к. дает следующее понятие. Пусть C^0, C^1 — группы, C^2 — множество с отмеченной точкой e, Aff C^1 — голоморф группы C^1, Aut C^2 — группа преобразований множества C^2, сохраняющих e. Тогда неабелев коцепной комплекс — это набор

$$C^* = (C^0, C^1, C^2, \rho, \sigma, \delta),$$

где $\rho : C^0 \to \mathrm{Aff}\ C^1$, $\sigma : C^0 \to \mathrm{Aut}\ C^2$ — гомоморфизмы, а $\delta : C^1 \to C^2$ — такое отображение, что

$$\delta(e) = e \quad \text{и} \quad \delta(\rho(a)\, b) = \sigma(a)\, \delta(b),\ a \in C^0,\ b \in C^1.$$

Определяются 0-мерная группа когомологий

$$H^0(C^*) = \rho^{-1}(\mathrm{Aut}\ C^1)$$

и 1-мерное множество (с отмеченной точкой) когомологий

$$H^1(C^*) = Z^1/\rho,$$

где $Z^1 = \delta^{-1}(e) \subseteq C^1$, а факторизация проводится при помощи действия ρ группы C^0.

Примеры. 1) Пусть X — топологич. пространство с пучком групп $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$ — его покрытие; тогда имеется комплекс Чеха

$$C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = (C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}),\ C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}),\ C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})),$$

где $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ определяются так же, как в абелевом случае (см. *Когомологии*),

$$(\sigma(a)(c))_{ijk} = a_i c_{ijk} a_i^{-1},$$
$$(\delta b)_{ijk} = b_{ij} b_{jk} b_{ik}^{-1},$$
$$a \in C^0,\ b \in C^1,\ c \in C^2.$$

Когомологии $H^i(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$, $i = 0, 1$, при переходе к пределу по покрытиям дают когомологии $H^i(X, \mathcal{F})$, $i = 0, 1$, пространства X со зна-

чениями в $\mathcal{F}$. При этом $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. Если $\mathcal{F}$ — пучок ростков непрерывных отображений со значениями в топологич. группе G, то $H^1(X, \mathcal{F})$ интерпретируется как множество классов изоморфных топологических главных расслоений над X со структурной группой G. В аналогичных терминах получается классификация гладких и голоморфных главных расслоений. Таким же способом определяются Н. к. топологизированной категории; по поводу их интерпретации см. *Главный G-объект*.

2) Пусть G — нек-рая группа и A — (не обязательно абелева) G-группа, т. е. операторная группа с группой операторов G. Пусть результат действия оператора $g \in G$ на элемент $a \in A$ обозначается a^g. Комплекс $C^*(G, A)$ определяется формулами:

$$C^k = \mathrm{Map}\,(G^k, A), \quad k = 0, 1, 2,$$

$$(\rho\,(a)\,(b))\,(g) = ab\,(g)\,(a^g)^{-1},$$

$$(\sigma\,(a)\,(c))\,(g, h) = a^g c\,(g, h)\,(a^g)^{-1},$$

$$\delta\,(b)\,(g, h) = b\,(g)^{-1}\,b\,(gh)\,(b\,(h)^g)^{-1},$$

$$a \in C^0, \quad b \in C^1, \quad c \in C^2, \quad g \in G.$$

Группа $H^0(G, A) = H^0(C^*(G, A))$ совпадает с подгруппой A^G неподвижных точек в A относительно G, а множество $H^1(G, A) = H^1(C^*(G, A))$ есть множество классов эквивалентных скрещенных гомоморфизмов $G \to A$ и интерпретируется как множество классов изоморфных *главных однородных пространств* над A. По поводу приложений и конкретных вычислений Н. к. групп см. *Галуа когомологии*. Аналогично определяются Н. к. категорий и полугрупп.

3) Пусть X — гладкое многообразие, G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Неабелев комплекс де Рама $R_G^*(X)$ определяется следующим образом:

$R_G^0(X)$ — группа всех гладких функций $X \to G$;

$$R_G^k(X), \quad k = 1, 2,$$

—пространство внешних k-форм на X со значениями в $\mathfrak{g}$;

$$\rho\,(f)\,(\alpha) = df \cdot f^{-1} + (\mathrm{Ad}\,f)\,\alpha;$$

$$\sigma\,(f)\,(\beta) = (\mathrm{Ad}\,f)\,\beta,$$

$$\delta\alpha = d\alpha - \frac{1}{2}\,[\alpha, \alpha],$$

$$f \in R_G^0, \quad \alpha \in R_G^1, \quad \beta \in R_G^2.$$

Множество $H^1(R_G(X))$ есть множество классов вполне интегрируемых уравнений вида $df \cdot f^{-1} = \alpha$, $\alpha = R_G^1$, относительно калибровочных преобразований. Аналог теоремы де Рама дает интерпретацию этого множества как нек-рого подмножества в множестве $H^1(\pi_1(M), G)$ классов сопряженных гомоморфизмов $\pi_1(M) \to G$. В случае комплексного многообразия M и комплексной группы Ли G определяются также неабелевы голоморфный комплекс де Рама и комплекс Дольбо, тесно связанные с задачей классификации голоморфных расслоений [3]. Неабелевы комплексы дифференциальных форм являются также важным аппаратом в теории псевдогрупповых структур на многообразиях [7].

С каждым подкомплексом неабелева коцепного комплекса связана точная последовательность когомологий. Напр., для комплекса $C^*(G, A)$ из примера 2) и его подкомплекса $C^*(G, B)$, где B есть G-инвариантная подгруппа в A, она имеет вид

$$e \longrightarrow H^0(G, B) \longrightarrow H^0(G, A) \longrightarrow (A/B)^G \longrightarrow H^1(G, B) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(G, A).$$

Если B — нормальный делитель в A, то последовательность можно продолжить до члена $H^1(G, A/B)$, а если B лежит в центре, то — и до $H^2(G, A)$. Эта последовательность точна в категории множеств с отмеченными точ-

ками. Кроме того, существует аппарат («подкручивание» или «скручивание» коцепного комплекса), позволяющий описывать прообразы всех, а не только отмеченных элементов (см. [1], [6], [3]). Можно построить также спектральную последовательность, связанную с двойным неабелевым комплексом, и соответствующую краевую точную последовательность [4].

Кроме описанных выше 0-мерных и 1-мерных, существуют также 2-мерные Н. к. Классич. примером являются 2-мерные когомологии группы G со значениями в нек-рой группе A, к-рые определяются следующим образом. Через $\mathcal{Z}^2(G, A)$ обозначается множество всех пар (m, φ), где $m: G\times G \longrightarrow A$, $\varphi: G \longrightarrow \operatorname{Aut} A$ — такие отображения, что

$$\varphi(g_1)\,\varphi(g_2)\,\varphi(g_1g_2)^{-1} = \operatorname{Int} m(g_1, g_2),$$

$$m(g_1, g_2)\,m(g_1g_2, g_3) = \varphi(g_1)(m(g_2, g_3))\,m(g_1, g_2g_3);$$

здесь $\operatorname{Int} a$ — внутренний автоморфизм, порожденный элементом $a\in A$. В $\mathcal{Z}^2(G, A)$ определяется отношение эквивалентности: $(m, \varphi)\sim(m', \varphi')$, если существует такое отображение $h: G\to A$, что

$$\varphi'(g) = (\operatorname{Int} h(g))\,\varphi(g)$$

и

$$m'(g_1, g_2) = h(g_1)(\varphi(g_1)(h(g_2)))\,m(g_1, g_2)\,h(g_1, g_2)^{-1}.$$

Классы этой эквивалентности и составляют множество когомологий $\mathcal{H}^2(G, A)$. Они находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентных расширений группы A при помощи G (см. *Расширение группы*).

Соответствие $(m, \varphi)\to\varphi$ дает отображение θ множества $\mathcal{H}^2(G, A)$ в множество всех гомоморфизмов

$$G \longrightarrow \operatorname{Out} A = \operatorname{Aut} A/\operatorname{Int} A;$$

пусть $H^2_\alpha(G, A) = \theta^{-1}(\alpha)$ для $\alpha\in\operatorname{Out} A$. Если фиксировать $\alpha\in\operatorname{Out} A$, то на центре $Z(A)$ группы A будет задана структура G-модуля и тем самым определены группы когомологий $H^k(G, Z(A))$. Оказывается, что непустота множества $H^2_\alpha(G, A)$ равносильна тривиальности нек-рого класса из $H^3(G, Z(A))$. Далее, при этом условии группа $H^2(G, Z(A))$ просто транзитивно действует на множестве $H^2_\alpha(G, A)$.

Это определение двумерных когомологий можно обобщить, перенеся его на топологизированные категории (см. [2], где даны также приложения этого понятия). Общая алгебраич. схема, приводящая к двумерным когомологиям, указана в [4]; так же, как и в описанном выше частном случае, их вычисление сводится к вычислению одномерных неабелевых и обычных абелевых когомологий.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [2] Giraud J., Cohomologie non abélienne, B.— Hdlb.— N. Y., 1971; [3] Онищик А. Л., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1967, т. 17, с. 45—88; [4] Толпыго А. К., в сб.: Вопросы теории групп и гомологической алгебры, в. 1, Ярославль, 1977, с. 156—97; [5] Dedecker P., в кн.: Category theory, homology theory and their applications, v. 2, B.— Hdlb.— N. Y., 1969, p. 32—64; [6] Frenkel J., «Bull. Soc. math. France», 1957, t. 85, № 2, p. 135—220; [7] Goldschmidt H., «Bull. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 84, № 4, p. 531—46; [8] Springer T. A., в кн.: Proceedings of Symposia in pure mathematics, Providence, v. 9, 1966, p. 164—82.

А. Л. Онищик, А. К. Толпыго.

НЕАРХИМЕДОВА ГЕОМЕТРИЯ — совокупность геометрич. предложений, вытекающих из групп аксиом: инцидентности, порядка, конгруэнтности и параллельности системы Гильберта аксиом евклидовой геометрии, и не связанных с аксиомами непрерывности (с аксиомами Архимеда и полноты). В узком смысле Н. г. описывает геометрич. свойства прямой, на к-рой не верна аксиома Архимеда (неархимедова прямая).

Для исследования геометрич. соотношений в Н. г. вводится исчисление отрезков — неархимедова числовая система, рассматриваемая как специальная комп-

лексная числовая система. Определяются понятия отрезка, отношения отрезков, сложение и умножение отрезков. В частности, вводится дезаргова числовая система — неархимедова система, в к-рой умножение отрезков некоммутативно. С помощью этих числовых систем в Н. г. строится теория подобия фигур, теория площадей и т. д. Теория площадей многоугольников, лежащая в основе теории измерения площадей фигур на неархимедовой плоскости, опирается на понятие равновеликости многоугольников по дополнению, к-рое в Н. г. является более общим по отношению к понятию равносоставленности (равновеликости по разложению на пары конгруэнтных треугольников).

В Н. г. существуют треугольники, имеющие соответственно равные меры высот и оснований, равновеликие по дополнению, но не равносоставленные. Равновеликие по дополнению многоугольники в Н. г. имеют одинаковую меру площади, и два многоугольника с одинаковой мерой площади всегда равновелики по дополнению. Для прямоугольных треугольников в Н. г. имеет место теорема Пифагора.

С помощью исчисления отрезков в неархимедовом пространстве вводится система аффинных (или проективных) координат. Напр., на плоскости выбираются две прямые — оси координат, проходящие через фиксированную точку, на каждой из осей отмечаются единичные отрезки. В этой системе аффинных координат уравнение прямой является линейным, т. е. имеет вид $ax+by+c=0$, где x, y — числа (отрезки), определяют координаты точек на прямой, a, b, c — фиксированные числа (отрезки), причем умножение фиксированных отрезков на отрезки x и y производится всегда слева, и, вообще говоря, уравнение $xa+yb+c=0$ в этой системе координат не представляет прямую.

Система геометрич. предложений, составляющих Н. г., может быть реализована на модели из конечного набора основных объектов: «точек», «прямых» и т. д. (здесь на каждой «прямой» не предполагается существование бесконечного множества «точек»). Построение числовых моделей Н. г. приводит к т. н. трансфинитным (неархимедовым) пространствам Гильберта. Такое числовое пространство на прямой наз. линейным пространством Веронезе.

Числовая реализация Н. г., в к-рой коммутативный закон умножения не является необходимым, играет также важную роль в построении *непаскалевой геометрии* (см. также *Недезаргова геометрия*).

Значение Н. г. определяется ее ролью в исследовании независимости и непротиворечивости системы Гильберта аксиом евклидова пространства. Реализация на числовой модели групп аксиом инцидентности, порядка, конгруэнтности и параллельности доказывает как их независимость от аксиом полноты, так и непротиворечивость самой Н. г. С другой стороны, выясняется и роль аксиом непрерывности в построении евклидовой геометрии на основе аксиом Гильберта. В частности, без аксиом непрерывности невозможно доказать эквивалентность евклидовой аксиомы параллельности предложению о равенстве суммы внутренних углов любого треугольника двум прямым углам.

Геометрич. построения на неархимедовой плоскости всегда осуществимы с помощью линейки с отмеченным эталоном длины (отмеченным отрезком).

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М. - Л., 1948.

Л. А. Сидоров.

НЕАССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА И АЛГЕБРЫ — множества с двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$, удовлетворяющими всем аксиомам *ассоциативных колец и алгебр*, кроме, быть может, аксиомы ассоциативности умножения. Первые примеры неассоциативных колец (Н. к.) и неассоциативных алгебр (Н. а.), не являю-

щихся ассоциативными, появились в сер. 19 в. (*Кэли числа* и вообще *гиперкомплексные числа*). Если в ассоциативном кольце (алгебре) рассматривается (вместо обычного) умножение $[a, b]=ab-ba$, то получается Н. к. (Н. а.), являющееся кольцом Ли (алгеброй Ли). Еще один важный класс Н. к. (Н. а.) — йордановы кольца (алгебры): если в ассоциативной алгебре над полем характеристики $\neq 2$ (или над коммутативным кольцом операторов с 1 и $1/2$) ввести операцию $a \cdot b = \frac{ab+ba}{2}$, то полученное кольцо является йордановым.

Теория Н. к. и а. развилась в самостоятельное направление алгебры, имеющее много точек соприкосновения с другими частями математики, а также с физикой, механикой, биологией и др. Центральная часть теории Н. к. и а.— это теория т. н. колец и алгебр, близких к ассоциативным: лиевых, альтернативных, йордановых, мальцевских колец и алгебр и нек-рых их обобщений (см. *Ли алгебра*, *Альтернативные кольца и алгебры*, *Йорданова алгебра*, *Мальцева алгебра*).

Один из важнейших вопросов, к-рый ставится при изучении того или иного класса Н. а.,— это вопрос об описании простых алгебр как конечномерных, так и бесконечномерных. При этом описание понимается по модулю какого-то «классического» класса, содержащегося в данном (так, для альтернативных колец описание простых алгебр дается по модулю ассоциативных колец, для мальцевских — по модулю лиевых, для йордановых — по модулю специальных йордановых и т. д.). С этой точки зрения различные классы Н. а. можно разделить на те, в к-рых «много» простых алгебр, и те, в к-рых их «мало». Типичными классами алгебр, в к-рых много простых алгебр, являются классы ассоциативных, лиевых и специальных йордановых алгебр. Именно, в этих классах справедлива следующая теорема вложения: любая ассоциативная (лиева, специальная йорданова) алгебра над полем вложима в простую алгебру того же типа. Много простых алгебр в нек-рых классах алгебр, далеких от ассоциативных,— в классах всех алгебр, коммутативных (антикоммутативных) алгебр. В них также справедлива теорема вложения, аналогичная предыдущей.

Задача описания конечномерных простых ассоциативных, лиевых, альтернативных и йордановых алгебр — предмет классич. части теории этих алгебр. В дальнейшем основные результаты о строении простых конечномерных ассоциативных (альтернативных, йордановых) алгебр были перенесены на артиновы кольца того же типа, т. е. на кольца с условием минимальности для односторонних идеалов; в случае йордановых колец под односторонним идеалом понимается квадратичный идеал (см. *Йорданова алгебра*).

Вызывают интерес классы алгебр, в к-рых «мало» простых алгебр. Типичные примеры таких классов — классы альтернативных, мальцевских и йордановых алгебр. В классе альтернативных алгебр, по модулю ассоциативных, простыми являются только (восьмимерные) алгебры Кэли — Диксона над ассоциативно-коммутативным центром. В классе мальцевских алгебр, по модулю лиевых, простыми являются только (семимерные) (относительно операции коммутирования $[a, b]$) алгебры, присоединенные к алгебрам Кэли — Диксона. В классе йордановых алгебр, по модулю специальных, простыми являются (двадцатисемимерные) алгебры Альберта над своим ассоциативным центром (алгебры серии E) (см. *Йорданова алгебра*). В более широких классах, таких, как правоальтернативные и бинарно лиевы алгебры, описание простых алгебр еще (1982) не закончено. Известно, что не существует конечномерных простых бинарно лиевых алгебр над полем характеристики 0, отличных от мальцевских, однако

неизвестно, справедлив ли этот результат в бесконечномерном случае. В классе правоальтернативных алгебр известно, что хотя все конечномерные простые алгебры из этого класса альтернативны, существуют бесконечномерные простые правоальтернативные алгебры, не являющиеся альтернативными. Все простые алгебры ассоциативны для т. н. (γ, δ)-алгебр (при $(\gamma, \delta) \neq (1, 1)$); эти алгебры естественно возникают из условия, что квадрат идеала есть идеал. Известно описание всех йордановых алгебр с двумя порождающими: любая йорданова алгебра с двумя порождающими является специальной (т е о р е м а Ш и р ш о в а). Описаны (по модулю ассоциативных алгебр с делением) все йордановы алгебры с делением.

В классах альтернативных, мальцевских и йордановых алгебр описаны все п е р в и ч н ы е к о л ь ц а (т. е. алгебры, группоид двусторонних идеалов к-рых не содержит делителей нуля). Именно, первичное альтернативное кольцо (с 1/6 в коммутативном кольце операторов) либо ассоциативно, либо есть кольцо Кэли — Диксона. Первичное мальцевское кольцо либо является лиевым, либо его центральное замыкание есть (семимерная) алгебра, присоединенная к алгебре Кэли — Диксона. Первичная невырожденная йорданова алгебра либо специальна, либо является кольцом Алберта (йорданово кольцо A наз. к о л ь ц о м А л б е р т а, если его ассоциативный центр Z состоит из регулярных элементов и алгебра $Z^{-1}A$ — (двадцатисемимерная) алгебра Алберта над своим центром $Z^{-1}Z$).

В нек-ром смысле противоположными к простым и первичным алгебрам являются н и л ь а л г е б р ы. В случае алгебр с ассоциативными степенями, не являющихся антикоммутативными (таких, как ассоциативные, альтернативные, йордановы и др.), нильалгебры определяются как алгебры, в к-рых каждый элемент в нек-рой степени равен нулю; в случае антикоммутативных алгебр (т. е. алгебр с тождеством $x^2=0$, напр. лиевых, мальцевских и бинарно лиевых алгебр) нильалгебры — это то же, что и э н г е л е в ы а л г е б р ы, т. е. алгебры с условием

$$\forall x,\ y \exists n\ (\overbrace{(xy)\ldots y}^{n}) = 0.$$

В альтернативных (в частности, ассоциативных) алгебрах любая нильалгебра ограниченного индекса (т. е. с тождеством $x^n=0$) является локально нильпотентной, а если в ней нет m-кручения (т. е. $mx=0 \Rightarrow x=0$) при $m \leqslant n$, то она разрешима (для ассоциативных — нильпотентна). П р о б л е м а Ш и р ш о в а о локальной нильпотентности йордановых нильалгебр ограниченного индекса решена положительно. Неизвестно (1982), существует ли простое ассоциативное нилькольцо.

В случае алгебр Ли вопрос о локальной нильпотентности энгелевых алгебр Ли решается т е о р е м о й К о с т р и к и н а: любая алгебра Ли с тождеством $\overbrace{[\ldots[xy]\ldots y]}^{n} = 0$ над полем характеристики $p > n$ является локально нильпотентной. Из этой теоремы следует положительное решение ослабленной проблемы Бёрнсайда для групп показателя p. Вообще, круг проблем, связанный с локальной нильпотентностью нильалгебр, наз. п р о б л е м а м и б ё р н с а й д о в с к о г о т и п а. К проблемам бёрнсайдовского типа относится также п р о б л е м а К у р о ш а о локальной конечности алгебранч. алгебр. Альтернативная (в частности, ассоциативная) алгебранч. **алге**бра A ограниченной степени (т. е. степени многочленов, к-рым удовлетворяют элементы алгебры A, ограничены в совокупности) локально конечна. В общем случае проблемы бёрнсайдовского типа (такие, как проблема локальной нильпотентности ассоциативных нильколец и др.) имеют отрицательное решение.

Изучались свободные алгебры и свободные произведения алгебр в различных многообразиях. В многообразии всех Н. а. любая подалгебра свободной алгебры сама свободна, а любая подалгебра свободного произведения алгебр есть свободное произведение своих пересечений с сомножителями и нек-рой свободной алгебры (теоремы Куроша). Теоремы этого типа справедливы также в многообразиях коммутативных (антикоммутативных) алгебр. Наиболее интересны эти вопросы в случае алгебр Ли. Любая подалгебра свободной алгебры Ли является свободной алгеброй Ли (теорема Ширшова). Вместе с тем для подалгебр свободного произведения алгебр Ли теорема типа теоремы Куроша уже не верна, однако эти подалгебры тем не менее могут быть описаны в терминах порождающих элементов идеала, по к-рому дополнительно нужно профакторизовать свободное произведение пересечений и свободной подалгебры. Изучены свободные альтернативные алгебры — их радикал Жевлакова (квазирегулярный радикал), центры (ассоциативные и коммутативные) этих алгебр, факторалгебры по радикалу Жевлакова и др. В отличие от свободных ассоциативных алгебр, свободные альтернативные алгебры с $n \geqslant 4$ порождающими имеют делители нуля и, более того, тривиальные идеалы (ненулевые идеалы, квадрат к-рых равен нулю). Известны также тривиальные идеалы в свободных мальцевских алгебрах с $n \geqslant 5$ порождающими, а напр., о свободных йордановых алгебрах с $n \geqslant 3$ порождающими известно только, что они содержат делители нуля.

Изучение свободных алгебр тесно связано с вопросами о тождествах в различных классах алгебр. Сюда относится также и вопрос о базисном ранге многообразия (базисный ранг — наименьшее натуральное число n такое, что данное многообразие порождается свободной алгеброй с n порождающими; если такого n не существует, то базисный ранг, по определению, равен бесконечности). Базисный ранг многообразий ассоциативных и лиевых алгебр равен двум, а для альтернативных и мальцевских — бесконечности.

Общая теория многообразий и классов Н. а. изучает классы алгебр, лежащие за пределами классических, и их различные взаимосвязи. Характерным является, напр., следующий результат: оказалось, что введенные в разное время и разными исследователями многообразия достижимых, обобщенно достижимых и обобщенно стандартных алгебр на самом деле входят в восьмиэлементную подрешетку решетки всех многообразий Н. а., к-рая складывается также из многообразий йордановых, коммутативных, ассоциативных, ассоциативно-коммутативных и альтернативных алгебр. Многообразие, порожденное конечным ассоциативным (альтернативным, лиевым, мальцевским и йордановым) кольцом, является конечно базируемым, в то же время существует конечное Н. к. (алгебра над конечным полем), порождающее не конечно базируемое многообразие. Существует алгебра Ли над бесконечным полем с этим свойством. Вместе с тем неизвестно (1982) ни одного не конечно базируемого многообразия ассоциативных алгебр (проблема Шпехта), а также многообразия алгебр Ли над полем характеристики нуль.

Алгоритмич. проблемы теории Н. к. и Н. а. возникли под влиянием математич. логики. Оказалась разрешимой проблема равенства в многообразии всех Н. а. (теорема Жукова). Аналогичный результат справедлив и для коммутативных (антикоммутативных) алгебр. Известно, что алгебры Ли с одним соотношением имеют разрешимую проблему равенства. Вместе с этим существуют конечно определенные алгебры Ли с неразрешимой проблемой равенства. Изучалась проблема равенства в многообразии разрешимых алгебр Ли дан-

ной ступени разрешимости n. Для $n=2$ эта проблема разрешима, а для $n\geqslant 3$ — не разрешима. Доказано, что любую рекурсивно определенную алгебру Ли (ассоциативную алгебру) над простым полем можно вложить в конечно определенную алгебру Ли (ассоциативную алгебру).

Лит.: [1] Ширшов А. И., «Успехи матем. наук», 1958, т. 13, в. 6, с. 3—20; [2] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И., Кольца, близкие к ассоциативным, М., 1978; [3] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1959, т. 23, № 1, с. 3—34; [4] Бокуть Л. А., «Colloq. math.», 1966, v. 14, p. 349—53; [5] его же, «Сердика», 1977, т. 3, с. 299—308; [6] Кузьмин Е. Н., «Алгебра и логика», 1968, т. 7, № 4, с. 48—69; [7] Филиппов В. Т., там же, 1976, т. 15, № 2, с. 235—42; [8] его же, там же, 1977, т. 16, № 1, с. 101—08; [9] Кукин Г. П., там же, 1978, т. 17, № 4, с. 402—15; [10] его же, там же, 1972, т. 11, № 1, с. 59—86; [11] Львов И. В., там же, 1973, т. 12, № 3, с. 269—97; [12] Дорофеев Г. В., там же, 1976, т. 15, № 3, с. 267—91; [13] Голод Е. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, с. 273—76; [14] Курош А. Г., «Матем. сб.», 1955, т. 37, с. 251—64; [15] Ширшов А. И., там же, 1953, т. 33, с. 441—52; [16] Jacobson N., Structure and representations of Jordan algebras, Providence, 1968; [17] Зельманов Е. И., «Докл. АН СССР», 1979, т. 249, № 1, с. 30—33. *Л. А. Бокуть.*

НЕАТОМИЧЕСКАЯ ИГРА — игра, в к-рой на множестве всех игроков I задана σ-алгебра подмножеств $\mathscr{C}$ и на $\mathscr{C}$ существует такая *неатомическая мера*, что множества игроков $C\in\mathscr{C}$, имеющие нулевую меру, не оказывают влияния на исход игры. Н. и. служат моделями ситуаций, в к-рых имеются большие количества очень «малых» индивидуумов, подобных потребителям в экономич. системе, и развитие теории Н. и. было тесно связано с изучением моделей экономик с большим числом участников (см. [1]). Н. и. подчиняются общей классификации, принятой в *игр теории*, и основные теоретико-игровые принципы оптимальности (см. *Ядро* в теории игр, *Шепли вектор*) естественным образом на них распространяются. При этом стратегич. принципы оптимальности в Н. и. реализуются, как правило, без обычных предположений о выпуклости (см. [2]), и различные принципы оптимальности в Н. и. оказываются более тесно связанными между собой; напр., для широкого класса неатомич. моделей типа рынков множество конкурентных равновесий совпадает с c-ядром, к-рое состоит из единственного элемента, совпадающего со значением игры (аналогом вектора Шепли для Н. и., см. [1]). Разрабатываются два направления — кооперативная теория Н. и. (см. [1], [3], [4]) и теория бескоалиционных Н. и. (см. [2]).

Кооперативная неатомическая игра, по аналогии с обычной *кооперативной игрой*, задается в виде тройки $\langle J, v, H\rangle$, где $J=(I, \mathscr{C})$ — измеримое пространство игроков, элементы $C=\mathscr{C}$ наз. коалициями, v — действительнозначная функция на $\mathscr{C}$, наз. характеристической функцией, а H — нек-рое подмножество множества FA всех конечно аддитивных мер ограниченной вариации на $\mathscr{C}$ (обычно предполагается, что $\mu(I)=v(I)$ для всех $\mu\in H$). В простейшем случае v является функцией от неатомич. меры на $\mathscr{C}$. Предполагается, что пространство J стандартно, а функция множества v имеет ограниченную вариацию (т. е. представима в виде разности двух монотонных функций). Описаны [1] различные подпространства пространства BV всех функций ограниченной вариации на $\mathscr{C}$, для к-рых можно построить аналог вектора Шепли (как положительный линейный оператор со значениями в FA).

Понятия сбалансированной игры, игры рынка, игры без побочных платежей (см. *Кооперативная игра*) и связанные с ними результаты переносятся на кооперативные Н. и. (см. [3], [4]).

Определение бескоалиционной неатомической игры аналогично определению классич. понятия *бескоалиционной игры*. Для бескоалиционных Н. и. известны аналог *Нэша теоремы*, а также

общие результаты о существовании ситуаций равновесия без предположений о выпуклости, к-рые не имеют места для игр с конечным числом участников (см. [2]).

Лит.: [1] Ауман Р., Шепли Л., Значения для неатомических игр, пер. с англ., М., 1977; [2] Кирута А. Я., в кн.: Математические методы в социальных науках, в. 6, Вильнюс, 1975, с. 18—71; [3] Розенмюллер И., Кооперативные игры и рынки, пер. с нем., М., 1974; [4] Rosenmüller J., «Operat. Res. Verfahren», 1975, Bd 20, S. 107—28.

А. Я. Кирута, Е. В. Яновская.

НЕАТОМИЧЕСКАЯ МЕРА — мера μ на измеримом пространстве $\langle X, \mathscr{S}\rangle$, для к-рой нет атомов положительной меры, т. е. множеств $A\in\mathscr{S}$ с $\mu(A)>0$, а при $B\subset A$ из $\mu(B)>0$ следует $B=A$. *Н. Н. Воробьев.*

НЕБЛУЖДАЮЩАЯ ТОЧКА динамической системы — точка фазового пространства этой системы, не являющаяся *блуждающей точкой*.

НЕВАНЛИННЫ ТЕОРЕМЫ — две основные теоремы, доказанные Р. Неванлинной (см. [1], [2]) и лежащие в основе теории распределения значений мероморфных функций (см. *Распределения значений теория*). Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в круге

$$K_R=\{z:|z|<R\leqslant\infty\},$$

при этом случай $R=\infty$ означает, что функция $f(z)$ мероморфна во всей открытой комплексной плоскости. Для каждого r, $0\leqslant r<R$, функция приближения $f(z)$ к числу a определяется так:

$$m(r,\infty,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

$$m(r,a,f)=m\left(r,\infty,\frac{1}{f-a}\right),\quad a\neq\infty,$$

а считающая функция числа a-точек $f(z)$ определяется формулой

$$N(r,a,f)=\int_0^r\frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}\,dt+n(0,a,f)\ln r,$$

где $n(t,a,f)$ означает число a-точек $f(z)$, с учетом их кратностей, попавших в круг $\{z:|z|\leqslant t\}$.

Функция $T(r,f)=m(r,\infty,f)+N(r,\infty,f)$ наз. неванлинновской характеристикой функции $f(z)$.

Первая теорема Неванлинны. Для произвольной мероморфной в круге K_R функции $f(z)$, для каждого r, $0\leqslant r<R$, и для любого комплексного числа a выполняется соотношение

$$m(r,a,f)+N(r,a,f)=T(r,f)+\varphi(r,a),\qquad(1)$$

где

$$|\varphi(r,a)|\leqslant\ln^+|a|+|\ln|c||+\ln 2,$$

а c означает первый отличный от нуля коэффициент в ряде Лорана в окрестности нуля функции $f(z)-a$, если $f(0)=a\neq\infty$, и функции $f(z)$, если $f(0)=\infty$. Таким образом, для функций с неограниченно растущей при $r\to R$ характеристикой $T(r,f)$ сумма $m(r,a,f)+N(r,a,f)$ для различных значений a, с точностью до ограниченного слагаемого $\varphi(r,a)$, сохраняет значение $T(r,f)$. В этом смысле все значения a для произвольной мероморфной в круге K_R функции $f(z)$ являются равноправными значениями. По этой причине в теории распределения значений мероморфных функций интересуются вопросами асимптотич. поведения одного слагаемого $m(r,a,f)$ или $N(r,a,f)$ в инвариантной сумме (1).

Вторая теорема Неванлинны показывает, что в сумме (1) для почти всех точек a основную роль играет функция $N(r,a,f)$. Эта теорема утверждает следующее.

Для произвольной мероморфной в круге $K_R=\{z:|z|<R\leqslant\infty\}$ функции $f(z)$ и для каждых q, $q\geqslant 3$, различ-

ных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{q}$ из расширенной комплексной плоскости имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{q} m(r, a_k, f) \leqslant 2T(r, f) - N_1(r, f) + S(r, f), \quad (2)$$

где

$$N_1(r, f) = 2N(r, \infty, f) - N(r, \infty, f'),$$

а величина $S(r, f)$ обладает следующими свойствами. 1) Если $R = \infty$, т. е. $f(z)$ мероморфна во всей открытой комплексной плоскости, то при $r \to \infty$

$$S(r, f) = O(\ln(r \cdot T(r, f)))$$

для всех значений r, за возможным исключением некоторого множества E такого, что

$$\int_{E \cap [1, \infty)} \frac{dr}{r} < \infty.$$

2) Если $R < \infty$, то при $r \to R$

$$S(r, f) = O\left(\ln\left(\frac{R}{R-r} T\left(r, f\right)\right)\right)$$

для всех значений r, за возможным исключением некоторого множества E такого, что

$$\int_{E} \frac{dr}{R-r} < \infty.$$

Функция $N_1(r, f)$ не убывает с ростом r, поэтому правая часть в соотношении (2) при $r \to R$ вне нек-рого исключительного множества E не может возрастать быстрее, чем $2T(r, f)$.

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.—Л., 1941; [2] Nevanlinna R., Le Théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes, P., 1929; [3] Weyl H., Weyl J., Meromorphic functions and analytic curves, Princeton, 1943; [4] Ahlfors L., «Acta Soc. scient. fennica. Nova ser. A», 1941, v. 3, № 4, p. 1—31; [5] Cartan H., «Mathematica» (Cluj), 1933, v. 7, p. 5—31; [6] Гриффитс Ф., Кинг Дж., Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий, пер. с англ., М., 1976; [7] Петренко В. П., Рост мероморфных функций, Хар., 1978.

В. П. Петренко.

НЕВАНЛИННЫ — ПИКА ПРОБЛЕМА — проблема для класса $\mathfrak{H}$ аналитич. функций в области G комплексной плоскости (или, более общо, римановой поверхности), заключающаяся в нахождении условий, необходимых и достаточных для разрешимости в классе функций $\mathfrak{H}$ интерполяционной задачи

$$f(z_\alpha) = w_\alpha, \quad (1)$$

где $\{z_\alpha\}$ — подмножество точек области G, $\{w_\alpha\}$ — нек-рое множество комплексных чисел, а α, как правило, пробегает счетное (иногда конечное или даже несчетное) множество индексов. Классич. результат Г. Пика [1] и Р. Неванлинны [2] (соответственно для конечных и счетных подмножеств $\{z_\alpha\} \subset G$) дает решение Н.—П. п., напр., для класса B_1 аналитич. функций в единичном круге, ограниченных по модулю единицей, в виде условия неотрицательности квадратичных форм

$$\sum_{j,\ k=1}^{n} \frac{1 - w_j \overline{w}_k}{1 - z_j \overline{z}_k} \xi_j \overline{\xi}_k, \quad n \in \mathbb{N},\ \xi_j \in \mathbb{C}.$$

Первоначальное доказательство этого, а также вполне аналогичных и сводящихся к нему результатов для ряда других классов функций $\mathfrak{H}$ (см. [3]) проводилось алгебраическими и теоретико-функциональными методами. Более поздние доказательства, основывающиеся, напр., на сведении Н.—П. п. к нек-рой проблеме моментов (см. [4]) или же полученные с точки зрения теории гильбертовых пространств (см. [5]), позволили охватить случай несчетных подмножеств $\{z_\alpha\} \subset G$ и наметить пути возможных обобщений.

Естественным развитием Н. — П. п., потребовавшим привлечения функционально-аналитич. методов иссле-

дования, явился вопрос о разрешимости интерполяционной задачи (1) на классе W правых частей $\{w_\alpha\}$; в этом случае, как правило, $\{z_\alpha\}$ является счетным множеством (последовательностью) точек области G, а в качестве W выступают различные пространства последовательностей комплексных чисел. Применительно к классу H^∞ ограниченных аналитич. функций в единичном круге и пространству l^∞ ограниченных последовательностей полное описание соответствующих последовательностей точек $\{z_\alpha\}$ (т. н. универсальные интерполяционные последовательности) было получено (см. [6]) в виде условия

$$\prod_{j=1,\ j\neq k}^{\infty}\left|\frac{z_j-z_k}{1-z_j\bar{z}_k}\right|\geqslant\delta>0,\quad k\in\mathbb{N}. \qquad (2)$$

Этот результат сыграл важную роль в описании структуры пространства максимальных идеалов алгебры H^∞ (см. [7]) и одновременно явился отправным моментом для многочисленных исследований Н.—П. п. (в указанной обобщенной постановке) для классов Харди H^q и пространств l^p (включая весовые пространства). Оказалось, что при $q=\infty$ решение Н.— П. п. не зависит от p и дается условием (2), а при $q<\infty$ необходимо меняется при изменении q и p (см. [8]). Другое обобщение Н.— П. п. связано с интерполяционной задачей $\varphi_\alpha(f)=w_\alpha$, где $\{\varphi_\alpha\}$ — нек-рая система функционалов в классе $\mathfrak{F}$. Возникающую при этом задачу описания множества $\{\{\varphi_\alpha(f)\}:f\in\mathfrak{F}\}$ можно рассматривать также как обобщение известной *коэффициентов проблемы* для классов аналитич. функций.

Лит.: [1] Pick G., «Math. Ann.», 1916, Bd 77, S. 7—23; [2] Nevanlinna R., «Ann. Acad. sci. fenn. Ser. A», 1929, v. 32, № 7, p. 1—15; [3] Крейн М. Г., Нудельман А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973; [4] Крейн М. Г., Рехтман П. Г., «Тр. Одесского гос. ун-та», 1938, т. 2, с. 63—68; [5] Sz-Nagy B., Korányi A., «Acta math. Acad. sci. hung.», 1956, v. 7, p. 295—303; [6] Carleson L., «Amer. J. Math.», 1958, v. 80, № 4, p. 921—30; [7] его же, «Ann. Math.», 1962, v. 76, p. 547—59; [8] Шведенко С. В., «Матем. заметки», 1977, т. 21, № 4, с. 503—08.
С. В. Шведенко.

НЕВОЗМОЖНОЕ СОБЫТИЕ — событие, к-рое в рамках данных условий не осуществляется ни при каких обстоятельствах. Если $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, то Н. с.— это событие $\varnothing\in\mathcal{A}$, не наступающее ни с одним из элементарных исходов $\omega\in\Omega$ (пустое множество). Н. с. является дополнением к *достоверному событию* Ω в рассматриваемой вероятностной модели и поэтому Н. с. приписывают вероятность нуль: $\mathsf{P}(\varnothing)=0$. *А. В. Прохоров.*

НЕВЫРОЖДЕННАЯ МАТРИЦА, неособенная матрица,— квадратная матрица, определитель к-рой отличен от нуля. Для квадратной матрицы A над полем невырожденность эквивалентна каждому из следующих условий: 1) A — обратима; 2) строки (столбцы) матрицы A линейно независимы; 3) элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицу A можно привести к единичной матрице. *О. А. Иванова.*

НЕВЫРОЖДЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — линейное представление π группы (кольца, алгебры, полугруппы) X в векторном пространстве E такое, что из равенства $\pi(x)\xi=0$ для нек-рого $\xi\in E$ и всех $x\in X$ следует $\xi=0$. *А. И. Штерн.*

НЕВЫЧЕТ степени n по модулю m — число a, для к-рого *сравнение* $x^n\equiv a\pmod m$ не имеет решения; см. *Вычет.*

НЕВЯЗКА приближенного решения — одна из характеристик качества приближенного решения $\bar{u}$ операторного уравнения $P(u)=0$ (напр., линейной алгебраич. системы, дифференциального уравнения). Невязкой наз. величину $P(\bar{u})$ или нек-рую ее норму $\|P(\bar{u})\|_2$. Если известна оценка

$$\|u_1-u_2\|_1\leqslant C\|P(u_1)-P(u_2)\|_2,$$

то погрешность решения можно оценить через Н.

$$\| \bar{u} - u \|_1 \leqslant C \| P(\bar{u}) \|_2.$$

Если такой оценки нет, то Н. является косвенной характеристикой качества приближенного решения.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

Н. С. Бахвалов.

НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ — системы материальных точек, стесненные связями, среди к-рых имеются кинематич. связи, накладывающие ограничения на скорости (но не на положения) точек системы в ее возможных положениях (см. *Голономная система*), задаваемые неинтегрируемыми дифференциальными соотношениями вида

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_{3N}, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{3N}, t) = 0, \qquad (1)$$

$$s = 1, \ldots, m, \quad \varphi_s(x, \dot{x}, t) \in C^1,$$

к-рые не могут быть заменены эквивалентными конечными соотношениями между координатами. Здесь x_ν — декартовы координаты точек, t — время, N — число точек системы. В большинстве случаев рассматриваются линейные относительно скоростей $\dot{x}_i$ связи (1) вида

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{s_i}\, dx_i + A_s\, dt = 0; \quad A_{s_i}(x, t), \; A_s(x, t) \in C^1.$$

Связи (1) наз. стационарными, если $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv 0$. Связи (1) налагают ограничения также на ускорения w_ν точек системы вида

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{N} \operatorname{grad}_{r_\nu} \varphi_s \cdot w_s + \ldots = 0.$$

Следуя Н. Г. Четаеву [2], принимают, что возможные перемещения систем, стесненных нелинейными связями (1), удовлетворяют условиям вида

$$\sum_{\nu=1}^{3N} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \dot{x}_\nu} \delta x_\nu = 0, \quad s = 1, \ldots, m. \qquad (2)$$

В случае линейных связей отсюда следуют общепринятые соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{3N} A_{s_i} \delta x_i = 0.$$

В отличие от голономных систем перемещение между соседними бесконечно близкими возможными положениями Н. с. может быть невозможным (см. [1]).

В обобщенных лагранжевых координатах уравнения (1) и (2) записываются в виде

$$\Phi_s(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0,$$

$$s = 1, \ldots, m.$$

Для Н. с. число $n - m$ ее степеней свободы меньше числа n независимых координат q_i на число m неинтегрируемых уравнений связей.

Выведено много различных видов дифференциальных уравнений движения Н. с., напр. *Лагранжа уравнения* первого рода, *Аппеля уравнения* в лагранжевых координатах и квазикоординатах, уравнения Чаплыгина и Воронца в лагранжевых координатах, *Больцмана уравнения* и уравнения Гамеля в квазикоординатах и др. (см. [3]).

Для Н. с. характерно, что в число дифференциальных уравнений их движения в общем случае входят уравнения связей.

Лит.: [1] Hertz H., Gesammelte Werke, Bd 3 — Die Prinzipien der Mechanik, Lpz., 1894; в рус. пер.— Принципы механики, изложенные в новой связи, М., 1959; [2] Четаев Н., «Изв. Физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те», (3), 1932,

т. 6, с. 68—71; [3] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А., Динамика неголономных систем, М., 1967. *В. В. Румянцев.*

НЕДЕЗАРГОВА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия на плоскости, в к-рой *Дезарга предложение* может не иметь места. В этом случае плоскость наз. недезарговой плоскостью. Теорема Дезарга не может быть доказана в плоскости на основе лишь проективных аксиом плоскости без привлечения аксиом конгруэнтности (метрических аксиом) или без привлечения пространственных аксиом. Напр., в геометрии плоскости, построенной на основе всех плоскостных аксиом системы Гильберта, за исключением аксиомы конгруэнтности треугольников, теорема Дезарга не может быть получена как их следствие. Геометрия этой плоскости является недезарговой, она не может рассматриваться как часть пространственной геометрии, в которой выполняются все аксиомы системы Гильберта, кроме указанной аксиомы конгруэнтности. Недезаргова проективная 2-плоскость не вкладывается в проективные пространства высших размерностей (см. [1], [4], [5]).

Возможность построения Н. г. плоскости позволяет выяснить независимость различных групп аксиом системы Гильберта, а также выяснить роль теоремы Дезарга как независимой дополнительной аксиомы плоской проективной геометрии (см. [2]).

Рассматриваются и так наз. недезарговы системы, в к-рых теорема Дезарга не выполняется как конфигурационное предложение (см. *Конфигурация*). Недезарговы системы существуют, в частности, на нек-рых поверхностях и вообще на нек-рых римановых многообразиях, являющихся прямыми пространствами. Простой пример дает параболоид $z=xy$, на к-ром недезаргову систему образуют точки и соединяющие их кратчайшие. Другой пример дает тор: существуют его метризации без сопряженных точек, в к-рых геодезические универсального накрывающего пространства образуют недезаргову систему (см. также [5], [6]).

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Скорняков Л. А., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 6, с. 112—54; [3] Буземан Г., Геометрия геодезических, пер. с англ., М., 1962; [4] Mohrmann H., Festschrift D. Hilbert, B., 1922; [5] Bieberbach L., Einleitung in die höhere Geometrie, Lpz.— B., 1933; [6] Narayana Rao M. L., Kuppuswamy Rao K., «J. Combin. Theory, Ser. A», 1975, v. 19, p. 247—55. *Л. А. Сидоров.*

НЕДЕЛИМЫХ МЕТОД — возникшее в кон. 16 в. наименование совокупности довольно разнородных приемов определения отношений площадей или объемов фигур. В основе Н. м. лежит сравнение «неделимых» элементов (или же совокупностей элементов), так или иначе образующих фигуры, отношение размеров к-рых требуется найти. Само понятие «о неделимых» в разные времена различные ученые понимали по-разному.

Н. м. ведет начало от древнегреч. науки. Демокрит (4 в. до н. э.), по-видимому, рассматривал тела как «суммы» чрезвычайно большого числа чрезвычайно малых «неделимых» атомов; Архимед (3 в. до н. э.) нашел площади и объемы многих фигур, сочетая принципы учения о рычаге с представлением, что плоская фигура состоит из бесчисленного количества параллельных отрезков прямых, а геометрич. тело — из бесчисленного количества параллельных плоских сечений. Однако в древности же подобные представления и методы подверглись серьезной критике. Архимед, напр., считал обязательным передоказывать результаты, полученные с помощью Н. м., методом исчерпывания (см. *Исчерпывания метод*). Идеи Н. м. были возрождены в математич. исследованиях на рубеже 16—17 вв. И. Кеплером (I. Kepler) и особенно Б. Кавальери (B. Cavalieri), с именем к-рого и связывают чаще всего Н. м. Развитый Б. Кавальери Н. м. был затем суще-

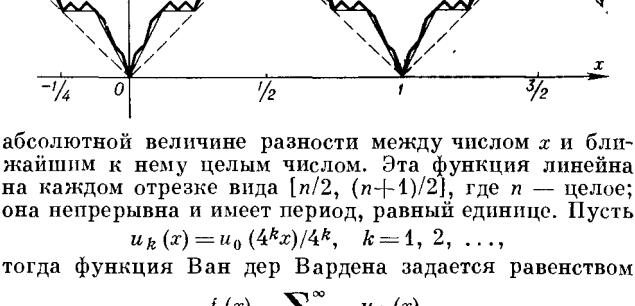
ственно преобразован и послужил одним из этапов в создании интегрального исчисления. См. *Бесконечно малых исчисление.* *БСЭ-3.*

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — функция, не имеющая *дифференциала.* В случае функций одного переменного Н. ф.— это функция, не имеющая производной. Напр., функция $f(x)=|x|$ не дифференцируема в точке $x=0$, вместе с тем она дифференцируема в этой точке как слева, так и справа, т. е. имеет в этой точке левую и правую производные. Непрерывная функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$ не только не дифференцируема в точке $x=0$, но и не имеет в этой точке производной (ни конечной, ни бесконечной) ни справа, ни слева.

Первые примеры непрерывных на всей числовой оси функций, во всех точках, не имеющих конечных производных, были указаны Б. Больцано (B. Bolzano) в 1830 (опубл. в 1930) и К. Вейерштрассом (K. Weierstrass) в 1860 (опубл. в 1872). Функция Вейерштрасса задается рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi x),$$

где $0<a<1$, b — нечетное натуральное число, $ab>1+3\pi/2$. Более простой пример, основанный на той же идее, в к-ром периодич. функции типа $\cos\omega x$ заменены периодич. ломаными, был построен Б. Л. Ван дер Варденом (B. L. Van der Waerden). Пусть $u_0(x)$ — функция, равная для каждого действительного числа x



абсолютной величине разности между числом x и ближайшим к нему целым числом. Эта функция линейна на каждом отрезке вида $[n/2, (n+1)/2]$, где n — целое; она непрерывна и имеет период, равный единице. Пусть

$$u_k(x)=u_0(4^k x)/4^k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

тогда функция Ван дер Вардена задается равенством

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Эта функция непрерывна на всей числовой оси и ни в одной точке не имеет конечной производной. Первые три частные суммы полученного ряда изображены на рисунке.

Для функций более одного переменного дифференцируемость в точке не эквивалентна существованию в этой точке частных производных; существуют недифференцируемые функции, имеющие частные производные. Напр., функция

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{при } x=y=0\end{cases}$$

во всех точках плоскости непрерывна и имеет частные производные, однако в точке (0, 0) не дифференцируема. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕДООПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА — система дифференциальных уравнений, число уравнений к-рой меньше числа неизвестных. См. также *Переопределенная система.* *А. П. Солдатов.*

НЕЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, свойства к-рого базируются на системе аксиом, отличной от евклидовой. Геометрия Н. п. является *неевклидовой*

геометрией. В зависимости от аксиоматики, на основе к-рой развертываются неевклидовы геометрии Н. п., можно классифицировать Н. п. по различным признакам. С одной стороны, Н. п. может являться конечномерным векторным пространством со скалярным произведением, к-рое выражается в декартовых координатах по формуле

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i - \sum_{i=k+1}^{n} x_i y_i.$$

В этом случае Н. п. представляет собой *псевдоевклидово пространство*. С другой стороны, Н. п. может быть охарактеризовано как нек-рое n-мерное многообразие с определенной структурой, описываемой системой аксиом, отличной от евклидовой.

Н. п. могут классифицироваться и с точки зрения дифференциально-геометрических свойств как римановы пространства с постоянной кривизной (в том числе нулевой кривизны, но топологически отличные от евклидовых пространств). *Л. А. Сидоров.*

НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ — в буквальном понимании — все геометрич. системы, отличные от геометрии Евклида; однако обычно термин «Н. г.» применяется лишь к геометрич. системам (отличным от геометрии Евклида), в к-рых определено движение фигур, причем с той же степенью свободы, что и в геометрии Евклида. Степень свободы движения фигур в евклидовой плоскости характеризуется тем, что каждая фигура без изменения расстояний между ее точками может быть перемещена так, чтобы любая выбранная ее точка заняла любое заранее назначенное положение; кроме того, каждая фигура может вращаться вокруг любой своей точки. В евклидовом трехмерном пространстве каждая фигура может быть перемещена так, чтобы любая выбранная ее точка заняла любое заранее назначенное положение; кроме того, каждая фигура может вращаться вокруг любой оси, проходящей через любую ее точку.

Среди Н. г. особое значение имеют *Лобачевского геометрия* и *Римана геометрия*, к-рые чаще всего и подразумеваются, когда говорят о Н. г. Геометрия Лобачевского — первая геометрич. система, отличная от геометрии Евклида, и первая более общая теория (включающая евклидову геометрию как предельный случай). Геометрия Римана, открытая позднее, в нек-рых отношениях противоположна геометрии Лобачевского, но вместе с тем служит ей необходимым дополнением. Совместное исследование геометрий Евклида, Лобачевского и Римана позволило в должной мере выяснить особенности каждой из них, а также их связи друг с другом и с другими геометрич. системами. Ниже обе Н. г. и геометрия Евклида сопоставляются как синтетич. теории, затем в плане дифференциальной геометрии и, наконец, в плане теории групп.

Неевклидовы геометрии как синтетические теории. Геометрия Лобачевского строится на основе тех же аксиом, что и евклидова, за исключением только одной аксиомы о параллельных. Именно, согласно аксиоме о параллельных евклидовой геометрии через точку, не лежащую на данной прямой a, проходит точно одна прямая, к-рая лежит в одной плоскости с прямой a и не пересекает эту прямую; в геометрии Лобачевского принимается, что таких прямых более одной (затем доказывается, что их бесконечно много).

В геометрии Римана принимается аксиома: каждая прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой, пересекает эту прямую. Эта аксиома противоречит системе аксиом евклидовой геометрии с исключением аксиомы о параллельных. Таким образом, система аксиом, лежащая в основе геометрии Римана, необходимо должна отличаться от системы аксиом евклидовой геометрии

не только заменой одной аксиомы о параллельных другим утверждением, но и части остальных аксиом. Различными в этих геометриях являются аксиомы, к-рые служат для обоснования т. н. отношений порядка геометрич. элементов. Сущность дела в следующем: в евклидовой геометрии и в геометрии Лобачевского порядок точек на прямой является линейным, т. е. подобным порядку во множестве действительных чисел; в геометрии Римана порядок точек на прямой является циклическим, т. е. подобным порядку во множестве точек окружности. Кроме того, в геометриях Евклида и Лобачевского каждая прямая, лежащая в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две части; в геометрии Римана прямая не разделяет плоскость на две части, т. е. любые две точки плоскости, не лежащие на данной прямой, можно соединить в этой плоскости непрерывной дугой, не пересекая данную прямую (топологич. моделью плоскости Римана служит проективная плоскость).

Требования аксиом, определяющих движение фигур, для всех трех геометрий одинаковы.

Примеры теорем Н. г.

1) В геометрии Лобачевского сумма внутренних углов любого треугольника меньше двух прямых; в геометрии Римана эта сумма больше двух прямых (в евклидовой геометрии она равна двум прямым).

2) В геометрии Лобачевского площадь треугольника выражается формулой

$$S = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma), \qquad (1)$$

где α, β, γ — внутренние углы треугольника, R — постоянная, к-рая определяется выбором единицы измерения площадей. В геометрии Римана имеет место формула

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \qquad (2)$$

при аналогичном значении символов (в евклидовой геометрии зависимости между площадью треугольника и суммой его углов нет).

3) В геометрии Лобачевского между сторонами и углами треугольника существует ряд зависимостей, напр.:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha, \qquad (3)$$

где sh, ch — гиперболические синус и косинус, a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — противолежащие им углы, R — постоянная, определяемая выбором масштаба; для прямоугольного треугольника (с гипотенузой c и прямым углом γ) имеет место, напр., равенство

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta. \qquad (4)$$

При нек-ром согласовании линейного масштаба и единицы измерения площадей постоянная R в формулах (1), (3), (4) будет одинаковой. Число R наз. радиусом кривизны плоскости (или пространства) Лобачевского. Число R при данном масштабе выражает определенный отрезок в плоскости (пространстве) Лобачевского, к-рый также называют радиусом кривизны. Если масштаб меняется, то меняется число R, но радиус кривизны, как отрезок, остается неизменным. Если радиус кривизны принять за масштабный отрезок, то $R = 1$. В геометрии Римана существуют сходные равенства:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha \qquad (5)$$

(для произвольного треугольника) и

$$\cos\frac{c}{R} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \qquad (6)$$

(для прямоугольного) при аналогичном значении символов. Число R наз. радиусом кривизны плоскости (или пространства) Римана. Как видно из формул (4) и (6), в каждой из Н. г. гипотенуза прямоугольного треугольника определяется его углами; более того, в Н. г. стороны любого треугольника определяются его углами, т. е. не существует подобных треугольников, кроме равных (в евклидовой геометрии нет формул, аналогичных формулам (4) и (6), и нет никаких других формул, выражающих линейные величины через угловые). При замене R на iR формулы (1), (3), (4) превращаются в формулы (2), (5), (6); вообще, при замене R на iR все метрич. формулы геометрии Лобачевского (сохраняющие при этой замене геометрич. смысл) переходят в соответствующие формулы геометрии Римана. При $R\to\infty$ и те и другие дают в пределе формулы евклидовой геометрии (либо теряют смысл). Стремление к бесконечности величины R означает, что масштабный отрезок является бесконечно малым по сравнению с радиусом кривизны (как с отрезком). То обстоятельство, что при этом формулы Н. г. переходят в пределе в формулы евклидовой геометрии, означает, что для малых (по сравнению с радиусом кривизны) неевклидовых фигур соотношения между их элементами мало отличаются от евклидовых.

Неевклидовы геометрии в плане дифференциальной геометрии. В каждой из Н. г. дифференциальные свойства плоскости аналогичны дифференциальным свойствам поверхностей евклидова пространства; именно: в неевклидовой плоскости могут быть введены внутренние координаты u, v так, что дифференциал ds дуги кривой, соответствующей дифференциалам du, dv координат, определяется равенством:

$$ds^2 = E du^2 + 2F\, du dv + G dv^2. \qquad (7)$$

Пусть, в частности, в качестве координаты u произвольной точки M берется длина перпендикуляра, опущенного из M на фиксированную прямую, а в качестве координаты v — расстояние от фиксированной точки O этой прямой до основания указанного перпендикуляра; величины u, v следует брать со знаком, подобно обычным декартовым координатам. Тогда формула (7) для плоскости Лобачевского будет иметь вид

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2, \qquad (8)$$

а для плоскости Римана

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\left(\frac{u}{R}\right) dv^2, \qquad (9)$$

R — та же постоянная, к-рая входит в формулы предыдущего раздела (радиус кривизны). Правые части (8) и (9) суть метрич. формы поверхностей евклидова пространства, имеющих соответственно постоянную отрицательную кривизну $K=-1/R^2$ (как, напр., псевдосфера) и постоянную положительную кривизну $K=-1/R^2$ (как, напр., сфера). Поэтому внутренняя геометрия достаточно малой части плоскости Лобачевского совпадает с внутренней геометрией на соответствующей части поверхности постоянной отрицательной кривизны. Аналогично, внутренняя геометрия достаточно малых частей плоскости Римана реализуется на поверхностях постоянной положительной кривизны (поверхностей, к-рые реализуют геометрию всей плоскости Лобачевского, в евклидовом пространстве нет). При замене R на iR метрическая форма (8) переходит в метрическую форму (9).

Так как метрич. форма определяет внутреннюю геометрию поверхности, то при такой замене и другие метрич. соотношения геометрии Лобачевского переходят в метрич. соотношения геометрии Римана (что уже было

отмечено выше). При $R=\infty$ каждое из равенств (8) и (9) дает

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

т. е. метрич. форму евклидовой плоскости.

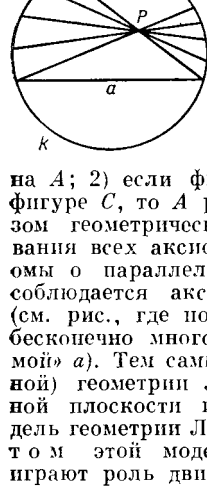
Трехмерные неевклидовы пространства по своим дифференциальным свойствам относятся к числу римановых пространств в широком смысле и выделяются среди них прежде всего тем, что имеют постоянную риманову кривизну. Как в двумерном, так и в трехмерном случае постоянство кривизны обеспечивает однородность пространства, т. е. возможность движения фигур в нем, причем с той же степенью свободы, как (соответственно) на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве. Пространство Лобачевского имеет отрицательную кривизну, равную $-1/R^2$, пространство Римана — положительную кривизну, равную $1/R^2$ (R — радиус кривизны). Евклидово пространство занимает промежуточное положение и является пространством нулевой кривизны.

Пространства постоянной римановой кривизны могут иметь весьма разнообразное строение в смысле топологии. Среди всех пространств постоянной отрицательной кривизны пространство Лобачевского однозначно выделяется двумя своими свойствами: оно полно (в смысле полноты метрич. пространства) и топологически эквивалентно обычному евклидову пространству. Пространство Римана среди всех пространств положительной кривизны однозначно выделяется свойством топологич. эквивалентности проективному пространству. Аналогичными условиями выделяются многомерные пространства Лобачевского и Римана среди многомерных пространств постоянной римановой кривизны.

Неевклидовы геометрии в плане теории групп. Пусть на проективной плоскости введены проективные однородные координаты (x_1, x_2, x_3) и задана нек-рая овальная линия 2-го порядка, обозначаемая дальше буквой k, напр.

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Каждое проективное отображение проективной плоскости на себя, к-рое оставляет на месте линию k, наз. автоморфизмом относительно k. Каждый автоморфизм отображает внутренние точки линии k также во внутренние ее точки. Множество всех автоморфизмов относительно линии k составляет группу. Условимся рассматривать только точки проективной плоскости, лежащие внутри k; хорды линии k будем называть «прямыми». Две фигуры будем считать равными, если одна из них переводится в другую нек-рым автоморфизмом. Так как автоморфизмы составляют группу, то имеют место основные свойства равенства фигур: 1) если фигура A равна фигуре B, то B равна A; 2) если фигура A равна фигуре B, а B равна фигуре C, то A равна C. В получаемой таким образом геометрической теории будут соблюдены требования всех аксиом евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельных; вместо этой последней аксиомы соблюдается аксиома о параллельных Лобачевского (см. рис., где показано, что через точку P проходит бесконечно много «прямых», не пересекающих «прямой» a). Тем самым получается истолкование (двумерной) геометрии Лобачевского при помощи проективной плоскости или, как говорят, проективная модель геометрии Лобачевского; линия k наз. абсолютом этой модели. Автоморфизмы относительно k играют роль движений. Поэтому геометрию Лобачевского можно рассматривать как теорию, изучающую свойства фигур и связанные с фигурами величины, к-рые остаются неизменными при автоморфизмах; ко-



роче говоря, геометрию Лобачевского можно рассматривать как теорию инвариантов группы автоморфизмов относительно овального абсолюта.

Геометрия Римана (двумерная) допускает сходное истолкование; именно, она является теорией инвариантов относительно нулевого абсолюта

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \qquad (10)$$

При этом в качестве точек и прямых модели берутся все точки и прямые проективной плоскости, автоморфизмы определяются чисто алгебраически, как линейные преобразования, к-рые переводят уравнение (10) в уравнение того же вида.

Евклидову геометрию также можно рассматривать как теорию инвариантов нек-рой группы проективных преобразований, именно, группы автоморфизмов относительно вырожденного абсолюта

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,\ x_3 = 0,$$

т. е. относительно мнимых точек $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$; эти точки наз. к р у г о в ы м и т о ч к а м и. Предметом модели являются все точки проективной плоскости, кроме точек прямой $x_3 = 0$, и все прямые проективной плоскости, кроме прямой $x_3 = 0$. В последнем случае автоморфизмы играют роль подобных преобразований, а не движений, как в случае Н. г.

Рассмотренные модели относятся к двумерным геометриям; проективные модели высших размерностей строятся аналогично.

Соответственно характеру уравнений абсолютов геометрия Лобачевского наз. г и п е р б о л и ч е с к о й, геометрия Римана — э л л и п т и ч е с к о й, геометрия Евклида — п а р а б о л и ч е с к о й.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., Что такое неевклидова геометрия, М., 1950; [2] К л е й н Ф., Неевклидова геометрия, пер. с нем., М.— Л., 1936; [3] Е ф и м о в Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978. *Н. В. Ефимов.*

НЕЗАВИСИМОСТЬ в т е о р и и в е р о я т н о с т е й — одно из важнейших понятий этой теории. Иногда используют термины с т а т и с т и ч е с к а я н е з а в и с и м о с т ь, с т о х а с т и ч е с к а я н е з а в и с и м о с т ь. Предположение о Н. рассматриваемых событий, испытаний и случайных величин было обычной предпосылкой в задачах, к-рые рассматривались в математической *вероятностей теории* со времени ее возникновения.

Для двух случайных событий понятие Н. вводится следующим образом. Пусть A и B — два случайных события, $\mathsf{P}(A)$ и $\mathsf{P}(B)$ — их вероятности. У с л о в н у ю в е р о я т н о с т ь события B при условии осуществления события A определяют формулой

$$\mathsf{P}(B/A) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)},$$

где $\mathsf{P}(A \cap B)$ — вероятность совместного осуществления событий A и B. События A и B наз. н е з а в и с и м ы м и, если

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B). \qquad (1)$$

При $\mathsf{P}(A) > 0$ это равносильно соотношению

$$\mathsf{P}(B/A) = \mathsf{P}(B). \qquad (2)$$

Смысл данного определения Н. можно пояснить следующим образом. Предполагая, что производится большое число N испытаний, и переходя в (2) от вероятностей к частотам, можно заключить, что между частотой события B во всех N испытаниях и частотой его появления в тех испытаниях, в к-рых наступает A, должно иметь место приближенное равенство. Н. событий указывает таким образом либо на отсутствие связи между наступлением одного из этих событий и наступлением другого, либо на несущественный характер этой связи. Так, событие, заключающееся в том, что наудачу выб-

ранное лицо имеет фамилию, начинающуюся, напр., с буквы «А», и событие, заключающееся в том, что этому лицу достанется выигрыш в очередном тираже лотереи,— независимы.

Определение Н. n случайных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n>2$, может быть дано в нескольких равносильных вариантах. Согласно одному из них эти события наз. н е з а в и с и м ы м и, если для любого m, $2\leqslant m\leqslant n$, и для произвольных попарно различных натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m\leqslant n$ вероятность совместного осуществления событий $A_{k_1}, \ldots, A_{k_m}$ равна произведению их вероятностей

$$\mathsf{P}(A_{k_1}\cap\ldots\cap A_{k_m})=\mathsf{P}(A_{k_1})\ldots\mathsf{P}(A_{k_m}). \qquad (3)$$

Отсюда, как и ранее, можно вывести, что условная вероятность каждого из рассматриваемых событий при условии, что какие-либо из остальных наступили, равна его «безусловной» вероятности.

Иногда наряду с Н. (взаимной Н.) событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ рассматривают так наз. п о п а р н у ю Н., означающую, что любые два из этих событий A_i и A_j, $i\neq j$, независимы. Н. событий влечет их попарную Н., а обратное, вообще говоря, неверно.

В период, предшествовавший аксиоматич. построению теории вероятностей, содержание понятия Н. не воспринималось достаточно отчетливо. «Понятие о независимых событиях можно считать вполне ясным в известных теоретических вопросах; в других же вопросах это понятие, конечно, может совершенно затемняться вместе с затемнением основного понятия о вероятности»,— писал А. А. Марков (см. [1] с. 24).

В рамках аксиоматич. подхода понятие Н. наиболее естественно вводится следующим образом. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — какое-либо вероятностное пространство, где Ω — множество элементарных событий, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра событий, P — определенная на $\mathcal{A}$ вероятностная мера. Сначала определяют Н. классов событий (здесь будут рассмотрены т о л ь к о к л а с с ы $\mathcal{B}$, являющиеся σ-подалгебрами σ-алгебры $\mathcal{A}$). Классы $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ наз. н е з а в и с и м ы м и (относительно P), если любые события $A_1\in\mathcal{B}_1, \ldots, A_n\in\mathcal{B}_n$ независимы в смысле равенства (3); классы $\mathcal{B}_t$ ($t\in T$, где T — произвольное множество индексов) наз. н е з а в и с и м ы м и, если при любом целом $n\geqslant 2$ и любых попарно различных $t_1, \ldots, t_n\in T$ классы $\mathcal{B}_{t_1}, \ldots, \mathcal{B}_{t_n}$ независимы. Н. событий A_k, $1\leqslant k\leqslant n$, равносильна Н. классов

$$\mathcal{B}_k=\{\varnothing, A_k, \overline{A_k}, \Omega\}.$$

Для испытаний Н.— это Н. порождаемых ими σ-алгебр.

Для случайных величин X_t, $t\in T$, Н. определяют как Н. σ-подалгебр $\mathcal{B}(X_t)$, где $\mathcal{B}(X_t)$ — прообраз относительно отображения X_t σ-алгебры борелевских множеств на числовой прямой. Н. случайных событий $A_1, \ldots, A_n$ равносильна Н. их индикаторов I_{A_k}, т. е. случайных величин, определяемых формулами

$$I_{A_k}(\omega)=1 \quad \text{для} \quad \omega\in A_k$$

и

$$I_{A_k}(\omega)=0 \quad \text{для} \quad \omega\notin A_k.$$

Для Н. с л у ч а й н ы х в е л и ч и н $X_1, \ldots, X_n$ необходимы и достаточны следующие условия.

1) Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ функция распределения

$$F_{X_1\ldots X_n}(a_1, \ldots, a_n)=\mathsf{P}\{\omega: X_1(\omega)<a_1, \ldots, X_n(\omega)<a_n\}$$

равна произведению соответствующих функций распределения:

$$F_{X_1\ldots X_n}(a_1, \ldots, a_n)=F_{X_1}(a_1)\ldots F_{X_n}(a_n).$$

2) При наличии плотностей $p_{X_1, \ldots, X_n}(a_1, \ldots, a_n)$ плотность для почти всех по лебеговой мере в $\mathbb{R}^n$ значений $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равна произведению $p_{X_1}(a_1) \ldots p_{X_n}(a_n)$ соответствующих плотностей.

3) Характеристич. функция

$$f_{X_1 \ldots X_n}(u_1, \ldots, u_n) = \mathsf{E} e^{iu_1 X_1 + \ldots + iu_n X_n}$$

для всех действительных чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n$ равна произведению $f_{X_1}(u_1) \ldots f_{X_n}(u_n)$, $f_{X_k}(u_k) = \mathsf{E} e^{iu_k X_k}$, соответствующих характеристич. функций.

На гипотезе Н. тех или иных событий и случайных величин основаны важнейшие схемы теории вероятностей: последовательности независимых случайных величин (см., напр., *Бернулли блуждание*, *Больших чисел закон*, *Предельные теоремы* теории вероятностей), случайные процессы с независимыми приращениями (см., напр., *Винеровский процесс*, *Случайный процесс*) и т. д. (см. также *Нуль-единица закон*).

Общие замечания к понятию независимости.

1) Независимость функций от независимых случайных величин. Из данной Н. случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ можно вывести довольно очевидные (и вполне соответствующие интуитивно ожидаемым от понятия Н.) следствия; напр., функции от $X_1, \ldots, X_k$ и от $X_{k+1}, \ldots, X_n$, $1 \leqslant k < n$, будут независимыми случайными величинами. Н. другого типа функций может иметь место только при специальных дополнительных предположениях и может служить для характеризации определенных классов распределений. Напр., если $X_1, \ldots, X_n$ независимы, одинаково распределены и имеют нормальное распределение, то функции

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \tag{4}$$

и

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2 \tag{5}$$

(статистич. оценки математич. ожидания и дисперсии X_k соответственно) являются независимыми случайными величинами. Верно и обратное утверждение: из Н. функций (4) и (5) вытекает нормальность распределений X_k. Точно так же, если известно, что две линейные формы

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j \quad \text{и} \quad Y_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$$

являются независимыми случайными величинами и ни один из коэффициентов a_j и b_j не равен нулю, то все X_j имеют нормальное распределение (из подобного рода теорем может быть при минимальных допущениях выведен, напр., закон Максвелла для распределения скоростей молекул). Приведенные утверждения служат примерами т. н. характеризационных теорем, наиболее полно изученных Ю. В. Линником и его школой.

2) Существование независимых случайных величин на заданном вероятностном пространстве. Если множество элементарных событий Ω состоит из трех элементов, каждому из к-рых приписана вероятность, равная $1/2$, то на Ω не существует независимых случайных величин, отличных от констант. Если в качестве вероятностного пространства взят отрезок $[0, 1]$ с мерой Лебега m, то для любой последовательности функций распределения $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... найдутся определенные на $[0, 1]$ измеримые функции $X_k(\omega)$, являющиеся по отношению к m независимыми случайными величинами и такие, что

$$m\{\omega : 0 \leqslant \omega \leqslant 1, \quad X_k(\omega) < x\} = F_k(x).$$

Простейшим примером такого рода статистически неза-

висимых функций на [0, 1] служат знаки двоичного разложения ω, $0 \leqslant \omega \leqslant 1$, или связанные с ними функции Радемахера

$$r_k(\omega) = \operatorname{sign} \sin(2\pi \cdot 2^{k-1}\omega), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Следует отметить, что существование к а к о г о - н и б у д ь вероятностного пространства, на к-ром определены независимые случайные величины с заданными распределениями, вытекает из теоремы Колмогорова о вероятностях в бесконечномерных пространствах (см. [3] гл. III, § 4).

3) Н е з а в и с и м ы е с л у ч а й н ы е в е л и ч и н ы к а к и с т о ч н и к д р у г и х с х е м. Пусть $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин и $h(x, y)$ — (борелевская) функция двух переменных. Полагая

$$X_1 = h(Y_0, Y_1), \; X_2 = h(X_1, Y_2), \; \ldots,$$

$$X_n = h(X_{n-1}, Y_n), \; \ldots,$$

получают последовательность случайных величин, образующих *Маркова цепь*. Подобным же образом можно получать *марковские процессы*, напр. из винеровского процесса при помощи стохастических дифференциальных уравнений. Из гауссовских случайных мер с независимыми значениями можно, используя преобразование Фурье, построить гауссовские стационарные случайные процессы и т. д.

4) С л а б а я з а в и с и м о с т ь. Асимптотич. законы теории вероятностей, установленные для последовательностей независимых случайных величин, обычно могут быть распространены и на последовательности т. н. слабо зависимых величин, т. е. на последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, где надлежащим образом измеренная зависимость между «удаленными» друг от друга отрезками последовательности «мала» (в простейших случаях это могут быть последовательности m-зависимых величин, где X_k и X_l при $|k-l| > m$ независимы, или последовательности величин, образующих *Маркова цепь эргодическую*, и т. п.). Один из основных приемов доказательства соответствующих теорем — сведение рассматриваемого случая к случаю Н.

5) Н е з а в и с и м о с т ь в т е о р и и ч и с е л. Пусть $p \geqslant 2$ и $q \geqslant 2$ — два взаимно простых натуральных числа. Пусть N — натуральное число, и пусть наудачу выбирают одно из чисел от 1 до N (вероятность для каждого считают равной $1/N$). Пусть A_p (соответственно A_q) событие, состоящее в том, что выбранное число делится нацело на p (соответственно q). Тогда

$$\mathsf{P}(A_p) = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{p}\right], \; \mathsf{P}(A_q) = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{q}\right],$$

$$\mathsf{P}(A_p \cap A_q) = \frac{1}{N}\left[\frac{N}{pq}\right]$$

и при $N \to \infty$ события A_p и A_q становятся «почти независимыми». Значительно более глубокий факт, состоящий в том, что при $N \to \infty$ можно выбрать $S = S_{N \to \infty}$ так, что события $A_2, A_3, \ldots, A_{p_S}$ (A_j есть j-е простое число) в совокупности «почти независимы», служит основой для исследования распределения значений арифметич. функций, см. *Чисел теория*; вероятностные методы. Имеются и другие разделы теории чисел, где идея Н. явно или неявно присутствует.

6) О проверке гипотезы Н. по результатам наблюдений см. *Статистических гипотез проверка.*

Лит.: [1] М а р к о в А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; [2] К о л м о г о р о в А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [3] е г о ж е, Теория вероятностей, в кн.: Математика, ее содержание, методы и значения, М., 1956; [4] К а ц М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, пер. с англ., М., 1963; [5] Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., М., 1967. *Ю. В. Прохоров.*

НЕЗАВИСИМОСТЬ СИСТЕМЫ АКСИОМ — свойство системы аксиом данной аксиоматич. теории, состоящее в том, что каждая аксиома является независимой, т. е. не является логическим следствием из множества остальных аксиом этой теории. Система аксиом, обладающая этим свойством, наз. независимой.

Независимость той или иной аксиомы данной аксиоматич. теории означает, что эту аксиому можно без противоречия заменить ее отрицанием. Иными словами, аксиома независима в том и только в том случае, если имеется *интерпретация*, при к-рой эта аксиома ложна, а все остальные аксиомы данной теории истинны. Построение такой интерпретации является классич. методом доказательства независимости.

При построении аксиоматич. теории в виде *формальной системы*, где отношение логич. следования формализуется в виде понятия выводимости, аксиома считается независимой, если она не может быть выведена из других аксиом с помощью правил вывода данной формальной системы. Для широкого класса формальных систем (т. н. теорий 1-го порядка) независимость относительно выводимости совпадает с независимостью относительно логич. следования.

По отношению к формальным системам и вообще *исчислениям* имеет смысл говорить о независимости правил вывода. Правило вывода наз. независимым, если существует теорема данного исчисления, которая не может быть выведена без использования этого правила.

Н. с. а. сама по себе не является обязательным свойством аксиоматич. теории. Она лишь свидетельствует о том, что совокупность исходных положений теории не является избыточной, и представляет нек-рые технич. удобства. Однако исследования, посвященные Н. с. а., и доказательства независимости способствуют лучшему пониманию изучаемой теории. Достаточно вспомнить, какое влияние на развитие математики оказал вопрос о независимости пятого постулата Евклида в системе аксиом геометрии.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [3] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966.

В. Е. Плиско.

НЕЗАВИСИМЫЕ ИЗМЕРИМЫЕ РАЗБИЕНИЯ пространства с нормированной мерой μ — такие два измеримых разбиения ξ и η, что если $B(\xi)$ и $B(\eta)$ — булевы σ-алгебры измеримых множеств, целиком состоящие из элементов разбиений ξ и η соответственно, то элементы одной из них независимы от элементов другой в том смысле, как это понимается в теории вероятностей: $\mu(A \cap B) = \mu(A)\,\mu(B)$ при $A \in B(\xi)$, $B \in B(\eta)$. Если при этом измеримое разбиение, являющееся подразбиением обоих разбиений ξ и η, совпадает по mod 0 с разбиением на отдельные точки, то ξ и η наз. независимыми дополнениями друг друга. Известны условия того, чтобы измеримое разбиение *Лебега пространства* имело независимое дополнение.

Лит.: [1] Рохлин В. А., «Матем. сб.», 1949, т. 25, № 1, с. 107—50; [2] Ершов М. П., «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 1, с. 187–88.

Д. В. Аносов.

НЕЗАВИСИМЫЕ МЕРЫ — меры μ и ν, определенные на локально компактном пространстве T такие, что $\inf(\mu, \nu) = 0$.

Для того чтобы две меры μ и ν были независимы, необходимо и достаточно, чтобы в T существовали такие непересекающиеся множества M и N, что μ сосредоточена на M, а ν на N.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Интегрирование. Меры, интегрирование мер, пер. с франц., М., 1967.

М. И. Войцеховский.

НЕЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМА — последовательность измеримых функций $\{f_i(x)\}$ таких, что

$$\mu\{x: f_1(x) < \alpha_1, \ldots, f_n(x) < \alpha_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mu\{x: f_i(x) < \alpha_i\}$$

для любого n и любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Наиболее простой пример Н. ф. с. — *Радемахера система*.

Критерий (Колмогорова) сходимости почти всюду ряда Н. ф. с.: для того чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ сходился почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы для нек-рого $C > 0$ сходились три ряда:

$$\sum_i \mu\{x: f_i(x) > C\}, \quad \sum_i \int f_i^C(x)\,dx,$$

$$\sum_i \int (f_i^C(x))^2\,dx - \left(\int f_i^C(x)\,dx\right)^2,$$

где

$$f_i^C(x) = \begin{cases} f_i(x), & |f_i(x)| \leqslant C, \\ 0, & |f_i(x)| < C. \end{cases}$$

Е. М. Семенов.

НЕИЗМЕРИМОЕ МНОЖЕСТВО — множество, не являющееся *измеримым множеством*. Подробнее: множество X, принадлежащее наследственному σ-кольцу $H(S)$, неизмеримо, если

$$\mu^*(X) > \mu_*(X);$$

здесь S есть σ-кольцо, на к-ром задана мера μ, а μ^* и μ_* — внешняя и внутренняя меры соответственно (см. *Мера*).

Для интуитивного овладения понятием Н. м. полезно следующее «эффективное построение» его.

Пример 1. Пусть

$$K = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

— единичный квадрат,

$$\hat{E} = \{(x, \quad y): x \in E, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

— множество, соответствующее измеримому по Лебегу множеству E меры $m(E)$, и пусть $\mu(\hat{E}) \underset{=}{\overset{\text{def}}{=}} m(E)$. Тогда множество

$$X = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, \ y = 1/2\}$$

будет Н. м., причем $\mu^*(X) = 1$, $\mu_*(X) = 0$.

Наиболее ранняя и простейшая конструкция Н. м. принадлежит Дж. Витали (G. Vitali, 1905).

Пример 2. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел. Тогда множество X (множество Витали), имеющее согласно аксиоме выбора с каждым из множеств вида $\mathbb{Q}+a$, где a — любое действительное число, ровно по одному общему элементу, является Н. м. Ни одно из множеств Витали не обладает *Бэра свойством*.

Пример 3. Пусть B, (C) — множество чисел вида $n+m\xi$, ξ — иррациональное число, m, n — целые, с четным n (с нечетным n), а X_0 — множество, полученное также с помощью аксиомы выбора из классов эквивалентности множества действительных чисел по отношению:

$$x \sim y, \text{ если } x - y \in A = B \cup C.$$

Пусть $X = X_0 + B$. Тогда для всякого измеримого множества E имеют место равенства:

$$\mu_*(X \cap E) = 0, \quad \mu^*(X \cap E) = \mu(E).$$

На возможности ввести полное упорядочение во множестве мощности континуума основана еще одна конструкция Н. м.

Пример 4. Существует множество $B \subset \mathbb{R}$ такое, что B и $\mathbb{R} \setminus B$ пересекаются с каждым несчетным замкнутым множеством. Любое такое множество (множество Бернштейна) неизмеримо (и не об-

ладает свойством Бэра). В частности, любое множество положительной внешней меры содержит Н. м.

Помимо инвариантности относительно сдвига (пример 2) и топологич. свойств (пример 3) есть причины и теоретико-множественной природы, по к-рым невозможно определить нетривиальную меру для всех подмножеств данного множества, в этом, напр., состоит т е о р е м а У л а м а (см. [2]) для множеств ограниченной мощности.

Неизвестен (1982) ни один конкретный пример Н. м., для построения к-рого не использовалась бы аксиома выбора.

Лит.: [1] Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; [2] О к с т о б и Д ж., Мера и категория, пер. с англ., М., 1974; [3] Г е л б а у м Б., О л м с т е д Д ж., Контрпримеры в анализе, пер. с англ., М., 1967. *М. И. Войцеховский.*

НЕЙВИРТА УЗЕЛ — полигональный узел (S^3, k^1), группа к-рого обладает конечно порожденным коммутантом. Дополнение $S^3 \setminus k^1$ Н. у. есть пространство расслоения над окружностью, причем слой F является связной поверхностью, род к-рой равен роду узла. Коммутант G' группы $G = \pi_1(S^3 \setminus k^1)$ Н. у. является свободной группой ранга $2g$, где g — род узла. Коэффициент при старшем члене полинома Александера Н. у. равен 1, а степень этого многочлена равна $2g$. Все торические узлы являются Н. у. Всякий альтернирующий узел, старший коэффициент полинома Александера к-рого равен ± 1, также Н. у.

Н. у. введены Л. Нейвиртом (см. [1]).

Лит.: [1] N e u w i r t h L., Knot groups, Princenton (N. Y.), 1965. *М. Ш. Фарбер.*

НЕЙЛЯ ПАРАБОЛА — название *полукубической параболы* по имени У. Нейла (W. Neil), к-рый нашел в 1657 длину ее дуги.

НЕЙМАНА АЛГЕБРА — подалгебра A алгебры $\mathcal{B}(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, самосопряженная (т. е. содержащая вместе с каждым оператором T сопряженный к нему оператор T^*) и совпадающая со своим бикоммутантом (т. е. содержащая те и только те операторы $T \subset \mathcal{B}(H)$, к-рые перестановочны с каждым оператором, перестановочным со всеми операторами из A). Эти алгебры были введены Дж. Нейманом [1]. Согласно т е о р е м е Н е й м а н а самосопряженная алгебра $A \subset \mathcal{B}(H)$ тогда и только тогда является Н. а., когда алгебра A (или ее единичный шар) замкнута в слабой, сильной, ультраслабой или ультрасильной, но не равномерной операторной топологии. Данная симметричная банахова алгебра B тогда и только тогда изометрически изоморфна нек-рой Н. а., когда B есть *C^*-алгебра*, изометричная нек-рому сопряженному пространству; банахово пространство E, удовлетворяющее условию $E^* = B$, определено однозначно с точностью до изометрич. изоморфизма и может быть отождествлено с пространством ультраслабонепрерывных линейных форм на изометрически изоморфной B Н. а., это пространство обозначается B_* и наз. п р е д д в о й с т в е н н ы м п р о с т р а н с т в о м для B. Такие симметричные банаховы алгебры наз. W^*-а л г е б р а м и. Пусть A Н. а. в гильбертовом пространстве H, A' — ее коммутант, $Z = A \cap A'$ — центр алгебры, P — проектор в A, P' — проектор в A'. Подпространство $P'H$ инвариантно относительно A, и семейство ограничений операторов из A на подпространство $P'H$ образует Н. а. в пространстве $P'H$; эта алгебра обозначается AP' и наз. и н д у ц и р о в а н н о й, а отображение $T \to T|_{P'H}$ наз. и н д у к ц и е й A на AP'; семейство ограничений операторов вида PTP, $T \in A$, на подпространство PH образует Н. а. A_P в пространстве PH, эта алгебра наз. р е д у ц и р о в а н н о й. Если $P = P' \in Z$, то редуцированная и индуцированная Н. а. совпадают. Изометрический изоморфизм Н. а. наз. а л г е б р а и ч е с к и м; Н. а. в гильбертовом простран-

стве H наз. пространственно изоморфной Н. а. B в пространстве K, если существует унитарный оператор U, отображающий H на K и удовлетворяющий условию $B=UAU^{-1}$. Пересечение любого семейства Н. а. в данном гильбертовом пространстве есть Н. а.; наименьшая Н. а., содержащая данное множество M, наз. Н. а., порожденной множеством M. Пусть H_i, $i\in I$,— гильбертовы пространства, $H=\sum^{\oplus}H_i$ — их прямая сумма, A_i — Н. а. в H_i, A — Н. а. в пространстве H, порожденная такими операторами T из $\mathcal{B}(H)$, что каждое подпространство H_i инвариантно относительно T и ограничение T на H_i принадлежит A_i; Н. а. наз. прямым произведением Н. а. A_i и обозначается $A=\times_{i\in I}A_i$. Для Н. а. определены также операции тензорного произведения и бесконечного тензорного произведения. Н. а. наз. *фактором*, если ее центр состоит из операторов, кратных единичному.

Пусть A — Н. а., A^+ — множество положительных операторов из A. Весом на A наз. аддитивное отображение φ множества A в $[0, \infty]$, однородное относительно умножений на положительные числа. Вес φ наз. следом, если $\varphi(UTU^{-1})=\varphi(T)$ для всех $T\in A^+$ и всех унитарных операторов U из A. След наз. конечным, если $\varphi(T)<\infty$ для всех $T\in A$; полуконечным, если для любого $S\in A^+$ величина $\varphi(S)$ есть верхняя грань чисел вида $\varphi(T)$, где $\varphi(T)<\infty$ и $0\leqslant T\leqslant S$; точным, если из условия $\varphi(T)=0$, $T\in A^+$, следует $T=0$; нормальным, если для любого возрастающего семейства T_α элементов из A^+ с точной верхней границей T величина $\varphi(T)$ является верхней гранью чисел $\varphi(T_\alpha)$. Н. а. A наз. конечной, если на A существует семейство нормальных конечных следов, разделяющее точки A; собственно бесконечной, если на A не существует ненулевых конечных следов; полуконечной, если на A существует точный нормальный полуконечный след, чисто бесконечной, или алгеброй типа III, если на A не существует ненулевых нормальных полуконечных следов. Н. а. наз. дискретной, или алгеброй типа I, если она алгебраически изоморфна Н. а., коммутант к-рой коммутативен; такая алгебра полуконечна. Н. а. наз. непрерывной, если для любого ненулевого центрального проектора P Н. а. A_P не является дискретной. Непрерывная полуконечная алгебра наз. алгеброй типа II. Конечная алгебра типа II наз. Н. а. типа II_1; собственно бесконечная алгебра типа II наз. Н. а. типа II_∞. Принадлежность Н. а. к определенному типу равносильна принадлежности ее коммутанта тому же типу, но коммутант конечной Н. а. не обязательно является конечной Н. а.

Пусть A — Н. а., P, Q — проекторы в A, P и Q наз. эквивалентными, $P\sim Q$, если существует такой элемент $U\in A$, что $P=U^*U$, $Q=UU^*$. Пусть $P\prec Q$, если существует такой проектор $P_1\in A$, что $P\sim P_1$ и $P_1\leqslant Q$; отношение $\prec$ есть отношение частичного порядка. Классификация Н. а. по типам I и т. д. может быть проведена в терминах этого отношения, в частности: проектор $P\in A$ наз. конечным, если из условий $P_1\in A$, $P_1\sim P$, $P_1\leqslant P$ следует, что $P_1=P$; Н. а. конечна тогда и только тогда, когда единичный проектор конечен, и полуконечна, если и только если точная верхняя граница семейства конечных проекторов есть единичный проектор.

Н. а. A полуконечна тогда и только тогда, когда она может быть реализована как левая Н. а. нек-рой совершенной *гильбертовой алгебры*; элементами соответствующей гильбертовой алгебры являются такие элементы $x\in A$, что $\varphi(x^*x)<\infty$, где φ — точный нормальный полуконечный след на A. Для алгебр типа III

соответствующая реализация может быть получена с помощью обобщенных гильбертовых алгебр и весов на Н. а.

Пусть H_p — фиксированное гильбертово пространство размерности p, $p=1, 2, \ldots, \aleph_0$, Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, $Z=\bigcup_{p=1}^{\aleph_0} Z_p$ — разбиение Z на непересекающиеся измеримые подмножества, $L_2(Z_p, \mu, H_p)$ — гильбертово пространство суммируемых с квадратом μ-измеримых отображений пространства Z_p в H_p,

$$H=\oplus_{p=1}^{\infty} L_2(Z_p, \mu, H_p).$$

Пусть $H(\zeta)=H_p$ при $\zeta\in Z_p$; если $f\in H$, то $f=\sum_p f_p$, где $f_p\in L_2(Z_p, \mu, H_p)$; пусть $f(\zeta)=f_p(\zeta)$ при $\zeta\in Z_p$; отображение $\zeta\to T(\zeta)$, где $T(\zeta)$ — непрерывный линейный оператор в гильбертовом пространстве $H(\zeta)$, наз. и з м е р и м ы м п о л е м о п е р а т о р о в, если для любого $f\in H$ функция $\zeta\to T(\zeta)f(\zeta)$ измерима на каждом множестве Z_p. Если $\zeta\to T(\zeta)$ — измеримое поле операторов и функция $\zeta\to\|T(\zeta)\|$ существенно ограничена на Z, то для любого $f\in H$ существует единственный вектор $g\in H$ такой, что $g(\zeta)=T(\zeta)f(\zeta)$ μ-почти всюду. Отображение $T: H\to H$, определенное формулой $Tf=g$ для всех $f\in H$, является ограниченным линейным оператором в H, и

$$\|T\|=\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in Z}\|T(\zeta)\|.$$

Такой оператор T в H наз. р а з л о ж и м ы м. Пусть для любого $\zeta\in Z$ определена Н. а. $A(\zeta)$ в пространстве $H(\zeta)$; отображение $\zeta\to A(\zeta)$ наз. и з м е р и м ы м п о л е м Н. а., если существует такая последовательность $\{\zeta\to T_n(\zeta)\}$ измеримых операторных полей, что при любом $\zeta\in Z$ Н. а. $A(\zeta)$ порождается операторами $T_n(\zeta)$. Множество всех таких разложимых операторов T в H, что $T(\zeta)\in A(\zeta)$ при каждом $\zeta\in Z$, есть Н. а. в H, обозначаемая

$$A=\int^{\oplus} A(\zeta)\,d\mu(\zeta),$$

она наз. п р я м ы м и н т е г р а л о м Н. а. $A(\zeta)$ по мере μ. Любая Н. а. в сепарабельном гильбертовом пространстве изоморфна нек-рому прямому интегралу факторов. Произвольная Н. а. может быть подвергнута алгебраич. разложению, в связи с чем теория факторов и представляет интерес для общей теории Н. а.

Н. а. естественно возникают в задачах, связанных с операторами в гильбертовом пространстве, и имеют многочисленные приложения как в самой теории операторов и теории представлений групп и алгебр, так и в теории динамич. систем, статистич. физике и квантовой теории поля.

Лит.: [1] Murray F., Neumann J., «Ann. Math.», 1936, v. 37, p. 116—229; «Trans. Amer. Math. Soc.», 1937, v. 41, p. 208—48; [2] Neumann J., «Ann. Math.», 1943, v. 44, p. 716—808; [3] Dixmier J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2 éd., P., 1969; [4] Диксмье Ж., С*-алгебры и их представления, пер. с франц., М., 1974; [5] Sakai S., C*-algebras and W*-algebras, B., 1971; [6] Neumann J., «Comp. math.», 1938, v. 6, p. 1—77; «Ann. Math.», 1940, v. 41, p. 94—161; [7] Guichardet A., «Ann. scient. École norm. supér.», 1966, t. 83, p. 1—52; [8] Такесаки М., «Математика», 1974, т. 18, № 3, с. 84—120, № 4, с. 34—63; [9] Zsidó L., Topological decompositions of operator algebras, Vienna, 1974; [10] Наймарк М. А., Нормированные кольца, 2 изд., М., 1968.

А. И. Штерн.

НЕЙМАНА ЗАДАЧА — то же, что *вторая краевая задача*. Названа по имени К. Неймана (K. Neumann, 1877), к-рый впервые систематически исследовал ее.

НЕЙМАНА МЕТОД ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ — один из методов *доверительного оценивания*, позволяющий получать *интервальные оценки* для неизвестных параметров вероятностных законов по результатам наблюдений. Предложен и развит Ю. Ней-

маном (см. [1], [2]). Суть метода заключается в следующем. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайные величины, совместная функция распределения к-рых $F(x, \theta)$ зависит от параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$, $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Далее, пусть в качестве точечной оценки параметра θ используется статистика $T=T(X_1, \ldots, X_n)$, функция распределения к-рой есть $G(t, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Тогда для любого числа P из интервала $0{,}5<P<1$ можно определить систему из двух уравнений относительно переменной θ:

$$G(T, \theta) = \begin{cases} P, \\ 1-P. \end{cases} \qquad (*)$$

При определенных условиях регулярности функции $F(x, \theta)$, к-рые выполняются почти во всех интересных для практики случаях, система (*) имеет единственное решение

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}(T), \quad \overline{\theta} = \overline{\theta}(T), \quad \overline{\theta}, \underline{\theta} \in \Theta,$$

такое, что

$$\mathsf{P}\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta} \mid \theta\} \geqslant 2P-1.$$

Множество $(\underline{\theta}, \overline{\theta}) \subset \Theta$ наз. доверительным интервалом (доверительной оценкой) для неизвестного параметра θ с доверительной вероятностью $2P-1$. Статистики $\underline{\theta}$ и $\overline{\theta}$ наз. нижним и верхним доверительными пределами, отвечающими выбранному коэффициенту доверия P. В свою очередь, число

$$p = \inf_{\theta \in \Theta} \mathsf{P}\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta} \mid \theta\}$$

наз. коэффициентом доверия доверительного интервала $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$. Таким образом, Н. м. д. и. приводит к интервальным оценкам, коэффициент доверия к-рых $p \geqslant 2P-1$.

Пример 1. Пусть независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ подчиняются одному и тому же нормальному закону $\Phi(x-\theta)$, математич. ожидание к-рого θ неизвестно. В этом случае наилучшей оценкой для θ является достаточная статистика $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, к-рая распределена по нормальному закону $\Phi[\sqrt{n}(x-\theta)]$. Фиксируя P из интервала $0{,}5<P<1$ и решая уравнения

$$\Phi\left[\sqrt{n}\,(\overline{X}-\theta)\right] = P, \quad \Phi\left[\sqrt{n}\,(\overline{X}-\theta)\right] = 1-P,$$

находят нижний и верхний доверительные пределы

$$\underline{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}(P), \quad \overline{\theta} = \overline{X} - \frac{1}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}(1-P),$$

отвечающие выбранному коэффициенту доверия P. Так как

$$\Phi^{-1}(y) + \Phi^{-1}(1-y) \equiv 0, \quad y \in [0, 1],$$

то доверительный интервал для неизвестного математич. ожидания θ нормального закона $\Phi(x-\theta)$ имеет вид

$$\left(\overline{X} - \frac{1}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}(P), \quad \overline{X} + \frac{1}{\sqrt{n}}\,\Phi^{-1}(P)\right),$$

причем коэффициент доверия его в точности равен $2P-1$.

Пример 2. Пусть μ — случайная величина, подчиняющаяся биномиальному закону с параметрами n и θ, т. е. для любого целого $m=0, 1, 2, \ldots, n$

$$\mathsf{P}\{\mu \leqslant m \mid n, \theta\} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k} =$$

$$= I_x(n-m, m+1), \quad 0 < \theta < 1,$$

где

$$I_x(a,\ b) = \frac{1}{B(a,\ b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$$

— неполная бета-функция ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $a>0$, $b>0$). Если параметр «успеха» θ неизвестен, то для определения доверительных пределов нужно согласно Н. м. д. и. решить уравнения

$$I_{1-\theta}(n-\mu,\ \mu+1) = \begin{cases} P, \\ 1-P, \end{cases}$$

где $0{,}5<P<1$. По таблицам математич. статистики определяют корни $\overline{\theta}$ и $\underline{\theta}$ этих уравнений, являющиеся соответственно верхним и нижним доверительными пределами с коэффициентом доверия P. Полученный таким образом доверительный интервал $(\underline{\theta},\ \overline{\theta})$ имеет коэффициент, в точности равный $2P-1$. Очевидно, что если в эксперименте получают $\mu=0$, то в этом случае $\underline{\theta}=0$, если же $\mu=n$, то $\overline{\theta}=1$.

Н. м. д. и. существенно отличается от бейесовского метода и метода, основанного на фидуциальном подходе Фишера. В Н. м. д. и. неизвестный параметр θ функции распределения $F(x, \theta)$ трактуется как постоянная величина, а сам доверительный интервал $(\underline{\theta}(T), \overline{\theta}(T))$ строится до эксперимента, в ходе к-рого вычисляется значение статистики T. Следовательно, согласно Н. м. д. и. вероятность одновременного выполнения неравенств $\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}$ есть *априорная вероятность* того, что доверительный интервал $(\underline{\theta},\ \overline{\theta})$ «накрывает» неизвестное истинное значение параметра θ. Очевидно, что на самом деле доверительный метод Неймана остается в силе, если θ является случайной величиной, так как в Н. м. д. и. интервальная оценка строится до проведения эксперимента и, следовательно, не зависит от *априорного распределения* параметра. Н. м. д. и. выгодно отличается от бейесовского и фидуциального подходов своей независимостью от априорной информации о параметре θ, и при этом, в отличие от метода Фишера, логически безупречен. В общем случае Н. м. д. и. приводит к целой системе доверительных интервалов для неизвестного параметра, в связи с чем возникает задача построения оптимальной интервальной оценки, обладающей, напр., свойствами несмещенности, селективности или подобия, к-рая находит свое решение в рамках теории проверки статистич. гипотез.

Лит.: [1] Neyman J., «Ann. Math. Statistics», 1935, v. 6, p. 111—16; [2] его же, «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.», 1937, v. 236, p. 333—80; [3] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [4] Большев Л. Н., «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, т. 10, № 1, с. 187—92; [5] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

НЕЙМАНА РЯД — ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(z),$$

где $J_{\nu+n}$ — *Бесселя функции* (цилиндрич. функции 1-го рода), ν — нек-рое число (действительное или комплексное). К. Нейман [1] рассмотрел частный случай, когда ν — целое число. Он показал, что если $f(z)$ — аналитич. функция в замкнутом круге с центром в начале координат, z — внутренняя точка круга, C — граница круга, то имеет место равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z),$$

где

$$a_0 = f(0), \quad a_n = \frac{1}{\pi i} \int_C O_n(t)\, f(t)\, dt;$$

O_n— многочлен степени $n+1$ относительно $1/t$:

$$O_0(t)=1/t,$$

$$O_n(t)=\frac{1}{2t^{n+1}}\int_0^\infty e^{-x}\left[(x+\sqrt{x^2+t^2})^n+\right.$$
$$\left.+(x-\sqrt{x^2+t^2})^n\right]dx,\quad n\geqslant 1;$$

он обычно наз. многочленом Неймана n-го порядка (сам К. Нейман эту функцию называл бесселевой функцией 2-го порядка, ныне этим термином пользуются для обозначения одного из решений уравнения Бесселя).

Примеры представления функций с помощью Н. р.:

$$\cos(z\sin\varphi)=J_0(z)+2\sum_{n=1}^\infty J_{2n}(z)\cos 2n\varphi,$$

$$\sin(z\cos\varphi)=2\sum_{n=1}^\infty J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\varphi,$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\mu=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\mu+2n)\,\Gamma(\mu+n)}{n!}J_{\mu+2n}(z),$$

где μ — любое не целое отрицательное число, Γ — *гамма-функция*.

В теории интегральных уравнений Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=f(x),\quad x\in[a,\ b],\qquad(1)$$

рядом Неймана наз. разложение резольвенты $R(x,\ s;\ \lambda)$ ядра K:

$$R(x,\ s;\ \lambda)=\sum_{n=1}^\infty\lambda^n K_n(x,\ s),\qquad(2)$$

где K_n — интерированные ядра (ядра K), определяемые рекуррентными формулами

$$K_1(x,\ s)=K(x,\ s),$$
$$K_n(x,\ s)=\int_a^b K_{n-1}(x,\ t)\,K(t,\ s)\,dt,\quad n\geqslant 2.$$

С помощью формулы (2) решение уравнения (1) при малых λ представляется равенством

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{k=1}^\infty\lambda^n\int_a^b K_n(x,\ s)\,f(s)\,ds.\qquad(3)$$

Последний ряд также наз. рядом Неймана. Ряд (3) был рассмотрен К. Нейманом [2] в случае уравнения (1), к к-рому сводится задача Дирихле в теории потенциала.

Пусть A — ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство X в себя, и пусть норма $\|A\|<1$. Тогда оператор $I-A$, где I — тождественный оператор, имеет единственный обратный ограниченный линейный оператор $(I-A)^{-1}$, допускающий разложение

$$(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^\infty A^n,\qquad(4)$$

к-рое в теории линейных операторов наз. рядом Неймана. Ряд (3) можно рассматривать как частный случай ряда (4).

Лит.: [1] Neumann K., Theorie der Besselschen Functionen, Lpz., 1867; [2] его же, Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential, Lpz., 1877; [3] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, пер. с англ., ч. 1, М., 1949; [4] Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, 2 изд., Л.— М., 1935; [5] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [6] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, пер. с англ., М., 1960.

Б. В. Хведелидзе.

НЕЙМАНА СТРУКТУРА — структура, определяемая статистикой, не зависящей от достаточной статистики. Понятие Н. с. введено Ю. Нейманом (J. Neyman, см. [1]) в связи с задачей построения подобных критериев в теории проверки статистич. гипотез, при этом сам термин «Н. с.» употребляют по отношению к структуре статистич. критерия, если его критич. функция имеет Н. с. Пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве

$(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)$, $\theta \in \Theta$, надлежит проверить сложную гипотезу $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$, причем для семейства $\{P_\theta, \theta \in \Theta_0\}$ существует достаточная статистика T с распределением из семейства $\{P_\theta^T, \theta \in \Theta_0\}$. В этом случае любой статистич. критерий уровня α, предназначенный для проверки гипотезы H_0, имеет Н. с., если его критич. функция φ удовлетворяет условию:

$$\mathsf{E}\{\varphi(X) \mid T = t\} = \alpha \text{ почти всюду по мере } \mathsf{P}_\theta^T,\ \theta \in \Theta_0. \quad (1)$$

Очевидно, что если статистич. критерий имеет Н. с., то он является подобным по отношению к семейству $\{P_\theta, \theta \in \Theta_0\}$, так как

$$\mathsf{E}_\theta\{\varphi(X)\} = \mathsf{E}_\theta\{\mathsf{E}\{\varphi(X) \mid T = t\}\} = \alpha$$

для всех $\theta \in \Theta_0$.

Выполнение условия (1) по существу сводит задачу проверки сложной гипотезы H_0 к задаче проверки простой гипотезы H_0 при каждом фиксированном значении t достаточной статистики T.

Пример. Пусть независимые случайные величины X_1 и X_2 подчиняются законам Пуассона, параметры к-рых λ_1 и λ_2 неизвестны, и пусть проверяется гипотеза $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$ против альтернативы $H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_2$. В силу независимости X_1 и X_2 статистика $T = X_1 + X_2$ подчиняется закону Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$, а условные распределения случайных величин X_1 и X_2 при условии $T = t$ суть биномиальные распределения с параметрами t, $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$ и t, $\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$ соответственно, т. е.

$$\mathsf{P}\{X_i = k \mid T = t\} = \binom{t}{k} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{t-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, t. \quad (2)$$

При справедливости гипотезы H_0 статистика T является достаточной для неизвестного общего значения $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, а из (2) следует, что если гипотеза H_0 имеет место, то условное распределение случайной величины X_1 при фиксированном значении достаточной статистики $T = t$ является биномиальным с параметрами t и $1/2$, т. е. при H_0

$$\mathsf{P}\{X_1 = k \mid T = t\} = \binom{t}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^t, \quad k = 0, 1, \ldots, t.$$

Таким образом, в этом случае задача проверки сложной гипотезы H_0 свелась к задаче проверки простой гипотезы H_0^t, согласно к-рой условное распределение случайной величины X_1 (при фиксированной сумме $X_1 + X_2 = t$) является биномиальным с параметрами t и $1/2$. Для проверки гипотезы H_0^t можно воспользоваться, напр., *знаков критерием*.

Понятие Н. с. имеет большое значение в задаче проверки сложных статистич. гипотез, т. к. именно среди критериев, имеющих Н. с., часто находится *наиболее мощный критерий*. Э. Леман (E. Lehmann) и Г. Шеффе (H. Scheffé) показали, что статистич. критерий для проверки сложной гипотезы $H_0 : \theta \in \Theta_0$ имеет Н. с. по отношению к достаточной статистике T тогда и только тогда, когда семейство $\{P_\theta^T, \theta \in \Theta_0\}$, индуцированное статистикой T, является ограниченно полным. На основе понятия Н. с. разработаны общие методы построения подобных критериев. См. *Распределений полное семейство*, *Подобный критерий*.

Лит.: [1] Неймаи Дж., Текущие задачи математической статистики, [пер. с англ.]. Международный математический конгресс в Амстердаме. 1954, М., 1961; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Линник Ю. В., Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966.

М. С. Никулин.

НЕЙМАНА ТЕОРЕМА эргодическая: для изометрич. оператора U в гильбертовом пространстве H и любого $h \in H$ существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k h = \overline{h}$$

(понимаемый в смысле сходимости по норме в H). Для непрерывной однопараметрич. группы унитарных преобразований $\{U_t\}$ в H и любого $h \in H$ существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_t h dt = \overline{h}$$

(понимаемый в том же смысле). При этом $\overline{h}$ есть ортогональная проекция h на пространство инвариантных относительно U (или $\{U_t\}$) элементов H.

Н. т. сформулирована и доказана Дж. Нейманом [1], имевшим в виду в первую очередь ее применения в эргодич. теории, когда в пространстве с мерой (X, μ) задан эндоморфизм T (или *измеримый поток* $\{T_t\}$), $H = L^2(X, \mu)$ и U есть оператор сдвига:

$$Uh(x) = h(Tx) \quad \text{или} \quad U_t h(x) = h(T_t(x)).$$

В этом случае Н. т. означает, что временны́е средние функции $h(x)$, т. е. средние значения $h(T^k x)$ или $h(T_t x)$ на отрезке времени $0 \leqslant k < n$ или $0 \leqslant t \leqslant T$, при удлинении этого отрезка сходятся к $\overline{h}(x)$ в среднем квадратичном по x (что часто подчеркивается термином mean ergodic theorem). В частности, при достаточной длине интервала осреднения временно́е среднее функции $h(x)$ для большинства x близко к $\overline{h}(x)$. Поэтому Н. т. (и ее обобщения) часто (в особенности применительно к данному случаю) наз. статистической эргодической теоремой, в отличие от индивидуальной эргодической теоремы, т. е. *Биркгофа эргодической теоремы* (и ее обобщений). Из последней (и — при $\mu(X) = \infty$ — из используемых при ее доказательстве рассуждений) в данном случае можно вывести Н. т. Однако в общем случае, когда H не реализовано как $L^2(X, \mu)$ и оператор U или U_t не связан с какими-то преобразованиями в X, Н. т. не следует из теоремы Биркгофа.

Первоначальное доказательство Н. т. опиралось на спектральное разложение унитарных операторов. Позднее появился ряд других доказательств (простейшее из них принадлежит Ф. Риссу, F. Riesz, см. [2]) и обобщений для более широких классов групп и полугрупп операторов в банаховых пространствах (см. [3], [4]).

Н. т. и ее обобщения принадлежат к числу *операторных эргодических теорем*.

Лит.: [1] Neumann J., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1932, v. 18, p. 70—82; [2] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [3] Вершик А. М., Юзвинский С. А., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1967, М., 1969, с. 133—87; [4] Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 13, М., 1975, с. 129—262.

Д. В. Аносов.

НЕЙМАНА ФУНКЦИИ — *цилиндрические функции* 2-го рода. Н. ф. $N_p(x)$ [иногда применяется обозначение $Y_p(x)$] могут быть определены через *Бесселя функции* $J_p(x)$ следующим образом:

$$N_p(x) = \lim_{k \to p} \frac{J_k(x)\cos k\pi - J_{-k}(x)}{\sin k\pi}.$$

Н. ф. действительны при действительном положительном x и стремятся к нулю при $x \to \infty$. При больших x справедливо асимптотич. представление

$$N_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{2} p\pi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Н. ф. связаны рекуррентными формулами

$$N_{p-1}(x) + N_{p+1}(x) = (2p/x) N_p(x),$$
$$N_{p-1}(x) - N_{p+1}(x) = 2N'_p(x).$$

При $p = n$ целых:

$$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x);$$

для малых x:

$$N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{2}{\gamma x}\right), \quad N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n,$$

где $\ln \gamma = C = 0{,}5772\ \ldots$ — постоянная Эйлера.

Графики функций Неймана.

Н. ф. для «полуцелого» порядка $p = n + 1/2$ выражаются через тригонометрич. функции, в частности

$$N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \quad N_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Н. ф. предложены К. Нейманом (K. Neumann, 1867).

Лит. см. при ст. *Цилиндрические функции*. *В. И. Битюцков.*

НЕЙМАНА — ПИРСОНА ЛЕММА — лемма, утверждающая, что в задаче статистич. проверки простой гипотезы H_0 против простой альтернативы H_1 *отношения правдоподобия критерий* является *наиболее мощным критерием* среди всех статистич. критериев, имеющих один и тот же заданный *значимости уровень*. Н.— П. л. доказана Ю. Нейманом и Э. Пирсоном [1]. Н.— П. л. часто наз. фундаментальной леммой математической статистики. См. также *Статистических гипотез проверка*.

Лит.: [1] Neuman J., Pearson E. S., «Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A», 1933, v. 231, p. 289—337; [2] Леман Э. Л., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979. *М. С. Никулин.*

НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА УРАВНЕНИЕ — *дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом*, в к-рое старшая производная входит при более чем одном значении аргумента, в том числе при основном (непреобразованном), и это последнее значение является наибольшим из присутствующих в уравнении. Напр., уравнение

$$x'(t) = f(t,\ x(\alpha(t)),\ x'(\beta(t))) \qquad (*)$$

есть Н. т. у. при $\alpha(t) \leqslant t$, $\beta(t) < t$.

Для Н. т. у. разрешима начальная задача; так, если для Н. т. у. $(*)$ с возрастающей $\beta(t)$ задать

$$x = \varphi(t), \quad t \leqslant t_0,$$

то при

$$f \in C^{m,\ n,\ n}, \quad \alpha,\ \beta \in C^m, \quad \varphi \in C^p, \quad m,\ n \geqslant 0,\ p \geqslant 1,$$

существует (при $n \geqslant 1$ — единственное) кусочно гладкое решение, к-рое при выполнении $k = 1 + \min\{m,\ n,\ p-1\}$ условий согласования, т. е. условий типа

$$\varphi'(t_0) = f(t_0,\ \varphi(\alpha(t_0)),\ \varphi'(\beta(t_0))),$$

принадлежит C^k. Н. т. у.— один из наиболее изученных классов уравнений с отклоняющимся аргументом. Н. т. у. естественно появляются в прикладных задачах, в постановку к-рых входит то или иное свойство повторяемости. *А. Д. Мышкис.*

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ — теория моделей, отличающаяся от классической тем, что либо *формальный язык*, с к-рым она имеет дело, отличен от

языка первого порядка $L_{\omega\omega}$, либо логика, лежащая в ее основе, отлична от классической (двузначной). В дальнейшем, если не оговорено противное, логика считается двузначной.

В теории моделей языка L наиболее важными являются следующие проблемы.

а) Аксиоматизируемость множества тождественно истинных формул. Если существует эффективная нумерация формул языка L натуральными числами, то проблема уточняется: будет ли множество номеров тождественно истинных формул рекурсивно перечислимым?

б) Язык L наз. (α, β)-к о м п а к т н ы м, если для любого множества Σ высказываний языка L мощности $\leqslant\alpha$ из выполнимости каждого подмножества $\Sigma'\subseteq\Sigma$ мощности $<\beta$ следует выполнимость Σ. Проблема компактности состоит в описании пар кардиналов $\langle\alpha, \beta\rangle$, для к-рых L является (α, β)-компактным.

в) Если формулы языка L образуют множество (несобственный класс), то существует такой кардинал α, что всякое множество высказываний языка L, имеющее модель мощности $\beta\geqslant\alpha$, имеет модели сколь угодно больших мощностей. Наименьший такой кардинал наз. ч и с л о м Х а н ф а языка L. Для $L_{\omega\omega}$ оно равно счетной мощности ω. Проблема заключается в вычислении числа Ханфа для L и в установлении условий существования моделей малых мощностей.

Ниже перечислены наиболее изученные неклассич. языки и для каждого из них отмечены нек-рые решения проблем а) — в).

1) Я з ы к L_2 л о г и к и в т о р о й с т у п е н и. Он получается из $L_{\omega\omega}$ добавлением переменных для предикатов и разрешением навешивания на них кванторов. Высказывание Ф языка L_2 наз. и с т и н н ы м в системе $\langle A, F_1, \ldots, F_n, \ldots\rangle$ (где A — модель сигнатуры Ф, а F_n, $n\geqslant 1$,— множества n-местных предикатов на A), если Ф истинно в A при ограничении кванторов по n-местным предикатам множествами F_n. Если при этом F_n, $n\geqslant 1$, совпадают с множествами всех n-местных предикатов на A, то говорят, что Ф истинно в модели A. Существует высказывание языка L_2, характеризующее арифметику натуральных чисел с точностью до изоморфизма. Из *Гёделя теоремы о неполноте* арифметики следует, что множество высказываний языка L_2, истинных во всех моделях, не аксиоматизируемо. Однако существует естественное обобщение Σ_2 аксиоматики исчисления предикатов первой ступени, для к-рого справедлива т е о р е м а Х е н к и н а о п о л н о т е: из Σ_2 выводимы те и только те высказывания языка L_2, к-рые истинны во всех системах $\langle A, F_1, \ldots, F_n \ldots\rangle$, удовлетворяющих аксиомам Σ_2. В этом случае имеется а н а л о г т е о р е м ы Л ё в е н х е й м а — С к о л е м а для $L_{\omega\omega}$: если высказывание Ф языка L_2 истинно вместе с аксиомами Σ_2 в нек-рой системе, то Ф и Σ_2 истинны в системе $\langle A, F_1, \ldots, F_n, \ldots\rangle$, где A и F_n, $n\geqslant 1$, не более чем счетные. Нек-рые вопросы теории моделей языка L_2 связаны с проблемами теории множеств и неразрешимы в аксиоматике теории множеств Цермело — Френкеля.

2) Я з ы к $L_{\alpha\beta}$ (α, β — кардиналы). Формулы этого языка строятся из формул языка 1-го порядка с помощью конъюнкций и дизъюнкций множеств формул мощности $<\alpha$, отрицания и кванторной приставки по предметным переменным длины $<\beta$. Истинность формулы в модели определяется, аналогично языку 1-го порядка, индукцией по построению формулы. Кардинал α наз. к о м п а к т н ы м, если для любого кардинала γ язык $L_{\alpha\alpha}$ является (γ, α)-компактным. Среди языков $L_{\alpha\beta}$ после $L_{\omega\omega}$ наиболее изучен $L_{\omega_1\omega}$. Всякую счетную модель счетной сигнатуры можно охарактеризовать высказыванием языка $L_{\omega_1\omega}$ с точностью до изоморфизма. Язык $L_{\omega_1\omega}$ для любого α является (α, ω_1)-компактным. Число Ханфа для $L_{\omega_1\omega}$ равно $2^{\omega, \omega_1}$, где

$2^{\alpha,\nu}$ определяется индукцией по ординалу ν: $2^{\alpha,0}=\alpha$, $2^{\alpha,\delta+1}=2^{\alpha,\delta}$ и $2^{\alpha,\delta}=\sum_{\mu<\delta}2^{\alpha,\mu}$, если δ — предельный ординал.

3) Язык $\mathscr{L}_\alpha$ с квантором «существует по крайней мере ω_α». Язык $\mathscr{L}_\alpha$ получается из $L_{\omega\omega}$ добавлением нового квантора Q^α. Истинность формулы определяется индукцией по длине формулы. При этом формула $(Q^\alpha x)\Phi(x)$ истинна в модели A, если мощность множества $\{a|a\in A,\ \Phi(a)$ истинна в $A\}$ не меньше ω_α. Пусть V_α обозначает множество формул языка $\mathscr{L}_\alpha$, истинных во всех моделях мощности $\geqslant\omega_\alpha$. Множество V_0 не аксиоматизируемо, V_1 аксиоматизируемо. Язык $\mathscr{L}_0$ не (ω,ω)-компактен. Однако нек-рая компактность имеет место в языках $\mathscr{L}_\alpha$. Пусть $\omega_\beta<<\omega_\alpha$ означает, что из $\lambda<\omega_\beta$ и $\gamma_i<\omega_\beta\,(i\in\lambda)$ следует $\prod_{i\in\lambda}\gamma_i<\omega_\alpha$. Если $\omega_\beta<<\omega_\alpha$, то $\mathscr{L}_\alpha$ будет (ω_β,ω)-компактным. Число Ханфа для $\mathscr{L}_1$ равно $2^{\omega,\omega}$.

До сих пор рассматривались модели, в к-рых любое высказывание языка L сигнатуры σ было либо истинным, либо ложным. Рассмотрим теперь модель A сигнатуры σ, в к-рой n-местные предикаты понимаются не как подмножества A^n, а как отображения A^n в множество X. Если на X определены операции, соответствующие логич. связкам языка L и кванторам (понимаемым как бесконечноместные операции), то можно определить значение истинности $\|\Phi\|^A\in X$ любого высказывания Φ языка L в модели A. Таким образом, получается теория моделей с множеством значений истинности X. Наиболее плодотворной оказывается теория, когда X — компактное хаусдорфово топологич. пространство или полная булева алгебра. В этих случаях работают многие методы классич. теории моделей. В случае, когда X — полная булева алгебра, конъюнкция, дизъюнкция и отрицание определяются как пересечение, объединение и дополнение соответственно. Значение $\|(\forall x)\Phi(x)\|^A$ определяется как пересечение всех элементов вида $\|\Phi(a)\|^A$, $a\in A$. Булевозначные модели нашли широкое применение в доказательствах совместности различных предложений теории множеств с основными аксиомами аксиоматич. теории множеств.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., т. 1, М., 1960; [2] Кейслер Г. Д., Чэн Чень-чунь, Теория непрерывных моделей, пер. с англ., М., 1971.

Е. А. Палютин, А. Д. Тайманов.

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ, точнее — некорректно поставленные задачи, — задачи, для к-рых не удовлетворяется хотя бы одно из приводимых ниже условий, характеризующих корректно поставленные задачи [короче — корректные задачи (к. з.)]. Задача определения решения $z=R(U)$ из метрич. пространства Z (с расстоянием $\rho_Z(\ ,\ )$) по «исходным данным» u из метрич. пространства U (с расстоянием $\rho_U(\ ,\ )$) наз. корректно поставленной на паре пространств (Z,U), если: а) для всякого $u\in U$ существует решение $z\in Z$; б) решение определяется однозначно; в) задача устойчива на пространствах (Z,U), что означает: для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых $u_1,u_2\in U$ из неравенства $\rho_U(u_1,u_2)\leqslant\delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\rho_Z(z_1,z_2)\leqslant\varepsilon$, где $z_1=R(u_1)$, $z_2=R(u_2)$.

Понятие к. з. принадлежит Ж. Адамару (J. Hadamard, 1923), высказавшему точку зрения, что всякая математич. задача, соответствующая какой-либо физич. или технич. задаче, должна быть корректной. В самом деле, какую физич. интерпретацию может иметь решение, если как угодно малым изменениям исходных данных могут соответствовать большие изменения решения? К таким задачам затруднительно применять приближенные методы решения. Это поставило под сомнение целесообразность изучения Н. з.

Однако такая точка зрения, естественная в применении к нек-рым явлениям, развивающимся во времени, не может быть перенесена на все задачи. В самом деле, неустойчивыми в метрике C, а следовательно и Н. з., являются задачи: решения интегральных уравнений 1-го рода; дифференцирования функций, известных приближенно; численного суммирования рядов Фурье, когда их коэффициенты известны приближенно в метрике l_2; задача Коши для уравнения Лапласа; задача аналитич. продолжения функций; обратные задачи гравиметрии. Некорректными являются также задачи решения систем линейных алгебраич. уравнений в условиях равного нулю определителя системы (а также плохо обусловленные системы); минимизации функционалов, имеющих несходящиеся минимизирующие последовательности; нек-рые задачи линейного программирования и оптимального управления; проектирования оптимальных систем, конструкций (синтез антенн и других физич. систем); задачи об управлении объектами, описываемые дифференциальными уравнениями (в частности, дифференциальные игры). К перечисленным задачам приводят самые различные физич. и технич. проблемы (см. [7]).

К Н. з. относится широкий класс т. н. обратных задач, возникающих в физике, технике и других отраслях знаний, в частности — задачи обработки результатов физич. экспериментов. Пусть z — количественная характеристика изучаемого явления (объекта). В физич. эксперименте часто величина z недоступна непосредственному измерению, а измеряется нек-рое ее проявление $Az=u$. Для интерпретации результатов измерений необходимо определять z по u, т. е. решать уравнение вида

$$Az=u. \tag{1}$$

Задачи решения уравнений (1) часто наз. задачами распознавания образов. Задачи, приводящие к задачам минимизации функционалов (задачи синтеза антенн и других систем и конструкций, задачи оптимального управления и многие др.), наз. также задачами синтеза.

Пусть в задаче обработки результатов физич. экспериментов изучаемый объект (явление) характеризуется элементом z (функцией, вектором), принадлежащим множеству возможных решений Z метрич. пространства $\tilde{Z}$. Пусть z_T недоступен для прямого измерения и измеряется его проявление $Az_T=u_T$, $u_T\in AZ$, где AZ — образ Z при его отображении с помощью оператора A. Очевидно, $z_T=A^{-1}u_T$, где A^{-1} — оператор, обратный оператору A. Так как элемент u_T получают путем измерений, то он бывает известен лишь приближенно. Пусть $\tilde{u}$ — это приближенное значение. В этих условиях речь может идти лишь о нахождении приближенного (к z_T) «решения» уравнения

$$Az=\tilde{u}. \tag{2}$$

Оператор A во многих случаях таков, что обратный ему оператор A^{-1} не является непрерывным, напр. когда A — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве, в частности интегральный оператор вида

$$\int_a^b K(x,\ s)\,z(s)\,ds.$$

В этих условиях нельзя, следуя классич. концепциям, брать в качестве приближенного к z_T «решения» точное решение уравнения (2), т. е. элемент $z=A^{-1}\tilde{u}$, так как: а) такого решения может не существовать на Z, поскольку $\tilde{u}$ может не принадлежать множеству AZ; б) такое решение, если даже оно существует, не будет обладать свойством устойчивости к малым изменениям $\tilde{u}$ (поскольку обратный оператор A^{-1} не является не-

прерывным) и, следовательно, не может быть физически интерпретируемым. Задача (2) является Н. з.

Численные методы решения некорректных задач. Для Н. з. вида (1) возникает вопрос: что понимается под приближенным решением таких задач? При этом необходимо так определить приближенное решение, чтобы оно было устойчивым к малым изменениям исходной информации. Второй вопрос: каковы алгоритмы построения таких решений. Исчерпывающие ответы на эти основные вопросы впервые даны А. Н. Тихоновым (см. [1], [2]).

Метод подбора. В нек-рых случаях приближенные решения уравнений (1) находятся методом подбора. Он состоит в том, что из класса возможных решений $M \subset Z$ подбирают элемент $\tilde{z}$, для к-рого $A\tilde{z}$ приближает правую часть уравнения (1) с требуемой точностью. В качестве искомого приближенного решения берут элемент $\tilde{z}$. Возникает вопрос: когда этот метод применим, т. е. когда из неравенства

$$\rho_U(A\tilde{z},\ Az_T) \leqslant \delta$$

следует, что

$$\rho_Z(z,\ z_T) \leqslant \varepsilon(\delta),$$

где $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Это имеет место при условии однозначной разрешимости уравнения (1) и при условии, что множество M — компакт (см. [3]). На основе этих соображений сформулировано понятие корректности по Тихонову, наз. также условной корректностью (см. [4]). В применении к уравнению (1) задача наз. корректной по Тихонову, если известно, что для точного значения правой части $u = u_T$ существует единственное решение z_T уравнения (1), принадлежащее заданному компакту M. В этом случае A^{-1} непрерывен на множестве M, и если вместо элемента u_T известен элемент u_δ такой, что $\rho_U(u_\delta,\ u_T) \leqslant \delta$ и $u_\delta \in AM$, то в качестве приближенного решения уравнения (1) с правой частью $u = u_\delta$ можно брать элемент $z_\delta = A^{-1}u_\delta$. При $\delta \to 0$ z_δ будет стремиться к z_T.

Во многих случаях приближенно известная правая часть $\tilde{u}$ не принадлежит множеству AM. В этих условиях уравнение (1) не имеет классич. решения. В качестве приближенного решения берется обобщенное решение, называемое квазирешением (см. [5]). Элемент $\tilde{z} \in M$, минимизирующий при данном $\tilde{u}$ функционал $\rho_U(Az,\ \tilde{u})$ на множестве M, наз. квазирешением уравнения (1) на M (см. [6]). Если M — компакт, то квазирешение существует для любого $\tilde{u} \in U$, и если, кроме того, $\tilde{u} \in AM$, то квазирешение $\tilde{z}$ совпадает с классическим (точным) решением уравнения (1). Существование квазирешения гарантируется лишь при условии компактности множества возможных решений M.

Метод регуляризации. Для ряда прикладных задач, приводящих к уравнению (1), характерна ситуация, когда множество возможных решений Z не является компактом, оператор A^{-1} не является непрерывным на AZ и изменения правой части уравнения (1), связанные с ее приближенным характером, могут выводить ее за пределы множества AZ. Такие задачи наз. существенно некорректными задачами. Разработан подход к решению Н. з., позволяющий строить с помощью ЭВМ приближенные решения существенно Н. з. вида (1), устойчивые к малым изменениям исходных данных. К исходным данным задач вида (1) относится как правая часть u, так и оператор A.

В дальнейшем для простоты изложения предполагается, как правило, что оператор A известен точно. В основе подхода лежит понятие регуляризирующего оператора (см. [2], [7]). Оператор $R(u,\ \delta)$ из U в Z наз.

регуляризирующим оператором для уравнения $Az=u$ (в окрестности $u=u_T$), если он обладает свойствами: 1) существует такое $\delta_1>0$, что оператор $R(u, \delta)$ определен для всякого δ, $0\leqslant\delta\leqslant\delta_1$, и любого $u_\delta\in U$ такого, что $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$; 2) для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta_0=\delta_0(\varepsilon, u_T)\leqslant\delta_1$ такое, что из неравенства $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta\leqslant\delta_0$ следует неравенство $\rho_Z(z_\delta, z_T)\leqslant\varepsilon$, где $z_\delta=R(u_\delta, \delta)$.

Иногда удобнее пользоваться другим определением регуляризирующего оператора, в к-ром содержится приведенное определение. Оператор $R(u, \alpha)$ из U в Z, зависящий от параметра α, наз. регуляризирующим оператором для уравнения $Az=u$ (в окрестности $u=u_T$), если он обладает свойствами: 1) существует такое число $\sigma_1>0$, что оператор $R(u, \alpha)$ определен для всякого $\alpha>0$ и любого $u_\delta\in U$, для к-рого $\rho_U(u_\delta, u_T)<\delta\leqslant\delta_1$; 2) существует такая функция от δ, $\alpha=\alpha(\delta)$, что для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta(\varepsilon)\leqslant\delta_1$ такое, что если $u_\delta\in U$ и $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta(\varepsilon)$, то $\rho_Z(z_\delta, z_T)<\varepsilon$, где $z_\delta=R(u_\delta, \alpha(\delta))$. В этом определении не предполагается однозначность оператора $R(u, \alpha(\delta))$.

Если $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$, то в качестве приближенного решения уравнения (1) с приближенно известной правой частью u_δ можно брать элемент $z_\alpha=R(u_\delta, \alpha)$, полученный с помощью регуляризирующего оператора $R(u, \alpha)$, где $\alpha=\alpha(\delta)$ согласовано с погрешностью исходных данных u_δ (см. [1], [2], [7]). Это решение наз. регуляризованным решением уравнения (1). Числовой параметр α наз. параметром регуляризации. При $\delta\to0$ регуляризированное приближенное решение $z_{\alpha(\delta)}=R(u_\delta, \alpha(\delta))$ стремится (в метрике Z) к точному решению z_T.

Таким образом, задача нахождения приближенных решений уравнения (1), устойчивых к малым изменениям правой части, сводится: а) к нахождению регуляризирующего оператора; б) к определению параметра регуляризации α по дополнительной информации о задаче, напр. по величине погрешности, с к-рой задается правая часть u.

Построение регуляризирующих операторов. Предполагается, что уравнение $Az=u_T$ имеет единственное решение z_T. Пусть вместо уравнения $Az=u_T$ решается уравнение $Az=u_\delta$, причем $\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta$. Так как $\rho_U(Az_T, u_\delta)\leqslant\delta$, то приближенное решение уравнения $Az=u_\delta$ ищется в классе Z_δ элементов z_δ таких, что $\rho_U(Az, u_\delta)\leqslant\delta$. Множество Z_δ есть множество возможных решений. В качестве приближенного решения нельзя брать произвольный элемент z_δ из Z_δ, т. к. такое «решение» не единственно и оно не будет, вообще говоря, непрерывным по δ. В качестве принципа отбора возможных решений, обеспечивающего получение такого элемента (или элементов) из Z_δ, к-рый непрерывно зависел бы от δ и при $\delta\to0$ стремился бы к z_T, используется т. н. вариационный принцип (см. [1]). Пусть $\Omega[z]$ — непрерывный неотрицательный функционал, определенный на всюду плотном на Z подмножестве F_1 множества Z и такой, что: а) $z_T\in F_1$; б) для всякого $d>0$ множество элементов z из F_1, для к-рых $\Omega[z]\leqslant d$, является компактным на F. Функционалы $\Omega[z]$, обладающие такими св-вами, наз. стабилизирующими функционалами для задачи (1). Пусть $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, определенный на подмножестве F_1 множества Z (F_1 может совпадать с Z). Среди элементов множества $F_{1,\delta}=F_1\cap Z_\delta$ ищется такой (такие), к-рый минимизирует функционал $\Omega[z]$ на $F_{1,\delta}$. Доказывается существование такого элемента z_δ (см. [7]). Его можно рассматривать как результат применения нек-рого оператора $R_1(u_\delta, \delta)$ к правой части уравнения $Az=u_\delta$, то есть $z_\delta=R_1(u_\delta, \delta)$. Оператор $R_1(u, \delta)$ является регуляризирующим для уравнения (1). Фактич. отыскание элемента z_δ можно осуществлять следующим образом:

при незначительных дополнительных ограничениях на $\Omega[z]$ (при условии квазимонотонности $\Omega[z]$, см. [7]) доказывается, что $\inf \Omega[z]$ достигается на элементах z_δ, для к-рых $\rho_U(Az_\delta, u_\delta) - \delta$. Элемент z_δ является решением задачи на минимум функционала $\Omega[z]$ при условии $\rho_U(Az, u_\delta) = \delta$, т. е. решением задачи на условный экстремум, к-рую можно решать методом неопределенных множителей Лагранжа и сводящейся к минимизации функционала

$$M^\alpha[z, u_\delta] = \rho_U^2(Az, u_\delta) + \alpha\Omega[z].$$

При любом $\alpha > 0$ доказывается существование элемента z_α, минимизирующего $M^\alpha[z, u_\delta]$. Параметр α определяется из условия $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$. Если существует такое α, что $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$, то исходная вариационная задача эквивалентна задаче минимизации функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$, к-рая может быть решена различными способами на ЭВМ (напр., путем решения соответствующего уравнения Эйлера для $M^\alpha[z, u_\delta]$). Элемент z_α, минимизирующий функционал $M_\alpha[z, u_\delta]$, можно рассматривать как результат применения к правой части уравнения $Az = u_\delta$ нек-рого оператора $R_2(u_\delta, \alpha)$, зависящего от параметра α, т. е. $z_\alpha = R_2(u_\delta, \alpha)$, в к-ром α определяется по невязке из соотношения $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$. Оператор $R_2[u, \alpha]$ является регуляризирующим оператором для уравнения (1). Эквивалентность исходной вариационной задачи на нахождение минимума функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ имеет место, напр., для линейных операторов A. Для нелинейных операторов A это может быть и не так (см. [8]).

Функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$, наз. с г л а ж и в а ю щ и м ф у н к ц и о н а л о м, можно ввести в рассмотрение формально, не связывая его с задачей на условный экстремум функционала $\Omega[z]$, и искать элемент z_α, минимизирующий его на множестве $F_{1,\delta}$. При этом возникает задача нахождения параметра регуляризации α как такой функции от δ, $\alpha = \alpha(\delta)$, для к-рой оператор $R_2(u, \alpha(\delta))$, определяющий элемент $z_\alpha = R_2(u_\delta, \alpha(\delta))$, был бы регуляризирующим для уравнения (1). При определенных условиях (напр., если известно, что $\rho_U(u_\delta, u_T) \leqslant \delta$ и A — линейный оператор) такая функция существует и может быть найдена из соотношения $\rho_U(Az_\alpha, u_\delta) = \delta$. Возможны и другие способы нахождения $\alpha(\delta)$.

Пусть T_{δ_1} — класс неотрицательных неубывающих и непрерывных на отрезке $[0, \delta_1]$ функций; z_T есть решение уравнения (1) с правой частью $u = u_T$ и A — непрерывный оператор из Z в U. Тогда, каковы бы ни были положительное число $\varepsilon > 0$ и функции $\beta_1(\delta)$, $\beta_2(\delta)$ из класса T_{δ_1}, такие, что $\beta_2(0) = 0$ и $\delta^2/\beta_1(\sigma) \leqslant \beta_2(\delta)$, существует такое $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \beta_1, \beta_2)$, что для $u_\delta \in U$ и $\delta \leqslant \delta_0$ из неравенства $\rho_U(u_\delta, u_T) \leqslant \delta$ следует неравенство $\rho_Z(z_\alpha^\delta, z_T) \leqslant \varepsilon$, где $z_\alpha^\delta = R_2(u_\delta, \alpha)$, для всех α, удовлетворяющих неравенствам $\delta^2/\beta_1(\delta) \leqslant \alpha \leqslant \beta_2(\delta)$.

Способы нахождения параметра регуляризации определяются характером имеющейся дополнительной информации о задаче. Если известна погрешность правой части уравнения u_δ, т. е. $\rho_U(u_\delta, u_T) \leqslant \delta$, то согласно предыдущему естественно определять α по невязке, т. е. из соотношения $\rho_U(Az_\alpha^\delta, u_\delta) = \varphi(\alpha) = \delta$.

Функция $\varphi(\alpha)$ является монотонной и полунепрерывной справа и слева при каждом $\alpha > 0$. Если оператор A линейный, Z — гильбертово пространство и $\Omega[z]$ — строго выпуклый функционал (напр., квадратичный), то элемент z_α^δ единственный и $\varphi(\alpha)$ однозначная функция. В этих условиях для всякого положительного числа $\delta < \rho_U(Az_0, u_\delta)$, где $z_0 \in \{z;\ \Omega[z] = \inf_{y \in F_1} \Omega[y]\}$, существует $\alpha(\delta)$ такое, что $\rho_U(Az_{\alpha(\delta)}^\delta, u_\delta) = \delta$ (см. [7]).

Для нелинейного оператора A уравнение $\varphi(\alpha)-\delta$ может не иметь решения (см. [8]).

Метод регуляризации тесно связан с построением *сплайнов*. Так, напр., задача нахождения функции $z(x)$ с кусочно непрерывной на $[a, b]$ производной 2-го порядка, минимизирующей функционал $\Omega[z]=\int_a^b (z'')^2\,dx$ и принимающей заданные значения $\{z_i\}$ на сетке $\{x_i\}$, эквивалентна построению сплайна 2-го порядка.

Регуляризирующий оператор можно строить с помощью интеграла по спектральной мере оператора (см. [7], [9]), для уравнений типа свертки — с помощью классич. интегральных преобразований (см. [10], [7]), методом квазиобращений (см. [11]), с помощью метода итераций (см. [12]). Указаны (см. [13]) необходимые и достаточные условия существования регуляризирующего оператора.

Пусть приближенно задана не только правая часть уравнения (1), но и оператор A, таким образом вместо точных исходных данных (A, u_T) имеются (A_h, u_δ), где

$$\rho_U(u_\delta, u_T)\leqslant\delta,$$

$$h=\sup_{\substack{z\in F_1\\ \Omega[z]\neq 0}}\frac{\rho_U(A_h z, Az)}{\{\Omega[z]\}^{1/2}}<\infty.$$

В этих условиях процедура получения приближенного решения будет той же, только вместо функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ надо рассматривать функционал

$$M^\alpha[z, u_\delta, A_h]=\rho_U^2(A_h z, u_\delta)+\alpha\Omega[z],$$

а параметр α определять, напр., из соотношения (см. [7]):

$$\rho_U^2(A_h z, u_\delta)=(\delta+h\{\Omega[z_\alpha]\}^{1/2})^2.$$

Если уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, то вводится понятие нормального решения. Пусть пространство Z нормировано, тогда в качестве такового можно брать, напр., решение $\bar{z}$, норма уклонения к-рого от заданного элемента $z_0\in Z$ минимальна, т. е.

$$\|\bar{z}-z_0\|_Z=\inf_{z\in Z}\|z-z_0\|_Z.$$

Приближение к нормальному решению, устойчивое к малым изменениям исходных данных уравнения (1), находится описанным выше методом регуляризации. К числу таких задач с бесконечным числом решений относятся вырожденные системы линейных алгебраич. уравнений. Так наз. плохо обусловленные системы линейных алгебраич. уравнений можно рассматривать как системы, полученные из вырожденных путем замены оператора A его приближением A_h. В качестве нормального решения совместной вырожденной системы можно брать решение системы $\bar{z}$ с минимальной нормой $\|z\|$. В сглаживающем функционале в качестве $\Omega[z]$ можно брать функционал $\Omega[z]=\|z\|^2$. Приближенные решения плохо обусловленных систем также находятся методом регуляризации с $\Omega[z]=\|z^2\|$ (см. [7]).

Аналогично решается задача нахождения решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода на спектре, т. е. в случае, когда параметр λ уравнения равен одному из собственных значений ядра.

Неустойчивые задачи минимизации функционалов. Ряд практически важных задач приводится к задачам минимизации функционалов $f[z]$. Различается два типа таких задач. К первому относятся те из них, в к-рых надо находить минимальное (или максимальное) значение функционала. К этому типу относятся многие задачи проектирования оптимальных систем, конструкций. Для этих задач несущественно, на каких элементах достигается искомый ми-

нимум. Поэтому в качестве приближенных решений таких задач можно брать значения функционала $f[z]$ на любой минимизирующей последовательности $\{z_n\}$.

Ко второму типу относятся задачи, в к-рых надо найти элементы z, на к-рых достигается минимум функционала $f[z]$. Их называют *задачами минимизации по аргументу*. Среди них встречаются такие, в к-рых минимизирующие последовательности могут быть несходящимися. В этих задачах нельзя брать в качестве приближенных решений элементы минимизирующих последовательностей. Такие задачи наз. *неустойчивыми*, или *некорректно поставленными*. К ним относятся, напр., задачи оптимального управления, в к-рых оптимизируемый (целевой) функционал зависит только от фазовых переменных.

Пусть на метрич. пространстве Z задан непрерывный функционал $f[z]$ и существует элемент $z_0 \in Z$, минимизирующий $f[z]$. Минимизирующую последовательность $\{z_n\}$ функционала $f[z]$ наз. *регуляризованной*, если существует компактное в Z множество $\tilde{Z}$, содержащее $\{z_n\}$. Если задача минимизации функционала $f[z]$ имеет единственное решение z_0, то регуляризованная минимизирующая последовательность сходится к z_0, и в этих условиях для решения неустойчивой задачи минимизации функционала достаточно указать алгоритмы построения регуляризованных минимизирующих последовательностей. Это можно сделать путем использования стабилизирующих функционалов $\Omega[z]$.

Пусть $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал, определенный на множестве $F_1 \subset Z$; $\inf\limits_{z \in Z} f[z] = f[z_0]$ и $z_0 \in F_1$. Часто вместо $f[z]$ имеется его δ-приближение $f_\delta[z]$ по отношению к $\Omega[z]$, т. е. такой функционал, что для всякого $z \in F_1$:

$$|f_\delta[z] - f[z]| \leqslant \delta\Omega[z].$$

При любом $\alpha > 0$ задача минимизации функционала

$$M^\alpha[z, f_\delta] = f_\delta[z] + \alpha\Omega[z]$$

по аргументу устойчива.

Пусть $\{\delta_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ — сходящиеся к нулю последовательности такие, что $\delta_n/\alpha_n \leqslant q < 1$ для всякого n и $\{z_{\alpha_n, \delta}\}$ — последовательность элементов, минимизирующих функционалы $M^{\alpha_n}[z, f_{\delta_n}]$. Эта последовательность является регуляризованной минимизирующей последовательностью для функционала $f^\delta[z]$ (см. [7]) и, следовательно, сходится к элементу z_0 при $n \to \infty$. В качестве приближенных решений задачи можно брать элементы z_{α_n, δ_n}.

Аналогично строятся приближенные решения Н. з. оптимального управления.

В прикладных Н. з. исходные данные часто содержат случайные погрешности. Для построения приближенных решений таких задач возможен как детерминированный, так и вероятностный подходы (см. [7], [15]).

Лит.: [1] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1963, т. 151, № 3, с. 501—04; [2] его же, там же, т. 153, № 1, с. 49—52; [3] его же, там же, 1943, т. 39, № 5, с. 195—98; [4] Лаврентьев М. М., *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Новосиб., 1962; [5] Иванов В. К., «Матем. сб.», 1963, т. 61, № 2, с. 211—23; [6] его же, «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 2, с. 270—72; [7] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979; [8] Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г., «Докл. АН СССР», 1974, т. 214, № 3, с. 499—500; [9] Бакушинский А. Б., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1967, т. 7, № 3, с. 672—77; [10] Арсенин В. Я., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1973, т. 133, с. 33—51; [11] Латтес Р., Лионс Ж.-Л., Метод квазиобращения и его приложения, пер. с франц., М., 1970; [12] Крянев А. В., «Докл. АН СССР», 1973, т. 210, № 1, с. 20—22; [13] Винокуров В. А., «Ж. вычислит. матем. и матем. физ.», 1971, т. 11, № 5, с. 1097—112; [14] Тихонов А. Н., там же, 1966, т. 6, № 4, с. 631—34; [15] Лаврентьев М. М., Васильев В. Г., «Сиб. матем. ж.», 1966; т. 7, № 3, с. 559—76.

В. Я. Арсенин, А. Н. Тихонов.

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ теории функций комплексного переменного — первоначально (Н. з. по Адамару) задачи для дифференциальных уравнений с характером неустойчивости, аналогичным неустойчивости задачи Коши для уравнения Лапласа. Для задач этого типа строится пример Адамара — вариации данных, сколь угодно малые вместе с любым конечным числом своих производных, к-рым соответствуют конечные вариации решений (см. [2], [5]). Ныне термин «Н. з.» понимается значительно шире (см. [1], [6]).

Задачи аналитич. продолжения теории функций комплексного переменного (одного) являются Н. з. по Адамару. Такую задачу для функций одного комплексного переменного в общем виде можно сформулировать следующим образом. Задана область D комплексной плоскости и заданы два множества A, B, принадлежащие замыканию D : $A \subset B \subset \overline{D}$. На множестве A задана аналитич. функция $f(z)$, регулярная в области D. Требуется определить функцию $f(z)$ на множестве B. Относительно функции $f(z)$, кроме регулярности в D, может быть задана дополнительная информация, напр.

$$|f(z)| \leqslant C, \quad z \in \overline{D}, \qquad (*)$$

где C — заданная константа.

Классич. задачами аналитич. продолжения являются следующие: 1) A — подобласть области D; 2) A — часть границы Γ области D; предполагается, что Γ — непрерывно (кусочно) дифференцируемая замкнутая кривая, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $A = \Gamma_1$; 3) A — множество, имеющее предельную точку внутри D.

Теоремы единственности отмеченных задач были доказаны в 19 в. (они приводятся в учебниках по теории функций комплексного переменного). Задача 2 эквивалентна задаче Коши для уравнения Лапласа.

Оценки условной устойчивости задач аналитич. продолжения типа 1), 2) наз. теоремами о трех константах (оценка изменения решения задачи через изменение данных при условии типа (*)). Задачи аналитич. продолжения являются линейными, и к ним применимы универсальные методы регуляризации линейных Н. з. (см. [3], [6]). Для задачи 2) разработаны специальные методы регуляризации, основанные на построении функций Карлемана (см. [3]).

Задачи аналитич. продолжения связаны с широким кругом прикладных проблем. Часто из физич. законов следует, что различные физич. поля являются аналитич. функциями по нек-рым переменным. Требуется по значениям поля на нек-ром множестве (на к-ром производятся измерения) определить поле на более широком множестве. Нек-рые из этих прикладных задач следующие.

1. Задача определения гравитационного и магнитного поля над поверхностью Земли по значениям поля на поверхности. Эта задача используется при разведке месторождений полезных ископаемых.

2. Задача определения потенциала течения идеальной жидкости, фильтрации постоянного электрич. тока внутри нек-рого тела по значениям потенциала и потока на части поверхности (см. [4]).

3. Задача определения финитной функции по значениям преобразования Фурье этой функции, известным на конечном отрезке.

С точки зрения приложений значит. интерес представляет задача определения аналитич. функции по ее значениям на конечных множествах. Решение этой задачи не единственно. Однако если множество в нек-ром смысле близко к множеству единственности, возможно приближенное решение с малой погрешностью.

Для функций нескольких комплексных переменных существуют как корректные, так и некорректные за-

дачи аналитич. продолжения. Для задач аналитич. продолжения с множеств внутри области регулярности известен следующий общий результат: для того чтобы множество было множеством единственности, необходимо и достаточно, чтобы это множество не являлось объединением конечного числа аналитич. многообразий.

Лит.: [1] Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П., Теория линейных некорректных задач и ее приложения, М., 1978; [2] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [3] Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962; [4] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1958; [5] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; [6] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, М., 1974; [7] Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, 2 изд., ч. 1, М., 1962.

М. М. Лаврентьев.

НЕКРАСОВА ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — нелинейное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b [\varphi(y) + R(\lambda, y, \varphi(y))] K(x, y)\, dy, \quad (*)$$

где R, K — известные функции, причем K — симметричная функция, φ — искомая функция, λ — числовой параметр. Интегральные уравнения такого типа были получены А. И. Некрасовым (см. [1]) при решении задач, возникающих в теории волн на поверхности жидкости. А. И. Некрасов в определенных условиях строит решение уравнения (*) в виде ряда по степеням малого параметра, сходимость к-рого доказывается методом мажорант.

Иногда уравнения типа (*) наз. *Гаммерштейна уравнением*, хотя А. И. Некрасов [2] свои исследования опубликовал раньше А. Гаммерштейна [3].

Лит.: [1] Некрасов А. И., Собр. соч., т. 1, М., 1961; [2] его же, «Изв. Иваново-Возн. политехн. ин-та», 1922, № 6, с. 155—71; [3] Hammerstein A., «Acta math.», 1930, Bd 54, S. 117—76.

Б. В. Хведелидзе.

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — определение в нек-рой области D переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ решения $u(x)$ дифференциального уравнения

$$(Lu)(x) = f(x), \quad x \in D,$$

по заданным краевым условиям на границе S этой области (или ее части)

$$(Bu)(y) = \varphi(y), \quad y \in S,$$

где, по крайней мере, один из операторов L или B является нелинейным.

См. также *Краевая задача.*

А. П. Солдатов.

НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА; численные методы решения — методы, заменяющие решение краевой задачи решением дискретной задачи (см. *Линейная краевая задача*; численные методы решения и *Нелинейное уравнение*; численные методы решения). Во многих случаях, особенно при рассмотрении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описание численных методов обычно проводится без указания дискретизации исходной задачи, но такая дискретизация неявно все же подразумевается и осуществляется по относительно известным образцам.

Пусть, напр., рассматривается двухточечная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y) \text{ при } 0 < x < X, \quad (1)$$

$$B(y(0)) = 0, \quad D(y(X)) = 0, \quad (2)$$

где

$$y = (y_1, \ldots, y_l)^T, \ f \equiv (f_1, \ldots, f_l)^T, \ B = (B_1, \ldots, B_{l-r})^T,$$
$$D \equiv (D_1, \ldots, D_r)^T, \quad 0 \leqslant r \leqslant l.$$

Пусть вектор $G(y) \equiv (G_1(y), \ldots, G_r(y))$ таков, что система уравнений

$$B(y) = 0, \quad G(y) = g \tag{3}$$

однозначно определяет вектор $y = \alpha(g)$ при каждом векторе $g \equiv (g_1, \ldots, g_r)^T$; напр., часто целесообразно взять

$$G_1(y) = y_{l-r+1}, \ \ldots, \ G_r(y) = y_l.$$

Тогда задача (1), (2) может быть сведена к системе (операторному уравнению)

$$\psi(g) = 0, \tag{4}$$

где $\psi(g) \equiv D(\omega(g))$, $\omega(g)$ — значение при $x = X$ решения уравнения (1) при начальном условии $y(0) = \alpha(g)$. При этом для получения значений $\psi(g)$ необходимо численно решать (см. [1], [2]) соответствующие системы дифференциальных уравнений, что и будет означать дискретизацию исходной задачи. Для решения системы (4) можно применять различные итерационные методы решения нелинейных уравнений. Найдя решение g^* уравнения (4), можно определить вектор $y^* = \alpha(g^*)$ из системы (3) и, решая уравнение (1) при начальном условии $y(0) = y^*$, получить решение задачи (1), (2). В ряде методов наряду со значениями функции ψ используются и значения ее производной, отыскиваемые либо путем интегрирования уравнения

$$\eta' = \frac{\partial f}{\partial y}\,\eta \tag{5}$$

(уравнения в вариациях для (1)), либо с помощью каких-либо формул численного дифференцирования. Указанный способ редукции краевой задачи к уравнению (4), наз. м е т о д о м п р и с т р е л к и, применим к задачам более общего вида

$$y' = f(x, y, g) \text{ при } 0 < x < X,$$
$$y(0) = \alpha(y), \ D(y(X(g), g)) = 0,$$

явно содержащим векторный параметр g, в частности к задачам на собственные значения; здесь функция $\alpha(g)$ считается заданной. Однако если решения уравнения (5) сильно растут вместе с x, то погрешность численного интегрирования приводит к большим ошибкам в значениях функции $\psi(g)$ и ее производной и в конечном счете к большой погрешности получаемого решения.

В методе линеаризации (см., напр., [1], [3]) приближения к решению задачи (1), (2) определяются как решения последовательности линейных уравнений

$$y'_{n+1} = A_n(x)(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n) \text{ при } 0 < x < X \tag{6}$$

с линейными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} B_n(y_{n+1}(0) - y_n(0)) + B(y_n(0)) &= 0, \\ D_n(y_{n+1}(X) - y_n(X)) + D(y_n(X)) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $A_n(x)$ — квадратная функциональная матрица порядка l, B_n и D_n — числовые матрицы размеров $(l-r) \times n$ и $r \times l$, $n = 0, 1, \ldots$. Начальное приближение $y_n(x)$ считается известным. В случае метода Ньютона — Канторовича уравнения (6), (7) приобретают вид

$$y'_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_n)(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n(x)) \text{ при } 0 < x < X, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial y}(y_n(0))(y_{n+1}(0) - y_n(0)) + B(y_n(0)) &= 0, \\ \frac{\partial D}{\partial y}(y_n(X))(y_{n+1}(X) - y_n(X)) + D(y_n(X)) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если $f(x, y)$, $B(y)$, $D(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы по y, задачи (8), (9) корректны и $y_0(x)$ достаточно близко к искомому решению $y(x)$, то

$$\|y_n - y\|_C \leqslant K^{-1}(K\|y_0 - y\|_C)^{2^n},$$

где $K>0$ — постоянная, $\|y\|_C = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant X} |y(x)|$ (см. [1]).

Упомянутые методы обобщаются и на случай более общих условий вида

$$A(y(X_0),\ y(X_1),\ \ldots,\ y(X_m)) = 0,$$

где

$$A = (A_1,\ \ldots,\ A_l)^T,\ 0 = X_0 < X_1 < \ldots < X_m = X.$$

Многие важные теоретические и прикладные задачи приводят к необходимости решать Н. к. з. (и родственные к ним проблемы) для уравнений и систем уравнений эллиптич. типа (см., напр., [4] — [8]). Для такого класса задач основными численными методами являются проекционные методы (проекционно-разностные, вариационно-разностные, конечных элементов) и разностные методы (см. [7] — [14]). Их конструкции во многом аналогичны конструкциям соответствующих методов для линейных краевых задач (см. *Лапласа уравнение;* численные методы решения; *Пуассона уравнение*; численные методы решения), но получаемые в этих методах дискретные (сеточные) аналоги краевых задач, являющиеся системами нелинейных уравнений

$$L_N(\overline{u}_N) = \overline{f}_N, \tag{10}$$

где

$$\overline{u}_N = (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_N)^T \text{ и } \overline{f}_N = (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_N)^T,$$

часто вызывают дополнительные значительные трудности как в плане анализа самих систем и близости в том или ином смысле их решений к решению исходной задачи, так и в плане затрат вычислительной работы на формирование самих систем (10) и отыскание их решений. Специфика нелинейности краевой задачи заставляет особое внимание уделять выбору банаховых пространств и их сеточных аналогов, в к-рых и сама задача и ее конечномерные аппроксимации поддаются анализу (см., напр., [5] — [12], [15]). Но наиболее подробно изучены особенно в алгоритмич. плане лишь численные методы для классов нелинейных задач, родственных в нек-ром смысле линейным задачам (слабонелинейные уравнения, уравнения с ограниченной нелинейностью) и позволяющих обойтись использованием гильбертовых пространств и их конечномерных аналогов (евклидовых пространств).

Пусть $H_N = H$ — евклидово пространство вектор-функций $\overline{u}_N = u$ со скалярным произведением $(u,\ v) \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i v_i$, а $l(H)$ — пространство линейных самосопряженных положительно определенных операторов, отображающих H в H; наряду с H будет использоваться и евклидово пространство H_B, $B \in l(H)$, отличающееся от H лишь видом скалярного произведения:

$$(u,\ v)_{H_B} = (u,\ v)_B \equiv (Bu,\ v),\ \|u\|_B \equiv (Bu,\ u)^{1/2}.$$

Пусть, далее,

$$S_B(r) \equiv \{u;\ \|u\|_B \leqslant r\},\quad r > 0.$$

Если оператор L_N непрерывен на $S_B(r)$ и таков, что для любого u с $\|u\|_B = r$ справедливо неравенство

$$(L_N u - \overline{f}_N,\ u) \geqslant 0, \tag{11}$$

то система (10) имеет по крайней мере одно решение из $S_B(r)$. Это утверждение (см., напр., [8], [9]) является одним из следствий классич. теорем существования решений у нелинейных операторных уравнений, основанных на топологич. принципах (см., напр., [14]) и на монотонности операторов (см., напр., [6], [11], [14]). В частности, если L_N непрерывен всюду и

$$(L_N(u),\ u) \geqslant \delta \|u\|_B^2,\quad \delta > 0, \tag{12}$$

для любого u, то система (10) всегда имеет решение и любое ее решение принадлежит $S_B(r)$ с $r=\delta^{-1}\|\tilde{f}_N\|_{B^{-1}}$. Если же для любых u, v, w справедливы неравенства

$$(L_N(u)-L_N(v),\ u-v)\geq\delta_0\|u-v\|_B^2,\ \delta_0>0, \quad (13)$$

$$|(L_N(u)-L_N(v),\ w)|\leq\delta_1\|u-v\|_B\|w\|_B, \quad (14)$$

означающие сильную монотонность и Липшиц-непрерывность оператора L_N, то система (10) и ее единственное решение может быть найдено с помощью итерационного метода

$$Au^{n+1}-Au^n=-\gamma(L_N(u^n)-\tilde{f}_N), \quad (15)$$

где $A\in L(H)$ и итерационный параметр $\gamma>0$ определяется константами типа δ_0 и δ_1, получаемыми при замене в (13) и (14) оператора B на A (см., напр., [8], [9]). Поэтому для разностных методов оценки погрешности получаются как следствие корректности системы (10) и наличия аппроксимации исходной краевой задачи разностной краевой задачей (10). Часто весьма целесообразен такой выбор оператора B, что пространство H_B становится дискретным (сеточным) аналогом соответствующего пространства Соболева (напр., $W_2^1(\Omega)$ для уравнений 2-го порядка) и тем самым делается возможным использование или самих теорем вложения (в случае проекционных аппроксимаций), или их сеточных аналогов (см., напр., [5] — [9]) для проверки неравенств типа (12) — (14). Проекционные методы и, в частности, проекционно-разностные (вариационно-разностные) методы обладают тем достоинством, что неравенства (12) — (14) следуют из соответствующих неравенств для дифференциальных операторов, а задача оценки погрешности метода легко сводится к задаче аппроксимации решения исходной задачи элементами выбранного конечномерного подпространства (см. [6] — [9], [11]). Вместо справедливости неравенств (13), (14) во всем пространстве достаточно их справедливости, напр., в нек-ром шаре из H_B, окружающем искомое решение. Иногда полезны неравенства, получаемые из (12) — (14) заменой скалярных произведений в левых частях на скалярные произведения в H_B, а норм $\|z\|_B$ в правых частях на $\|Bz\|$. Для ряда задач на основе априорных оценок их решения возможна замена их эквивалентными краевыми задачами, для к-рых неравенства типа (12) — (14) будут выполнены (см. [15]).

При выполнении неравенств (13), (14) итерационный метод (15) с $A=B$ сходится при любом начальном приближении, и если константы δ_0 и δ_1 не зависят от N, то он позволяет получить решение системы (10) с точностью ε за $O(|\ln\varepsilon|)$ итераций (обычно $\varepsilon\asymp N^\alpha$, $\alpha<0$). За счет удачной конструкции сеточного метода иногда удается так выбрать оператор B, что решение системы (10) с точностью N^α при помощи итерационного метода типа (15) осуществляется при затрате лишь $O(N\ln^2 N)$ или даже $O(N\ln N)$ арифметич. действий (см. *Минимизация вычислительной работы*). Использование последовательности сгущающихся сеток позволяет довести эти оценки до $O(N\ln N)$ и $O(N)$ действий и тем самым получить асимптотически оптимальные по трудоемкости численные методы решения нек-рых нелинейных эллиптических краевых задач. При этом предполагалось, что само вычисление невязки $L(u^n)-\tilde{f}_N$ требует не больше KN действий. Все же для нек-рых задач (при больших K) целесообразно уменьшить частоту таких вычислений. Этого можно добиться за счет нахождения более точного начального приближения, использования той или иной линеаризации L_N и методов типа продолжения по параметру (см. *Нелинейное уравнение*; численные методы решения). Чаще же всего *линеаризации методы* в сочетании с методами продол-

жения по параметру используются в наиболее трудных ситуациях, когда, напр., условие (13) может не выполняться. К нелинейным краевым задачам эллиптич. типа могут быть отнесены и нек-рые задачи на собственные значения (см., напр., [8], [12], [14]); конструкция соответствующих численных методов во многом аналогична уже упомянутым.

Нек-рые стационарные краевые задачи могут быть приближенно заменены краевыми задачами для сильно эллиптич. систем с малым параметром (см., напр., [17]). Численные же методы для нестационарных Н. к. з., включающих в себя задачи для уравнений и систем параболич. типа, гиперболич. типа, смешанного типа и др., хотя и используют дискретные аналоги эллиптич. операторов, подобные выше рассмотренным, но для них наиболее характерно расслоение приближенного метода по отдельным временным слоям.

Лит.: [1] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [2] Шаманский В. Е., Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. 2, К., 1966; [3] Беллман Р., Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968; [4] Березовский А. А., Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики, 2 изд., ч.1, К., 1976; [5] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964; [6] Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [7] Гловинский Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р., Численное исследование вариационных неравенств, пер. с франц., М., 1979; [8] Дьяконов Е. Г., в кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 7, в. 5, Новосиб., 1976, с. 14—78; [9] его же, в кн.: Разностные методы решения краевых задач, в. 1 — Стационарные задачи, М., 1971; [10] Карчевский М. М., Ляшко А. Д., Разностные схемы для нелинейных задач математической физики, ч. 1, Казань, 1976; [11] Варга Р., Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе, пер. с англ., М., 1974; [12] Стренг Г., Фикс Дж., Теория метода конечных элементов, пер. с англ., М., 1977; [13] Оден Дж., Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред, пер. с англ., М., 1976; [14] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [15] Ривкинд В. Я., Уральцева Н. Н., в кн.: Проблемы математического анализа, в. 3, Л., 1972, с. 69—111; [16] Амосов А. А., Бахвалов Н. С., Осипик Ю. И., «Ж. вычисл. матем. и матем. физики», 1980, т. 20, № 1, с. 104—11; [17] Соболевский П. Е., Васильев В. В., в кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 9, в. 5, Новосиб., 1978, с. 115—39.

Е. Г. Дьяконов, А. Ф. Шапкин.

НЕЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ — *дифференциально-геометрическая структура*, задаваемая на категории гладких расслоенных пространств, ассоциированных с нек-рым главным G-расслоением, к-рая фиксирует определенный для данной Н. с. изоморфизм слоев (параллельный перенос) вдоль каждой кусочно гладкой кривой базы расслоения данной категории, согласованный с изоморфизмом соответствующих слоев главного G-расслоения. При этом предполагается, что указанная структура не тождественна ставшему классическим понятию *линейной связности*, к-рое определяется тем или иным G-инвариантным *горизонтальным распределением*. Иной смысл [5] имеет термин Н. с., состоящий в том, что определяемый горизонтальным распределением перенос векторных слоев расслоения теряет линейный характер, т. е. не является изоморфизмом этих слоев.

Необходимость введения и исследование Н. с. диктовалась потребностями изучения различных дифференциально-геометрич. структур высших порядков (таких, как напр. *Кавагути пространства*). Основы общей теории Н. с. достаточно развиты, исследованы и получили приложения нек-рые специальные типы Н. с. (см. [2] — [4]).

Пусть $\pi : X(B, G) \to B$ гладкое главное G-расслоение со структурной группой Ли G и канонич. проекцией π на базу B, а $K(X)$ — категория всех ассоциированных с X расслоений. Изоморфизмом слоя $G_x = \pi^{-1}(x)$ на слой $G_y = \pi^{-1}(y)$, $x, y \in B$, наз. отображение $i : G_x \to G_y$, коммутирующее с действием группы G на X. Любой изоморфизм i может быть задан формулой

$i(\xi_0 g)=i(\xi_0)\,g$, $\xi_0\in X$, $g\in G$, и, следовательно, является диффеоморфизмом слоев G_x и G_y. Множество $\Gamma(X)$ всех изоморфизмов между всевозможными слоями главного расслоения X является гладким расслоением со структурой группоида над базой $B\times B$ (группоид — категория с обратимыми элементами). Изоморфизм $i\in\Gamma(X)$ порождает соответствующий изоморфизм слоев над точками x, $y\in B$ любого ассоциированного расслоения $Y\in K(X)$ и тем самым группоид $\Gamma(X)$ обслуживает всю категорию $K(X)$.

Пусть $\Lambda(B)$ — категория всех кусочно гладких кривых базового многообразия B. Связностью в категории $K(X)$ гладких расслоений в самом общем смысле наз. любой функтор

$$\gamma:\Lambda(B)\to\Gamma(X),$$

тождественный по базе $B\times B$. Пусть $\alpha\times\beta:\Gamma(X)\to B\times B$ — канонич. проекция группоида $\Gamma(X)$ на свою базу $B\times B$, определяемая тем условием, что если $\Gamma(X)\ni i: G_x\to G'_y$, то $\alpha(i)=x$, $\beta(i)=y$. Тем самым многообразие B отождествляется с подмногообразием $\tilde{B}\subset\Gamma(X)$ всех левых и правых единиц группоида $\Gamma(X)$. Пусть $\Pi(X)$ — векторное расслоение над $B\equiv\tilde{B}$, образованное слоями вида $T_e[\alpha^{-1}(e)]$, $e\in\tilde{B}$, а $T^p(B)$ — расслоение над B пространство p-скоростей многообразия B (элементами $T^p(B)$ являются регулярные p-струи всевозможных гладких отображений $\mathbb{R}\to B$ с источником $o\in\mathbb{R}$). Расслоения $\Pi(X)$ и $T^p(B)$ обладают канонич. проекциями на касательное расслоение $T(B)$

$$\pi':\Pi(X)\longrightarrow T(B),\quad \pi^p:T^p(B)\longrightarrow T(B).$$

Связность γ наз. нелинейной связностью порядка $p=1, 2, 3, \ldots$, если p — наименьшее число, для к-рого функтор γ определяет гладкое отображение

$$\gamma^p:T^p(B)\longrightarrow\Pi(X)$$

такое, что $\pi'\cdot\gamma^p=\pi^p$. Функтор γ в свою очередь определяется соответствующим ему отображением γ^p. В случае, когда $p=1$ и отображение $T(B)\to\Pi(X)$ послойно линейное, связность вырождается в линейную связность на категории $K(X)$. В изучении свойств Н. с. и в их классификации фундаментальную роль играют структурные уравнения отображений $\gamma^p: T^p(B)\to\Pi(X)$, записанные в форме уравнений Пфаффа, связывающих дифференциалы относительных координат геометрич. объектов, описывающих расслоения $T^p(B)$ и $\Pi(X)$. В терминах коэффициентов структурных уравнений с помощью операций их дифференциального продолжения и охватов установлено [2], что Н. с. γ^p в $X(B, G)$ порождает линейную связность специальной структуры в главном G-расслоении $X(B, G)\otimes_B T^p(B)$ над базой $T^p(B)$, и этой линейной связностью полностью характеризуется. Найдены формы указанной линейной связности и их структурные уравнения. Доказан нелинейный аналог теоремы о группе голономии, в определении к-рой участвуют не только кривизна, но и линейная оболочка распределения горизонтальных конусов, заменяющих в нелинейном случае подпространства горизонтального распределения линейной связности.

Лит.: [1] Вагнер В. В., «Тр. семинара по векторному и тензорному анализу», 1950, в. 8, с. 11—72; [2] Евтушик Л. Е., «Изв. ВУЗов. Математика», 1969, № 2, с. 32—44; [3] его же, «Сиб. матем. ж.», 1973, т. 14, № 3, с. 536—48; [4] Евтушик Л. Е., Третьяков В. Б., «Тр. геометр. семинара», 1974, т. 6, с. 243—55; [5] Kawaguchi A., «Tensor. New ser.», 1952, v. 2, p. 123—42.

Л. Е. Евтушик.

НЕЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — дифференциальное уравнение (обыкновенное или с частными производными), в к-рое по крайней мере одна из производных неизвестной функции (включая и производную нулевого порядка — саму неизвест-

ную функцию) входит нелинейно. Этот термин обычно употребляют, когда хотят специально подчеркнуть, что рассматриваемое дифференциальное уравнение $H=0$ не является линейным, т. е. его левая часть H не представляет собой *линейную форму* от производных неизвестной функции с коэффициентами, зависящими только от независимых переменных.

Иногда под Н. д. у. понимается наиболее общее уравнение определенного вида. Напр., нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка наз. уравнение

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$$

с произвольной функцией $f(x, y, u)$; при этом линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка соответствует частному случаю

$$f(x, y, u)=a(x)u+b(x)y.$$

Н. д. у. с частными производными 1-го порядка для неизвестной функции z от n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$F\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0,$$

где F — произвольная функция своих аргументов; в случае

$$F=\sum_{i=1}^{n} A_i\,(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z)\,\frac{\partial z}{\partial x_i}+B\,(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z)$$

такое уравнение наз. квазилинейным, а в случае

$$F=\sum_{i=1}^{n} A_i\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,\frac{\partial z}{\partial x_i}+$$
$$+B\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,z+C\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

— линейным. *Н. Х. Розов.*

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение, содержащее неизвестную функцию нелинейно. Ниже приведены основные классы Н. и. у., к-рые часто встречаются при исследовании различных прикладных задач и теория к-рых в определенной постановке достаточно хорошо разработана.

Важным примером Н. и. у. является *Урысона уравнение*

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\Omega} K\,[x,\ s,\ \varphi\,(s)]\,ds,\quad x\in\Omega,\qquad(1)$$

где Ω — замкнутое ограниченное множество конечномерного евклидова пространства, $K[x, s, t]$ — заданная функция, наз. ядром, определенная при $x, s, \in\Omega$, $-\infty<t<\infty$, λ — числовой параметр, φ — искомая функция.

П. С. Урысон (см. [2]) при определенных предположениях дал полное исследование спектра собственных значений уравнения (1), допускающих положительные собственные функции. Было показано, что положительные собственные функции $\varphi(x, \lambda)$ соответствуют значениям λ только из нек-рого интервала (α, β), причем $\varphi(x, \lambda)$ является монотонно возрастающей функцией λ и $\varphi(x, \alpha)=0$, $\varphi(x, \beta)=\infty$.

Частным случаем уравнения Урысона является *Гаммерштейна уравнение:*

$$\varphi\,(x)=\lambda\int_{\Omega} K\,(x,\ s)\,f\,[s,\ \varphi\,(s)]\,ds,\quad x\in\Omega,\qquad(2)$$

где $K(x, s)$, $f(s, t)$ — известные функции. Теоремы существования и единственности впервые были установлены А. Гаммерштейном (см. [9]). Он исследовал уравнение (2) в предположении, что действительная функция $f(s, t)$ непрерывна по совокупности аргументов и что самосопряженный в $L_2(\Omega)$ линейный интегральный

оператор, порожденный ядром K, является положительным и действует вполне непрерывно из $L_2(\Omega)$ в пространство непрерывных функций.

Другим примером Н. и. у. является *Ляпунова — Шмидта уравнение:*

$$\sum_{\alpha,\,\beta}\int_\Omega\cdots\int_\Omega K_{\alpha,\,\beta}(x,\ s_1,\ \ldots,\ s_i)\times$$
$$\times\varphi^{\alpha_0}(x)\,\varphi^{\alpha_1}(s_i)\ldots\varphi^{\alpha_i}(s_i)\times$$
$$\times v^{\beta_0}(x)\,v^{\beta_1}(s_1)\ldots v^{\beta_i}(s_i)\,ds_1\ldots ds_i=0,\quad x\in\Omega, \qquad (3)$$

в к-рых функции $K_{\alpha,\,\beta}$ и v — заданные, φ — искомая, число i фиксировано, и суммирование распространено на всевозможные векторы $\alpha(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i)$, $\beta(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_i)$ с неотрицательными целочисленными компонентами. Левая часть равенства (3) наз. интегро-степенным рядом от двух функциональных аргументов v, φ.

Уравнение типа (3) впервые рассмотрел А. М. Ляпунов (см. [1]), а позднее, в более общем виде, Э. Шмидт (см. [8]). В их исследованиях были заложены основы теории ветвления Н. и. у., целью к-рой является решение следующей задачи. Пусть ищется решение нелинейной задачи, зависящее от некоторых параметров, причем для некоторых их значений решение может разветвляться. Возникают вопросы о нахождении самого решения и тех значений параметров, при которых оно разветвляется, о числе ветвей и о представлении каждой ветви как функции параметров (см. [6]).

Теория Н. и. у. является частью общей теории нелинейных операторных уравнений. Именно, интегральные уравнения рассматриваются как конкретные иллюстрации соответствующих операторных уравнений. Для этого требуется выяснение общих свойств (непрерывность, полная непрерывность и т. д.) конкретных интегральных операторов, входящих в уравнение (см. [3] — [7]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., «Записки Академии Наук», СПБ, 1906, с. 1—225; [2] Урысон П. С., «Матем. сб.», 1923, т. 31, с. 236—55; [3] Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956; [4] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [5] Красносельский М. А. [и др.], Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966; [6] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [7] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972; [8] Schmidt E., «Math. Ann.», 1908, Bd 65, S. 370—99; [9] Hammerstein A., «Acta math.», 1930, v. 54, p. 117—76.

Б. В. Хведелидзе.

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — раздел *математического программирования*, посвященный теории и методам решения задач оптимизации нелинейных функций на множествах, задаваемых нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами).

Основная трудность решения задач Н. п. состоит в том, что эти задачи являются многоэкстремальными, и известные численные методы их решения гарантируют в общем случае сходимость минимизирующих последовательностей лишь к точкам локальных экстремумов.

Наиболее изученным разделом Н. п. является *выпуклое программирование*, задачи к-рого характеризуются тем, что любая точка локального минимума является точкой глобального минимума.

Лит.: [1] Зангвилл У. И., Нелинейное программирование. Единый подход, пер. с англ., М., 1973; [2] Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1975; [3] Полак Э., Численные методы оптимизации. Единый подход, пер. с англ., М., 1974.

В. Г. Карманов.

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — итерационные методы решения нелинейных уравнений.

Под нелинейными уравнениями понимаются (см. [1] — [3]) алгебраические и трансцендентные уравнения вида

$$\varphi(x)=0, \tag{1}$$

где x — действительное число, $\varphi(x)$ — нелинейная функция, а под системой нелинейных уравнений — система вида

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_N)=0,\\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_N)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)=0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

не являющаяся системой линейных алгебраич. уравнений; решением системы (2) является N-мерный вектор $x\equiv(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Уравнение (1) и система (2) могут трактоваться как нелинейное операторное уравнение

$$L(u)=f \tag{3}$$

с нелинейным оператором L, действующим из векторного конечномерного пространства H_N в H_N.

Численными методами решения Н. у. (3) наз. итерационные методы, определяемые переходом от уже известного приближения u^n на n-й итерации к новому приближению u^{n+1} и позволяющие при достаточно большом числе итераций найти решение уравнения (3) с нужной точностью ε. Важнейшие итерационные методы приближенного решения уравнения (3) как относительно общего вида, так и специального вида, характерного для дискретных (сеточных) методов решения краевых задач для уравнений и систем уравнений с частными производными сильно эллиптич. типа, и являются предметом рассмотрения настоящей статьи. Нелинейные операторные уравнения, связанные с рассмотрением бесконечномерных пространств (см., напр., [4] — [8]), являются весьма широким математич. понятием, содержащим в себе как частные случаи, напр., нелинейные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи. Численные методы их приближенного решения включают в себя также методы их аппроксимации конечномерными уравнениями; эти методы рассматриваются отдельно.

Одним из важнейших методов решения уравнения (3) является метод простой итерации, предполагающий возможность замены уравнения (3) эквивалентной системой

$$u=P(u), \tag{4}$$

где $u=(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ — элемент конечномерного нормированного пространства H_N, а оператор P, отображающий H_N в H_N, является оператором сжатия:

$$\exists q<1,\ \forall u,\ v\ \|P(u)-P(v)\|\leqslant q\|u-v\|. \tag{5}$$

Тогда в силу общего принципа сжатых отображений (см. [1] — [4]) уравнение (1) имеет единственное решение, итерационный метод простой итерации

$$u^{n+1}=P(u^n),\quad n=0, 1, \ldots, \tag{6}$$

сходится при любом начальном приближении u^0, и для погрешности z^n на n-й итерации справедлива оценка

$$\|z^n\|\leqslant q^n(1-q)^{-1}\|u^0-u^1\|.$$

Пусть нек-рое решение $\overline{u}$ системы (3) удается окружить шаром $S(\overline{u}, R)=\{v;\ \|v-\overline{u}\|<R\}$, и система (3), рассматриваемая вместе с дополнительным условием

$$u\in S(\overline{u}, R), \tag{7}$$

эквивалентна системе (4), рассматриваемой вместе с условием (7), причем неравенство (5) справедливо для $u=\overline{u}$ и любого $v=\overline{u}+z$ с $\|z\|<R$. Тогда при выборе начального приближения u^0 из $S(\overline{u}, R)$ в методе (6) тоже

гарантируется сходимость u^n к $\bar{u}$ с оценкой погрешности $\|z^n\| \leqslant q^n R$.

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций φ_i при наличии хорошего начального приближения к решению системы (2) часто эффективным методом повышения точности является м е т о д Н ь ю т о н а — К а н т о р о в и ч а. В этом методе уравнение $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) - 0$ из (2), определяющее нек-рую поверхность P_i, заменяется уравнением касательной плоскости к P_i, проводимой через точку x^n, где x^n — ранее полученное приближение к решению (2) (см. [1] — [5]). При нек-рых дополнительных условиях метод Ньютона — Канторовича приводит к оценке погрешности типа

$$\| z^n \| \leqslant c_1 (c \| z^0 \|)^{2^n},$$

где c_1 и c — нек-рые константы. На каждой итерации этого метода необходимо решать систему линейных алгебраич. уравнений с матрицей $A^{(n)}$ при неизвестных

$$A^{(n)} \equiv \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x = x^n}.$$

Иногда эту матрицу сохраняют на нескольких итерациях, иногда производные $\partial \varphi_i / \partial x_j$ заменяют разностными аппроксимациями.

Метод Ньютона — Канторовича относится к группе методов линеаризации (3). Другим методом из этой группы является метод секущих (см. [3]).

Большое число итерационных методов (так наз. м е т о д о в с п у с к а) (см. [1] — [3], [9], [10]) основано на замене задачи решения уравнения (3) задачей минимизации нек-рого функционала $I(u)$. Напр., в качестве $I(u)$ можно взять

$$I(u) \equiv \| L(u) - f \|^2. \tag{8}$$

В ряде случаев, когда исходные Н. у. сами являлись уравнениями Эйлера для задачи минимизации нек-рого функционала $I(u)$, такая вариационная формулировка задачи является еще более естественной; операторы L в подобных ситуациях являются градиентами функционалов $I(u)$ и наз. п о т е н ц и а л ь н ы м и о п е р а т о р а м и (см. [5], [6]). Среди различных вариантов методов спуска можно назвать метод покоординатного спуска, различные градиентные методы и, в частности, метод наискорейшего спуска, метод сопряженных градиентов и др., а также и их модификации (см. [2], [9], [10] и др.). Ряд итерационных методов для решения уравнений (3), описывающих нек-рое стационарное состояние, можно трактовать как дискретизации соответствующих нестационарных задач. Поэтому методы из этого класса называют *установления методами* (см., напр., [2]). Примером таких нестационарных задач являются задачи, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A_1 \frac{d^2 u}{dt^2} + A_2 \frac{du}{dt} + L(u) - f \quad 0.$$

Введение дополнительной независимой переменной характерно и для м е т о д а д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я п о п а р а м е т р у (см. [5], [11]). Его суть состоит во введении вспомогательного параметра $\lambda \in [0, 1]$, выборе непрерывно дифференцируемых функций $F_i(x, \lambda)$ и замене системы (2) на систему

$$F_i(x, \lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{9}$$

при $\lambda = 0$ система (9) должна легко решаться, а функции $F_i(x, 1)$ должны совпадать с $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Система (9), вообще говоря, определяет

$$x(\lambda) = (x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_N(\lambda))$$

как функцию от λ, и искомое решение системы (2) совпадает с $x(1)$. Если систему (9) продифференцировать

по λ, то получится система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\lambda} + \frac{\partial F_i}{\partial \lambda} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \quad (10)$$

Если на отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ решить для нее задачу Коши с начальным условием, являющимся решением системы

$$F_i(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

то будет найдено и нек-рое решение системы (2). Дискретизация (10) по λ и приводит к численному методу для решения системы (2).

В методе продолжения по параметру система (9) решается при $\lambda = \tau, 2\tau, \ldots, m\tau, m\tau = 1$, причем при каждом указанном значении λ применяется нек-рый итерационный метод с начальным приближением, совпадающим с приближенно полученным решением системы при предыдущем значении λ. Оба названных метода по сути дела являются итерационными методами решения системы (2) со специальной процедурой нахождения хорошего начального приближения.

Для случая систем большую трудность представляет задача локализации решения. Так как большинство итерационных методов сходится лишь при наличии достаточно хорошего приближения к решению, описанные выше два метода часто позволяют избавиться от необходимости непосредственной локализации решения. Для локализации также часто используются теоремы, основанные на топологич. принципах и монотонности операторов (см. [4] — [8]).

Для решения уравнений (1), являющихся простейшими частными случаями (3), число известных и применяемых на практике итерационных методов очень велико (см., напр., [1] — [3], [12]). Помимо уже рассмотренных можно указать, напр., итерационные методы высших порядков (см. [1]), включающие в себя метод Ньютона как частный случай, и большое число итерационных методов, специально ориентированных на нахождение действительных или комплексных корней многочленов

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где a_i — действительные или комплексные числа (см. [1], [12]).

Проблема локализации решения уравнения (1) сводится к отысканию интервала, на концах к-рого непрерывная функция φ принимает значения разных знаков. Для случая, когда φ является многочленом, она теряет свою остроту, т. к. известны теоретич. оценки (см. [1]) и имеются методы нахождения всех корней с нужной точностью без задания хороших приближений к ним (см. [12]).

Итерационные методы для решения уравнений (3), возникающих в сеточных аналогах нелинейных краевых задач для уравнений с частными производными, являются частными случаями методов решения сеточных систем (см., напр., [3], [13] — [18]). Одним из наиболее интенсивно применяемых методов решения уравнения (3), вероятно, является модифицированный метод простой итерации, записываемый в виде

$$Bu^{n+1} \quad Bu^n - \gamma(L(u^n) - f), \quad (11)$$

где уравнение (3) рассматривается как операторное уравнение в N-мерном евклидовом пространстве $H_N = H$; $B \in S$, где S — обозначение множества линейных симметричных и положительных операторов, отображающих H в H. Целесообразно изучение таких методов проводить не в пространстве H, а в пространстве H_B с новым скалярным произведением:

$$(u, v)_{H_B} = (Bu, v), \quad \|u\| = (Bu, u),$$

где (u, v) — скалярное произведение в H.

Если оператор L таков, что для него выполнены условия строгой монотонности и Липшиц-непрерывности

$$\forall u,\ v\quad (L(u)-L(v),\ u-v)\geqslant \delta_0\|u-v\|_B^2,\ \delta_0>0, \quad (12)$$

$$\forall u,\ v\quad \|L(u)-L(v)\|_{B^{-1}}^2\leqslant \delta_2\|u-v\|_B^2, \quad (13)$$

то уравнение (3) имеет единственное решение, метод (11) при подходящем выборе γ сходится при любом u^0 с оценкой погрешности:

$$\|z^n\|_B\leqslant q^n\|z^0\|_B, \quad (14)$$

где $q=q(\delta_0,\ \delta_2,\ \gamma)<1$ (см. [13], [15]).

В более общем варианте этой теоремы достаточно требовать выполнения (12), (13) для решения u и всех v, принадлежащих шару $S_B(u,\ R)=\{v;\ \|v-u\|_B\leqslant R\}$, и принадлежности u^0 этому шару (см. [13]). В этом случае и константы δ_0, δ_2 могут зависеть от R. Для проверки таких условий достаточно, напр., с помощью априорных оценок локализовать u, получая $\|u\|_B\leqslant R_0$, а затем, если (12) и (13) выполнены для любых u и v из $S_B(0,\ R_1)$, $R_1>R_0$, взять $S_B(u,\ R)=S_B(u,\ R_1-R_0)$. В (14) константу q можно уменьшить, если оператор L дифференцируем и для его производной L'_v, представленной в виде суммы симметрич. части $L'_{v,\ c}$ и кососимметрич. части $L'_{v,\ a}$ известны неравенства

$$\forall v\in S_B(u,\ R)\quad \sigma_0 B\leqslant L'_{v,\ c}\leqslant \sigma_1 B,\ \sigma_0>0;$$

$$\forall w\ \|L'_{v,\ a}w\|_{B^{-1}}^2\leqslant \sigma_2\|w\|_B^2.$$

Тогда $q=q(\gamma,\ \sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2)$ (см. [11], [13], [15]). Иногда при рассмотрении некоторых типов нелинейностей вместо (12) и (13) целесообразно использовать неравенства типа

$$(L(u)-L(v),\ B(u-v))\geqslant \overline{\delta_0}\|B(u-v)\|^2,\ \overline{\delta_0}>0;$$

$$\|L(u)-L(v)\|^2\leqslant \overline{\delta_2}\|B(u-v)\|^2$$

(см. [13]). В качестве операторов B в (11) используются, напр., расщепляющиеся разностные операторы (метод переменных направлений) и факторизуемые разностные операторы (попеременно-треугольный метод, метод неполной матричной факторизации) и др. Наиболее привлекательно с асимптотич. точки зрения использование операторов B таких, что константы δ_i или $\overline{\delta_i}$ не зависят от размерности пространства H_N (см. [13]), а сами операторы B достаточно просты. На этом пути удалось в ряде случаев строить итерационные методы, позволяющие находить решение уравнения (3) с точностью ε при затрате всего $O(N\ln N|\ln\varepsilon|)$ (или даже $O(N\ln N)$) арифметич. действий при $\varepsilon\asymp N^{-\alpha}$, $\alpha>0$ (см. [13], [14]), если затраты вычислительной работы на вычисление $L(u^n)$ при заданном u^n можно оценить как $O(N)$. При проверке указанных условий типа (12), (13) во многих случаях большую помощь оказывают сеточные (разностные) аналоги теорем вложения С. Л. Соболева (см. [19]). Важно учитывать и специфику нелинейности. Так, напр., для случая, когда $L(u)=\Lambda u+Pu$, где Λ — линейный положительный оператор, а P — квадратически нелинейный, обладающий свойством «кососимметрии» ($\forall u(P(u),u)=0$), удается часто получить константу $\delta_2(R)$ в любом шаре $S_B(0,\ R)$, а δ_0— зависящую только от $\|u\|_B$; тогда сходимость (11) имеет место для любого u^0 (см. [20]). В ряде случаев на основе априорных оценок можно заменить исходную задачу ей эквивалентной, для к-рой нужные условия уже выполняются во всем пространстве (см. [21]).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [4] Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [5]

Михлин С. Г., Численная реализация вариационных методов, М., 1966; [6] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов, М., 1972; [7] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, пер. с нем., М., 1978; [8] Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [9] Васильев Ф. П., Лекции по методам решения экстремальных задач, М., 1974; [10] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [11] Яковлев М. Н., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1965, т. 84, с. 8–40; [12] Воеводин В. В., Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы, М., 1966; [13] Дьяконов Е. Г., в кн.: Численные методы механики сплошной среды, т. 7, № 5, Новосиб., 1976, с. 14—78; [14] его же, в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике. Материалы Всесоюзной конференции, Новосиб., 1978, с. 149—64; [15] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978; [16] Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р., Численное исследование вариационных неравенств, пер. с франц., М., 1979; [17] Келлер Г., в кн.: Разностные и вариационно-разностные методы, Новосиб., 1977, с. 8–36; [18] Кобельков Г. М., «Докл. АН СССР», 1978, т. 243, № 4, с. 843—46; [19] Дьяконов Е. Г., в кн.: Применение функциональных методов к краевым задачам математической физики, Новосиб., 1972, с. 55–62; [20] его же, «Acta Univ. Carolinae. Math. et Phys.», 1974, v. 15, № 1—2, p. 11—15; [21] Ривкинд В. Я., Уральцева Н. Н., в кн.: Проблемы математического анализа, в. 3, Л., 1972, с. 69—111.

Е. Г. Дьяконов.

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ уравнение вида

$$F(x,\ u,\ \ldots,\ D^{\alpha}u)=0, \tag{1}$$

где $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in\mathbb{R}^n$, $u=(u_1,\ \ldots,\ u_m)\in\mathbb{R}^m$, $F=(F_1,\ \ldots,\ F_k)\in\mathbb{R}^k$, $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$ есть мультииндекс с целыми неотрицательными $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ и $D^{\alpha}=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, где $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,\ \ldots,\ n$. Аналогично определяется Н. у. с ч. п. в случае комплекснозначных функций. Если $k>1$, то векторное Н. у. с ч. п. обычно наз. системой Н. у. с ч. п. Порядком уравнения (1) наз. наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Из существенно нелинейных уравнений наиболее известным является *Монжа — Ампера уравнение*

$$\det\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|+\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n}A_{ij}(x,\ u,\ Du)\times \times\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+B(x,\ u,\ Du)=0; \tag{2}$$

здесь и ниже $Du=(D_1u,\ \ldots,\ D_nu)$.

Если $k=m$ и функция F дифференцируема относительно своих «старших» переменных, соответствующих старшим производным, то тип уравнения (2) определяется типом главной линейной относительно старших производных частью функции F (см. *Дифференциальное уравнение с частными производными*). При этом производным по соответствующим переменным, либо соответствующим дифференциальным операциям, в общем случае, присваивается соответствующий определенный вес. Напр., в нелинейном уравнении теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=f\left(x_1,\ x_2,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

с $\frac{\partial f}{\partial p_{22}}>0$, $p_{22}\leftrightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, производная $\frac{\partial u}{\partial p_{22}}$ имеет вес равный двум.

Так как линеаризация уравнения (1) относительно старших производных проводится в окрестности фиксированного решения, то в отличие от линейного уравнения тип уравнения (1) (даже в фиксированной точке x) может зависеть от этого фиксируемого решения. Напр., уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial u}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}=f(x_1,\ x_2) \tag{3}$$

является уравнением эллиптич. типа на решениях с $\frac{\partial u}{\partial x_2} > 0$ и уравнением гиперболич. типа на решениях с $\frac{\partial u}{\partial x_2} < 0$.

Тип уравнения определяет постановку корректных краевых (смешанных) задач для этого уравнения и методы их исследования.

Если функция F является линейной относительно старших производных, то уравнение (1) наз. квазилинейным уравнением. Напр., уравнение (3) является квазилинейным уравнением. В противном случае уравнение наз. существенно нелинейным уравнением. Напр., уравнение Монжа — Ампера (2) является существенно нелинейным.

Если коэффициенты квазилинейного уравнения при старших производных не зависят от искомого решения (и его производных), то это уравнение наз. слабо нелинейным уравнением. Напр., уравнение

$$\Delta u = f(x, u, Du) \tag{4}$$

является слабо нелинейным уравнением.

Разделение Н. у. с ч. п. на квазилинейные и слабо нелинейные носит условный характер и не отражает внутреннего существа самих уравнений. Слабо нелинейное уравнение может обладать более сильными нелинейными свойствами, нежели квазилинейное и даже существенно нелинейное уравнение. Напр., существуют слабо нелинейные уравнения вида (4), к-рые при заданном граничном условии Дирихле в ограниченной области обладают счетным множеством разных решений.

Уравнения вида (1) могут рассматриваться во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ либо в нек-рой области этого пространства. В первом случае функциональный класс решений включает условия поведения решений на бесконечности. В случае области на границе этой области либо на части ее ставятся определенные граничные условия либо одно граничное условие. Эти граничные условия также могут содержать нелинейные операторы.

Н. у. с ч. п. вместе с граничным условием (условиями) порождает нелинейную задачу. Эта нелинейная задача рассматривается в соответствующем пространстве функций. Выбор этого функционального пространства решений определяется структурой нелинейного дифференциального оператора F, задаваемого в области, и структурой граничных операторов. Выбор функционального пространства для нелинейной задачи является существенным моментом при исследовании этой задачи. Напр., нелинейной задаче

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (|D^\alpha u|^{p-1} \operatorname{sgn} D^\alpha u) = f(x) \quad \text{с } p > 1$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и

$$D^\beta u = 0, \ |\beta| \leqslant m-1 \text{ на границе } \partial\Omega$$

соответствует пространство Соболева $\mathring{W}_p^m(\Omega)$. Эта задача при любой функции f из сопряженного пространства $W_{p'}^{-m}(\Omega) = (\mathring{W}_p^m(\Omega))^*$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, имеет единственное решение u из $\mathring{W}_p^m(\Omega)$. Здесь и ниже $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ есть замыкание множества всех бесконечнодифференцируемых финитных в Ω функций в пространстве Соболева $W_p^m(\Omega)$.

При исследовании задач для Н. у. с ч. п. рассматриваются вопросы о существовании решения, о числе решений, об отсутствии решения, о разрушении решения, о бифуркации (ветвлении) решения, об асимптотике решения при аргументе, стремящемся к границе, в частности к бесконечности, в случае неограниченных областей. Теория таких задач имеет два аспекта: локальный и глобальный.

Локальная теория относительно полно развита для общих нелинейных задач, принадлежащих либо к эллиптич. типу, либо к параболич. типу, либо к гиперболич. типу. Эта теория основана на теореме о неявной функции из нелинейного функционального анализа и общей теории линейных задач соответствующего типа.

В случае краевых (смешанных) задач для нелинейных параболич. либо гиперболич. уравнений эта локальная теория позволяет установить разрешимость задачи либо на достаточно малом временном промежутке, либо на фиксированном временном промежутке при условии достаточно малого отклонения (в соответствующей метрике) данных задачи от данных известного решения (как правило нулевого решения) близкой задачи.

Глобальная теория нелинейных задач развита менее полно и только для отдельных классов уравнений.

Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка. Для широкого класса квазилинейных скалярных уравнений первого порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_i(t,\ x,\ u)+\psi(t,\ x,\ u)=0 \qquad (5)$$

установлена теорема существования и единственности решения задачи Коши с начальным условием при $t=0$ для всех $t>0$.

Для более узкого класса уравнений вида (5) рассмотрены также вопросы асимптотики решений таких задач при $t\to+\infty$ и краевые задачи.

Теория систем квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка развита менее полно (см. *Квазилинейные гиперболические уравнения и системы*).

Нелинейные уравнения с частными производными второго порядка.

Уравнения эллиптич. типа и параболич. типа. Относительно полно развита теория разрешимости в целом краевых задач для широкого класса квазилинейных скалярных уравнений эллиптич. типа второго порядка, имеющих вид

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,\ u,\ Du)+a(x,\ u,\ Du)=0, \qquad (6)$$

либо

$$\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x,\ u,\ Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+a(x,\ u,\ Du)=0 \qquad (7)$$

при условии существования априорной оценки $\max\limits_x|u(x)|$. При этом коэффициенты уравнений удовлетворяют определенным условиям.

Аналогично положение и с теорией разрешимости в целом краевых (смешанных) задач для широкого класса квазилинейных скалярных уравнений параболич. типа второго порядка, имеющих вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,\ u,\ Du)+a(x,\ u,\ Du), \qquad (8)$$

либо

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}(x,\ u,\ Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+a(x,\ u,\ Du). \qquad (9)$$

Эта теория разрешимости основана на теории априорных оценок и методе Лере — Шаудера.

Получение априорной исходной оценки $\max\limits_x|u(x)|$ для определенных классов нелинейных уравнений (6) — (9) основано либо на *максимума принципе*, либо на специальных интегральных неравенствах и соответствующих *вложения теоремах* функциональных пространств.

Теория разрешимости в целом краевых задач для существенно нелинейных скалярных уравнений эллип-

тич. типа развита для узкого класса таких уравнений в случае двух независимых переменных.

Разрешимость в целом краевой (смешанной) задачи для существенно нелинейных скалярных уравнений параболич. типа установлена для широкого класса уравнений параболич. типа вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad a\left(x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

в случае одной пространственной переменной $x \in \mathbb{R}$.

Вопросы разрешимости в целом задач для систем квазилинейных уравнений эллиптич. типа либо параболич. типа рассмотрены для отдельных узких классов таких систем.

Одним из эффективных методов в исследовании Н. у. с ч. п. второго порядка, принадлежащих либо к эллиптич., либо к параболич. типу, является метод верхних и нижних решений. Напр., пусть поставлена краевая задача

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,\ u,\ Du) \text{ в ограниченной области } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = 0 \text{ на границе } \partial\Omega \text{ класса } C^2 \end{cases} \tag{10}$$

с непрерывной функцией f, определенной на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и такой, что выполнено условие Бернштейна

$$|f(x,\ u,\ \xi)| \leqslant M(|u|)\cdot(1+|\xi|^2)$$

при всех $(x,\ u,\ \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ с возрастающей функцией $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant 0\}$. Тогда если существуют функции $u^+,\ u^- \in W_p^2(\Omega)$ с $p > n$ такие, что $-\Delta u^+ \geqslant f(x,\ u^+,\ Du^+)$ почти всюду в Ω, $u^+ \geqslant 0$ на $\partial\Omega$, $-\Delta u^- \leqslant f(x,\ u^-,\ Du^-)$ почти всюду в Ω, $u^- \leqslant 0$ на $\partial\Omega$ (u^+ — верхнее решение задачи (10), u^- — нижнее решение задачи (10)), и $u^+(x) \geqslant u^-(x)$ в Ω, то существует решение $u \in W_p^2(\Omega)$ задачи (10) и $u^-(x) \leqslant u(x) \leqslant u^+(x)$ в Ω. Правильный выбор верхних и нижних решений исходных нелинейных задач, основанный на решениях модельных задач, дает возможность устанавливать не только разрешимость и нижнее число решений, но и получать тонкие априорные оценки и асимптотику для этих решений исходных нелинейных задач.

Исследование поведения в целом решений краевых (смешанных) задач для нелинейных параболич. уравнений, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, связано с исследованием стационарных решений краевых задач для соответствующих нелинейных эллиптич. уравнений.

В связи с тем, что краевые задачи для нелинейных эллиптич. уравнений не всегда имеют решение и для краевых (смешанных) задач для нелинейных параболич. и гиперболич. уравнений не при всех $t > 0$ существует решение, развивается *теория отсутствия решений* задач для Н. у. с ч. п.

У р а в н е н и я г и п е р б о л и ч. т и п а. Эти уравнения занимают особое место среди Н. у. с ч. п. второго порядка. «Потеря одной производной» при обращении гиперболич. оператора второго порядка приводит к принципиальным трудностям при исследовании нелинейных гиперболич. уравнений. Даже для создания локальной теории нелинейных гиперболич. уравнений и систем потребовалось развитие специальной теории о неявных функциях в нелинейном функциональном анализе, так как классич. теорема о неявной функции из функционального анализа оказалась здесь неприменимой.

Для (существенно) квазилинейных гиперболич. уравнений второго порядка с числом независимых переменных больше двух вопрос о разрешимости в целом даже задачи Коши не исследован.

В случае двух независимых переменных ($t \in \mathbb{R}_1$, $x \in \mathbb{R}$) разрешимость задачи Коши в целом установлена

для отдельных уравнений вида

$$u_{tt} - a^2(u_x)\,u_{xx} = f(t,\ x,\ u_t,\ u_x),$$

сводимых к специальным квазилинейным гиперболич. системам — законам сохранения (см. *Квазилинейные гиперболические уравнения и системы*).

В случае квазилинейных гиперболич. уравнений вида

$$u_{tt} - a^2\left(\int_\Omega |Du|^2\,dx\right)\Delta u = f(t,\ x) \text{ в } \Omega\times[0,\ T]$$

установлена разрешимость в целом (для любого $T>0$) смешанной задачи с условиями: u 0 на $\partial\Omega\times[0,\ T]$ и u φ, u_t — ψ при t 0, $x\in\Omega$ в определенном классе бесконечно гладких по x функций. Здесь Ω — ограниченная область из $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ и $|Du|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$.

Разрешимость в целом задачи Коши, а также краевой (смешанной) задачи установлена для широкого класса слабо нелинейных гиперболич. уравнений вида

$$u_{tt} - \Delta u \quad f(t,\ x,\ u,\ u_t,\ Du),\quad t>0,\ x\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n.$$

Особое место в теории нелинейных гиперболич. уравнений занимает вопрос о существовании периодических по t решений краевых задач для этих уравнений. Даже для слабо нелинейных уравнений этот вопрос рассмотрен только для уравнений вида

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t,\ x,\ u)$$

в случае двух переменных $t\in\mathbb{R}$ и $x\in[a,\ b]\subset\mathbb{R}$. Сложность этого вопроса обусловлена бесконечномерностью ядра соответствующей линейной задачи.

Слабо нелинейные и квазилинейные гиперболич. уравнения, содержащие диссипативные слагаемые, исследованы более полно.

Нелинейные уравнения с частными производными высшего порядка. Разрешимость краевых (смешанных) задач исследована для широкого класса квазилинейных уравнений дивергентного вида

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,\ u,\ \ldots,\ D^\beta u) = f(x),\quad |\beta|\leqslant m, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(t,\ x,\ u,\ \ldots,\ D^\beta u) = f(t,\ x),\quad |\beta|\leqslant m.$$

При этом относительно функций A_α предполагается выполненным ряд условий, к-рые обеспечивают, что нелинейные операторы будут определены в соответствующих функциональных пространствах и обладать рядом свойств. Напр., для разрешимости краевой задачи в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с условиями

$$D^\omega u = 0,\ |\omega|\leqslant m-1 \text{ на границе } \partial\Omega \tag{12}$$

для уравнения (11) достаточно выполнение условий:

1) Функции $A_\alpha(x,\ \xi_0,\ \ldots,\ \xi_\beta)$, $\xi_\beta\leftrightarrow D^\beta u$, являются измеримыми по x при всех $\xi_0,\ \ldots,\ \xi_\beta$, непрерывными по $(\xi_0,\ \ldots,\ \xi_\beta)$ почти при всех $x\in\Omega$ и удовлетворяют неравенству

$$|A_\alpha(x,\ \xi_0,\ \ldots,\ \xi_\beta)|\leqslant K\Big(1+\sum_{|\gamma|<m}|\xi_\gamma|^{p-1}\Big)$$

с $p>1$ и $K>0$, $|\alpha|\leqslant m$.

2) Выполнено следующее условие коэрцитивности: для любой функции u из пространства Соболева $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega A_\alpha(x,\ u,\ \ldots,\ D^\beta u)\,D^\alpha u\,dx \geqslant$$
$$\geqslant a_0\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega |D^\alpha u|^p\,dx - K \quad \text{с} \quad a_0>0.$$

3) Выполнено условие монотонности: для любых функций u и v из $\mathring{W}_p^m(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega (A_\alpha(x,\ u,\ \ldots,\ D^\beta u)- \\ -A_\alpha(x,\ v,\ \ldots,\ D^\beta v)(D^\alpha u - D^\alpha v))\,dx \geqslant 0.$$

Тогда при выполнении условий 1) — 3) краевая задача (12) для уравнения (11) при любой функции f из сопряженного пространства $(\mathring{W}_p^m(\Omega))^*$ имеет решение u из $\mathring{W}_p^m(\Omega)$.

Все эти условия можно существенно расширить. Напр., для дифференциальных операторов вида (11) с граничными условиями (12), к-рые являются нечетными и однородными в главном при нек-рых условиях, но без условия коэрцитивности, справедлива альтернатива Фредгольма: если соответствующая краевая задача с нулевыми граничными условиями (12) для уравнения (11) с $f=0$ имеет только тривиальное решение, то эта задача разрешима при любой функции f из соответствующего сопряженного пространства.

Для широкого класса краевых (смешанных) задач для Н. у. с ч. п. развита теория нормальной разрешимости, к-рая обобщает теорию нормальной разрешимости (по Хаусдорфу) линейных операторных уравнений на нелинейный случай. Эта теория дает достаточные условия разрешимости краевых (смешанных) задач для нелинейных уравнений и систем уравнений параболич. типа и для слабо нелинейных уравнений и систем гиперболич. типа.

В теории краевых задач для нелинейных уравнений эллиптич. типа особое место занимает вопрос о существовании собственных функций. Теория собственных функций краевых задач для квазилинейных уравнений эллиптич. типа развита для достаточно широкого класса задач. В частности, на широкий класс задач перенесена абстрактная теория Люстерника — Шнирельмана о существовании счетного множества собственных функций.

Особое место в теории нелинейных уравнений эллиптич. типа высшего порядка и в теории систем нелинейных уравнений эллиптич. типа с числом независимых переменных, большим двух, занимает вопрос о регулярности решений этих уравнений и систем.

В случае скалярного квазилинейного равномерно эллиптич. уравнения второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющими вместе со своими первыми производными определенным условиям роста, решение обладает гладкостью внутри области на две производные, превышающие гладкость правой части из соответствующего пространства.

В случае квазилинейных уравнений эллиптич. типа порядка выше двух и систем квазилинейных уравнений эллиптич. типа второго либо более высокого порядка с числом независимых переменных, большим двух, соответствующая гладкость решений имеет место не всюду внутри области, а почти всюду. При дополнительных условиях удается уточнить размерность этой нулевой (хаусдорфовой) меры, на множествах к-рой, вообще говоря, гладкость решений теряется. Для специального класса квазилинейных эллиптич. систем с ограниченными нелинейностями установлена регулярность решений всюду в области.

Развита теория краевых задач для широкого класса квазилинейных уравнений дивергентного вида бесконечного порядка.

Теория точных решений. К методам точных решений относятся: метод, основанный на групповом анализе Н. у. с ч. п.; метод, основанный на преобразованиях Ли — Беклунда; метод, основанный на обратной задаче теории рассеяния, и нек-рые др.

Метод обратной задачи рассеяния позволил исследовать ряд физически важных уравнений, таких, как нелинейные уравнения Кортевега — де Фриса:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0;$$

нелинейное уравнение синус-Гордона:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0;$$

нелинейное уравнение Шрёдингера:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \varkappa |\psi|^2 \psi = 0$$

и ряд других с одной пространственной переменной $x \in \mathbb{R}$. С помощью этого метода удалось рассмотреть отдельные нелинейные уравнения типа уравнения Кортевега — де Фриса с двумя пространственными переменными.

Лит.: [1] Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; [2] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд., М., 1973; [3] Gilbarg D., Trudinger N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, B.— N. Y., 1977; [4] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967; [5] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [6] Ниренберг Л., Лекции по нелинейному функциональному анализу, пер. с англ., М., 1977; [7] Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, пер. с франц., М., 1972; [8] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений..., М., 1978; [9] Скрыпник И. В., Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, К., 1973; [10] Fučik S., Nečas J., Souček J., Souček V., Spectral Analysis of Nonlinear Operators, B., 1973; [11] Овсянников Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978; [12] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980; [13] Вишик М. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1963, т. 12, с. 125—64; [14] Giaquinta M., Modica G., «Manuscripta math.», 1979, v. 28, № 1—3, p. 109—58; [15] Дубинский Ю. А., «Матем. сб.», 1975, т. 98, № 2, с. 163—84; [16] Kazdan J. L., Kramer R., «Comm. pure and appl. Math.», 1978, v. 31, № 5, p. 619—45; [17] Кошелев А. И., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 4, с. 3—49; [18] Кружков С. Н., «Матем. сб.», 1970, т. 81, № 2, с. 228—55; [19] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1967, т. 16, с. 329—46; [20] Олейник О. А., «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 2, с. 165—70; [21] Похожаев С. И., «Матем. сб.», 1970, т. 82, № 2, с. 192—212; [22] его же, «Матем. сб.», 1975, т. 96, № 1, с. 152—66; [23] его же, «Матем. сб.», 1980, т. 113, № 2, с. 324—38.

С. И. Похожаев.

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ — колебания в физич. системах, описываемые нелинейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + \mu X(t, x, \mu) + f(t), \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, X содержит члены не ниже 2-й степени по компонентам вектора x, $f(t)$ — вектор-функция времени t, $\mu > 0$ — малый параметр (либо $\mu = 1$ и $X = -X(t, x)$). Возможные обобщения связаны с рассмотрением разрывных систем, воздействий с разрывными характеристиками (напр., типа гистерезиса), запаздывания и случайных воздействий, интегро-дифференциальных и дифференциально-операторных уравнений, колебательных систем с распределенными параметрами, описываемыми дифференциальными уравнениями с частными производными, а также с использованием методов оптимального управления нелинейными колебательными системами. Основные общие задачи Н. к.: отыскание положений равновесия, стационарных режимов, в частности периодич. движений, автоколебаний и исследование их устойчивости, проблемы синхронизации и стабилизации Н. к.

Все физич. системы, строго говоря, являются нелинейными. Одна из наиболее характерных особенностей Н. к.— это нарушение в них принципа суперпозиции колебаний: результат каждого из воздействий в присутствии другого оказывается иным, чем в случае отсутствия другого воздействия.

К в а з и л и н е й н ы е с и с т е м ы — системы (1) при $\mu>0$. Основным методом исследования является *малого параметра метод*. Прежде всего это м е т о д П у а н к а р е — Л и н д ш т е д т а определения периодич. решений квазилинейных систем, аналитических по параметру при его достаточно малых значениях, либо в виде рядов по степеням μ (см. [1] гл. IX), либо в виде рядов по степеням μ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ – добавок к начальным значениям компонент вектора $\boldsymbol{x}$ (см. [1] гл. III). О дальнейшем развитии этого метода см., напр., в [2] — [4].

Другим из методов малого параметра является метод *осреднения*. Вместе с тем в исследование квазилинейных систем проникали и новые методы: асимптотич. методы (см. [5], [6]), метод V-функций (см. [7]), базирующийся на фундаментальных результатах А. М. Ляпунова — Н. Г. Четаева, и др.

С у щ е с т в е н н о н е л и н е й н ы е с и с т е м ы, в к-рых отсутствует заранее предписываемый малый параметр ($\mu=1$ и $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(t, \boldsymbol{x})$ в (1)). Для систем Ляпунова

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}), \qquad (2)$$

где

$$\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{J}_2+\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{J}_2=\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

причем среди собственных чисел ($k\times k$)-матрицы $\boldsymbol{P}$ нет кратных корню $\pm\lambda i$, $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ — аналитич. вектор-функция $\boldsymbol{x}$, разложение к-рой начинается с членов не ниже 2-го порядка, и имеет место аналитический первый интеграл специального вида, А. М. Ляпунов (см. [8] § 42) предложил метод отыскания периодич. решений в виде ряда по степеням произвольной постоянной c (за к-рую может быть принято начальное значение одной из двух критич. переменных x_1 либо x_2).

Для систем, близких к системам Ляпунова,

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})+\mu\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \mu),$$

где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ того же вида, что и в (2), $\boldsymbol{F}$ — аналитич. вектор-функция $\boldsymbol{x}$ и малого параметра μ, непрерывная и 2π-периодическая по t, также предложен метод определения периодич. решений (см. [4] гл. VIII). Системы типа Ляпунова (2), в к-рых матрица $\boldsymbol{A}$ имеет l нулевых собственных значений с простыми элементарными делителями, два — чисто мнимых собственных значения $\pm\lambda i$ и не имеет собственных значений, кратных $\pm\lambda i$, $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ — такая же, как и в (2), могут быть сведены к системам Ляпунова (см. [9] § IV.2). Исследовались также Н. к. в системах Ляпунова и в т. н. с и с т е м а х Л я п у н о в а с д е м п ф и р о в а н и е м, а также решалась общая задача о перекачке энергии в них (см. [9] гл. I, III, IV).

Пусть существенно нелинейная автономная система приведена к жорданову виду ее линейной части

$$\dot{x}_\nu=\lambda_\nu x_\nu+\delta_\nu x_{\nu+1}+ \\ +x_\nu\sum_{\boldsymbol{Q}\in\mathfrak{M}_\nu} f_{\nu\boldsymbol{Q}}x_1^{q_1}\ldots x_n^{q_n}, \quad \nu=1, \ldots, n; \ \delta_n=0, \qquad (3)$$

где вектор $\Lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ по предположению имеет хотя бы одну ненулевую компоненту; $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ равны нулю или единице соответственно при отсутствии или наличии непростых элементарных делителей матрицы линейной части, $f_{\nu\boldsymbol{Q}}$ — коэффициенты; множество $\mathfrak{M}_\nu$ значений вектора $\boldsymbol{Q}=(q_1, \ldots, q_n)$ с целочисленными компонентами таково:

$$q_1, \ldots, q_{\nu-1}, q_{\nu+1}, \ldots, q_n\geqslant 0, \\ q_\nu\geqslant -1, \ q_1+\ldots+q_n\geqslant 1.$$

Тогда существует нормализующее преобразование:

$$x_\nu=y_\nu+y_\nu\sum_{\boldsymbol{Q}\in\mathfrak{M}_\nu} h_{\nu\boldsymbol{Q}}y_1^{q_1}\ldots y_n^{q_n}, \qquad \nu=1, \ldots, n, \qquad (4)$$

приводящее (3) к нормальной форме дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_\nu = \lambda_\nu y_\nu + \delta_\nu y_{\nu+1} + \\ + y_\nu \sum_{Q \in \mathfrak{M}_\nu,\ (\Lambda,\ Q)=0} g_{\nu Q} y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n},\ \nu = 1, \dots, n;\ \delta = 0, \quad (5)$$

и такое, что $g_{\nu Q} = 0$, если $(\Lambda, Q) \neq 0$. Таким образом, нормальная форма (5) содержит лишь резонансные члены, т. е. коэффициенты $g_{\nu Q}$ в (5) могут быть отличны от нуля лишь для тех Q, для к-рых выполнено р е з о н а н с н о е у р а в н е н и е

$$(\Lambda, Q) \equiv \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_n q_n = 0,$$

играющее существенную роль в теории колебаний. Сходимость и расходимость нормализующего преобразования (4) исследована (см. [10] ч. I, гл. II, III); дано вычисление коэффициентов $h_{\nu Q}$, $g_{\nu Q}$ (посредством их симметризации) (см. [9] § 5.3). В ряде задач о Н. к. существенно нелинейных автономных систем оказался эффективным метод нормальных форм (см. [10], [9] гл. VI—VIII).

Из других методов исследования существенно нелинейных систем применяются метод точечных отображений (см. [2], [11]), стробоскопич. метод [12] и функционально-аналитич. методы [13].

К а ч е с т в е н н ы е м е т о д ы Н. к. Исходными здесь являются исследования вида интегральных кривых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, проведенные А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [14]). Приложения для задач Н. к., описываемых автономными системами 2-го порядка см. в [2], [15]. Изучены [16] вопросы существования периодич. решений и их устойчивости в большом для многомерных систем; рассмотрены [13] почти периодические Н. к. Приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при нек-рых производных к задачам релаксационных Н. к. см. в [17].

Важные аспекты Н. к. и лит. см. в статьях *Возмущений теория*, *Колебаний теория*.

Лит.: [1] П у а н к а р е А., Избр. труды, пер. с франц., т. 1, М., 1971; [2] А н д р о н о в А. А., В и т т А. А., Х а й к и н С. Э., Теория колебаний, 2 изд., М., 1959; [3] Б у л г а к о в Б. В., Колебания, М., 1954; [4] М а л к и н И. Г., Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., 1956; [5] Б о г о л ю б о в Н. Н., Избр. труды, т. 1, К., 1969; [6] Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [7] К а м е н к о в Г. В., Избр. труды, т. 1—2, М., 1971—72; [8] Л я п у н о в А. М., Собр. соч., т. 2, М.— Л., 1956, с. 7 -263; [9] С т а р ж и н с к и й В. М., Прикладные методы нелинейных колебаний, М., 1977; [10] Б р ю н о А. Д., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 25, с. 119 262; 1972, т. 26, с. 199—239; [11] Н е й м а р к Ю. И., Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, М., 1972; [12] M i n o r s k y N., Introduction to non-linear mechanics, Ann Arbor, 1947; [13] К р а с н о с е л ь с к и й М. А., Б у р д В. Ш., К о л е с о в Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., 1970; [14] П у а н к а р е А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, пер. с франц., М. —Л., 1947; [15] Б у т е н и н Н. В., Н е й м а р к Ю. И., Ф у ф а е в Н. А., Введение в теорию нелинейных колебаний, М., 1976; [16] П л и с с В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М. Л., 1964; [17] М и щ е н к о Е. Ф., Р о з о в Н. Х., Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975.

В. М. Старжинский.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение A векторного (как правило) пространства X в векторное пространство Y над общим полем скаляров, не обладающее свойством линейности, т. е. такое, что, вообще говоря,

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \neq \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2.$$

Если Y есть множество действительных чисел $\mathbb{R}$ или комплексных чисел $\mathbb{C}$, то Н. о. наз. *нелинейным функционалом*. Простейшим примером Н. о. (нелинейного функционала) служит действительная функция действительного аргумента, отличная от линейной функции.

Одним из важных источников возникновения Н. о. являются задачи математич. физики. Если при составлении локального математич. описания процесса учитываются малые не только первого, но и высших порядков, то возникают уравнения с Н. о. К нелинейным операторным уравнениям приводят также нек-рые задачи математич. экономики, авторегулирования, теории управления и т. д.

Примеры нелинейных операторов.

1) $Ax = \int_a^b K(t, s, x(s))\, ds,$

где $K(t, s, u)$, $a \leqslant t, s \leqslant b$, $-\infty < u < \infty$,— такая функция, что $g(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))\, ds$ есть непрерывная на $[a, b]$ функция для любой функции $x(s) \in C(a, b)$ (напр., $K(t, s, u)$ непрерывна на $a \leqslant t, s \leqslant b$, $-\infty < u < \infty$). Если $K(t, s, u)$ нелинейна по u, то A — нелинейный оператор Урысона, отображающий $C[a, b]$ в $C[a, b]$. При других ограничениях на $K(t, s, u)$ оператор Урысона действует в других пространствах, напр. в $L_2[a, b]$, или отображает одно пространство Орлича $L_{M_1}[a, b]$ в другое $L_{M_2}[a, b]$.

2) $Bx = \int_a^b K(t, s)\, g(s, x(s))\, ds,$

где $g(t, u)$ — нелинейная по u функция, определенная на $a \leqslant t \leqslant b$, $-\infty < u < \infty$. При соответствующих ограничениях на $g(t, u)$ оператор B действует из одного функционального пространства в другое и наз. нелинейным оператором Гаммерштейна.

3) $F(x) = f(t, x(t))$

— оператор суперпозиции, наз. также оператором Немыцкого, преобразующий при соответствующих ограничениях на нелинейную по 2-му аргументу функцию пространство измеримых функций $x(t)$ в себя.

4) $D(x) = \sum_{|k| \leqslant m} D^k (a_k(t, x, Dx, \ldots, D^k x))$

— нелинейный дифференциальный оператор порядка $2m$ дивергентного вида, действующий в пространстве Соболева $W_p^{2m}(G)$ при соответствующих ограничениях на нелинейные функции $a_k(t, u_0, u_1, \ldots, u_m)$. Здесь k — мультииндекс $(k_1, \ldots, k_n)$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $D^k = \dfrac{\partial^{|k|}}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \ldots \partial t_n^{k_n}}$ и G — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$.

5) $J(x) = \int_a^b K(t, s, x(s), x'(s))\, ds$

— нелинейный интегро-дифференциальный оператор, действующий при соответствующих ограничениях на функцию $K(t, s, u_0, u_1)$ в пространстве $C^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых функций.

На Н. о., действующие из одного топологического векторного пространства X в другое топологическое векторное пространство Y, переносятся многие понятия и операции математич. анализа действительных функций действительного переменного. Так, Н. о. $A : M \to Y$, $M \subset X$ наз. ограниченным, если $A(B \cap M)$ — ограниченное множество в Y для любого ограниченного множества $B \subset X$; Н. о. A непрерывен в точке $x \in M$, если прообраз $A^{-1}(U_{Ax})$ окрестности U_{Ax} точки Ax содержит $M \cap U_x$ для нек-рой окрестности точки x. Как и для функций, Н. о., непрерывный в каждой точке компактного множества M, ограничен на этом множестве. В отличие от линейных операторов, для Н. о., действующих в нормированных пространствах, из ограниченности оператора A на нек-ром шаре не следует непрерывность A на этом шаре.

Однако в нек-рых случаях из непрерывности (ограниченности) Н. о. на шаре следует непрерывность (ограниченность) оператора во всей области его определения.

Среди Н. о., действующих из X в Y, можно выделить нек-рые важные классы.

1) Полилинейные операторы $A: X\times X\times\ldots\times X\to Y$, линейные по каждому аргументу. Пространство $L_n(X, Y)$ (I) всех n-линейных операторов изоморфно пространству $L\{X[\ldots L(X, Y), \ldots]\}$ (II), где $L(X, Y)$ — пространство всех линейных операторов из X в Y. Если X и Y — нормированные пространства, то пространства (I) и (II) изометричны. Если A симметричен по всем аргументам, то $\tilde{A}(x, x, \ldots, x)$ обозначается $\tilde{A}x^n$ и наз. однородным оператором n-й степени.

2) В пространствах, наделенных частичной упорядоченностью,— изотонные операторы A и антитонные операторы $\tilde{A}$, характеризующиеся соответственно условиями $x\leqslant y\Rightarrow Ax\leqslant Ay$ и $x\leqslant y\Rightarrow Ax\geqslant\tilde{A}y$.

3) В гильбертовом пространстве H — монотонные операторы M, определяемые условием $\langle Mx-My, x-y\rangle\geqslant 0$ для любых $x, y\in H$.

4) Компактные операторы, преобразующие ограниченные подмножества своей области определения в предкомпактные множества, в том числе вполне непрерывные операторы, являющиеся одновременно компактными и непрерывными.

Для Н. о. нетривиальными и полезными являются понятия дифференциала и производной. Оператор A, действующий из открытого множества G нормированного векторного пространства X в нормированное векторное пространство Y, наз. дифференцируемым по Фреше в точке $x\in G$, если существует линейный непрерывный оператор $A'(x): X\to Y$ такой, что для любого $h\in X$, для к-рого $x+h\in G$, имеет место

$$A(x+h)-A(x)=A'(x)h+\omega,$$

где $\omega/\|h\|\to 0$ при $h\to 0$. В этом случае линейная по h часть $A'(x)h$ приращения $A(x+h)-A(x)$ наз. дифференциалом Фреше оператора A в точке x и обозначается $dA(x, h)$, а $\omega=\omega(A, x, h)$ наз. остатком приращения. Линейный ограниченный оператор $A'(x)$ наз. производной Фреше оператора A в точке x. Помимо дифференцируемости по Фреше вводится дифференцируемость по Гато. Именно, оператор A наз. дифференцируемым по Гато в точке x, если существует

$$\lim_{t\to 0}\frac{A(x+th)-A(x)}{t}=DA(x, h),$$

наз. дифференциалом Гато оператора A в точке x. Дифференциал Гато однороден по h, т. е. $DA(x, \lambda h)=\lambda DA(x, h)$. Если $DA(x, h)$ линеен по h и $DA(x, h)=A'_0(x)h$, то линейный оператор $A'_0(x)$ наз. производной Гато оператора A. Из дифференцируемости по Фреше следует дифференцируемость по Гато и равенство $A'_0(x)=A'(x)$. Из дифференцируемости по Гато не следует в общем случае дифференцируемость по Фреше, но если $DA(x, h)$ существует в окрестности точки x, непрерывен по h и равномерно непрерывен по x, то A дифференцируем по Фреше в точке x. Для нелинейных функционалов $f: G\to\mathbb{R}$ дифференциалы и производные Фреше и Гато определяются аналогично. При этом производная Гато f'_0 наз. градиентом функционала f и является оператором из G в X^*. Если $Ax=\operatorname{grad} f(x)$ для нек-рого нелинейного функционала f, то оператор A наз. потенциальным.

Для операторов, действующих в отделимых топологических векторных пространствах, возможно несколько

определений дифференцируемости. Пусть $\mathfrak{M}$ — нек-рая совокупность ограниченных множеств топологического векторного пространства X. Отображение $\omega : G\times X\to Y$ наз. $\mathfrak{M}$-м а л ы м, если для любого $M\in\mathfrak{M}$ имеет место $\omega(x, \text{th})/t\to 0$ при $t\to 0$ равномерно по $h\in\mathfrak{M}$. Отображение $A : G\to Y$ ($G\subset X$ и открыто) наз. $\mathfrak{M}$ - д и ф ф е р е н ц и р у е м ы м в точке $x\in G$, если

$$A(x+h)-Ax=A'(x)h+\omega(A, x, h),$$

где ω есть $\mathfrak{M}$-малое отображение. Чаще всего в качестве $\mathfrak{M}$ берется либо совокупность всех ограниченных множеств, либо совокупность всех компактных множеств, либо совокупность всех конечных множеств пространства X. Для Н. о. в нормированных пространствах первый случай приводит к дифференцируемости по Фреше, третий — к дифференцируемости по Гато.

Обычным образом, как производные от производных, определяются производные высших порядков $A^{(n)}(x)$ и $A_0^{(n)}(x)$ оператора A. Это — полилинейные симметрич. отображения. Дифференциалом n-го порядка будет при этом однородная форма n-й степени $A^{(n)}(x)h^n$. Возможны иные определения высших производных. Пусть, напр., X и Y — нормированные векторные пространства, $G\subset X$ — открыто, $x\in G$. Если для любого h такого, что $x+h\in G$,

$$A(x+h)-A(x)=a_0(x)+a_1(x)h+\ldots+a_n(x)h^n+\omega, \quad (*)$$

где $\omega=o(\|h\|^n)$, то полилинейная форма $k!a_k(x)$ наз. п р о и з в о д н о й k-г о п о р я д к а. Выражение $(*)$ наз. при этом о г р а н и ч е н н ы м р а з л о ж е н и е м n-г о п о р я д к а разности $A(x+h)-A(x)$. При выполнении соответствующих ограничений различные определения высших производных эквивалентны.

Если в пространстве X задана скалярная счетно аддитивная мера, то Н. о. можно интегрировать, понимая $\int A(x)dx$ в смысле *Бохнера интеграла*.

Для Н. о. $A : M\to Y$, как и в случае линейного, значения параметра λ такие, что $(I-\lambda A)^{-1}$ существует и непрерывен на $A(M)$, естественно назвать р е г у л я р н ы м и, а остальные точки λ отнести к с п е к т р у. По своим свойствам спектр Н. о. A может резко отличаться от спектров линейных операторов. Так, спектр вполне непрерывного Н. о. может иметь непрерывные участки; из собственного элемента x_0 оператора A, т. е. такого, что $x_0=\lambda_0 Ax_0$, могут выходить ветви собственных элементов, и т. п.

Лит.: [1] Л ю с т е р н и к Л. А., С о б о л е в В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [3] В а й н б е р г М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956; [4] К р а с н о с е л ь с к и й М. А., З а б р е й к о П. П., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975; [5] Г а е в с к и й Х., Г р ё г е р К., З а х а р и а с К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, пер. с нем., М., 1978.

В. И. Соболев.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ — порожденная радоновской мерой μ функция $U_\mu(x)$ точки x евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $N\geqslant 2$, нелинейно зависящая от порождающей меры.

Напр., при исследовании свойств решений дифференциальных уравнений с частными производными и граничных свойств аналитич. функций оказываются полезными Н. п. следующего вида:

$$U_\mu(x)=U_\mu(x;\ p,\ l)=$$

$$=\int\left[\int\frac{d\mu(z)}{|y-z|^{N-l}}\right]^{1/(p-1)}\frac{dy}{|x-y|^{N-l}}, \quad x\in\mathbb{R}^N, \quad (*)$$

где $|x-y|$ — расстояние между точками x и y, μ — радоновская мера с компактным носителем, p и l — действительные числа, $1<p<\infty$, $0<l<\infty$.

При $p=2$ Н. п. (*) обращаются в линейные *Рисса потенциалы*, при $p=2$ и $l=1$ — в классический *ньютонов потенциал*. Для Н. п. (*) строятся понятия емкости и энергии, доказываются аналоги нек-рых основных теорем *потенциала теории* (см. [1]).

Лит.: [1] Мазья В. Г., Хавин В. П., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 6, с. 67—138. *Е. Д. Соломенцев.*

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ — частный случай *нелинейного оператора*, определенного на действительном (комплексном) векторном пространстве X, значениями к-рого являются действительные (комплексные) числа. Примерами Н. ф. могут служить функционалы вариационного исчисления

$$f(x)=\int_a^b F(t,\ x(t),\ x'(t))\,dt;$$

выпуклые функционалы, определяемые условием

$$f(\lambda y+(1-\lambda)x)\leqslant\lambda f(y)+(1-\lambda)f(x),$$

где $x,\ y\in X$, $0\leqslant\lambda\leqslant1$, напр. $f(x)=\|x\|$ — норма элемента нормированного пространства. *В. И. Соболев.*

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — один из разделов функционального анализа, изучающий нелинейные отображения (*нелинейные операторы*) бесконечномерных векторных пространств, а также некрые классы нелинейных пространств и их отображения. Основными разделами Н. ф. а. являются следующие.

1) Дифференциальное исчисление нелинейных отображений банаховых, топологических векторных и нек-рых других более общих пространств, включая теоремы о локальном обращении дифференцируемого отображения и теорему о неявной функции.

2) Нахождение условий действия, непрерывности, компактности нелинейного оператора, действующего из одного бесконечномерного конкретного пространства в другое.

3) Принципы неподвижной точки для различных классов нелинейных операторов (сжимающих, компактных, уплотняющих, монотонных и др.); применение этих принципов для доказательства существования решений различных нелинейных уравнений.

4) Изучение нелинейных монотонных, вогнутых, выпуклых, имеющих монотонную миноранту и др. операторов в пространствах, наделенных структурой упорядоченного векторного пространства.

5) Исследование спектральных свойств нелинейных операторов (точки бифуркации, непрерывные ветви собственных элементов и пр.) в бесконечномерных векторных пространствах.

6) Приближенное решение нелинейных операторных уравнений.

7) Изучение пространств, линейных в малом, и банаховых многообразий — глобальный анализ.

8) Исследование на экстремум нелинейных функционалов и вариационные методы изучения нелинейных операторов.

Лит.: [1] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972; [2] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, пер. с нем., М., 1978; [3] Иллс Дж., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 3, с. 157—210; [4] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962; [5] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975; [6] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., т. 1, М., 1967; [7] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [8] Ниренберг Л., Лекции по нелинейному функциональному анализу, пер. с англ., М., 1977; [9] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962. *В. И. Соболев.*

НЕОБХОДИМАЯ ДОСТАТОЧНАЯ СТАТИСТИКА — см. *Минимальная достаточная статистика.*

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ — условия правильности утверждения A, без выполнения к-рых утверждение A заведомо не может быть верным (необходимые условия), и, соответственно, при выполнении к-рых утверждение A заведомо верно (достаточные условия). Часто выражение «необходимо и достаточно» заменяется выражением «тогда и только тогда» или же выражением «в том и только в том случае». Н. и д. у. обладают большой познавательной ценностью. В сложных математич. проблемах разыскание удобных для пользования Н. и д. у. бывает иногда чрезвычайно трудным. В таких случаях достаточные условия стараются сделать возможно более широкими, т. е. охватывающими возможно большее число случаев, в к-рых интересующий нас факт все еще имеет место, а необходимые условия — возможно более узкими, т. е. охватывающими возможно меньше лишних случаев, в к-рых изучаемый факт уже не имеет места. Таким образом, достаточные условия постепенно сближаются с необходимыми. *БСЭ-3.*

НЕОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР — отображение A множества M топологического векторного пространства X в топологическое векторное пространство Y такое, что существует ограниченное множество $N \subset M$, образ к-рого $A(N)$ есть неограниченное множество в Y.

Простейшим примером Н. о. является оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$, определенный на множестве $C_1[a, b]$ всех непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a, b]$ всех функций, непрерывных на $a \leqslant t \leqslant b$, так как оператор $\frac{d}{dt}$ переводит ограниченное множество $\{\sin nt\}$ в неограниченное множество $\{n \cos nt\}$. Н. о. A необходимо разрывен в нек-рых (а если A линеен, то и во всех) точках своей области определения. Поэтому важным классом Н. о. являются *замкнутые операторы*, обладающие свойством, в нек-рой степени заменяющим свойство непрерывности.

Пусть A и B — Н. о. с областями определения D_A и D_B. Если $D_A \cap D_B \neq \varnothing$, то на этом пересечении определен оператор $(\alpha A + \beta B)x = \alpha Ax + \beta Bx$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), и аналогично, если $D_A \cap A^{-1}(D_B) \neq \varnothing$, то определен оператор $(BA)x = B(Ax)$. В частности, таким образом определяются степени A^k, $k = 1, 2, \ldots$, Н. о. A. Оператор B наз. р а с ш и р е н и е м оператора A, $B > A$, если $D_A \subset D_B$ и $Bx = Ax$ для $x \in D_A$. Так, $B(A_1 + A_2) \supset BA_1 + BA_2$. Перестановочность двух операторов обычно рассматривается для того случая, когда один из операторов ограничен: Н. о. A перестановочен с ограниченным оператором B, если $BA \subset AB$.

Для линейных Н. о. определяется понятие сопряженного оператора. Пусть Н. о. A, заданный на множестве D_A, плотном в топологическом векторном пространстве X, действует в топологическое векторное пространство Y. Если X^* и Y^* — пространства, сильно сопряженные соответственно с X и Y, и D_{A^*} — совокупность линейных функционалов $\varphi \in Y^*$, для к-рых существует линейный функционал $f \in X^*$ такой, что $\langle Ax, \varphi \rangle = \langle x, f \rangle$ при всех $x \in D_A$, то соответствие $\varphi \leftrightarrow f$ определяет на D_{A^*} (к-рое, впрочем, может состоять лишь из нулевого элемента) пространства Y^* оператор A^*, наз. оператором, с о п р я ж е н н ы м с A.

Лит.: [1] И о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [3] Р и с с Ф., С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б., Лекции по функциональному анализу, 2 изд., пер. с франц., М., 1979; [4] Л ю с т е р н и к Л. А., С о б о л е в В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [5] Н е й м а н Дж., Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., 1964.

В. И. Соболев.

НЕОПРЕДЕЛЕННОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение, содержащее более одного неизвестного. Систему урав-

нений, в к-рой число неизвестных больше числа уравнений, наз. неопределенной системой уравнений. Н. у. и неопределенные системы уравнений имеют, как правило, бесконечное число решений. Термин «Н. у.» употребляется в теории чисел, где интересуются решениями Н. у., удовлетворяющих тем или иным арифметич. условиям (обычно ищут решения Н. у. в целых или рациональных числах). Изучение таких решений составляет предмет теории *диофантовых уравнений*. *БСЭ-3.*

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ РАСКРЫТИЕ — методы вычисления пределов функций, заданных формулами, к-рые в результате формальной подстановки в них предельных значений аргумента теряют смысл, т. е. переходят в выражения типа

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,$$

по к-рым нельзя судить о том, существуют или нет искомые пределы, не говоря уже о нахождении их значений, если они существуют. Основным инструментом для раскрытия неопределенностей служит *Тейлора формула*, с помощью к-рой выделяется главная часть функции. Так, в случае неопределенности типа 0/0, для того чтобы найти предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0,$$

функции f и g представляют по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 (если это возможно) до первого не равного нулю члена:

$$f(x)=a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\quad a\neq 0,$$
$$g(x)=b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m),\quad b\neq 0,$$

в результате получается, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-m}=\begin{cases}0, & \text{если } n>m,\\ \frac{a}{b}, & \text{если } n=m,\\ \infty, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

В случае неопределенности типа ∞/∞ для нахождения предела

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty,$$

применяют преобразование

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

сводящее задачу к раскрытию неопределенности типа 0/0.

Неопределенности типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ также целесообразно приводить к виду 0/0 следующими преобразованиями:

$$f(x)\,g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},\quad f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\,\frac{1}{g(x)}}$$

соответственно.

Для раскрытия неопределенностей типа 0^0, ∞^0, 1^∞ целесообразно первоначально прологарифмировать выражения, предел к-рых требуется найти.

Другим общим методом раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и сводимых к ним является *Лопиталя правило.* *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИНЦИП, принцип Гейзенберга,— один из важнейших принципов квантовой механики, утверждающий, что дисперсии значений двух физич. величин a и b, описываемых некоммутирующими операторами $\hat{a}$ и $\hat{b}$, коммутатор $[\hat{a}, \hat{b}]$ к-рых отделен от нуля, в любом состоянии физич. системы не могут одновременно быть очень малыми.

Точнее, пусть $\varphi \in H$, $\|\varphi\| = 1$, — состояние физич. системы (H — гильбертово пространство таких состояний, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в H) и $\Delta_\varphi^a = [(\hat{a}^2\varphi, \varphi) - (\hat{a}\varphi, \varphi)^2]^{1/2}$ — дисперсия величины a в состоянии φ; аналогично определяется Δ_φ^b. Всегда верно неравенство

$$\Delta_\varphi^a \Delta_\varphi^b \geqslant \frac{1}{2} |([\hat{a}, \hat{b}]\varphi, \varphi)|.$$

В частности, координаты x, y, z квантовой частицы и составляющие ее импульса p_x, p_y, p_z при всех стандартных способах квантования (что означает выбор пространства H и правила сопоставления физич. величинам самосопряженных операторов, действующих в H) представляются операторами $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ и $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ такими, что

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = [\hat{p}_y, \hat{y}] = [\hat{p}_z, z] = -i\hbar E,$$

где E — единичный оператор в H, а $\hbar$ — т. н. постоянная Планка. Таким образом, для любого $\varphi \in H$

$$\Delta_\varphi^{p_x} \Delta_\varphi^x \geqslant \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta_\varphi^{p_y} \Delta_\varphi^y \geqslant \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta_\varphi^{p_z} \Delta_\varphi^z \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

Лит.: [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, 3 изд., М., 1974. *Р. А. Минлос.*

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл

$$\int f(x)\,dx \qquad (*)$$

от заданной функции одного переменного, определенной на нек-ром промежутке — совокупность всех первообразных данной функции на этом промежутке. Если функция f определена на нек-ром промежутке Δ числовой оси и F — нек-рая ее первообразная на Δ, т. е. $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in \Delta$, то всякая другая первообразная функция f на Δ имеет вид $F + C$, где C — нек-рая постоянная. Следовательно, Н. и. (*) состоит из всевозможных функций вида $F + C$.

Неопределенным интегралом Лебега от суммируемой на отрезке $[a, b]$ функции f наз. совокупность всех функций вида

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

В этом случае равенство $F'(x) = f(x)$ выполняется, вообще говоря, лишь почти всюду на отрезке $[a, b]$.

Неопределенным интегралом Лебега (в широком смысле) от суммируемой функции f, определенной на измеримом пространстве X с мерой μ, наз. функция множеств

$$\int_E f(x)\,d_\mu x,$$

определенная на множестве всех измеримых множеств E пространства X.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [3] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОД — нахождение искомой функции в виде точной или приближенной линейной комбинации (конечной или бесконечной) известных функций. Указанная линейная комбинация берется с неизвестными коэффициентами, к-рые определяются тем или иным способом из условий рассматриваемой задачи. Обычно для них получается система алгебраич. уравнений.

Классич. примером Н. к. м. является его использование для разложения правильной рациональной дроби в комплексной или действительной области на элементарные дроби. Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ алгебраич. многочлены с комплексными коэффициентами, причем степень n многочлена $P(z)$ меньше степени m многочлена $Q(z)$, коэффициент при старшем члене многочлена $Q(z)$ равен 1, z_i — корень многочлена $Q(z)$ кратности α_i, $i=1, 2, \ldots, k$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_k=n$ и, следовательно,

$$Q(z)=(z-z_1)^{\alpha_1}\ldots(z-z_k)^{\alpha_k}.$$

Правильная рациональная дробь $P(z)/Q(z)$ представима и притом единственным образом в виде

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i\nu}}{(z-z_i)^{\nu}}, \qquad (1)$$

где $A_{i\nu}$ — неизвестные пока комплексные числа (их всего m). Для их отыскания обе части равенства приводят к общему знаменателю. После его отбрасывания и приведения в правой части подобных членов получается равенство, в каждой части к-рого стоят многочлены степени не выше чем $m-1$: в левой части с известными коэффициентами, в правой — в виде линейных комбинаций неизвестных чисел $A_{i\nu}$. Приравниванием коэффициентов у одинаковых степеней переменного z получается система m линейных уравнений относительно $A_{i\nu}$, к-рая в силу существования и единственности разложения (1) имеет и притом единственное решение. Иногда бывает удобно использовать несколько иные приемы нахождения коэффициентов $A_{i\nu}$. Напр., пусть все корни многочлена $Q(z)$ простые и, следовательно, разложение (1) имеет вид

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{z-z_i}.$$

После приведения к общему знаменателю обеих частей и его отбрасывания получается равенство

$$P(z)=\sum_{i=1}^{m}A_i\prod_{k=1,\ k\neq i}^{m}(z-z_k).$$

Полагая в нем последовательно $z=z_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, сразу получают

$$A_i=P(z_i)/\prod_{i=1,\ k\neq i}^{m}(z_i-z_k).$$

В общем случае бывает полезно комбинировать обе указанных приема нахождения коэффициентов $A_{i\nu}$.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами,

$$Q(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l},$$

где $x_1, \ldots, x_k$ — действительные корни многочлена $Q(x)$ соответственно кратностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, а квадратный трехчлен $x^2+p_jx+q_j$ с действительными коэффициентами p_j, q_j является произведением $(x-z_j)(x-\bar{z}_j)$, где z_j — существенно комплексный корень кратности β_j, $j=1, 2, \ldots, l$, многочлена $Q(z)$ и

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i+2\sum_{j=1}^{l}\beta_j=m.$$

Тогда для правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ существует и притом единственное разложение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i\mu}}{(x-x_i)^{\mu}} + \\ + \sum_{j=1}^{l} \sum_{\nu=1}^{\beta_j} \frac{M_{j\nu}x + N_{j\nu}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\nu}}, \qquad (2)$$

где коэффициенты $A_{i\mu}$, $\mu=1, 2, \ldots, \alpha_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, $M_{j\nu}$ и $N_{j\nu}$, $\nu=1, 2, \ldots, \beta_j$, $j=1, 2, \ldots, l$, суть действительные числа. Метод их отыскания тот же, что и в описанном выше комплексном случае: равенство (2) приводится к общему знаменателю, после отбрасывания к-рого приравниваются коэффициенты у одинаковых степеней переменной x в обеих частях равенства. В результате получается система m уравнений с m неизвестными $A_{i\mu}$, $M_{j\nu}$ и $N_{j\nu}$, имеющая единственное решение.

Разложение правильных рациональных дробей на элементарные применяется, напр., для разложения рациональных дробей в ряд Лорана (в частности, в ряд Тейлора), для интегрирования рациональных дробей. Н. к. м. используется также при интегрировании рациональных дробей с помощью *Остроградского метода*, при интегрировании функций вида $P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}$. В этом случае интеграл имеет вид

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \\ = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (3)$$

где степень многочлена $Q(x)$ на единицу меньше степени многочлена $P(x)$. Для нахождения коэффициентов многочлена $Q(x)$ и числа λ равенство (3) дифференцируется. После приведения к общему знаменателю и его отбрасывания приравниваются коэффициенты у одинаковых степеней переменной x. В результате снова получается система линейных уравнений с единственным решением. Подобные методы интегрирования могут быть применены и в нек-рых других случаях.

Н. к. м. применяется при отыскании решений дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными) в виде степенных рядов. Для этого в окрестности рассматриваемой точки степенной ряд с неопределенными коэффициентами подставляется в данное уравнение. Иногда в результате для коэффициентов ряда получаются соотношения, из к-рых с помощью заданных начальных или граничных условий удается найти эти коэффициенты, а следовательно, и решение уравнения в виде ряда. Напр., решая таким образом *гипергеометрическое уравнение*, можно получить разложение в ряд *гипергеометрической функции*.

Н. к. м. применяется и в др. способах решения дифференциальных уравнений, напр. *Галеркина метода*, *Ритца метода*, *Треффца метода*; используется в численных методах: в методе Крылова получения коэффициентов векового уравнения, при приближенном решении интегральных уравнений. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОД построения численных алгоритмов — специальный метод построения алгоритмов, основанный на требовании, чтобы алгоритм был точен или имел погрешность определенного порядка точности на нек-ром множестве задач.

Типичным примером задач, к-рые наряду с другими методами могут решаться Н. к. м., являются следующие (см. [1], [2]). Известны значения функции $f(P_1), \ldots, f(P_N)$. Требуется построить формулу для приближения функции:

$$f(P) \approx g(f(P_1), \ldots, f(P_N), P);$$

формулу для вычисления производной:

$$Df \approx g_D(f(P_1), \ldots, f(P_N), P);$$

формулу для вычисления интеграла:

$$I(f) = \int_\Omega f(P)\, p(P)\, dP \approx g_I(f(P_1), \ldots, f(P_N)).$$

Для решения последней из этих задач задаются нек-рой формой приближенного решения, напр. линейной

$$g_I = \sum_{n=1}^{N} C_n f(P_n),$$

и определяют коэффициенты C_n из требования, чтобы приближенная формула $I(f) \approx g$ была точной для функций из нек-рой совокупности, напр. вида

$$f(P) = \sum_{m=1}^{M} a_m \omega_m(P),$$

где $\omega_m(P)$ фиксированы, a_m произвольны. Как правило, берут $M = N$. Чтобы равенство

$$I\left(\sum_{m=1}^{M} a_m \omega_m\right) = \sum_{n=1}^{N} C_n \left(\sum_{m=1}^{M} a_m\, \omega_m(P_n)\right)$$

выполнялось при всех a_m, достаточно выполнения соотношений

$$I(\omega_m) = \sum_{n=1}^{N} C_n \omega_m(P_n), \quad m = 1, \ldots, M.$$

Отсюда определяют (если это возможно) искомые C_n.

Иногда задаются более сложной формой зависимости. Напр., при приближении функций часто известно, что рассматриваемая функция хорошо приближается функциями вида

$$g(a_1, \ldots, a_M, P),$$

где a_m неизвестны. Параметры a_m подбирают из системы уравнений

$$g(a_1, \ldots, a_M, P_n) = f(P_n), \quad n = 1, \ldots, N.$$

В случае формул численного интегрирования в качестве неизвестных параметров часто выступают и координаты узлов интегрирования. Напр., в квадратурных формулах Гаусса вида

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, p(x)\, dx \approx \sum_{n=1}^{N} C_n f(P_n)$$

рассматриваются как свободные параметры координаты узлов P_n; благодаря этому удается построить квадратуры, точные для многочленов степени $2N-1$. При конструировании аппроксимаций дифференциальных уравнений с помощью Н. к. м. требуют, чтобы при подстановке в конечноразностную схему решения задачи получалась величина рассогласования (*невязка*) требуемого порядка малости по отношению к шагу сетки. Такой прием положен в основу способов построения методов Рунге — Кутта и конечноразностных методов (см. [1], [2]).

Особенно широко Н. к. м. используется при построении аппроксимаций уравнений с частными производными (см. [3]).

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; [3] Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, 2 изд., М., 1977. *Н. С. Бахвалов.*

НЕОРИЕНТИРУЕМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — многообразие, не допускающее *ориентации*. Таковы, напр., *Мёбиуса лист*, *Клейна поверхность*, проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ четной размерности. *М. И. Войцеховский.*

НЕОСОБАЯ ГРАНИЧНАЯ ТОЧКА, правильная граничная точка,— *достижимая граничная точка* ζ области определения D однозначной аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z такая, что $f(z)$ аналитически продолжается в ζ вдоль

любого пути, ведущего из D в ζ. Иначе говоря, Н. г. т.— это достижимая граничная точка, не являющаяся особой граничной точкой. См. также *Особая точка аналитической функции.* *Е. Д. Соломенцев.*

НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ПРОМЕЖУТОК, промежуток несопряженности,— связный промежуток J числовой оси $\mathbb{R}$ такой, что любое нетривиальное решение $x=x(t)$ линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с действительными коэффициентами

$$x^{(n)}+a_1(t)\,x^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)\,x=0, \qquad (*)$$

имеет на нем самое большее $n-1$ нулей, считая m-кратный нуль за m нулей. Свойства решений уравнения (*) на Н. п. хорошо изучены (см., напр., [1] — [3]). Имеются различные обобщения понятия Н. п. для линейных систем дифференциальных уравнений, для нелинейных дифференциальных уравнений, а также для других типов уравнений (разностных, с отклоняющимся аргументом).

Лит.: [1] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [2] Левин А. Ю., «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 2, с. 43—96; [3] Coppel W. A., Disconjugacy, B.— N. Y., 1971.

Ю. В. Комленко.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИКИ — методы математич. статистики, не предполагающие знания функционального вида генеральных распределений. Название «непараметрические методы» подчеркивает их отличие от классических — параметрических — методов, в к-рых предполагается, что генеральное распределение известно с точностью до конечного числа параметров, и к-рые позволяют по результатам наблюдений оценивать неизвестные значения этих параметров и проверять гипотезы относительно их значений.

Пример. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_n$— две независимые выборки, извлеченные из совокупностей с непрерывными генеральными функциями распределения F и G; и пусть проверяется гипотеза H_0 о равенстве распределений F и G против альтернативы сдвига, т. е. гипотезы

$$H_1 : G(t)=F(t-\theta)$$

для всех t и нек-рого $\theta\neq 0$. В классич. варианте этой задачи предполагается, что функции распределения F и G нормальны, и для проверки рассматриваемой гипотезы используется *Стьюдента критерий.* При непараметрич. постановке задачи о виде F и G не делается никаких предположений, кроме непрерывности. Типичным непараметрич. критерием для проверки гипотезы H_0 против H_1 является *Вилкоксона критерий*, основанный на сумме рангов элементов первой выборки в общем вариационном ряду. Гипотезу о равенстве распределений отвергают, если вычисленная по наблюдениям статистика критерия оказывается слишком большой или слишком малой. Статистика критерия Вилкоксона проста для вычислений, а ее распределение при H_0 не зависит от F. Критич. значения, отвечающие заданному *значимости уровню* при небольших значениях m и n, находят по таблицам (см., напр., [1]); при больших m и n пользуются нормальной аппроксимацией.

В ряде случаев важно не столько проверить гипотезу об отсутствии сдвига, сколько оценить этот сдвиг θ, к-рый может интерпретироваться, напр., как изменение урожайности при смене способа обработки почвы или дополнительное время сна при применении снотворного. Оценка параметра θ посредством величины $\overline{Y}-\overline{X}$, к-рая вполне удовлетворительна в нормальном случае, является очень неустойчивой к отклонениям от нормальности и может даже не быть состоятельной. Гораздо лучшими свойствами в этом отношении обла-

дает непараметрич. оценка θ (см. [2]): медиана набора mn чисел $Y_j - X_i$, $i=1, \ldots, m$, $j=1, \ldots, n$. Эта оценка тесно связана с критерием Вилкоксона. Можно сказать, что она находится в том же отношении к оценке $\overline{Y}-\overline{X}$, в каком критерий Вилкоксона находится к критерию Стьюдента.

Несмотря на многообразие задач, решаемых с помощью непараметрич. методов, эти задачи можно условно разделить на две большие части: задачи проверки гипотез и задачи оценки неизвестных распределений и параметров, к-рые понимаются как нек-рые функционалы от этих распределений.

Непараметрич. проверка статистич. гипотез — наиболее развитая часть Н. м. с. Требуется построить процедуру (критерий), позволяющую принять или отвергнуть проверяемую гипотезу при заданной альтернативе. Типичным примером является проверка согласия, другими важными для приложений примерами являются проверка симметрии, независимости и случайности.

Задача проверки согласия состоит в том, что по выборке из совокупности с генеральной функцией распределения G требуется проверить гипотезу о том, что $G=F$, где F — заданная непрерывная функция распределения. Непараметрич. характер задачи проявляется здесь в непараметричности альтернативы, к-рая может быть сформулирована, напр., в одностороннем варианте: $F<G$ или $F>G$, либо в двустороннем: $F\neq G$.

Задача проверки симметрии заключается в проверке симметрии генеральной функции распределения G относительно заданной точки x_0, т. е. равенства

$$G(x_0+t)+G(x_0-t)=1.$$

В качестве альтернатив могут выступать односторонние условия

$$G(x_0+t)+G(x_0-t)\geqslant 1,$$

$$G(x_0+t)+G(x_0-t)\leqslant 1$$

со строгим неравенством хотя бы для одного t либо двустороннее условие того же типа.

Задача проверки независимости возникает в тех случаях, когда необходимо проверить, являются ли независимыми два признака, наблюдаемые у одного и того же объекта, по независимым наблюдениям над такими объектами. Сходным образом формулируется и гипотеза случайности, когда предполагается, что элементы выборки — независимые и одинаково распределенные величины. Наряду с альтернативами общего вида встречаются случаи, когда оказывается возможным указать, чем именно будут отличаться распределения элементов выборки при альтернативе; так возникают, напр., альтернативы тренда и регрессии.

Способы алгоритмич. построения непараметрич. процедур с заданными свойствами разработаны пока недостаточно, и большую роль в выборе подходящей процедуры играют обычно интуиция и эвристич. соображения. На этом пути накоплено большое количество способов и приемов решения часто встречающихся непараметрич. задач (см. [3]).

Большая группа непараметрич. критериев основана на использовании эмпирич. функции распределения. Пусть F_n — эмпирич. функция распределения, построенная по выборке объема n из совокупности с генеральной функцией распределения F. В силу теоремы Гливенко — Кантелли

$$\sup_t |F_n(t)-F(t)| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\longrightarrow\infty$$

с вероятностью 1. Таким образом, эмпирическая и истинная функции распределения с вероятностью 1

неограниченно сближаются, и на мере их близости можно основывать критерии согласия с гипотезой об истинной функции распределения.

Первыми критериями этого типа были *Колмогорова критерий* и *Крамера — Мизеса критерий*, предложенные в начале 30-х гг. 20 в. и основанные соответственно на статистиках

$$D_n = \sqrt{n}\sup_t |F_n(t) - F(t)|$$

и

$$\omega_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty}(F_n(t) - F(t))^2\,dF(t).$$

Следует отметить, что обе эти статистики имеют распределения, не зависящие от генеральной функции распределения F, если только последняя непрерывна. Их предельные распределения, найденные в середине 30-х гг. А. Н. Колмогоровым и Н. В. Смирновым, табулированы, что позволяет приближенно найти границу критич. области, отвечающей заданному уровню значимости (см. [1]).

Предложено и изучено много вариантов критериев согласия, основанных на разности F_n и F, напр. *Реньи критерий*, критерии Андерсона — Дарлинга, Ватсона и др. (см. [4]). Для успешного их применения в случае больших выборок необходимо в первую очередь знать соответствующие предельные распределения. Последние могут быть найдены с помощью подхода, в соответствии с к-рым статистика критерия представляется в виде непрерывного функционала от эмпирич. процесса

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}\,(G_n(t) - t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где $G_n(t)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из равномерного распределения на $[0, 1]$. Процесс $\xi_n(t)$ слабо сходится в пространстве $D[0,1]$ к нек-рому гауссовскому процессу, т. н. броуновскому мосту (см. [6]). Поэтому предельное распределение изучаемой статистики совпадает с распределением соответствующего функционала от броуновского моста, к-рое вычисляется с помощью стандартных методов.

Существуют модификации статистик D_n и ω_n^2, предназначенные для проверки гипотез о распределении в многомерном случае, а также для проверки гипотез независимости и симметрии. В этих случаях возникает ряд дополнительных трудностей. Напр., в многомерном случае все рассмотренные статистики теряют свойство универсальности (независимости от исходного распределения). Наиболее важен случай равномерного распределения на единичном кубе, поскольку выборку из многомерного распределения можно тем или иным способом превратить в выборку из равномерного распределения. Однако ни точное, ни предельное распределения статистики Колмогорова неизвестны (1982) даже в этом простом случае. Сходные затруднения появляются и в том случае, когда проверяется не простая, а сложная гипотеза о распределении, т. е. если предполагается, что генеральная функция распределения имеет вид $F(t, \theta)$, где θ — неизвестный параметр, одномерный или многомерный. В этом случае естественно оценить θ по выборке, напр. посредством оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_n$, и сравнивать $F_n(t)$ с $F(t, \hat{\theta}_n)$. Статистики D_n, ω_n^2 и их разновидности можно построить, как и в случае простой гипотезы. Однако распределения этих статистик — как точные, так и предельные — оказываются снова зависящими от вида F, а во многих случаях — и от неизвестного истинного значения θ. Задача вычисления этих распределений трудна и точный вид их неизвестен, хотя для статистик типа ω_n^2 в ряде случаев удается составить таблицы предельного распределения (см. [5]).

Для нек-рых других статистик известны процентные точки, вычисленные экспериментальным путем.

Наряду с рассмотренными выше критериями согласия строятся их двухвыборочные и многовыборочные аналоги, к-рые могут использоваться как для проверки согласия, так и для проверки однородности нескольких выборок (см. *Смирнова критерий*).

Общим свойством критериев согласия и однородности, основанных на эмпирич. функции распределения, является состоятельность против любых альтернатив. Однако выбор той или иной статистики в практич. задаче затруднен недостаточной изученностью их мощностных свойств. При больших объемах выборок можно опираться на значения асимптотич. относительной эффективности (АОЭ) по Питмену, вычисленные для ряда наиболее простых статистик (см. [7]).

Другую группу непараметрич. критериев образуют *ранговые критерии*. Наиболее раннее использование рангового критерия знаков встречается у Дж. Арбетнотта (J. Arbuthnott, 1710), к-рый использовал его при анализе статистич. данных о рождаемости мальчиков и девочек для получения «аргументов в пользу божественного провидения». Однако современный период развития ранговых критериев начинается в кон. 30-х гг. 20 в. После опубликования в 1945 работы Ф. Вилкоксона (F. Wilcoxon), в к-рой был предложен ранговый критерий, носящий его имя, ранговые методы вступают в период интенсивного развития.

Использование ранговых процедур основано на следующем соображении. Поскольку вектор рангов вместе с вектором порядковых статистик содержит всю информацию, содержащуюся в выборке, то нек-рая доля этой информации содержится только в ранговом векторе. Поэтому можно строить статистич. процедуры, основываясь только на рангах и не используя знание самих выборочных значений. Преимуществом таких процедур является вычислительная простота, вытекающая из целочисленности рангов. Другой важной особенностью ранговых процедур является их применимость и в тех случаях, когда наблюдения носят не количественный, а качественный характер, лишь бы они допускали упорядочение, что особенно важно в исследованиях по социологии, психологии и медицине. Наконец, распределения ранговых статистик при основной гипотезе не зависят от генерального распределения, что позволяет раз и навсегда вычислить эти распределения.

По мере развития ранговых методов выяснилось, что доля информации, содержащаяся в векторе рангов, может оказаться значительной, что обеспечивает этим процедурам высокую эффективность. В рассмотренном выше примере, связанном с проверкой однородности двух выборок, расширение области применимости критерия приводит к потере в мощности, и в нормальном случае критерий Стьюдента имеет большую мощность, нежели любой ранговый критерий. Однако при большом числе наблюдений критерий Вилкоксона мало проигрывает критерию Стьюдента. Оказывается, что в нормальном случае АОЭ критерия Вилкоксона по отношению к критерию Стьюдента равна $3/\pi \approx 0{,}955$. Если же генеральное распределение отлично от нормального, то указанная АОЭ может быть сколь угодно большой, но никогда не опускается ниже значения 0,864 (см. [4]). Более того, существует ранговый критерий (т. н. критерий нормальных меток), АОЭ к-рого по отношению к критерию Стьюдента равна 1 в нормальном случае и превосходит 1 при любом отклонении от нормальности. Таким образом, этот критерий асимптотически оказывается предпочтительнее критерия Стьюдента.

Другой пример связан с проверкой гипотезы симметрии. Пусть выборка $X_1, \ldots, X_n$ извлечена из совокупности с генеральной плотностью f и проверяется ги-

потеза о симметричности f относительно нуля снова при альтернативе сдвига. Наиболее простым критерием в этой задаче является *знаков критерий*, основанный на числе положительных значений среди X_i. Знаково-ранговый критерий Вилкоксона основан на статистике $\sum_{X_i>0} R_i^+$, где R_i^+ — ранг элемента X_i в вариационном ряду для $|X_1|, \ldots, |X_n|$. Статистика этого критерия использует не только информацию о знаках наблюдений, но и информацию о их величине. Поэтому можно рассчитывать, что критерий Вилкоксона окажется более эффективным, чем критерий знаков. Действительно, АОЭ этих критериев по отношению к критерию Стьюдента равна соответственно $3/\pi = 0{,}955$ и $2/\pi = 0{,}637$ (в нормальном случае). Таким образом, критерий Вилкоксона в 1,5 раза превосходит критерий знаков и мало уступает критерию Стьюдента.

Еще один пример связан с проверкой гипотезы независимости. Пусть имеется ряд объектов, каждый из к-рых обладает двумя признаками, количественными или качественными (математические и музыкальные способности учащегося, цвет и спелость ягоды, и т. д.). Предполагается, что наблюдения над качественными признаками могут быть упорядочены. Требуется по n независимым наблюдениям над объектами проверить гипотезу о независимости признаков против, напр., альтернативы их положительной зависимости. Пусть R_i и S_i ранги признаков, соответствующие i-му наблюдению. Естественный критерий для проверки независимости основан на коэффициенте ранговой корреляции Спирмена r_s, к-рый может быть вычислен по формуле

$$r_s = 1 - \frac{6\sum (R_i - S_i)^2}{n^3 - n}.$$

Гипотеза независимости отвергается при больших, т. е. близких к 1, значениях r_s. Критич. значения при малых n находят по таблицам, при больших n пользуются нормальной аппроксимацией. АОЭ критерия, основанного на r_s, по отношению к критерию, основанному на выборочном коэффициенте корреляции, снова довольно высока и равна $9/\pi^2 = 0{,}912$ (см. [9]).

Поскольку для проверки каждой непараметрич. гипотезы существует много ранговых критериев, предложенных часто из эвристич. соображений, выбор критерия следует основывать на каких-либо соображениях оптимальности. Как известно, равномерно наиболее мощные критерии в классе всех возможных альтернатив редко существуют даже в параметрич. случае. Поэтому роль оптимальных ранговых критериев для конечных объемов выборок выполняют локально наиболее мощные критерии. Так, напр., критерий Вилкоксона является локально наиболее мощным в двухвыборочной задаче проверки однородности против альтернативы сдвига для логистич. распределения с плотностью $e^x(1+e^x)^{-2}$, а критерий нормальных меток — в той же задаче для нормального распределения. В асимптотич. теории для отражения свойства оптимальности используются те или иные понятия асимптотич. эффективности, причем локально наиболее мощные критерии обычно оказываются и асимптотически оптимальными (см. [8]).

В теории ранговых критериев предполагают, что распределения наблюдений непрерывны, так что наблюдения могут быть упорядочены без совпадений, и ранговые статистики определяются однозначно. Однако на практике наблюдения всегда округляются, и поэтому совпадения будут иногда появляться. Наиболее употребительны следующие два способа преодоления этой трудности. Первый состоит в том, чтобы упорядочить совпавшие наблюдения случайным образом. При втором методе каждому из группы совпавших наблюдений припи-

сывается средний ранг этой группы. Достоинства обоих методов исследованы пока недостаточно.

Непараметрич. оценивание представляет собой раздел непараметрич. статистики, имеющий дело с задачами оценки неизвестных распределений или функционалов от них таких, как квантили, моменты, мода, энтропия, информация по Фишеру и т. д.

Общепринятой оценкой неизвестной функции распределения является эмпирич. функция распределения. Сильная равномерная состоятельность ее как оценки неизвестной функции распределения следует из теоремы Гливенко — Кантелли, а минимаксный характер установлен в [10]. Состоятельное же оценивание неизвестной плотности распределения представляет собой более сложную задачу. Для корректной постановки задачи оценивания необходима дополнительная априорная информация о классе плотностей F, к к-рому принадлежит оцениваемая плотность f. В классич. постановке априорное семейство плотностей задается в параметрич. форме и определяется конечномерным вектором неизвестных параметров. При непараметрич. постановке задача приобретает бесконечномерный характер, и точность оценивания неизвестной плотности существенно зависит (см. [11]) от геометрич. характеристик «массивности» класса F. В качестве последних используются, напр., n-мерный поперечник и n-мерный внутренний радиус класса F.

Наиболее распространенными оценками неизвестной плотности f являются оценки

$$f_n(t) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{t - X_i}{h_n}\right),$$

где X_i — наблюдения, функция K абсолютно интегрируема и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, dx = 1,$$

а последовательность h_n такова, что $h_n \to 0$, $nh_n \to \infty$. В нек-рых случаях используются другие непараметрич. оценки плотности: более простые (гистограмма, полигон частот) или более сложные, напр. проекционные оценки Ченцова. Вопрос о точности приближения этими оценками неизвестной плотности в зависимости от свойств класса F хорошо изучен (см. [11], [12]).

Эмпирич. функцию распределения и непараметрич. оценку плотности можно использовать для оценки функционалов от неизвестных генеральных распределений; для этого достаточно подставить в выражение для оцениваемого функционала вместо неизвестного распределения его оценку. Сама идея и начало ее реализации восходит к работам Р. Мизеса (R. Mises) 30—40-х гг. 20 в. Доказано, что при нек-рых ограничениях на класс оцениваемых функционалов и на непараметрич. класс распределений существует минимаксная граница снизу качества непараметрич. оценок (см. [12]). Непараметрич. оценивание тесно связано с проблемой построения робастных оценок.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [2] Hodges J., Lehmann E., «Ann. Math. Stat.», 1963, v. 34, № 2, p. 598—611; [3] Walsh J. E., Handbook of nonparametric statistics, v. 1—3, Princeton, 1962, 1965, 1968; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [5] Мартынов Г. В., Критерии омега — квадрат, М., 1978; [6] Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер, пер. с англ., М., 1977; [7] Wieand H., «Ann. Stat.», 1976, v. 4, № 5, p. 1003—11; [8] Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев, пер. с англ., М., 1971; [9] Кендэл М., Ранговые корреляции, пер. с англ., М., 1975; [10] Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J., «Ann. Math. Stat.», 1956, v. 27, № 3, p. 642—69; [11] Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; [12] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [13] Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; [14] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [15] Шметтерер Л., Введение в

математическую статистику, пер. с нем., М., 1976; [16] Lehmann E., Nonparametrics: statistical methods based on ranks, S. F.— N. Y., 1975. *Я. Ю. Никитин.*

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ — *статистический критерий* для проверки гипотезы $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против альтернативы $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, когда сама задача статистич. проверки H_0 против H_1 является непараметрической, т. е., по крайней мере, одно из двух параметрич. множеств Θ_0 и Θ_1 не является топологически эквивалентным подмножеству евклидова пространства. Наряду с этим определением широко распространено другое, согласно к-рому статистич. критерий наз. непараметрическим, если статистич. выводы, получаемые с помощью этого критерия, не зависят от распределений вероятностей случайных величин, по результатам наблюдений к-рых проверяют H_0 против H_1. В этом случае вместо термина Н. к. часто употребляют термин «критерий, свободный от распределения». *Колмогорова критерий* является классич. примером Н. к. См. также *Непараметрические методы статистики*, *Колмогорова — Смирнова критерий*.

Лит.: [1] Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, пер. с англ., М., 1968; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, [2 изд.], М., 1968; [3] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З., Асимптотическая теория оценивания, М., 1979; [4] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973. *М. С. Никулин.*

НЕПАСКАЛЕВА ГЕОМЕТРИЯ — геометрия с некоммутативным умножением. Вследствие того, что в аффинной геометрии свойство коммутативности умножения эквивалентно *Паскаля теореме*, то непаскалевой обычно наз. геометрию, в к-рой не имеет места предложение: пусть на каждой из двух пересекающихся прямых даны три точки A, B, C и соответственно A_1, B_1, C_1, отличные от точки пересечения данных прямых; если CB_1 параллельна BC_1 и CA_1 параллельна AC_1, то BA_1 будет параллельна AB_1; эту теорему иногда наз. теоремой Паппа, она является частным случаем теоремы Паппа — Паскаля из теории конич. сечений.

Возможность построения Н. г. вытекает из того, что указанная теорема Паскаля не является следствием аксиом инцидентности, порядка, параллельности при условии исключения метрич. аксиом в системе аксиом Гильберта. С другой стороны, существование Н. г. связано также с возможностью построения геометрии над некоммутативным телом, то есть Н. г. является в то же время и *неархимедовой геометрией*.

Значение Н. г. определяется ролью теоремы Паскаля в исследованиях, связанных с установлением независимости системы аксиом, логич. связи между предложениями.

Лит.: [1] Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Bieberbach L., Einleitung in die höhere Geometrie, Lpz.— B., 1933; [3] Скорняков Л. А., «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 6, с. 112—54. *Л. А. Сидоров.*

НЕПЕРОВО ЧИСЛО — см. *e* (число).

НЕПОДВИЖНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — общая особая точка z_0 всех решений дифференциального уравнения $F(z, w, w') = 0$ (F — аналитич. функция), рассматриваемых как функции $w(z)$ комплексного переменного z, начальные условия к-рых пробегают нек-рую область в пространстве (z, w).

Лит.: [1] Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950. *Ю. С. Ильяшенко.*

НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА — 1) Н. т. отображения F множества X — такая точка $x \in X$, что $F(x) = x$. Доказательства существования Н. т. и методы нахождения Н. т.— важные задачи математики, т. к. решение всякого уравнения $f(x) = 0$ путем преобразования его к виду $x \pm f(x) = x$ сводится к нахождению Н. т. отображения $F = I \pm f$, где I — тождественный оператор. В зависимости от того, какой структурой наделе-

но множество X и каковы свойства отображения F, возникают те или иные **принципы неподвижной точки**. Наибольший интерес представляют случаи, когда X — топологич. пространство и F — непрерывный в том или ином смысле оператор.

Простейшим из таких принципов является **принцип сжимающих отображений**. Пусть X — полное метрич. пространство и оператор $F: X \to X$ таков, что

$$\rho(F(x),\ F(y)) \leqslant q\rho(x, y),\ 0<q<1. \tag{1}$$

Тогда оператор F имеет в точности одну Н. т. $\overline{x}$, к-рая может быть получена как предел последовательных приближений $x_n = F(x_{n-1})$, $n=1, 2, \ldots$, где $x_0 \in X$ произвольно. Этим принципом не только устанавливается существование Н. т., но и указывается способ ее нахождения, причем довольно просто оценивается быстрота сходимости последовательности $\{x_n\}$ к $\overline{x}$. В общем случае условие (1) нельзя заменить условием

$$\rho(F(x),\ F(y)) < \rho(x, y), \tag{2}$$

но если X компактно, то условие (2) по-прежнему обеспечивает наличие у оператора F единственной Н. т.

Более общим является **принцип обобщенного сжатия**. Пусть, как и выше, X — полное метрич. пространство, $F: X \to X$ и

$$\rho(F(x),\ F(y)) \leqslant q(\alpha,\ \beta,\ )\rho(x, y) \tag{3}$$

при $\alpha \leqslant \rho(x, y) \leqslant \beta$, где $q(\alpha, \beta) < 1$ для $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$. Тогда F имеет единственную Н. т. Если X — банахово пространство, то условие (1) есть не что иное, как условие Липшица для оператора F с константой, меньшей единицы. Принцип сжимающих отображений широко используется для доказательства существования и единственности решений алгебраических, дифференциальных, интегральных и других уравнений и для приближенного нахождения решений этих уравнений.

Существуют другие условия топологич. характера, обеспечивающие существование Н. т. у оператора F. Наиболее известным из них является **принцип Шаудера**. Пусть X — банахово пространство и F — вполне непрерывный оператор, отображающий ограниченное выпуклое замкнутое множество $C \subset X$ на свою часть. Тогда F имеет в C хотя бы одну Н. т. Однако в этом случае вопрос о числе Н. т. остается открытым, и нет указаний о способе их нахождения.

Пример (теорема Пеано). Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных в области $|t-t_0| \leqslant a$, $|x-x_0| \leqslant b$ и $\beta = \max |f(t,x)|$ в этой области. Если $h = \min\{a, b/\beta\}$, то на отрезке $[t_0-h, t_0+h]$ существует хотя бы одно решение уравнения

$$x'(t) = f(t, x) \tag{4}$$

такое, что

$$x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Уравнение (4) вместе с условием (5) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\ x(\tau))\, d\tau.$$

Оператор

$$F(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\ x(\tau))\, d\tau$$

в условиях теоремы отображает шар $\|x-x_0\| \leqslant b$ пространства $C[t_0-h, t_0+h]$ в себя и вполне непрерывен на этом шаре. Поэтому в силу принципа Шаудера существует Н. т. оператора F, к-рая и является решением задачи Коши (см. [4], [5]).

Обобщением принципа Шаудера является **принцип Тихонова**. Пусть X — отделимое локально вы-

пуклое пространство и F — непрерывный оператор, отображающий выпуклое компактное множество $C \subset X$ в себя. Тогда F имеет на C хотя бы одну Н. т. Существуют и другие обобщения принципа Шаудера, в том числе на многозначные отображения, однако во всех случаях необходимо предполагать выпуклость множества C, без чего теорема Шаудера и ее обобщения становятся неверными. Возможно комбинирование принципа Шаудера и принципа сжимающих отображений. Пусть оператор F, преобразующий ограниченное замкнутое выпуклое множество C банахова пространства X в себя, можно представить в виде $F=F_1+F_2$, где F_1 — вполне непрерывный и F_2 — сжимающий операторы. Тогда F имеет в C хотя бы одну Н. т.

Принципы шаудеровского типа могут быть следующим образом распространены на некомпактные операторы. Пусть M — ограниченное множество полного метрич. пространства X. Мерой некомпактности $\chi(M)$ этого множества наз. точная нижняя граница значений тех $\varepsilon>0$, при к-рых существует конечная ε-сеть для M. Для компактных множеств $\chi(M)=0$. Оператор $F: X \to X$ наз. уплотняющим, если $\chi(F(M))<\chi(M)$ для любого некомпактного ограниченного множества $M \subset X$. Пусть уплотняющий оператор F преобразует ограниченное выпуклое замкнутое множество $C \subset X$ в себя. Тогда F имеет в C хотя бы одну Н. т. В банаховых пространствах можно вводить и другие меры некомпактности, варьируя к-рые, можно получать разные варианты теоремы, позволяющие доказывать существование решений различных дифференциальных, интегральных и иных уравнений с не вполне непрерывными операторами.

Привлечение более тонких топологич. понятий позволяет сформулировать более сильные признаки существования Н. т. Пусть на границе ∂M ограниченной области M банахова пространства X задано невырожденное векторное поле Φ, т. е. каждой точке $x \in \partial M$ поставлен в соответствие ненулевой вектор $\Phi(x)$. Такому полю при выполнении нек-рых условий можно соотнести целое число, наз. вращением $\gamma(\Phi, \partial M)$ поля Φ на ∂M. Пусть сначала X конечномерно и Φ непрерывно на ∂M. Тогда $\gamma(\Phi, \partial M)$ определяется как топологич. *степень отображения* $\psi(x)=\Phi(x)/\|\Phi(x)\|$ множества ∂M на единичную сферу $\|x\|=1$. Пусть теперь X — банахово бесконечномерное пространство и $\Phi(x)=x-F(x)$, где F — вполне непрерывный на $\overline{M}$ оператор. Такие поля наз. вполне непрерывными.

Пусть конечномерное подпространство $X_n \subset X$ достаточно хорошо аппроксимирует $F(\overline{M})$ и P_n — оператор проектирования $F(\overline{M})$ на X_n. Если $\|P_nF(x)-F(x)\|$ достаточно мало для $x \in \partial M$, то поле $\Phi_n=I\Phi-P_nF$ также невырождено на $\partial M \cap X_n$ и его вращение γ_n не зависит от выбора аппроксимирующих подпространств X_n и оператора P_n. Это число γ_n наз. вращением вполне непрерывного векторного поля Φ на границе ∂M и обозначается $\gamma(\Phi, \partial M)$. Важным свойством вращения является то, что оно не меняется при гомотопных преобразованиях поля Φ.

Принцип Лере — Шаудера. Пусть на замыкании $\overline{M}$ ограниченной области M банахова пространства X задано вполне непрерывное векторное поле Φ, невырожденное на ∂M, и пусть $\gamma(\Phi, \partial M) \neq 0$. Тогда Φ обращается в нуль по крайней мере в одной точке $x \in M$, т. е. оператор F имеет в M хотя бы одну Н. т. Инвариантность вращения при гомотопных преобразованиях позволяет вычислять вращение следующим образом. По заданному полю $\Phi(x)$ строится континуум полей $\Phi(x, \lambda)$, $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$, так, что все эти поля гомотопны друг другу и $\Phi(x, \lambda_0)=\Phi(x)$ при нек-ром $\lambda_0 \in [\alpha, \beta]$. Если при другом $\lambda \in [\alpha, \beta]$ вращение поля

$\Phi(x, \lambda)$ легко вычисляется и равно k, то также $\gamma(\Phi, \partial M) = k$. Этим приемом, использовавшим степень отображения для установления наличия Н. т. у вполне непрерывных операторов, получено доказательство существования решений ряда довольно сложных дифференциальных уравнений с частными производными высших порядков.

Усиливая требования, предъявляемые к пространству, можно ослабить ограничения, налагаемые на оператор. Напр., оператор F наз. нерастягивающим, если $\rho(F(x), F(y)) \leqslant \rho(x, y)$. Пусть банахово пространство равномерно выпукло (напр., гильбертово) и F — нерастягивающий оператор, преобразующий ограниченное замкнутое выпуклое множество $C \subset X$ в себя. Тогда F имеет на C хотя бы одну Н. т.

Все предыдущие принципы Н. т. предполагали непрерывность оператора F. Если наделить X структурой частично упорядоченного множества, то в нек-рых случаях требование непрерывности можно опустить.

Принцип Биркгофа — Тарского. Пусть X — полная решетка и F — изотонный оператор из X в X. Тогда F имеет по крайней мере одну Н. т. Имеет место следующий вариант этого принципа. Пусть X — условно полная решетка, т. е. всякое ограниченное подмножество множества X имеет в X точную верхнюю и нижнюю границы. Если F — изотонный оператор, отображающий порядковый интервал $[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\} \subset X$ в себя, то F имеет на $[a, b]$ по крайней мере одну Н. т.

Комбинирование топологич. условий с порядковыми приводит к новым принципам Н. т. Напр., пусть X — частично упорядоченное банахово пространство и F — непрерывный изотонный оператор, отображающий порядковый интервал $[a, b]$ в себя. Если полуупорядочивание пространства X правильное, т. е. всякая монотонно возрастающая порядково ограниченная последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится по норме пространства X, то оператор F имеет на $[a, b]$ хотя бы одну Н. т. При этом условия теоремы не требуют решеточной упорядоченности пространства X, т. е. не для всяких двух элементов x, $y \in X$ должен в X существовать их sup и inf. Наконец, Н. т. линейного оператора F есть собственный элемент этого оператора, соответствующий собственному значению, равному единице.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956; [3] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975; [4] Немыцкий В. В., «Успехи матем. наук», 1936, в. 1, с. 141—74; [5] Лерэй Ж., Шаудер Ю., там же, 1946, т. 1, в. 3—4, с. 71—95; [5] Садовский Б. Н., там же, 1972, т. 27, в. 1, с. 81—146.

В. И. Соболев.

2) Н. т. дробно-линейного преобразования A замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ — точка $\rho \in \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющая уравнению

$$\rho = \frac{a\rho + b}{c\rho + d},$$

где

$$A : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad z \longrightarrow w = A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

есть дробно-линейное преобразование, a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc \neq 0$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Если $A \neq I$ (I — тождественное преобразование $w = z$), то A имеет одну или две Н. т. С помощью Н. т. можно классифицировать *дробно-линейные отображения* (I из рассмотрения исключается).

О. М. Фоменко.

3) Н. т. системы обыкновенных дифференциальных уравнений или динамической системы — см. *Равновесия положение.*

НЕПОЛНАЯ БЕТА-ФУНКЦИЯ — функция, определяемая формулой

$$I_x(a, b) = \frac{1}{\mathrm{B}(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1}\, dt,$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ a > 0,\ b > 0,$$

где

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1}\, dt = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Если a — целое, то

$$1 - I_x(a, b) = \frac{(1-x)^b}{\mathrm{B}(a, b)} \sum_{i=0}^{a-1} (-1)^i C_{a-1}^i \frac{(1-x)^i}{b+i} =$$

$$= (1-x)^{a+b-1} \sum_{i=0}^{a-1} C_{a+b-1}^i \left(\frac{x}{1-x}\right)^i.$$

Представление в виде ряда:

$$I_x(a, b) = \frac{x^a (1-x)^b}{a\mathrm{B}(a, b)} \left\{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{B}(a+1,\ n+1)}{\mathrm{B}(a+b,\ n+1)} x^{n+1}\right\},$$

$$0 < x < 1;$$

в виде непрерывной дроби:

$$I_x(a, b) = \frac{x^a (1-x)^b}{a\mathrm{B}(a, b)} \left\{\frac{1}{1+} \frac{d_1}{1+} \frac{d_2}{1+} \cdots\right\},$$

где

$$d_{2m+1} = -\frac{(a+m)(a+b+m)x}{(a+2m)(a+2m+1)}, \quad d_{2m} = \frac{m(b-m)x}{(a+2m-1)(a+2m)}.$$

Асимптотич. представление при больших a и b

$$I_x(a, b) = \Phi\left\{3\, \frac{(bx)^{1/3}\left(1 - \frac{1}{9b}\right) - [a(1-x)]^{1/3}\left(1 - \frac{1}{9a}\right)}{\sqrt{[a(1-x)]^{2/3}/a + (bx)^{2/3}/b}}\right\} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\min(a, b)}\right),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Асимптотич. представление при больших b и ограниченных a:

$$I_x(a, b) = I(x(2b+a-1)/(2-x),\ a) + O(b^{-2}),$$

где

$$I(z, a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^z e^{-t} t^{a-1}\, dt.$$

Связь с гипергеометрич. функцией:

$$I_x(a, b) = \frac{x^a}{a\mathrm{B}(a, b)} F(a,\ 1-b;\ a+1;\ x).$$

Рекуррентные соотношения:

$$I_x(a, b) = 1 - I_{1-x}(b, a),$$

$$I_x(a, b) = xI_x(a-1, b) + (1-x) I_x(a, b-1),$$

$$I_x(a, a) = \frac{1}{2} I_{1-y}\left(a, \frac{1}{2}\right),\ y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,\ 0 < x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Лит.: [1] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979; [2] Пирсон К., Таблицы неполной бета-функции, пер. с англ., М., 1974. *В. И. Пагурова.*

НЕПОЛНАЯ ГАММА-ФУНКЦИЯ — функция, определяемая формулой

$$I(x, m) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^x e^{-t} t^{m-1}\, dt, \quad x \geqslant 0,\ m > 0,$$

где

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{m-1}\, dt$$ — гамма-функция.

Если $n \geqslant 0$ — целое, то

$$I(x, n+1) = 1 - e^{-x} \sum_{m=0}^{n} \frac{x^m}{m!}.$$

Представление в виде ряда:

$$I(x,\ m)=\frac{e^{-x}x^m}{\Gamma(m+1)}\left\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(m+1)\ldots(m+k)}\right\};$$

в виде непрерывной дроби:

$$I(x,\ m)=1-\frac{x^m e^{-x}}{\Gamma(m)}\left\{\frac{1}{x+}\,\frac{1-m}{1+}\,\frac{1}{x+}\,\frac{2-m}{1+}\,\frac{2}{x+}\ldots\right\}.$$

Асимптотич. представление при больших x:

$$I(x,\ m)=$$

$$=1-\frac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)}\left\{\sum_{i=0}^{M-1}\frac{(-1)^i\,\Gamma(1-m+i)}{x^i\Gamma(1-m)}+O(x^{-M})\right\}.$$

Асимптотич. представление при больших m:

$$I(x,\ m)=\Phi\left(2\sqrt{x}-\sqrt{m-1}\right)+O\left(m^{-1/2}\right),$$

$$I(x,\ m)=\Phi\left[3\sqrt{m}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{m}}-1+\frac{1}{9m}\right)\right]+O(m^{-1}),$$

где

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}\,dt.$$

Связь с вырожденной гипергеометрич. функцией:

$$I(x,\ m)=\frac{x^m}{\Gamma(m+1)}\,{}_1F_1(m,\ m+1,\ -x).$$

Связь с многочленами Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$:

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}I(x,\ n+\alpha)=(-1)^n n!\,\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)}\,x^{\alpha-1}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x).$$

Рекуррентное соотношение

$$mI(x,\ m+1)+xI(x,\ m-1)=(x+m)\,I(x,\ m).$$

Лит.: [1] Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979; [2] Пагурова В. И., Таблицы неполной гамма-функции, М., 1963.

В. И. Пагурова.

НЕПРАВИЛЬНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — неотрицательные функции $\sigma(A)$, равные нулю в том и только в том случае, если система

$$\dot{x}=A(t)\,x, \qquad (*)$$

где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение $\mathbb{R}^+\to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$ (или $\mathbb{R}^+\to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n,\ \mathbb{C}^n)$),— *правильная линейная система.* Наиболее известны (и наиболее просто определяются) следующие Н. к.

1) Коэффициент неправильности Ляпунова [1]

$$\sigma_{\Lambda}(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A)-\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{tr}\,A(\tau)\,d\tau,$$

где $\lambda_i(A)$ — *Ляпунова характеристические показатели* системы (*), занумерованные в порядке невозрастания, а $\mathrm{tr}\,A(t)$ — след отображения $A(t)$.

2) Коэффициент неправильности Перрона [2]

$$\sigma_{\Pi}(A)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\lambda_i(A)+\lambda_{n+1-i}(-A^*)\right),$$

где $A^*(t)$ — отображение, сопряженное к $A(t)$.

Если система (*) есть система уравнений в вариациях гамильтоновой системы

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}&=\frac{\partial H}{\partial p},\qquad p\in\mathbb{R}^k,\\ \dot{p}&=-\frac{\partial H}{\partial q},\qquad q\in\mathbb{R}^k,\end{aligned}\right\}$$

то $n=2k$ и

$$\lambda_i(-A^*)=\lambda_i(A),\quad i=1,\ \ldots,\ n;$$

поэтому для правильности системы уравнений в вариа-

циях гамильтоновой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda_i(A) = -\lambda_{n+1-i}(A), \quad i = 1, \ldots, k$$

(теорема Персидского)

Имеются также другие Н. к. (см. [4] — [6]).

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956; [2] Perron O., «Math. Z.», 1929/1930, Bd 31, S. 748—66; [3] Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, 2 изд., М., 1966, § 79; [4] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова..., М., 1966; [5] Изобов Н. А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., 1974, с. 71—146; [6] Прохорова Р. А., «Дифференц. уравнения», 1976, т. 12, № 3, с. 475—83; № 4, с. 766—69.

В. М. Миллионщиков.

НЕПРЕДИКАТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ — определение, осмысленность к-рого предполагает наличие определяемого объекта.

Образование множества всех множеств непредикативно. Определение наименьшей верхней грани произвольного множества действительных чисел также непредикативно. Любое Н. о. можно рассматривать как свойство, выделяющее нужный объект из нек-рой заданной совокупности. Так как при этом остается проблема существования выделяемого объекта, то вместо Н. о. можно говорить о непредикативных свойствах. Если фиксирован язык, на к-ром выражаются свойства, то понятие непредикативности уточняется следующим образом. Свойство (точнее, языковое выражение, выражающее это свойство) наз. *непредикативным*, если оно содержит связанную переменную, в область изменения к-рой попадает определяемый объект. Свойство наз. *предикативным*, если оно не содержит таких связанных переменных.

Понятие непредикативности возникло в связи с обнаружением теоретико-множественных парадоксов, а сам термин принадлежит А. Пуанкаре (H. Poincaré, 1906), впервые выдвинувшему возражения против Н. о.

Обнаруженные в начале 20 в. *антиномии* содержат непредикативность. Напр., в парадоксе Рассела множество R всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента, определяется формулой:

$$\forall x\,(x \in R \iff \neg\, x \in x),$$

где x — переменная, пробегающая все множества. В этой формуле R является возможным значением переменной x. В математике Н. о. широко распространены. Напр., объединение S всех множеств натурального ряда, удовлетворяющих условию φ, задается формулой

$$\forall n\,(n \in S \iff \exists M\,(\varphi(M) \,\&\, n \in M)), \qquad (*)$$

где n — переменная по натуральному ряду, M — переменная по подмножествам натурального ряда. В приведенной формуле S является возможным значением связанной переменной M. Непредикативный способ задания объекта часто удается заменить предикативным. Напр., если в качестве свойства $\varphi(M)$ взять формулу $M = A \vee M = B$, где A и B — некоторые фиксированные множества, то формула $(*)$ эквивалентна предикативной формуле

$$\forall n\,(n \in S \iff n \in A \vee n \in B),$$

выражающей, что S есть объединение множеств A и B.

Б. Рассел (B. Russell) предпринял попытку построения математики на предикативной основе. В его разветвленной теории типов множества выстраиваются в иерархию, в соответствии с определяющими их выражениями. Напр., множество S из формулы $(*)$ должно относиться к более высокому уровню в иерархии, чем уровень переменной M и уровни переменных, содержащихся в формуле φ. На предикативной основе не удается построить анализ в полном объеме. Приходится снабжать формулировки оговорками об уровнях рассматриваемых объектов. Б. Рассел был вынужден ввес-

сти аксиому сводимости, стирающую фактически различие между уровнями. Однако предикативная теория при наличии арифметич. аксиом позволяет строить анализ, достаточный для многих приложений (см. [4]).

Феномен непредикативности существенно основан на абсолютном характере понимания слова «все» (все без каких-либо ограничений, решительно все). Распределение множеств по уровням представляет собой попытку ограничить этот абсолютный характер. Наиболее радикальная ревизия способа мышления, основанного на абсолютном понимании понятия «все», предпринимается интуиционистским и конструктивным направлениями в математике.

Лит.: [1] Чёрч А., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1960; [2] Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [3] Гильберт Д., Аккерман В., Основы теоретической логики, пер. с нем., М., 1947; [4] Takeuti G., Two applications of logic to mathematics, Tokyo, 1978. *В. Н. Гришин.*

НЕПРЕРЫВНАЯ ГРУППА — в работах основоположников теории групп Ли (С. Ли; S. Lie; А. Пуанкаре, H. Poincaré; Э. Картан, E. Cartan; Г. Вейль, H. Weyl, и др.)—группа гладких или аналитических локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, гладко или аналитически зависящих от параметров. В случае конечного числа числовых параметров Н. г. называлась конечной, что соответствует современному понятию конечномерной *Ли группы*. При наличии функциональных параметров говорили о бесконечной Н. г., что соответствует современному понятию *псевдогруппы* преобразований. В настоящее время (1982) термин «Н. г.» часто обозначает *топологическую группу* [2].

Лит.: [1] Lie S., Scheffers G., Vorlesungen über continuierliche Gruppen..., Lpz., 1893; [2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [3] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976. *А. Л. Онищик.*

НЕПРЕРЫВНАЯ ДРОБЬ — то же, что *цепная дробь*, т. е. выражение вида

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{\ddots}{\ddots+\cfrac{b_n}{a_n+\ddots}}}$$

где

$$\{a_n\}_{n=0}^{\omega},\quad \{b_n\}_{n=1}^{\omega}$$

— конечные или бесконечные последовательности комплексных чисел. Для Н. д. употребляется обозначение

$$a_0+\frac{b_1}{|\,a_1}+\ldots+\frac{b_n}{|\,a_n}+\ldots$$

Обычно предполагается, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таковы, что для всех n, $0\leqslant n\leqslant\omega+1$,

$$Q_n=a_nQ_{n-1}+b_nQ_{n-2}\neq 0$$

(Q_n определяются рекуррентно, причем $Q_{-2}=1$, $Q_{-1}=0$). *О. А. Иванова.*

НЕПРЕРЫВНАЯ СЕРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ, основная серия представлений,— семейство неприводимых унитарных представлений локально компактной группы G, входящих в разложение *регулярного представления* группы G, но не принадлежащих *дискретной серии* представлений этой группы. Если G — действительная полупростая группа Ли, $G=KAN$ — ее *Ивасавы разложение*, M — централизатор группы A в K, то основной невырожденной Н. с. п. группы G наз. семейство непрерывных унитарных представлений группы G, индуцированных конечномерными неприводимыми унитарными представлениями группы $B=MAN$, тривиальными на N.

Дополнительной (соответственно вырожденной) Н. с. п. такой группы G наз. семейство неприводимых унитарных представлений группы G, входящих в *дополнительную серию* представлений (соответственно в *вырожденную серию представлений*) группы G и не являющихся изолированными точками этой серии (как подмножества двойственного пространства группы G). Аналитич. продолжение основной невырожденной Н. с. п. есть семейство (вообще говоря, неунитарных) представлений группы G, индуцированных всевозможными конечномерными неприводимыми представлениями группы B, тривиальными на N; это семейство играет решающую роль в теории представлений действительных полупростых групп Ли и гармонич. анализе на этих группах; в частности, любое вполне неприводимое представление группы G в гильбертовом пространстве инфинитезимально эквивалентно подпредставлению нек-рого факторпредставления одного из представлений аналитич. продолжения основной невырожденной Н. с. п. См. также *Бесконечномерное представление* групп Ли.

Лит.: [1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления классических групп, М.— Л., 1950; [2] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [3] Warner G., Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, v. 1—2, B.— [a. o.], 1972. *А. И. Штерн.*

НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ — одно из основных понятий математического анализа.

Пусть действительная функция f определена на нек-ром подмножестве E действительных чисел $\mathbb{R}$, т. е. $f: E \to \mathbb{R}$. Функция f наз. непрерывной в точке $x_0 \in E$ (или, подробнее, непрерывной в точке x_0 по множеству E), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Если обозначить

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

и

$$V(f(x_0), \varepsilon) = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

соответственно δ- и ε-окрестности точек x_0 и $f(x_0)$, то данное определение можно перефразировать следующим образом: функция f наз. непрерывной в точке $x_0 \in E$, если для любой ε-окрестности $V = V(f(x_0), \varepsilon)$ точки $f(x_0)$ существует такая δ-окрестность $U = U(x_0, \delta)$ точки x_0, что $f(U \cap E) \subset V$.

Используя понятие предела, можно сказать, что функция f непрерывна в точке x_0, если в этой точке существует ее предел по множеству E и этот предел равен $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in E} f(x) = f(x_0).$$

Это равносильно тому, что

$$\lim_{\Delta x \to 0,\ x \in E} \Delta y = 0,$$

где $\Delta x = x - x_0$, $x \in E$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, т. е. бесконечно малому приращению аргумента в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции.

В терминах предела последовательности определение Н. ф. в точке x_0: функция f непрерывна в точке x_0, если для любой последовательности точек $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, имеет место

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Все приведенные определения Н. ф. в точке эквивалентны между собой.

Если функция f непрерывна в точке x_0 по множеству $E \cap \{x : x \geqslant x_0\}$ (соответственно по множеству $E \cap \{x : x \leqslant x_0\}$), то функция f наз. непрерывной справа (слева) в точке x_0.

Все основные *элементарные функции* являются непрерывными во всех точках их областей определения. Важным свойством Н. ф. является замкнутость класса непрерывных функций относительно арифметич. операций и операции композиции функций. Более точно, если действительные функции $f : E \to \mathbb{R}$ и $g : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, непрерывны в точке $x_0 \in E$, то их сумма $f+g$ и произведение fg, а при $g(x_0) \neq 0$ и частное f/g (заведомо определенное в пересечении нек-рой окрестности точки x_0 с множеством E) непрерывны в точке x_0. Если, как и выше, функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in E$, а функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, такова, что $\varphi(D) \subset E$ и, следовательно, имеет смысл композиция $f \circ \varphi$, причем существует такое $t_0 \in D$, что $\varphi(t_0) = x_0$ и функция φ непрерывна в точке t_0, то композиция $f \circ \varphi$ также непрерывна в точке t_0. Таким образом, в этом случае

$$\lim_{t \to t_0} f[\varphi(t)] = f[\lim_{t \to t_0} \varphi(t)] = f[\varphi(t_0)],$$

т. е. в этом смысле операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия Н. ф. Из перечисленных свойств Н. ф. следует, что не только основные, но и любые элементарные функции непрерывны в области их определения. Сохраняется свойство непрерывности и при равномерном предельном переходе: если последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходится на множестве E и каждая функция f_n непрерывна в точке $x_0 \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, то и предельная функция

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

непрерывна в этой точке.

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в каждой точке множества E, то она наз. непрерывной на множестве E. Если $x_0 \in E' \subset E$ и функция f непрерывна в точке x_0, то сужение функции f на множестве E' также непрерывно при $x = x_0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Напр., сужение *Дирихле функции* как на множестве рациональных, так и иррациональных точек непрерывно, а сама функция Дирихле разрывна во всех точках.

Важный класс действительных Н. ф. одного переменного образуют функции, непрерывные на отрезках. Они обладают следующими свойствами.

Первая теорема Вейерштрасса: функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.

Вторая теорема Вейерштрасса: функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Теорема Коши о промежуточных значениях: функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем любое значение, заключенное между значениями, к-рые она принимает на концах отрезка.

Теорема об обратной функции: если функция непрерывна и строго монотонна на отрезке, то у нее существует однозначная обратная функция, к-рая также определена на нек-ром отрезке, строго монотонна и непрерывна на нем.

Теорема Кантора о равномерной непрерывности: функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Всякая функция, непрерывная на отрезке, может быть равномерно сколь угодно точно приближена алгебраич. многочленом, а всякая функция f, непрерывная на отрезке $[0, 2\pi]$ и такая, что $f(0) = f(2\pi)$, может быть равномерно сколь угодно точно приближена тригонометрич. полиномами (см. *Вейерштрасса теорема* о приближении функций).

Понятие Н. ф. обобщается на более общие виды функций, прежде всего на функции многих переменных. Сформулированное выше определение Н. ф. формально сохраняется, если под E понимать подмножество n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, под $|x-x_0|$ — расстояние в этом пространстве между точками $x\in E$ и $x_0\in E$, под $U(x_0, \delta)$ — δ-окрестность в $\mathbb{R}^n$ точки x_0, а под

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

понимать предел последовательности точек в пространстве $\mathbb{R}^n$. Функция $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$, многих переменных $x_1, \ldots, x_n$, непрерывная в точке $x_0=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\in E$, наз. также непрерывной в этой точке по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$, в отличие от функций многих переменных, непрерывных по отдельным переменным. Функция $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$, наз. непрерывной в точке x_0, напр., по переменной x_1, если в точке $x_1^{(0)}$ непрерывно сужение функции f на множестве

$$E\cap\{x=(x_1, \ldots, x_n): x_2=x_2^{(0)}, \ldots, x_n=x_n^{(0)}\},$$

т. е. в точке $x_1^{(0)}$ непрерывна функция $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ одного переменного x_1. Функция $f: E\to\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, может быть непрерывной в точке x по каждому переменному $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но может не быть непрерывной в этой точке по совокупности переменных.

Определение Н. ф. непосредственно переносится на комплекснозначные функции. Следует лишь в данном выше определении под $|f(x)-f(x_0)|$ понимать абсолютную величину комплексного числа $f(x)-f(x_0)$, а под

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

— предел в комплексной плоскости.

Все эти определения являются частным случаем более общего понятия Н. ф. f, областью определения которой является некоторое топологическое пространство X и значения которой принадлежат некоторому топологическому пространству Y (см. *Непрерывное отображение*).

На непрерывные отображения топологич. пространств переносятся многие свойства действительных Н. ф. одного переменного. Обобщение упомянутых выше теорем Вейерштрасса: непрерывный образ бикомпактного топологич. пространства в хаусдорфовом топологич. пространстве является бикомпактом. Обобщение теоремы Коши о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции: непрерывный образ в топологич. пространстве связного топологич. пространства также связен. Обобщение теоремы о функции, обратной к непрерывной строго монотонной функции: взаимно однозначное непрерывное отображение бикомпакта на топологич. хаусдорфово пространство есть гомеоморфизм. Обобщение теоремы о пределе равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций: если $f_n: X\to Y$ — равномерно сходящаяся последовательность непрерывных в точке $x_0\in X$ отображений топологич. пространства X в метрич. пространство Y, то предельное отображение $f=\lim_{n\to\infty} f_n$ также непрерывно в точке x_0.

Обобщением теоремы Вейерштрасса о приближении функций непрерывных на отрезке многочленами является *Вейерштрасса — Стоуна теорема*.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [4] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕПРЕРЫВНОЕ МНОЖЕСТВО — (линейно) *упорядоченное множество* X, все собственные сечения к-рого являются дедекиндовыми сечениями, т. е. при любом разбиении X на два непустых подмножества X' и X'' таком, что каждый элемент из X' предшествует каждому элементу из X'', либо в X' есть наибольший элемент, но в X'' нет наименьшего элемента, либо в X' нет наибольшего элемента, но в X'' есть наименьший элемент. *М. И. Войцеховский.*

НЕПРЕРЫВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $f : X \to Y$ топологич. пространства X в топологич. пространство Y такое, что для всякой точки $x_0 \in X$ и для всякой окрестности $V = V(f(x_0))$ ее образа $f(x_0)$ существует такая окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0, что $f(U) \subset V$. Это определение является перефразировкой окрестностного определения непрерывности функций действительного переменного (см. *Непрерывная функция*). Существует много эквивалентных определений непрерывности. Так, для непрерывности отображения $f : X \to Y$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:

а) прообраз $f^{-1}G$ всякого открытого в Y множества G открыт в X;

б) прообраз $f^{-1}F$ всякого замкнутого в Y множества F замкнут в X;

в) $f[A] \subset [fA]$ для всякого множества $A \subset X$ (образ замыкания содержится в замыкании образа).

Понятие непрерывной функции, корректно сформулированное еще Б. Больцано (B. Bolzano) и О. Коши (A. Cauchy), сыграло большую роль в математике 19 в. Функция Вейерштрасса, не дифференцируемая ни в одной точке, «канторовская лестница», кривая Пеано указали на необходимость рассмотрения более частных случаев непрерывности. Необходимость выделения специальных классов Н. о. еще более возросла, когда стали рассматривать Н. о. более общих объектов — топологич. пространств. Можно отметить следующие важнейшие типы Н. о.: топологич. отображения или *гомеоморфизмы*, *совершенные отображения*, *замкнутые отображения*, *открытые отображения*, *факторные отображения*.

Если даны два Н. о. $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, то их композиция $g \circ f : X \to Z$, т. е. сквозное отображение $X \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} Z$, непрерывна. Очевидно непрерывно и всякое тождественное отображение $I_X : X \to X$. Поэтому топологич. пространства и Н. о. образуют категорию.

Одним из методов топологии является метод взаимной классификации пространств и отображений. Его сущность состоит в следующем: выделяются три основные, тесно связанные между собой задачи. 1) В каком случае каждое пространство нек-рого фиксированного класса $\mathcal{A}$ может быть отображено на нек-рое пространство класса $\mathcal{B}$ посредством Н. о., принадлежащего классу $\mathcal{L}$? 2) Какими внутренними свойствами характеризуются пространства, принадлежащие классам MC, являющимся образами пространств из класса C при Н. о. из класса M? 3) Пусть $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — обозначение множества Н. о., областью определения к-рых служат пространства из класса $\mathcal{A}$, а областью значений — пространства из класса $\mathcal{B}$, и $\mathcal{L}$ — нек-рый другой класс отображений. Каковы свойства отображений из класса $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cap \mathcal{L}$?

Эти общие формулировки охватывают, в частности, следующий вопрос: какие топологич. свойства сохраняются теми или иными отображениями при переходе от пространства к его образу или прообразу. 1) Всякое n-мерное в смысле $\dim$ пространство может быть существенно отображено (см. *Существенное отображение*) на n-мерный куб. 2) Точечно-счетная база сохраняется при совершенных (даже при бифакторных) отображениях. 3) Всякое замкнутое отображение f из класса

Hom $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, где $\mathcal{A}$ — класс n-мерных пространств со счетной базой, $\mathcal{B}$ — класс нульмерных пространств со счетной базой, по крайней мере $(n+1)$-кратно.

Первые конкретные задачи этого рода были решены более полувека назад. Таковы, напр., представление произвольного компакта в виде непрерывного образа канторова совершенного множества (теорема Александрова); характеристика метрич. пространств со счетной базой как открытых непрерывных образов подпространств пространства иррациональных чисел (теорема Хаусдорфа); описание локально связных континуумов как непрерывных образов отрезка. Решение этих задач не только позволило ответить на вопросы о взаимоотношениях между различными известными ранее классами пространств, но и вызвало появление новых интересных классов пространств. Таковы, напр., диадические бикомпакты, паракомпактные p-пространства, совершенно n-мерные пространства, псевдокомпактные пространства.

Понятие действительной непрерывной функции, т. е. Н. о. топологич. пространства в $\mathbb{R}$, лежащее в основании теории функций, играет большую роль и в общей топологии. Здесь прежде всего стоит отметить *Урысона лемму*, теорему Брауэра — Урысона о продолжении непрерывных функций с замкнутых подмножеств нормальных пространств, определение А. Н. Тихоновым *вполне регулярных пространств*, *Вейерштрасса — Стоуна теорему*. Эти и другие исследования привели к созданию теории колец непрерывных функций, методы к-рой оказались достаточно плодотворными в общей топологии.

Существенную часть теории размерности составляет изучение поведения размерностных характеристик пространств при переходе к образу или прообразу относительно отображений тех или иных классов. Большую роль здесь играют ε-сдвиги, ε-отображения и ω-отображения, существенные отображения, конечнократные отображения, счетнократные отображения, нульмерные отображения, n-мерные отображения и др. При этом метод Н. о. приводит к взаимному обогащению и проникновению друг в друга таких совершенно различных по своему происхождению областей общей топологии, как имеющая наглядно-геометрич. смысл теория размерности и абстрактная по характеру теория кардинальнозначных инвариантов.

Одной из характеристик размерности является возможность продолжения с замкнутого подмножества Н. о. в n-мерную сферу. Эта теорема является одним из вариантов теоремы о продолжении отображений, которая, как и тесно связанная с ней теорема о неподвижной точке, имеет кардинальное значение для таких разделов современной математики, как топология, алгебра, теория функций и функциональный анализ, дифференциальные уравнения.

Одним из наиболее изученных классов Н. о. является класс *совершенных неприводимых отображений*. Теорема об *абсолюте* регулярного пространства породила целый ряд исследований в этой области. В частности, понятие абсолюта было распространено на класс всех хаусдорфовых пространств. С понятием Н. о. оказалось тесно связанным понятие θ-близости, к-рое дало возможность внутреннего описания всех совершенных неприводимых прообразов произвольного бикомпакта. Распространение теории неприводимых Н. о. на класс всех хаусдорфовых пространств показало, что Н. о. не хватает для изучения нерегулярных пространств и что более естественно здесь рассматривать θ-непрерывные отображения.

Выделение равномерно непрерывных функций из класса всех числовых функций одной или нескольких действительных переменных стало одной из отправных

точек исследований, приведших к созданию *равномерной топологии.*

Н. о. того или иного типа лежат в основе теории ретрактов, спайнов, гомологий. Большую роль в современной математике играют различные аспекты теории *многозначных отображений.* Интересны богатством идейного содержания вопросы Н. о. евклидовых пространств.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, пер. с франц., М., 1968; [3] Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; [4] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974; [5] Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А., Общая топология, М., 1979. *В. В. Федорчук.*

НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — линейное представление π топологич. группы (полугруппы, алгебры) X в топологич. векторном пространстве E такое, что отображение φ пространства $E\times X$ в E, определяемое формулой $\varphi(\xi, x)=\pi(x)\xi$, $\xi\in E$, $x\in X$, непрерывно. Если отображение φ непрерывно по каждому аргументу, то в нек-рых случаях (напр., если X — локально компактная группа, а E — банахово пространство) φ автоматически непрерывно по совокупности переменных, т. е. π — Н. п. *А. И. Штерн.*

НЕПРЕРЫВНОЕ РАЗБИЕНИЕ топологического пространства X — покрытие γ пространства X попарно непересекающимися непустыми множествами, удовлетворяющее условию: каковы бы ни были $F\in\gamma$ и окрестность U множества F в X, найдется окрестность V множества F в X, содержащаяся в U и являющаяся объединением нек-рого множества элементов семейства γ. Разбиение непрерывно в том и только в том случае, если отвечающее ему *факторное отображение* пространства X на пространство этого разбиения замкнуто. Непрерывное отображение $f: X\to Y$ пространства X на пространство Y замкнуто в том и только в том случае, если разбиение $\gamma_f=\{f^{-1}(y), y\in Y\}$ пространства X непрерывно.

Н. р. часто встречаются в теории *бикомпактных пространств.* Каждое непрерывное отображение бикомпактного пространства на хаусдорфово пространство замкнуто. Поэтому каждое непрерывное отображение бикомпактного пространства X на хаусдорфово пространство Y порождает Н. р. пространства X на прообразы точек. По той же причине для непрерывности разбиения бикомпакта достаточно (и необходимо), чтобы пространство этого разбиения удовлетворяло аксиоме отделимости Хаусдорфа. Достоинством Н. р. пространства на замкнутые множества является сохранение такими разбиениями нормальности и паракомпактности. Напротив, пространство Н. р. метризуемого пространства может быть не метризуемо. Простейший пример такой ситуации — пространство разбиения плоскости, единственный нетривиальный элемент к-рого — фиксированная прямая.

Как и вообще разбиения, Н. р. служат важным средством построения новых топологич. пространств из уже имеющихся, а также представления более сложных топологич. пространств в виде пространств Н. р. более простых или более стандартных пространств. Так, всякий метризуемый бикомпакт является пространством Н. р. *канторова множества.* Каждый локально связный связный метризуемый бикомпакт можно представить как пространство Н. р. отрезка. Н. р. естественным образом входят в нек-рые конкретные конструкции; так, напр., *проективная плоскость*, рассматриваемая как топологич. пространство, является пространством Н. р. обычной сферы па пары диаметрально противоположных точек. Аналогично, n-мерное проективное пространство с топологич. точки зрения является пространством Н. р. n-мерной сферы, лежащей в

$(n-1)$-мерном евклидовом пространстве, на пары диаметрально противоположных точек. На этом языке, как пространство нек-рого Н. р. прямоугольника, аккуратно определяется лист Мёбиуса и строятся другие геометрич. объекты.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

НЕПРЕРЫВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, не имеющее атомов. Если атомы суть отдельные точки, то Н. р. противоположно *дискретному распределению* (см. также *Атомическое распределение*). Вместе с дискретным распределением Н. р. образует основные типы распределений. По теореме Жордана любое распределение вероятностей есть смесь дискретного распределения и Н. р. Напр., пусть $F(x)$ — функция распределения, соответствующая нек-рому распределению на прямой, тогда $F=pF_1+(1-p)F_2$, где $0\leqslant p\leqslant 1$, а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения, отвечающие дискретному и непрерывному типу. Н. р. соответствует непрерывная функция распределения. Значительный вес среди Н. р. имеют абсолютно непрерывные распределения. К этому типу распределений относятся распределения P на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$, представимые при любом $A\in\mathcal{A}$ в виде

$$\mathsf{P}(A)\quad\int_A p(x)\,\mu(dx),$$

где $p(x)\geqslant 0$, $\int_\Omega p(x)\mu(dx)=1$. Функция $p(x)$ наз. плотностью распределения относительно меры μ (обычно μ — мера Лебега). На прямой для соответствующей функции распределения $F(x)$ имеет место представление

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)\,du,$$

при этом почти всюду (по мере Лебега) $F'(x)=p(x)$. Распределение абсолютно непрерывно тогда и только тогда, когда соответствующая функция распределения абсолютно непрерывна (как функция действительного переменного). Противоположность абсолютно непрерывным распределениям составляют Н. р., сосредоточенные на множествах, имеющих меру нуль. Такие распределения наз. *сингулярными распределениями* по отношению к нек-рой мере. По теореме Лебега о разложении любое Н. р. является смесью двух распределений, из к-рых одно абсолютно непрерывно, а другое сингулярно *по отношению к заданной мере*.

Наиболее важны следующие Н. р.: *арксинуса распределение*, *бета-распределение*, *гамма-распределение*, *Коши распределение*, *нормальное распределение*, *равномерное распределение*, *показательное распределение*, *Стьюдента распределение*, *«хи-квадрат» распределение*.

Лит.: [1] Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; [2] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., 2 изд., т. 2, М., 1967.

А. В. Прохоров.

НЕПРЕРЫВНОЕ СЕЧЕНИЕ — непрерывное отображение $h: f(X)\to X$ образа $f(X)$ непрерывного отображения $f: X\to Y$ топологич. пространств X, Y такое, что $f\circ h$ — тождественное отображение $f(X)$.

М. И. Войцеховский.

НЕПРЕРЫВНОСТИ АКСИОМА — аксиома, выражающая тем или иным образом непрерывность множества *действительных чисел*. Н. а. действительных чисел может быть сформулирована, напр., в терминах сечений действительных чисел: всякое сечение действительных чисел определяется нек-рым числом (аксиома Дедекинда); в терминах вложенных отрезков: всякое семейство вложенных отрезков имеет непустое пересечение (аксиома Кантора); в терминах верхней или нижней грани множеств: всякое непустое ограниченное сверху множество имеет конечную верхнюю

грань, а всякое ограниченное снизу — нижнюю грань (аксиома Вейерштрасса). *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕПРЕРЫВНОСТИ МОДУЛЬ — одна из основных характеристик непрерывных функций. Н. м. непрерывной на отрезке функции $f(x)$ определяется как

$$\omega(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_{x} |f(x+h) - f(x)|.$$

Определение Н. м. введено А. Лебегом (A. Lebesgue) в 1910, хотя по существу понятие было известно и ранее. Если Н. м. функции $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta, f) \leqslant M\delta^{\alpha},$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *Липшица условию* порядка α.

Для того чтобы неотрицательная функция $\omega(\delta)$ была Н. м. нек-рой непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы она обладала следующими свойствами: $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta)$ не убывает, $\omega(\delta)$ непрерывна, $\omega(\delta + \eta) \leqslant \omega(\delta) + \omega(\eta)$, $\delta, \eta > 0$.

Рассматриваются также Н. м. высших порядков

$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_{x} |\Delta_h^k f(x)|,$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f(x + ih)$$

— конечная разность k-го порядка функции $f(x)$, и Н. м. в произвольных пространствах функций, напр. интегральный Н. м. функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[a, b]$ со степенью $p \geqslant 1$

$$\omega^{(p)}(\delta, f) = \sup_{0 < h \leqslant \delta} \left\{ \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}. \quad (*)$$

Для 2π-периодической функции интеграл в выражении (*) берется по отрезку $[0, 2\pi]$.

Лит.: [1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., [2 изд.], т. 1, М., 1965; [2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; [3] Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977. *А. В. Ефимов.*

НЕПРЕРЫВНОСТИ ТЕОРЕМА, принцип непрерывности: пусть G — *голоморфности область* в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, и $S_k \subset G$ и $T_k \subset G$, $k = 1, 2, \ldots$, — любые последовательности множеств, для к-рых имеет место принцип максимума относительно модулей функции f, голоморфной в G, т. е.

$$|f(z)| \leqslant \max_{z \in T_k} |f(z)|, \quad z \in S_k, \ k = 1, 2, \ldots;$$

тогда если S_k сходятся к нек-рому ограниченному множеству S, а T_k — к множеству T и $T \subset S$, то $S \subset G$. Если в качестве S_k взять аналитич. гиперповерхности и в качестве T_k — их границы ∂S_k, то получают теорему Беенке — Зоммера (см. [1]). Отсюда следует, что всякая область голоморфности псевдовыпукла. Применительно к конкретной функции нек-рые модификации Н. т. известны как теоремы о «диске». Напр., т. н. сильная теорема о «диске» утверждает следующее. Пусть в $\mathbb{C}^{n-1}$ задана жорданова кривая вида

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}_0 + \tilde{b}\lambda(t), \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \ \tilde{b} \in \mathbb{C}^{n-1}, \ \tilde{z} = (z_2, \ldots, z_n).$$

Пусть $D(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — семейство областей в плоскости z_1, обладающее тем свойством, что для любого компакта $K \subset D(0)$ найдется число $\eta = \eta(K)$, для к-рого $K \subset D(t)$ при всех $0 \leqslant t < \eta$. Тогда если $f(z)$ голоморфна в точках «дисков»

$$[z = (z_1, \tilde{z}): \ z_1 \in D(t), \ \tilde{z} = \tilde{z}(t), \ 0 < t \leqslant 1]$$

и в одной точке предельного «диска»

$$[z = (z_1, \tilde{z}): \ z_1 \in D(0), \ \tilde{z} = \tilde{z}(0)],$$

то $f(z)$ голоморфна и во всех точках предельного «диска». Теоремы о «диске» весьма полезны при голоморфном расширении областей и при построении *голоморфности оболочек*, напр. при доказательстве теоремы Бохнера об оболочке голоморфности трубчатой области, при доказательстве теорем Осгуда — Брауна, «о вложенном ребре», «об острие клина», «о C-выпуклой оболочке» и др.

Лит.: [1] Behnke H., Thullen P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, B., 1934; [2] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; [3] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 2, М., 1976.

В. С. Владимиров.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ — одно из важнейших математических понятий, обычно употребляемое применительно к понятию отображения (см. *Непрерывная функция*, *Непрерывное отображение*, *Непрерывный оператор*). В частности, можно изучать Н. нек-рой алгебраич. операции в заданном множестве относительно имеющейся в нем топологии. При наличии Н. рассматриваемой операции термин «Н.» применяется и к самому множеству (напр., *Непрерывная группа*). Термин «Н.» употребляется также в смысле невозможности «пополнения по непрерывности» нек-рого математич. объекта, напр. метрич. пространства; в этом смысле говорят о Н. множества действительных чисел. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕПРЕРЫВНЫЕ АНАЛОГИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ — непрерывные модели, позволяющие исследовать вопросы существования решений нелинейных уравнений, проводить с помощью развитого аппарата непрерывного анализа предварительные исследования сходимости и оптимальности итерационных методов, получать новые классы итерационных методов.

Можно установить соответствие между методами решения стационарных задач путем установления (см. *Установления метод*) и нек-рыми итерационными методами (см. [1], [2]). Напр., для решения линейного уравнения

$$Au = f \tag{1}$$

с положительно определенным самосопряженным оператором A известны сходящиеся при достаточно малых $\tau_k > 0$ двучленные итерационные методы вида

$$(u^{k+1} - u^k)/\tau_k = -(Au^k - f),\ u^0 = v. \tag{2}$$

Если ввести непрерывное время t, а величины u^k рассматривать как значение нек-рой функции $u(t)$ при $t = t_k$, где

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots,\ t_k \to \infty \text{ при } k \to \infty;$$

если положить $\tau_k = \rho(t_k)\ (t_k - t_{k-1})$, где непрерывная функция $\rho(t) > 0$ при $t \geqslant 0$, то при переходе к пределу в (2) при $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k \to 0$ получают Н. а. и. м. (2):

$$\frac{du}{dt} = -\rho(t)(Au - f),\ u(0) = v. \tag{3}$$

И если

$$\int_0^t \rho(t)\,dt \to \infty$$

при $t \to \infty$, то $u(t)$ стремится к $u(\infty)$ — решению уравнения (1).

Двучленным градиентным итерационным методам минимизации функции $F(u)$:

$$u^{k+1} = u^k - \tau_k \operatorname{grad} F(u^k),\quad u^0 = v, \tag{4}$$

аналогичным образом можно сопоставить Н. а. и. м. вида

$$\frac{du}{dt} = -\rho(t) \operatorname{grad} F(u),\quad u(0) = v. \tag{5}$$

Здесь функция $\rho(t)$ влияет лишь на параметризацию линии наискорейшего спуска. Для решения уравнения

(1) можно взять $F(u)=(Au, u)-2(f, u)$, тогда формулы (4) примут вид (2), а уравнение (5) — вид (3).

Трехчленные итерационные методы:

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_k(Au^k-f)-\beta_k(u^k-u^{k-1}) \quad (6)$$

с помощью преобразований можно записать в виде

$$2[(u^{k+1}-u^k)/\Delta t_k-(u^k-u^{k-1})/\Delta t_{k-1}]/(t_{k+1}-t_{k-1})+$$
$$+\gamma_k(u^{k+1}-u^{k-1})/(t_{k+1}-t_{k-1})+\mu_k u_k=-\rho_k(Au^k-f), \quad (7)$$

где величины γ_k, μ_k, ρ_k, t_k определяются (неоднозначно) по параметрам α_k, β_k метода (6). Переход в (7) к пределу при $\Delta t_k\to 0$ приводит к Н. а. и. м. вида

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\gamma(t)\frac{du}{dt}+\mu(t)u=-\rho(t)(Au-f). \quad (8)$$

Метод установления с использованием уравнения типа (8) носит название м е т о д а т я ж е л о г о ш а р и к а (см. [2]). Существуют итерационные методы, для к-рых Н. а. и. м. содержат дифференциальные операторы более высоких порядков (см. [3]).

Источником получения дифференциальных уравнений, играющих роль Н. а. и. м., может быть м е т о д п р о д о л ж е н и я п о п а р а м е т р у (см. [4], [5]). В этом методе для нахождения решения уравнения

$$\varphi(u)=0 \quad (9)$$

строят уравнение

$$\Phi(u, \lambda)=0, \quad (10)$$

зависящее от параметра λ и такое, что при $\lambda=0$ решение (10) известно: $u(0)=u^0$, а при $\lambda=1$ решения уравнений (9), (10) совпадают. Напр., можно взять

$$\Phi(u, \lambda)=\varphi(u)-(1-\lambda)\varphi(u^0). \quad (11)$$

Дифференцируя уравнение (10) по параметру и считая $u=u(\lambda)$, получают дифференциальное уравнение для $u(\lambda)$; оно для случая (11) примет вид

$$\frac{du}{d\lambda}=-\varphi'(u)^{-1}\varphi(u^0). \quad (12)$$

Разбивая отрезок $[0, 1]$ на n частей точками $\lambda_0=0<\lambda_1<\ldots<\lambda_{n-1}<\lambda_n=1$ и применяя к уравнению (12) одну из формул численного интегрирования по точкам λ_k (метод Эйлера, Рунге — Кутта и т. п.), получают рекуррентные соотношения между величинами $u^k=u(\lambda_k)$, к-рые используют для построения формул итерационного метода. Так, после применения метода Эйлера уравнение (12) заменится соотношениями

$$u^k=u^{k-1}-\Delta\lambda_k\varphi'(u^{k-1})^{-1}\varphi(u^0). \quad (13)$$

где $\Delta\lambda_k=\lambda_k-\lambda_{k-1}$, к-рые определяют следующий двуступенчатый итерационный метод, содержащий внутренний и внешний циклы итераций:

$$u_k^i=u_{k-1}^i-\Delta\lambda_k\varphi'(u_{k-1}^i)^{-1}\varphi(u_0^i),$$
$$k=1, 2, \ldots, n; \quad u_0^i=y_n^{i-1}, \ i=1, 2, \ldots, u_0^0=u^0. \quad (14)$$

При $\Delta\lambda_1=1$, $n=1$ этот метод превращается в классич. метод Ньютона. Н. а. и. м. Ньютона может быть получен и другим путем: в формуле (11) заменяется переменная $\lambda=1-e^{-t}$. Тогда дифференциальное уравнение (12) принимает вид

$$\frac{du}{dt}=-\varphi'(u)^{-1}\varphi(u), \ u(0)=u^0. \quad (15)$$

Численное интегрирование уравнения (15) методом Эйлера по точкам t_k приводит к итерационному методу

$$u^k=u^{k-1}-\Delta t_{k-1}\varphi'(u^{k-1})^{-1}\varphi(u^{k-1}),$$

совпадающему при $\Delta t_{k-1}=1$ с классич. методом Ньютона.

Н. а. и. м. решения краевых задач для дифференциальных уравнений математич. физики являются, как правило, смешанными задачами для уравнений с частными производными специального вида (напр., с быстро осциллирующими коэффициентами или с малыми коэффициентами при старших производных).

См. также ст. *Замыкание вычислительного алгоритма.*

Лит.: [1] Гавурин М. К., «Изв. ВУЗов. Математика», 1958, № 5(6), с. 18—31; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., т. 1, М., 1975; [3] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, М., 1971; [4] Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975; [5] Давиденко Д. Ф., «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1975, т. 15, № 1, с. 30—47.

В. И. Лебедев.

НЕПРЕРЫВНЫЙ ОПЕРАТОР — непрерывное отображение A множества M топологического п, как правило, векторного пространства X в такое же пространство Y, а именно: 1) отображение $A : M \to Y$, $M \subset X$, непрерывно в точке $x_0 \in M$, если для любой окрестности $V \subset Y$ точки Ax_0 найдется окрестность $U \subset X$ точки x_0 такая, что $A(M \cap U) \subset V$; 2) отображение $A : M \to Y$ непрерывно на множестве M, если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Для того чтобы оператор $A : M \to Y$ был непрерывен на M, необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого (замкнутого) множества $H \subset Y$ полный прообраз $A^{-1}(H)$ был следом на M открытого (замкнутого) множества в X, т. е. $A^{-1}(H) = M \cap G$, где G открыто (замкнуто) в X. Для Н. о. справедливо ценное правило: пусть $A : M \to Y$, $M \subset X$, и A непрерывно на M (в точке $x_0 \in M$), а $B : N \to Z$, $N \subset Y$, и B непрерывно на N (в точке $y_0 \in N$); если $Q = M \cap A^{-1}(N)$ непусто ($y_0 = Ax_0$), то $B \circ A$ непрерывно на Q (в точке x_0).

В случае, когда X и Y — топологические векторные пространства, и A — линейный Н. о. на линейном подмногообразии $L \subset X$ со значениями в Y, то из непрерывности A в любой точке L, напр. в нуле, следует непрерывность A на всем L. Непрерывный на многообразии L топологического векторного пространства X оператор ограничен на этом множестве, т. е. образ любого ограниченного подмножества $N \subset L$ есть ограниченное множество в Y. Если X и Y отделимы, то из компактности N следует компактность $A(N)$.

Оператор A **равномерно непрерывен** на M, если для любой окрестности нуля $V \subset Y$ существует окрестность нуля $U \subset X$ такая, что из $x - y \in U$ следует $Ax - Ay \in V$. Оператор линейный и непрерывный на линейном многообразии топологического векторного пространства автоматически равномерно непрерывен на этом многообразии.

Помимо непрерывности вводится понятие счетной непрерывности оператора. Оператор $A : M \to Y$ **счетно непрерывен в точке** $x_0 \in M$, если для любой последовательности $x_n \to x_0$, $\{x_n\} \subset M$, имеет место $Ax_n \to Ax_0$. Для случая метризуемых пространств понятия счетной непрерывности и непрерывности совпадают.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

В. И. Соболев.

НЕПРЕРЫВНЫЙ ПОТОК — 1) Н. п. в *эргодической теории* — такое семейство $\{T^t\}$ (t пробегает действительную ось $\mathbb{R}$) автоморфизмов по mod 0 *пространства с мерой* (M, μ), что: а) при любых t, $s \in \mathbb{R}$ равенство $T^t T^s(x) = T^{t+s}(x)$ имеет место для всех $x \in M$, кроме, быть может, тех x, к-рые принадлежат нек-рому исключительному множеству меры нуль (оно может зависеть от t, s); иначе говоря, $T^t T^s = T^{t+s}$ mod 0; б) для любого измеримого $A \subset M$ мера симметрич. разности $\mu(A \Delta T^t A)$ непрерывно зависит от t. Пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность всех автоморфизмов mod 0 пространства (M, μ) с обычным отождествлением: если T и S совпадают почти всюду,

то они определяют один и тот же элемент из $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ снабдить слабой топологией (см. [1]), то условие б) означает непрерывность отображения $\mathbb{R}\to\mathfrak{A}$, переводящего t в T^t.

Если (M, μ) — *Лебега пространство*, то понятие Н. п. практически совпадает с понятием *измеримого потока:* последний всегда есть Н. п. (см. [2]), а для любого Н. п. $\{T^t\}$ существует такой измеримый поток $\{S^t\}$, что $T^t = S^t \bmod 0$ при всех t (см. [3]; родственный результат доказан в [4], см. также исправление в [5]). Обращение к тому или иному из этих понятий зависит от характера рассматриваемого вопроса и используемых приемов.

2) В другом смысле термин «Н. п.» может употребляться с целью подчеркнуть, что рассматриваемый поток относится к *топологической динамике.* В этом смысле Н. п. есть такая совокупность гомеоморфизмов $\{T^t\}$ топологич. пространства M, что $T^t(T^s(x)) = T^{t+s}(x)$ для всех $t, s\in\mathbb{R}$, $x\in M$; отображение $M\times\mathbb{R}\to M$, переводящее (x, t) в $T^t x$, непрерывно.

Во избежание смешения с п. 1) лучше в данном случае говорить о топологическом потоке; а в п. 1)— о метрической непрерывности.

Лит.: [1] Халмош П. Р., Лекции по эргодической теории, пер. с англ., М., 1959; [2] Хопф Э., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 113—82; [3] Вершик А. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1965, т. 29, № 1, с. 127—36; [4] Mackey G. W., «Illinois J. Math.», 1962, v. 6, № 2, p. 327—35; [5] Ramsay A., «Advances Math.», 1971, v. 6, № 3, p. 253—322.

Д. В. Аносов.

НЕПРЕРЫВНЫЙ ФУНКТОР — синоним понятия «функтор, перестановочный с пределами». Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{C}$ — категории с пределами. Одноместный ковариантный функтор $F : \mathfrak{R}\to\mathfrak{C}$ наз. непрерывным, если для любой диаграммы $J : \mathfrak{D}\to\mathfrak{R}$ с произвольной малой схемой $\mathfrak{D}$ выполнено равенство $F(\lim J) = \lim FJ$. Более подробно последнее равенство означает следующее: если $(A; \mu_D, D\in\mathfrak{D})$ — предел диаграммы J, причем μ_D: $A\to J(D)$, $D\in \mathrm{Ob}\mathfrak{D}$,— морфизмы, входящие в определение предела, то $(F(A); F(\mu_D), D\in\mathrm{Ob}\mathfrak{D})$ предел диаграммы $FJ : \mathfrak{D}\to\mathfrak{C}$.

Функтор $F : \mathfrak{R}\to\mathfrak{C}$ непрерывен тогда и только тогда, когда он перестановочен с произведениями любых семейств объектов и ядрами пар морфизмов. Всякий основной функтор $H_A(X) = H_{\mathfrak{R}}(A, X)$ из категории $\mathfrak{R}$ в категорию множеств непрерывен.

М. Ш. Цаленко.

НЕПРЕРЫВНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ — *непрерывный оператор*, отображающий топологическое и, как правило, векторное пространство X в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Поэтому определение и признаки непрерывности произвольного оператора сохраняются с соответствующей спецификацией и для функционалов. Так, напр.:

1) для того чтобы функционал $f : M\to\mathbb{C}$, где M — подмножество топологического пространства X, был непрерывен в точке $x_0\in M$, для любого $\varepsilon>0$ должна существовать окрестность U точки x_0 такая, что $|f(x) - f(x_0)|<\varepsilon$ при $x\in U$ (определение непрерывности функционала);

2) функционал, непрерывный на компактном множестве отделимого топологического векторного пространства, ограничен на этом множестве и достигает на нем своих точных границ (теорема Вейерштрасса);

3) так как всякий ненулевой линейный функционал отображает банахово пространство X на все $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), то он осуществляет открытое отображение, т. е. образ любого открытого множества $G\subset X$ есть открытое множество в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

В. И. Соболев.

НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПРОСТРАНСТВО — нормированное пространство $C(X)$ ограниченных непрерывных на топологич. пространстве X функций $f : X\to\mathbb{C}$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Сходимость последо-

вательности f_n в пространстве $C(X)$ означает равномерную сходимость. Пространство $C(X)$ является коммутативной *банаховой алгеброй* с единицей. Если X — бикомпакт, то всякая непрерывная на нем функция $f: X \to \mathbb{C}$ ограничена и, следовательно, пространство $C(X)$ совпадает с пространством всех непрерывных на X функций.

В случае, когда $X = [a, b]$ — отрезок действительных чисел, пространство $C(X)$ обозначается $C[a, b]$. Множество всех целых неотрицательных степеней $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ образует согласно *Вейерштрасса теореме* о приближении непрерывных функций многочленами полную систему в пространстве $C[a, b]$ (это означает, что множество линейных комбинаций указанных степеней, т. е. многочлены, образует в $C[a, b]$ всюду плотное множество), следовательно, пространство $C[a, b]$ сепарабельно. В пространстве $C[a, b]$ существует базис, напр. *Фабера — Шаудера система* функций образует базис в пространстве $C[0, 1]$. Критерий компактности в пространстве $C[a, b]$ дается соответствующей теоремой Арцела: для того чтобы нек-рое семейство функций $f \in C[a, b]$ было компактным относительно пространства $C[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Этот критерий обобщается на случай метрич. пространства $C(X, Y)$ непрерывных отображений метрич. компакта X в метрич. компакт Y. Для компактности замкнутого подмножества A пространства $C(X, Y)$ необходимо и достаточно, чтобы входящие в A отображения были равностепенно непрерывны. Расстояние между отображениями f и g из пространства $C(X, Y)$ задается формулой

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)).$$

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕПРИВОДИМАЯ МАТРИЧНАЯ ГРУППА — группа G матриц размера $n \times n$ над полем k, к-рую нельзя привести путем одновременного сопряжения в общей линейной группе $\mathrm{GL}_n(k)$ к полураспавшемуся виду

$$\begin{Vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{Vmatrix},$$

где A, B — квадратные клетки фиксированных размеров. Более точно, G наз. неприводимой над полем k. На языке преобразований: группа G линейных преобразований конечномерного векторного пространства V наз. неприводимой, если V — минимальное G-инвариантное подпространство (отличное от нуля). Неприводимые абелевы группы матриц над алгебраически замкнутым полем одномерны. Группа матриц над полем, неприводимая над любым его расширением, наз. абсолютно неприводимой. Если поле k алгебраически замкнуто, то для всякой группы $G \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ следующие условия равносильны: 1) G неприводима над k, 2) G содержит n^2 матриц, линейно независимых над k, 3) G абсолютно неприводима. Таким образом, абсолютная неприводимость над полем равносильна неприводимости над его алгебраическим замыканием.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Мерзляков Ю. И., Рациональные группы, М., 1980. *Ю. И. Мерзляков.*

НЕПРИВОДИМОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — аналитическое пространство, к-рое нельзя представить в виде объединения локально конечного семейства его аналитич. подпространств. Н. а. п. является обобщением понятия неприводимого *аналитического множества.* Всякое аналитич. пространство можно единственным образом представить в виде несократи-

мого объединения локально конечного семейства его неприводимых аналитич. подпространств, называемых его неприводимыми компонентами (разложение пространства на неприводимые компоненты). Комплексное аналитич. многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда оно связно; неприводимые компоненты многообразия — это его компоненты связности. Росток аналитич. пространства в данной его точке наз. неприводимым, если его нельзя представить в виде объединения конечного числа ростков аналитич. подпространства в этой же точке. Всякий росток аналитич. пространства в точке единственным образом представляется в виде объединения конечного числа своих неприводимых ростков. Росток приведенного комплексного пространства $(X, \mathcal{O})$ в точке $x \in X$ неприводим тогда и только тогда, когда локальное кольцо $\mathcal{O}_x$ не имеет делителей нуля. Комплексное пространство, ростки к-рого во всех его точках неприводимы, является неприводимым тогда и только тогда, когда оно связно; неприводимые компоненты такого пространства суть его компоненты связности.

Лит.: [1] Ганнинг Р., Росси Х., Аналитические функции многих комплексных переменных, пер. с англ., М., 1969; [2] Эрве М., Функции многих комплексных переменных. Локальная теория, пер. с англ., М., 1965.

Д. А. Пономарев.

НЕПРИВОДИМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — алгебраическое многообразие, являющееся *неприводимым топологическим пространством* в топологии Зарисского. Иначе говоря, Н. м.— алгебраич. многообразие, к-рое нельзя представить в виде объединения двух собственных замкнутых алгебраич. подмногообразий. Аналогично определяется неприводимость схемы. Для гладкого (и даже нормального) многообразия понятия неприводимости и связности совпадают. Каждое неприводимое многообразие обладает единственной *общей точкой*.

По аналогии с разложением топологич. пространства на неприводимые компоненты любое алгебраич. многообразие является объединением конечного числа неприводимых замкнутых подмногообразий. Алгебраическим фундаментом такого представления (доставляющим заодно и более точную формулировку) является *примарное разложение* в коммутативных нётеровых кольцах.

Произведение Н. м. над алгебраически замкнутым полем также неприводимо. Для произвольного основного поля этот факт уже не верен. Полезен также следующий вариант понятия Н. м.: многообразие X над полем k наз. геометрически неприводимым, если для любого расширения k' поля k неприводимым остается многообразие $X \otimes_k k'$, полученное из X заменой базы.

В. И. Данилов.

НЕПРИВОДИМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение топологич. пространства X на топологич. пространство Y такое, что образ всякого замкнутого в X множества, отличного от X, отличен от Y. Если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, причем $f(X) = Y$ и все прообразы точек при f бикомпактны, то существует замкнутое в X подпространство X_1 такое, что $f(X_1) Y$ и сужение f на X_1 является Н. о. Яркий эффект дает соединение требований неприводимости отображения и его замкнутости. Пространства, соединенные таким отображением, не отличимы по ряду важных характеристик: в частности, по числу Суслина и π-весу. Но главное значение замкнутым Н. о. дает центральная роль, к-рую они играют в теории абсолютов.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — (линейное) представление π группы (алгебры, кольца, полугруппы) X в векторном пространстве (или топологическом векторном пространстве) E, единственными (замк-

нутыми) инвариантными подпространствами к-рого являются (O) и E. Часто Н. п. в топологическом векторном пространстве наз. топологически неприводимым представлением; если π — представление в топологическом векторном пространстве E, являющееся Н. п. как представление в векторном пространстве E, то представление π наз. алгебраически неприводимым представлением. Алгебраически Н. п. является топологически Н. п.; обратное, вообще говоря, неверно. Есть ряд понятий, близких к понятию Н. п., в том числе — операторно неприводимое представление, вполне неприводимое представление (представление, семейство операторов к-рого образует вполне неприводимое множество). Вполне Н. п. является (топологически) Н. п. и операторно Н. п.; обратные утверждения, вообще говоря, неверны. *А. И. Штерн.*

НЕПРИВОДИМОЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, к-рое нельзя представить как объединение двух собственных замкнутых подпространств. Эквивалентным образом Н. т. п. можно определить, потребовав, чтобы любое его открытое подмножество было связным или чтобы любое открытое непустое подмножество было всюду плотным. Образ Н. т. п. при непрерывном отображении является Н. т. п. Произведение Н. т. п. снова Н. т. п. Понятие неприводимости представляет интерес лишь для неотделимых топологич. пространств; оно постоянно используется в алгебраич. геометрии, имеющей дело с неотделимой топологией Зарисского.

Неприводимой компонентой топологич. пространства X наз. любое максимальное неприводимое подмножество в X. Неприводимые компоненты замкнуты и их объединение дает все X. *В. И. Данилов.*

НЕПРИВОДИМЫЙ КОНТИНУУМ — невырожденный континуум, неприводимый между нек-рой парой своих точек, т. е. не содержащий никакого собственного подконтинуума, содержащего эти точки.

А. А. Мальцев.

НЕПРИВОДИМЫЙ МНОГОЧЛЕН — многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ f от n переменных над полем k, являющийся простым элементом кольца $k[x_1, \ldots, x_n]$, т. е. непредставимый в виде произведения $f=gh$, где g и h — многочлены с коэффициентами из k, отличные от константы (неприводимость над k). Многочлен наз. абсолютно неприводимым, если он неприводим над алгебраич. замыканием поля коэффициентов. Абсолютно Н. м. одной переменной — это многочлены 1-й степени и только они. В случае нескольких переменных существуют абсолютно Н. м. сколь угодно высокой степени, напр. любой многочлен вида $f(x_1, \ldots, x_{n-1})+x_n$ абсолютно неприводим.

Кольцо многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ факториально: любой многочлен разлагается в произведение Н. м., причем это разложение определено однозначно с точностью до постоянных множителей. Над полем действительных чисел любой Н. м. одной переменной имеет степень 1 или 2, причем многочлен 2-й степени неприводим тогда и только тогда, когда он имеет отрицательный дискриминант. Над любым полем алгебраич. чисел существуют Н. м. сколь угодно высокой степени; напр., многочлен x^n+px+p, где $n>1$ и p — нек-рое простое число, неприводим в силу критерия Эйзенштейна (см. *Алгебраическое уравнение*).

Пусть A — целозамкнутое кольцо с полем частных k и $f(x)\in A[x]$ — многочлен одной переменной со старшим коэффициентом 1. Если $f(x)=g(x)h(x)$ в $k[x]$, причем $g(x)$ и $h(x)$ имеют старший коэффициент 1, то $g(x)$, $h(x)\in A[x]$.

Редукционный критерий неприводимости. Пусть задан гомоморфизм областей целостности $\sigma: A \to B$. Если степень многочлена $\sigma(f(x))$

совпадает со степенью многочлена $f(x)$ и $\sigma(f(x))$ неприводим над полем частных области B, то не существует разложения $f(x)=g(x)h(x)$, где $g(x)$ и $h(x)\in A[x]$ и $g(x)$, $h(x)$ отличны от константы. Напр., многочлен $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ со старшим коэффициентом 1 прост в $\mathbb{Z}[x]$ (и, следовательно, неприводим в $\mathbb{Q}[x]$), если для нек-рого простого p неприводим многочлен $\sigma(f(x))$, полученный из $f(x)$ редукцией коэффициентов по модулю p.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963. *Л. В. Кузьмин.*

НЕПРИВОДИМЫЙ МОДУЛЬ, простой модуль,— ненулевой унитарный модуль M над кольцом R с единицей, содержащий лишь два подмодуля — нулевой и сам M.

Примеры: 1) если $R=\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то неприводимые R-модули — это абелевы группы простого порядка; 2) если R — тело, то неприводимые R-модули — это одномерные векторные пространства над R; 3) если D — тело, V — левое векторное пространство над D, $R=\mathrm{End}_D V$ — кольцо линейных преобразований пространства V (или плотное подкольцо этого кольца), то правый R-модуль неприводим; 4) если G — группа, k — поле, то неприводимые представления группы G над k — это в точности Н. м. над групповой алгеброй kG.

Правый R-модуль M неприводим тогда и только тогда, когда он изоморфен R/I, где I — нек-рый максимальный правый идеал в R. Если A, B — неприводимые R-модули, $f\in\mathrm{Hom}_R(A, B)$, то либо $f=0$, либо f — изоморфизм (откуда следует, что кольцо эндоморфизмов Н. м. является телом). Если же R — алгебра над алгебраически замкнутым полем k, A и B — Н. м. над R, то (лемма Шура)

$$\mathrm{Hom}_R(A, B)=\begin{cases} k, & \text{если } A\cong B,\\ \{0\} & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Понятие Н. м. является одним из основных в теории колец и теории представлений групп. С его помощью определяются *композиционный ряд* и *цоколь* модуля, *Джекобсона радикал* модуля и кольца, *вполне приводимый модуль*. Н. м. участвуют в определении ряда важных классов колец: *классически полупростых колец*, *примитивных колец* и др.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Картис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, пер. с англ., М., 1969; [3] Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; [4] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79. *А. В. Михалев.*

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ — свойство *формальной системы*, состоящее в том, что не каждая формула этой системы доказуема в ней. Формальные системы, обладающие этим свойством, наз. непротиворечивыми, или формально непротиворечивыми. В противном случае формальная система наз. противоречивой, или несовместной. Для широкого класса формальных систем, язык к-рых содержит знак отрицания $\neg$, Н. эквивалентна свойству: «не существует такой формулы φ, что φ и $\neg\varphi$ обе доказуемы». Класс формул данной формальной системы наз. непротиворечивым, если не всякая формула этой системы выводима из данного класса. Формальная система наз. содержательно непротиворечивой, если существует модель, в к-рой истинны все теоремы этой системы. Если формальная система содержательно непротиворечива, то она формально непротиворечива. Для формальных систем, основанных на классическом исчислении предикатов, справедливо и обратное утверждение: в силу *Гёделя теоремы о полноте* классического исчисления предикатов, всякая такая непротиворечивая система имеет модель. Таким

образом, один из способов доказательства Н. формальной системы состоит в построении модели. Другой (метаматематический) метод доказательства Н., предложенный в начале 20 в. Д. Гильбертом (D. Hilbert), состоит в том, что утверждение о Н. нек-рой формальной системы рассматривается как высказывание о доказательствах, возможных в этой системе. Теория, объектами к-рой являются произвольные математич. доказательства, наз. *доказательств теорией*, или метаматематикой. Примером применения метаматематич. метода может служить предложенное Г. Генценом (G. Gentzen) доказательство Н. формальной системы арифметики (см. *Генцена формальная система*).

Любое доказательство Н. использует средства той или иной математич. теории, а потому лишь сводит вопрос о Н. одной теории к вопросу о Н. другой теории. При этом говорят также, что первая теория непротиворечива относительно второй теории. Большое значение имеет вторая теорема Гёделя, к-рая утверждает, что Н. формальной теории, содержащей арифметику, невозможно доказать с помощью средств самой рассматриваемой теории (при условии, что эта теория действительно непротиворечива).

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; [2] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [3] Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; [4] Генцен Г., в кн.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 77—153; [5] Минц Г. Е., в кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 13, М., 1975, с. 5—49; [6] Gödel K., «Monatsch. Math. und Physik», 1930, Bd 37, S. 349—60.
В. Е. Плиско.

НЕРАВЕНСТВО — отношение, связывающее два числа a_1 и a_2 посредством одного из знаков: $<$ (меньше), $\leqslant$ (меньше или равно), $>$ (больше), $\geqslant$ (больше или равно), $\neq$ (неравно), то есть

$$a_1<a_2,\ a_1\leqslant a_2,\ a_1>a_2,\ a_1\geqslant a_2,\ a_1\neq a_2.$$

Иногда несколько Н. записываются вместе, напр.

$$a<b<c.$$

Н. обладают многими свойствами, общими с равенствами. Так, Н. остается справедливым, если к обеим частям его прибавить (или от обеих частей отнять) одно и то же число. Точно так же можно умножить обе части Н. на одно и то же положительное число. Однако если обе части Н. умножить на отрицательное число, то смысл Н. изменится на противоположный (т. е. знак $>$ заменяется на $<$, а $<$ на $>$). Из неравенств $A<B$ и $C<D$ следует $A+C<B+D$ и $A-D<B-C$, т. е. одноименные Н. ($A<B$ и $C<D$) можно почленно складывать, а разноименные Н. ($A<B$ и $D>C$) — почленно вычитать. Если числа A, B, C и D положительны, то из неравенств $A<B$ и $C<D$ следует также $AC<BD$ и $\frac{A}{D}<\frac{B}{C}$, т. е. одноименные Н. (между положительными числами) можно почленно перемножать, а разноименные — почленно делить.

Н., в к-рые входят величины, принимающие различные числовые значения, могут быть верны для одних значений этих величин и неверны для других. Так, неравенство $x^2-4x+3>0$ верно при $x<1$ и неверно при $x<2$. Для Н. этого типа возникает вопрос об их решении, т. е. об определении границ, в к-рых следует брать входящие в Н. величины для того, чтобы Н. были справедливы. Так, переписывая неравенство $x^2-4x+3>0$ в виде: $(x-1)(x-3)>0$, замечают, что оно будет верно для всех x, удовлетворяющих одному из следующих неравенств: $x<1$, $x>3$, к-рые и являются решением данного Н.

Ниже приводятся нек-рые Н., выполняющиеся тождественно в той или иной области изменения входящих в них переменных.

1) Неравенство для модулей. Для любых действительных или комплексных чисел a_1, a_2, ..., a_n справедливо Н.

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

2) Неравенство для средних. Наиболее известны Н., связывающие гармоническое, геометрическое, арифметическое и квадратичное средние:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}};$$

здесь все числа a_1, a_2, ..., a_n — положительны.

3) Неравенства для сумм и их интегральные аналоги. Таковы, напр., *Буняковского неравенство*, *Гёльдера неравенство*, *Гильберта неравенство*, *Коши неравенство*.

4) Неравенства для степеней чисел. Наиболее известно здесь *Минковского неравенство* и его обобщения на случай рядов и интегралов.

5) Неравенства для некоторых классов последовательностей и функций. Примерами могут служить *Чебышева неравенство* для монотонных последовательностей и *Иенсена неравенство* для выпуклых функций.

6) Неравенство для определителей. Напр., неравенство Адамара — см. *Адамара теорема* об определителях.

7) Линейные неравенства. Рассматривается система Н. вида

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\geqslant b_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Совокупность решений этой системы Н. представляет собой нек-рый выпуклый многогранник в n-мерном пространстве $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$; задача теории *линейных неравенств* состоит в том, чтобы изучить свойства этого многогранника.

Н. имеют существенное значение для всех разделов математики. В теории чисел целый раздел этой дисциплины — *диофантовы приближения* — полностью основан на Н.; аналитич. теория чисел тоже часто оперирует с Н. (см., напр., *Виноградова оценки*). В геометрии Н. постоянно встречаются в теории выпуклых тел и в изопериметрич. задаче (см. *Изопериметрическое неравенство*, *Изопериметрическое неравенство классическое*). В теории вероятностей многие законы формулируются с помощью Н. (см., напр., *Чебышева неравенство* и его обобщение *Колмогорова неравенство*). В теории дифференциальных уравнений используются т. н. *дифференциальные неравенства*. В теории функций постоянно употребляются различные Н. для производных от многочленов и тригонометрич. полиномов (см., напр., *Бернштейна неравенство*, *Джексона неравенство*); о Н., связанных с вложением классов дифференцируемых функций, см. *Колмогорова неравенство*, *Вложения теоремы*. В функциональном анализе при определении нормы в функциональном пространстве требуется, чтобы она удовлетворяла Н. треугольника $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. Многие классич. Н. в сущности определяют значения нормы линейного функционала или линейного оператора в том или ином пространстве или дают оценки для них (см., напр., *Бесселя неравенство*, *Минковского неравенство*). В вычислительной математике Н. применяются для оценки погрешности приближенного решения задачи.

Лит.: Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948; Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, пер. с англ., М., 1965.

По материалам одноименной статьи из БСЭ-3.

НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЙ ИДЕАЛ — простой идеал $\mathfrak{P}$ поля алгебраич. чисел K, лежащий над таким простым числом p, что главный идеал (p) имеет в поле K разложение в произведение простых идеалов вида

$$(p)=\mathfrak{P}_1^{e_1}\dots\mathfrak{P}_s^{e_s},$$

где

$$\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P} \quad \text{и} \quad \mathfrak{P}_2,\ \dots,\ \mathfrak{P}_s\neq\mathfrak{P},$$

причем $e_1=1$. Точнее этот идеал наз. а б с о л ю т н о н е р а з в е т в л е н н ы м. В общем случае, пусть A — дедекиндово кольцо с полем частных k, K — конечное расширение поля k и B — целое замыкание A в K. Простой идеал $\mathfrak{P}$ кольца B, лежащий над идеалом $\mathfrak{p}$ кольца A, наз. н е р а з в е т в л е н н ы м в р а с ш и р е н и и K/k, если

$$\mathfrak{p}B=\mathfrak{P}_1^{e_1}\dots\mathfrak{P}_s^{e_s},$$

где $\mathfrak{P}_1,\ \dots,\ \mathfrak{P}_s$ — попарно различные простые идеалы кольца B, $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}$ и $e_1=1$. Если все идеалы $\mathfrak{P}_1,\ \dots,\ \mathfrak{P}_s$ не разветвлены, то иногда говорят, что идеал $\mathfrak{p}$ остается неразветвленным в K/k. Для расширения Галуа K/k неразветвленность идеала $\mathfrak{P}$ кольца B эквивалентна тому, что подгруппа разложения $\mathfrak{P}$ в группе Галуа $G(K/k)$ совпадает с группой Галуа расширения полей вычетов $(B/\mathfrak{P})/(A/\mathfrak{p})$. В любых конечных расширениях полей алгебраич. чисел все идеалы, кроме конечного числа, не разветвлены.

Лит.: [1] Б о р е в и ч З. И., Ш а ф а р е в и ч И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972; [2] Л е н г С., Алгебраические числа, пер. с англ., М., 1966; [3] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969. *Л. В. Кузьмин.*

НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЙ ХАРАКТЕР — характер группы Галуа $G(K/k)$ расширения Галуа локальных полей K/k, тривиальный на подгруппе инерции. Любой Н. х. можно рассматривать как характер группы Галуа расширения K_{Hp}/k, где K_{Hp} — максимальное неразветвленное подполе в расширении K/k. Н. х. образуют подгруппу в группе всех характеров. Н е р а з в е т в л е н н ы м х а р а к т е р о м наз. также характер мультипликативной группы k^* локального поля k, тривиальный на группе единиц поля k. Это определение согласовано с предыдущим, т. к. согласно основной теореме локальной теории полей классов для любого абелева расширения локальных полей K/k определен канонич. гомоморфизм взаимности $\theta: k^*\to G(K/k)$, позволяющий отождествить характеры группы $G(K/k)$ с нек-рой подгруппой в группе характеров группы k^*.

Для расширения Галуа глобальных полей K/k характер χ группы Галуа $G(K/k)$ наз. н е р а з в е т в л е н н ы м в т о ч к е $\mathfrak{p}$ поля k, если он остается неразветвленным в указанном выше смысле и при ограничении на подгруппу разложения любой точки $\mathfrak{P}$ поля K, лежащей над $\mathfrak{p}$. Аналогично, характер χ группы классов иделей $C(k)$ поля k наз. н е р а з в е т в л е н н ы м в $\mathfrak{p}$, если его ограничение на подгруппу единиц пополнения $k_{\mathfrak{p}}$ поля k относительно $\mathfrak{p}$ тривиально, где группа $k_{\mathfrak{p}}^*$ вложена стандартным образом в $C(k)$. Из глобальной теории полей классов следует, что оба эти определения неразветвленности в точке $\mathfrak{p}$ согласованы, как и в локальном случае.

Лит.: [1] В е й л ь А., Основы теории чисел, пер. с англ., М., 1972. *Л. В. Кузьмин.*

НЕРАЗЛОЖИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — представление группы (или алгебры, кольца, полугруппы и т. д.), неэквивалентное прямой сумме ненулевых представлений той же группы (соответственно алгебры и т. д.). Таким образом, Н. п. образуют класс представлений, к-рые должны рассматриваться как простейшие представления соответствующей алгебраич. системы и являются тем классом представлений, с помощью к-рого следует изучать структуру алгебраич. системы, ее теорию представлений и гармонич. анализ на этой

системе. Представление топологич. группы (соответственно алгебры и т. д.) в топологическом векторном пространстве наз. Н. п., если оно не эквивалентно топологической прямой сумме ненулевых представлений той же алгебраич. системы.

Всякое *неприводимое представление* есть Н. п. Класс конечномерных Н. п. группы $\mathbb{R}$ и разложение данного конечномерного представления группы $\mathbb{R}$ на Н. п. непосредственно связаны с жордановой нормальной формой матрицы и с теорией линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Классификация Н. п. даже таких групп, как $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{Z}^n$, $n>1$, далека (1982) от завершения. Н. п. полупрямых произведений групп — в частности Н. п. разрешимых групп Ли — могут быть приводимы (даже в конечномерном случае). С другой стороны, конечномерные Н. п. действительных полупростых групп Ли неприводимы, но эти группы имеют приводимые бесконечномерные Н. п., принадлежащие, в частности, аналитич. продолжению основной *непрерывной серии представлений* таких групп.

Лит.: [1] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [2] Желобенко Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; [3] Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; [4] Гельфанд И. М., Пономарев В. А., «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 2, с. 3—60.

А. И. Штерн.

НЕРАЗЛОЖИМОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — невырожденное распределение вероятностей, не представимое в виде свертки невырожденных распределений. Случайную величину, распределение к-рой неразложимо, невозможно представить в виде суммы независимых непостоянных случайных величин.

Примерами Н. р. могут служить *арксинуса распределение*, *бета-распределение* при условии $n+m<2$, *Уишарта распределение*, любое распределение в $\mathbb{R}^k$, $k\geqslant 2$, сосредоточенное на строго выпуклой замкнутой гиперповерхности. Множество Н. р. достаточно богато и является плотным во множестве всех распределений в топологии слабой сходимости.

В сверточной полугруппе распределений вероятностей Н. р. играют роль, в нек-рой степени аналогичную роли простых чисел в арифметике (см. *Хинчина теорема* о факторизации распределений), но не каждое распределение имеет делитель, являющийся Н. р.

Лит.: [1] Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, М., 1972; [2] Лившиц Л. З., Островский И. В., Чистяков Г. П., в кн.: Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, т. 12, М., 1975, с. 5—42; [3] Parthasarathy K. R., Rao R. R., Varadhan S. R. S., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1962, v. 102, p. 200—17.

И. В. Островский.

НЕРАЗЛОЖИМЫЙ КОНТИНУУМ — невырожденный континуум, к-рый нельзя представить в виде объединения двух собственных подконтинуумов.

А. А. Мальцев.

НЕРАЗРЕШИМОСТИ СТЕПЕНЬ — класс эквивалентности $\equiv_T$, индуцированной отношением $\leqslant_T$ тьюринговой сводимости на подмножествах натурального ряда ($A\equiv_T B$, если $A\leqslant_T B$ и $B\leqslant_T A$). Иначе говоря, два множества принадлежат одной Н. с., если для каждого из них существует эффективная разрешающая процедура при возможности время от времени получать от «оракула» ответы на возникающие по ходу вычислений вопросы о принадлежности того или иного числа другому из рассматриваемых множеств (см. также *Алгоритмическая сводимость*). Н. с. определяют также как класс эквивалентности на множестве всюду определенных функций (отображающих натуральный ряд в себя), индуцированной отношением $\leqslant_R$ относительной рекурсивности (функция f рекурсивна относительно функции g, если для f существует рекурсивное определение, в к-ром в число исходных функций, помимо обычных, входит g); в этом случае

Н. с. данной функции наз. также ее степенью невычислимости. Н. с. наз. также тьюринговыми степенями, или Т-степенями. Множество всех Н. с. при обоих подходах оказывается верхней полурешеткой (полуструктурой), причем получающиеся полурешетки Н. с. множеств и функций изоморфны, и в этом смысле приведенные определения эквивалентны.

Строение полурешетки Н. с. изучено довольно подробно (см. [1] — [3]). Элементарная теория полурешетки Н. с. неразрешима [6].

На множестве Н. с. определена операция скачка, сопоставляющая степени неразрешимости a Н. с. a', наибольшую среди Н. с., рекурсивно перечислимых относительно a (множество B рекурсивно перечислимо относительно множества A, если B есть проекция рекурсивного относительно A множества, а Н. с. b наз. рекурсивно перечислимой относительно Н. с. a, если b содержит множество B, рекурсивно перечислимое относительно нек-рого $A \in a$). Операция скачка монотонна: из $a \leqslant b$ следует $a' \leqslant b'$ (но не обратно). Для всякой Н. с. $a \geqslant 0'$ существует такая Н. с. b, что $a = b'$. Н. с. $0^{(n)}$ являются наибольшими, достижимыми в классах Σ_n и Π_n арифметич. множеств.

Особый интерес представляют рекурсивно перечислимые Н. с. (Н. с. рекурсивно перечислимых множеств), образующие подполурешетку в полурешетке всех Н. с. Наибольшей среди рекурсивно перечислимых Н. с. является $0'$ (Н. с. полного множества). Вопрос о существовании рекурсивно перечислимых Н. с., отличных от 0 и $0'$ (т. н. проблема Поста), решен положительно (см. [4], [5]). При решении этой проблемы был развит *приоритета метод*. Полурешетка рекурсивно перечислимых Н. с. (в отличие от полурешетки всех Н. с.) плотна, причем в нее может быть вложено произвольное счетное частично упорядоченное множество. Для многих типов массовых проблем, возникающих в математике и состоящих в отыскании разрешающего алгоритма для некоторого множества (таких, как проблема тождества в теории групп, проблема разрешения конечно аксиоматизируемой элементарной теории и др.), доказано существование неразрешимых проблем соответствующего типа, имеющих произвольную рекурсивно перечислимую Н. с.

Исследовались Н. с. важнейших типов рекурсивно перечислимых множеств (так, все *креативные множества* имеют Н. с. $0'$, простые множества могут иметь любую ненулевую рекурсивно перечислимую Н. с., максимальные — любую рекурсивно перечислимую Н. с. a, для к-рой $a' = 0''$).

Понятие степени вводится и для других типов алгоритмич. сводимости, отличных от тьюринговой (в частности, 1-, m-, tt-степени и др.), причем исследовался вопрос о распадении Н. с. на эти, «более мелкие», степени. Нек-рые из этих промежуточных типов сводимости оказываются связанными с оценкой сложности работы и задания алгоритмов (см. также *Алгоритмическая теория информации*).

Лит.: [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [2] Шенфилд Дж., Степени неразрешимости, пер. с англ., М., 1977; [3] Sacks G. E., Degrees of unsolvability, Princeton (N. Y.), 1963; [4] Мучник А. А., «Докл. АН СССР», 1956, т. 108, № 2, с. 194—97; [5] Friedberg R. M., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1957, v. 43, p. 236—38; [6] Lachlan A. H., «Z. math. Log. und Grundl. Math.», 1968, Bd 14, S. 457—72.

В. А. Душский.

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ — невозможность решения данной задачи точно очерченными средствами. Ниже рассмотрены важнейшие примеры Н. в математике.

Алгоритмическая неразрешимость. В различных областях математики возникают проблемы,

в к-рых требуется найти единую механич. процедуру (*алгоритм*), с помощью к-рой можно было бы решить любую задачу из данного бесконечного класса однотипных задач. Такие проблемы наз. массовыми проблемами. Примером может служить 10-я проблема Гильберта, состоящая в построении алгоритма, к-рый позволил бы для любого заданного многочлена с целыми коэффициентами узнать, существуют ли целые значения переменных, обращающие этот многочлен в нуль. Многие массовые проблемы долгое время не поддавались решению; впоследствии оказалось, что трудность их решения имеет принципиальный характер. Это удалось установить лишь после того, как в 30-х гг. 20 в. в математич. логике было выработано точное понятие алгоритма и для нек-рых массовых проблем было доказано, что искомые в них алгоритмы не существуют. Такие массовые проблемы наз. неразрешимыми, или алгоритмически неразрешимыми. Неразрешимыми оказались многие другие алгоритмич. проблемы из различных областей математики, в частности 10-я проблема Гильберта (см. также *Алгоритмическая проблема*).

Установление алгоритмической Н. данной массовой проблемы показывает, что для решения каждой конкретной задачи из рассматриваемого класса требуется свой специфический для этой задачи метод, т. к. единого метода решения всех этих задач не существует.

Неразрешимые предложения. Одним из способов построения математич. теории является *аксиоматический метод*. При аксиоматич. построении теории ряд ее положений принимается в качестве исходных, или аксиом, а другие получаются как их следствия. В работах Д. Гильберта (D. Hilbert) и его школы понятие аксиоматич. теории было уточнено в виде понятия *формальной системы*. Намеченная Д. Гильбертом программа обоснования математики предусматривала, в частности, формализацию основных разделов математики — арифметики, анализа, теории множеств, т. е. построение формальной системы, из аксиом к-рой можно было бы вывести практически все математич. теоремы. Однако в 1931 К. Гёдель (K. Gödel) показал, что всякая формальная система арифметики неполна в том смысле, что можно указать предложение, к-рое в этой системе нельзя ни доказать, ни опровергнуть (т. е. доказать его отрицание). Такие предложения наз. неразрешимыми, или формально неразрешимыми, в данной системе. В частности, для всякой непротиворечивой формальной системы, содержащей достаточно богатую часть арифметики, утверждение о непротиворечивости этой системы оказывается неразрешимым в ней (см. *Гёделя теорема о неполноте*).

Н. предложения в данной формальной системе означает, что невозможно убедиться в его истинности или ложности на основании лишь тех представлений об исследуемом объекте, к-рые выражены в аксиомах и правилах вывода. Часто оказывается возможным расширить формальную систему за счет новых аксиом таким образом, чтобы нек-рое конкретное неразрешимое в ней предложение можно было доказать или опровергнуть в получившейся системе. Обнаружение в аксиоматич. теории неразрешимых предложений имеет важное значение для развития этой теории, т. к. стимулирует поиск новых фундаментальных положений, к-рые можно было бы принять в качестве аксиом.

Примером Н. в элементарной математике является Н. таких геометрич. задач на построение, как *трисекция угла* и *квадратура круга* при помощи циркуля и линейки.

Лит.: [1] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979.

В. Е. Плиско.

НЕРАЗРЫВНОСТИ УРАВНЕНИЕ — одно из основных уравнений гидродинамики, выражающее закон сохранения массы для любого объема движущейся жидкости (газа). В переменных Эйлера Н. у. имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0,$$

где ρ — плотность жидкости, $\boldsymbol{v}$ — ее скорость в данной точке, v_x, v_y, v_z — проекции скорости на координатные оси. Если жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), Н. у. принимает вид:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Для установившегося одномерного течения в трубе, канале и т. п. с площадью поперечного сечения Н. у. дает закон постоянства расхода $\rho S v = \text{const}$. *БСЭ-3.*

НЕРВ семейства множеств α — *симплициальный комплекс* $K(\alpha)$, симплексами к-рого являются конечные непустые подмножества из α, пересечение к-рых непусто. В частности, вершины $K(\alpha)$ суть элементы из α, не являющиеся пустыми множествами. *М. И. Войцеховский.*

НЕРОНА МОДЕЛЬ абелева многообразия — групповая схема, сопоставляемая абелеву многообразию и обладающая нек-рым свойством минимальности. Если R — локальное гензелево кольцо дискретного нормирования с полем вычетов k и полем частных K, A — абелево многообразие размерности d над полем K, то моделью Нерона многообразия A наз. гладкая коммутативная групповая схема $\mathfrak{A}$ над кольцом R, общий слой к-рой $\mathfrak{A}_k$ — изоморфен многообразию A, а канонич. гомоморфизм $\mathfrak{A}(R) \to \mathfrak{A}_k(K)$ является изоморфизмом. Это понятие было введено А. Нероном [1] в случае совершенного поля k. В локальном случае Н. м. существует и определена однозначно с точностью до R-изоморфизма. Н. м. обладает следующим свойством минимальности: для любой гладкой R-схемы $\mathfrak{X}$ и любого морфизма $\varphi : \mathfrak{A}_k \to \mathfrak{X}$ общих слоев существует однозначно определенный морфизм $\overline{\varphi} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{X}$ R-схем, индуцирующий морфизм φ.

Если S — одномерная регулярная нётерова схема, η — ее общая точка, $i : \eta \to S$ — ее канонич. вложение, A — абелево многообразие над $k(\eta)$, то Н. м. многообразия A определяется как гладкая квазипроективная групповая схема $\mathfrak{A}$ над S, представляющая пучок i_*A относительно плоской топологии Гротендика на S (см. [4]).

Об обобщении понятия Н. м. на произвольные схемы см. [3].

Лит.: [1] Néron A., Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, P., 1964 (Publ. Math. INES, N 21); [2] Мазур Б., «Математика», 1973, т. 17, № 2, с. 3—57; [3] Raynaud M., «C. r. Acad. sci., Ser. A.», 1966, t. 262, p. 345—47; [4] его же, в кн.: Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Amst.— P., 1968, p. 12—30; [5] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, v. 1, B., 1972.

НЕРОНА—СЕВЕРИ ГРУППА — группа классов дивизоров по отношению алгебраич. эквивалентности на неособом проективном многообразии.

Пусть X — неособое проективное многообразие размерности $\geqslant 2$, определенное над алгебраически замкнутым полем k, $D(X)$ — группа дивизоров многообразия X, а $D_a(X)$ — подгруппа алгебраически эквивалентных нулю дивизоров. Факторгруппа $D(X)/D_a(X)$ наз. группой Нерона — Севери многообразия X и обозначается $\mathrm{NS}(X)$. Теорема Нерона — Севери утверждает, что абелева группа $\mathrm{NS}(X)$ имеет конечное число образующих.

В случае $k = \mathbb{C}$ Ф. Севери в цикле статей о теории базы (см., напр., [1]) предложил доказательство этой теоремы, использующее топологические и трансцендентные средства. Первое абстрактное доказательство

(годное для поля k любой характеристики) принадлежит А. Нерону (см. [2], [3], а также [4]).

Ранг группы $\mathrm{NS}(X)$ совпадает с алгебраич. числом Бетти группы дивизоров на X, т. е. с алгебраич. рангом многообразия X. Это число наз. также числом Пикара многообразия X. Элементы конечной периодич. подгруппы $\mathrm{NS}_{\mathrm{tors}}(X)$ наз. делителями Севери, а порядок этой подгруппы — числом Севери; группа $\mathrm{NS}_{\mathrm{tors}}(X)$ является бирациональным инвариантом (см. [6]).

Имеются обобщения теоремы Нерона — Севери на другие группы классов алгебраических циклов (см. [1] (классическая теория) и [7] (современная теория)).

Лит.: [1] Severi F., «Mem. Accad. Ital.», 1934, t. 5, p. 239—83; [2] Néron A., «Bull. Soc. math. France», 1952, t. 80, p. 101—66; [3] его же, «Coll Géom. algébric. Liége», 1952, p. 119—26; [4] Lang S., Néron A., «Amer. J. Math.», 1959, v. 81, N 1, 95—118; [5] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y., 1977; [6] Бальдассарри М., Алгебраические многообразия, пер. с англ., М., 1961; [7] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 12, М., 1974, с. 77—170.

В. А. Исковских.

НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор в гильбертовом пространстве, спектральный анализ которого не укладывается в рамки теории *самосопряженных операторов* и ее простейших обобщений: теории *унитарных операторов* и теории *нормальных операторов*. Н. о. возникают при рассмотрении процессов, протекающих без сохранения энергии: в задачах с трением, в теории открытых резонаторов, в задачах неупругого рассеяния и др. К исследованию Н. о. приводят и нек-рые самосопряженные задачи, в к-рых при разделении переменных возникает операторнозначная функция $\mathscr{L}(\lambda)$, нелинейно зависящая от спектрального параметра λ. Многие из предложений, относящиеся к теории Н. о., справедливы и для операторов, действующих в произвольных банаховых пространствах, F-пространствах, топологических векторных пространствах и т. д.

Наиболее распространенным методом изучения Н. о. является метод оценки *резольвенты*, использующий теорию аналитич. функций, теорию асимптотич. разложений и др.

Первыми работами, относящимися к теории Н. о., были работы Г. Биркгофа (G. Birkhof), Я. Д. Тамаркина, В. А. Стеклова и др. по исследованию задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти ученые применяли метод Коши контурного интегрирования резольвенты.

Для дифференциальных Н. о. с частными производными долгое время отсутствовали эффективные методы изучения. Объясняется это сложным строением резольвенты оператора, как аналитич. функции.

В развитии общей теории Н. о. (и, в частности, операторов с частными производными) большую роль сыграла работа М. В. Келдыша [1] (см. также [2]). В ней изучено уравнение

$$y = \mathscr{L}(\lambda)\, y, \qquad (1)$$

где y — элемент некоторого гильбертова пространства H, а оператор $\mathscr{L}(\lambda)$ допускает представление

$$\mathscr{L}(\lambda) = B_0 + \lambda H_0 B_1 + \ldots + \lambda^{n-1} H_0^{n-1} B_{n-1} + \lambda^n H_0^n.$$

Здесь H_0 — вполне непрерывный обратимый самосопряженный оператор конечного порядка, B_j, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, — произвольные вполне непрерывные операторы. (Вполне непрерывный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве, называется оператором конечного порядка, если $\sum s_k^{\rho}(A) < \infty$ при нек-ром $0 < \rho < \infty$; через $s_k(A)$ обозначены сингулярные числа A, т. е. собственные значения оператора $(AA^*)^{1/2}$.) Собственные значения уравнения (1) — те значения λ, при к-рых это уравнение имеет нетриви-

альные решения y; эти решения наз. собственными векторами.

При сделанных выше предположениях спектр уравнения (1) дискретен. Вследствие несамосопряженности оператора $\mathscr{L}(\lambda)$, наряду с собственными векторами, естественно, возникают (при наличии кратного спектра) присоединенные векторы. В работе [1] строится цепочка присоединенных векторов $y_1, y_2, \ldots, y_k$, отвечающих собственному значению λ и собственному вектору y по правилу

$$y_\nu = \mathscr{L}(\lambda)\, y_\nu + \frac{1}{1!}\frac{\partial \mathscr{L}(\lambda)}{\partial \lambda} y_{\nu-1} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu \mathscr{L}(\lambda)}{\partial \lambda^\nu} y, \quad (2)$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, k.$$

Система собственных и присоединенных векторов оператора $\mathscr{L}(\lambda)$ наз. n-кратно полной, если любые n векторов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ пространства H можно аппроксимировать по норме H с любой точностью конечными линейными комбинациями вида

$$\sum\nolimits_k c_k \left[\frac{d^\nu v_k(t)}{dt^\nu}\right]_{t=0}$$

с одними и теми же коэффициентами c_k. Здесь $v_k(t)$ вектор-функция вида

$$e^{\lambda t}\left(y_k + \frac{t}{1!}\, y_{k-1} + \ldots + \frac{t^k}{k!}\, y\right).$$

Определение n-кратной полноты, естественно, связано с решением задачи Коши для соответствующего уравнению (1) нестационарного уравнения.

Согласно теореме М. В. Келдыша, при сделанных предположениях относительно коэффициентов $\mathscr{L}(\lambda)$ система всех собственных и присоединенных векторов оператора $\mathscr{L}(\lambda)$ n-кратно полна в H. В работе [1] было также показано, что собственные значения $\mathscr{L}(\lambda)$ асимптотически приближаются к лучам $\arg \lambda = \sqrt{\pi}/n$. При доказательстве полноты М. В. Келдыш развил новый метод оценки резольвенты абстрактного вполне непрерывного Н. о. конечного порядка. При этом выявилась особая роль, к-рую играют в проблеме полноты вольтерровы операторы — вполне непрерывные операторы с единственной точкой спектра в нуле. Для доказательства асимптотич. поведения собственных значений М. В. Келдыш [3] использовал установленную им новую тауберову теорему.

Исследования М. В. Келдыша были продолжены многими учеными. Его теорема распространена [4] на случай, когда в уравнении (1) оператор $\mathscr{L}(\lambda)$ рационально зависит от λ.

Было рассмотрено (см. [5] — [7]) уравнение $M(\lambda)y = 0$ с $M(\lambda) = I + \lambda B + \lambda^2 C$, где C — вполне непрерывный положительно определенный оператор, а B — ограниченный самосопряженный оператор. Обобщение теоремы Понтрягина (см. [8]) о существовании у J-самосопряженного оператора A максимального J-неотрицательного инвариантного подпространства позволило (см. [6] и [7]) установить, в важных для приложений ситуациях, двухкратную полноту всех собственных и присоединенных векторов $M(\lambda)$, а также однократную полноту подсистемы, соответствующую спектру, расположенному в левой (правой) полуплоскости. Эти результаты получили дальнейшее развитие.

Установлена (см. [9]) суммируемость рядов Фурье по собственным и присоединенным векторам вполне непрерывного оператора A конечного порядка ρ, у к-рого значения квадратичной формы (Ax, x) лежат в секторе комплексной плоскости, раствора меньшего π/ρ (по поводу приложений этой теоремы и ее дальнейших обобщений см. [10] и библиографию там).

Вопрос о том, когда система собственных и присоединенных векторов образует базис в гильбертовом прост-

ранстве, изучался в ряде работ (см. [11]). Наиболее общие условия, при к-рых система собственных и присоединенных векторов диссипативного вполне непрерывного оператора образует базис, найдена в [12].

В случае сингулярных дифференциальных операторов с дискретным спектром получен (см. в [11] и [13]) ряд тонких результатов о полноте собственных и присоединенных функций оператора Штурма—Лиувилля с комплексным потенциалом. Важные результаты получены в случае эллиптич. операторов (см. [14]). Дано обобщение теоремы Келдыша на случай обобщенных собственных и присоединенных функций несамосопряженных эллиптич. операторов (см. [15], [16]).

Попытка перенести теорему о приведении конечномерного оператора к жордановой форме на бесконечномерный случай привела к построению треугольного интегрального представления. Для вполне непрерывных операторов $B=B_R+iB_I$, где B_R и B_I — самосопряженные и B_I имеет конечный порядок, получен аналог теоремы Шура об унитарной эквивалентности оператора B треугольному (см. [17]). Особое место в проблеме треугольного представления заняли вольтерровы операторы.

В проблеме треугольного представления существенную роль сыграла теорема Неймана о существовании у линейного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве нетривиального инвариантного подпространства; у произвольного ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве нетривиального инвариантного подпространства может не быть; соответствующий вопрос для случая гильбертова пространства остается открытым (1982). Вольтерров оператор наз. одноклеточным, если из каждых двух его инвариантных подпространств Q_1 и Q_2, либо $Q_1\subset Q_2$, либо $Q_2\subset Q_1$. Найдено [18] необходимое и достаточное условие однолистности оператора B в предположении, что B_I — ядерный неотрицательно определенный: это условие формулируется в терминах роста резольвенты оператора B при $\lambda\to 0$. Указано [19] простое достаточное условие одноклеточности.

Н. о. с непрерывным спектром впервые были исследованы М. А. Наймарком (см. [20], [21]), к-рый получил разложение в интеграл Фурье, связанное с несамосопряженной задачей

$$l(y)=-y''+p(x)\,y=\lambda y,\quad 0\leqslant x<\infty, \tag{3}$$

$$y'(0)-\theta y(0)=0, \tag{4}$$

где $p(x)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty (1+x^2)\,|\,p(x)\,|\,dx<\infty, \tag{5}$$

θ — комплексное число. Из результатов работы [20], в частности, следует, что в окрестности точек действительной оси, обращающих функцию $A(s)=\omega'_x(0,\ s)-\theta\omega(0,\ s)$ в нуль ($s=\sqrt{\lambda}$), спектральные проекторы оператора (3)—(4) неограничены (через $\omega(x,\ s)$ обозначено решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $\omega(x,\ s)e^{-ixs}\to 1$ при $x\to+\infty$ — решение Иоста); действительные нули функции $A(s)$ названы в [20] спектральными особенностями. Получено (см. [22]) обобщение результатов работы [20] на случай уравнения Шредингера в трехмерном пространстве. В развитие работы [20] было показано (см. [23]), что в общем случае (без ограничения типа (5)) спектральная функция дифференциального оператора должна рассматриваться как линейный непрерывный функционал, заданный на некотором топологическом пространстве.

Исследовалась (см. [24]) система несамосопряженных уравнений с особыми точками, положение к-рых зави-

сит от спектрального параметра. Эти системы встречаются в безмоментной теории оболочек. Для таких систем установлены асимптотич. свойства решений, а также доказаны теоремы разрешимости типа теоремы Коши. Установлены теоремы полноты системы собственных и присоединенных функций несамосопряженных интегродифференциальных операторов, порождающих нерегулярную задачу.

Важной задачей теории дифференциальных Н. о. является задача о разложении ядра оператора Грина в биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям, а также проблема их базисности. Я. Д. Тамаркин [25] исследовал разложения суммируемой функции в ряд по собственным и присоединенным функциям регулярной задачи, а также вопросы равносходимости с тригонометрич. рядом Фурье. Позже было показано (см. [26], [27]), что для нерегулярных задач равносходимость с тригонометрическим рядом не имеет места.

Для усиленно регулярных условий система собственных и присоединенных функций образует базис в L_2. Показано (см. [28], [29]), что указанная система образует не только базис, но и так наз. базис Рисса.

Развит в (см. [30]) важный метод изучения условий базисности и равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям обыкновенного Н. о. Этот метод является дальнейшим развитием идей, примененных при исследовании самосопряженных задач. Предложена новая трактовка собственных и присоединенных функций, что позволило отказаться от конкретного вида граничных условий; рассмотрены общие обыкновенные дифференциальные операторы или пучки таких операторов и установлены необходимые и достаточные условия базисности собственных и присоединенных функций таких операторов, а также критерии равносходимости. Метод основан лишь на формуле среднего значения для собственных и присоединенных функций (см. также [31]). Оказалось также, что если у оператора число присоединенных функций бесконечно, то свойство базисности зависит от выбора последних (см. [32]).

Для несамосопряженных эллиптич. операторов имеет место (см. [33]) сходимость некоторой последовательности средних типа Пуассона частичных сумм биортогонального ряда, т. е. предложен способ суммирования.

Разложения по собственным и присоединенным функциям нерегулярных задач впервые получены для задачи вида $y'''=\lambda y$, $y(0)=y'(0)=y(1)-0$. Доказано (см. [26]), что в равномерно сходящиеся ряды такого вида могут быть разложены функции, удовлетворяющие нек-рым условиям аналитичности.

К числу фундаментальных относятся исследования (см. [34]), в к-рых изучается вопрос о возмущении спектра оператора Лапласа при изменении области. При этом впервые была выявлена роль емкости варьируемого множества на спектр оператора. Эти методы с успехом применяются при исследовании несамосопряженных задач.

В теории Н. о. успешно применяются методы регуляризации, основы к-рых были заложены в [35]. Пример — вопрос регуляризованных следов Н. о. Первой работой по теории следов была статья [36], где был вычислен регуляризованный след оператора Штурма — Лиувилля. Наиболее общие результаты в теории следов операторов получены в статьях [37], [38]. Оказалось, что формулы следов обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов, зависящих сложным образом от спектрального параметра, могут быть получены как следствия из формул регуляризованных сумм корней некоторого класса целых функций. (По поводу следов для сингулярных операторов и операторов с частными производными см. [38], [39].)

К числу важных работ, в к-рых развиты новые методы и идеи теории Н. о., относится также обзорный доклад [40].

Построение окончательной теории Н. о. далеко от завершения (1982). С одной стороны, в самой этой теории формируются новые направления исследования, напр. теория рассеяния [41], построение теории операторов сжатия [42], метод канонического оператора Маслова [43], теория спектральных операторов [44] и др., а с другой стороны — исследования прикладных задач, механики, математической физики подсказывают новые пути развития этой теории.

Лит.: [1] Келдыш М. В., «Докл. АН СССР», 1951, т. 77, № 1, с. 11—14; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 4, с. 15—41; [3] его же, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 77—86; [4] Аллахвердиев Дж. Э., «Докл. АН СССР», 1957, т. 115, № 2, с. 207—10; [5] Лангер Г., «Докл. АН СССР», 1960, т. 134, № 2, с. 263—66; [6] Крейн М. Г., там же, 1964, т. 154, № 5, с. 1023—26; [7] Крейн М. Г., Лангер Г. К., в кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды, М., 1965 (Тр. Международного симпозиума, т. 2); [8] Понтрягин Л. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1944, т. 8, с. 243—80; [9] Лидский В. Б., «Докл. АН СССР», 1956, т. 110, № 2, с. 172—75; [10] Аграновичм. С., «Функц. анализ и его приложения», 1976, т. 10, № 3, с. 1—12; [11] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1965; [12] Кацнельсон В. Э., «Функц. анализ и его приложения», 1967, т. 1, № 2, с. 39—51; [13] Лидский В. Б., «Докл. АН СССР», 1957, т. 113, № 1, с. 28—31; [14] Костюченко А. Г., там же, 1964, т. 158, № 1, с. 41—44; [15] Пономарев С. М., «Дифф. уравнения», 1974, т. 10, № 12, с. 2294—96; [16] Круковский Н. М., там же, 1976, т. 12, № 10, с. 1832—51; [17] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., 1967; [18] Бродский М. С., Кисилевский Г. Э., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1966, т. 30, № 6, с. 1213—28; [19] Никольский Н. К., «Докл. АН СССР», 1967, т. 172, № 2, с. 287—90; [20] Наймарк М. А., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1954, т. 3, с. 181—270; [21] его же, Линейные дифференциальные операторы, 2 изд., М., 1969; [22] Гасымов М. Г., «Докл. АН АзССР», 1966, т. 22, № 10, с. 9—12; [23] Марченко В. А., «Матем. сб.», 1960, т. 52, с. 739—88; [24] Садовничий В. А., «Тр. Семинара им. И. Г. Петровского», 1976, в. 2, с. 211—21; [25] Тамаркин Я. Д., О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений..., Пг., 1917; [26] Ward L. E., «Ann. Math.», 1925, v. 26, p. 21—36; его же, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1932, v. 34, p. 417—34; [27] Хромов А. П., «Тр. Второй науч. конференции математич. кафедр педагогич. вузов Поволжья» (Куйбышев), 1962, в. 1, с. 109—13; [28] Михайлов В. П., «Докл. АН СССР», 1962, т. 144, № 5, с. 981—84; [29] Кесселъман Г. М., «Изв. ВУЗов. Математика», 1964, № 2, с. 82—93; [30] Ильин В. А., «Докл. АН СССР», 1976, т. 230, № 1, с. 30—33; [31] Моисеев Е. И., там же, 1977, т. 233, № 6, с. 1042—45; [32] Тихомиров В. В., «Матем. сб.», 1977, т. 102, № 1, с. 33—55; [33] Лидский В. Б., «Матем. сб.», 1962, т. 57, № 2, с. 137—50; [34] Самарский А. А., «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 3, с. 133—34; [35] Тихонов А. Н., «Докл. АН СССР», 1963, т. 153, № 1, с. 49—52; 1943, т. 39, № 5, с. 195—98; [36] Гельфанд И. М., Левитан Б. М., там же, 1953, т. 88, № 4, с. 593—96; [37] Лидский В. Б., Садовничий В. А., там же, 1967, т. 176, № 2, с. 259—62; [38] Садовничий В. А., «Дифф. уравнения», 1974, т. 10, № 7, с. 1276—85; [39] Садовничий В. А., Любишкин В. А., «Докл. АН СССР», 1981, т. 261, № 2, с. 290—93; [40] Келдыш М. В., Лидский В. Б., в кн.: Тр. Четвертого Всесоюзного математического съезда, т. 1, Л., 1963, с. 101—20; [41] Лакс П. Д., Филлипс Р. С., Теория рассеяния для автоморфных функций, пер. с англ., М., 1979; [42] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; [43] Маслов В. П., Операторные методы, М., 1973; [44] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 3, М., 1974.

В. А. Садовничий.

НЕСГЛАЖИВАЕМОЕ МНОГООБРАЗИЕ — кусочно линейное или топологическое многообразие, не допускающее гладкой структуры.

Сглаживанием кусочно линейного многообразия X наз. кусочно линейный изоморфизм $f: M \to X$, где M — гладкое многообразие. Многообразие, не допускающее сглаживания, и наз. несглаживаемым многообразием. Сказанное с нек-рыми изменениями применимо и к топологическим многообразиям.

Пример Н. м. Пусть W^{4k}, $k>1$, — $4k$-мерное многообразие Милнора (см. *Древовидное многообразие*). В частности, W^{4k} параллелизуемо, его сигнатура рав-

на 8, и его край $M = \partial W^{4k}$ гомотопически эквивалентен сфере S^{4k-1}. Подклейка к W конуса CM над ∂W приводит к пространству P^{4k}. При этом, так как M есть кусочно линейная сфера (см. обобщенная *Пуанкаре гипотеза*), то CM кусочно линейный диск, так что P — кусочно линейное многообразие. С другой стороны, P есть Н. м., так как его сигнатура равна 8, а сигнатура гладкого почти параллелизуемого (т. е. параллелизуемого после выкалывания точки) 4-х мерного многообразия кратна числу σ_k, экспоненциально растущему с ростом k. Многообразие M не диффеоморфно сфере S^{k-1}, т. е. M — *Милнора сфера*.

Критерий сглаживаемости кусочно линейного многообразия. Пусть O_n — ортогональная группа, а PL_n — группа сохраняющих начало кусочно линейных гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ (см. *Кусочно линейная топология*). Включение $O_n \to PL_n$ индуцирует расслоение $BO_n \to BPL$, где BG — *классифицирующее пространство* группы G. При $n \to \infty$ получается расслоение $p : BO \to BPL$, слой к-рого обозначается через M/O. Кусочно линейное многообразие X обладает линейным стабильным нормальным расслоением ν, классифицируемым отображением $\nu : X \to BPL$. Если же X является гладким (сглаживаемым) многообразием, то оно обладает векторным стабильным нормальным расслоением $\overline{\nu}$, классифицируемым отображением $\overline{\nu} : X \to BO$, причем $p\circ\overline{\nu}=\nu$. Это условие также и достаточно, т. е. замкнутое кусочно линейное многообразие X сглаживаемо тогда и только тогда, когда его кусочно линейное стабильное нормальное расслоение допускает векторную редукцию, т. е. когда отображение $\nu : X \to BPL$ «поднимается» в BO (существует такое $\overline{\nu} : X \to BO$, что $p\circ\overline{\nu}=\nu$).

Два сглаживания $f : M \to X$ и $g : N \to X$ наз. эквивалентными, если существует диффеоморфизм $h : M \to N$ с $f=gh$ (см. *Структура на многообразии*). Множество $\mathrm{ts}(X)$ классов эквивалентности сглаживаний находится в естественном взаимно однозначном соответствии с классами послойной гомотопности поднятий $\overline{\nu} : X \to BO$ отображения $\nu : X \to BO$. Иными словами, для сглаживаемого X множество $\mathrm{ts}(X)=[X, PL/O]$.

Лит.: [1] Kervaire M., «Comment. math. helv.», 1960, t. 34, p. 257—70; [2] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979.

Ю. И. Рудяк.

НЕСМЕШАННЫЙ ИДЕАЛ — идеал $\mathfrak{m}$ области целостности R (конечно порожденной над нек-рым полем k), обладающий следующим свойством: все простые идеалы $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$, ассоциированные с примарными идеалами $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_s$ из примарного разложения

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{Q}_1\cap\ldots\cap\mathfrak{Q}_s,$$

имеют одну и ту же размерность, т. е. факторкольца $R/\mathfrak{P}_i$ имеют одну и ту же размерность Крулля для всех i. Эта общая размерность наз. размерностью несмешанного идеала $\mathfrak{m}$.

Если R — кольцо регулярных функций на нек-ром аффинном многообразии X, то его идеал $\mathfrak{m}$ — Н. и. тогда и только тогда, когда все неприводимые компоненты подмногообразия $Y\subset X$, определяемого идеалом $\mathfrak{m}$, имеют одну и ту же размерность. *Л. В. Кузьмин.*

НЕСМЕЩЁННАЯ ОЦЕНКА — статистическая оценка, математич. ожидание к-рой совпадает с оцениваемой величиной. Пусть по реализации случайной величины X, принимающей значения в выборочном пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, \mathsf{P}_\theta)$, $\theta\in\Theta$, надлежит оценить функцию $f : \Theta \to \Omega$, отображающую параметрич. множество Θ в нек-рое множество Ω, и пусть в качестве оценки функции $f(\theta)$ выбрана статистика $T=T(X)$. Если статистич. оценка T такова, что равенство

$$\mathsf{E}_\theta\{T\}=\int_{\mathfrak{X}} T(x)\,d\mathsf{P}_\theta(x)=f(\theta)$$

выполняется для всех $\theta\in\Theta$, то T наз. несмещенной оценкой функции $f(\theta)$. Про Н. о. часто говорят, что она лишена систематич. ошибки.

Пример 1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайные величины, имеющие одно и то же математич. ожидание θ, т. е.

$$\mathsf{E}\{X_1\}=\mathsf{E}\{X_2\}=\ldots=\mathsf{E}\{X_n\}=\theta.$$

В таком случае статистика

$$T=c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_nX_n,\ c_1+c_2+\ldots+c_n=1$$

является Н. о. математич. ожидания θ. В частности, среднее арифметическое наблюдений $\overline{X}=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n$ является Н. о. для θ. В данном примере $f(\theta)=\theta$.

Пример 2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, подчиняющиеся одному и тому же вероятностному закону, функция распределения к-рого есть $F(x)$, т. е.

$$\mathsf{P}\{X_i<x\}=F(x),\ |x|<\infty,\ i=1, 2, \ldots, n.$$

В таком случае функция эмпирич. распределения $F_n(x)$, построенная по наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$, является Н. о. функции распределения $F(x)$, т. е. $\mathsf{E}\{F_n(x)\}=F(x),\ |x|<\infty$.

Пример 3. Пусть $T=T(X)$ — Н. о. параметра θ, т. е. $\mathsf{E}\{T\}=\theta$, и пусть $f(\theta)=a\theta+b$ — линейная функция. В таком случае статистика $aT+b$ является Н. о. для $f(\theta)$.

Следующий пример показывает, что имеются такие случаи, в к-рых Н. о. существуют и даже единственны, но при этом они могут оказаться бессмысленными.

Пример 4. Пусть X — случайная величина, подчиняющаяся геометрич. распределению, параметр успеха к-рого есть θ, т. е. для любого натурального числа k

$$\mathsf{P}\{X=k\mid\theta\}=\theta(1-\theta)^{k-1},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

Если $T=T(X)$ — Н. о. параметра θ, то она должна удовлетворять уравнению несмещенности $\mathsf{E}\{T\}=\theta$ или, что то же самое, уравнению

$$\sum_{k=1}^{\infty}T(k)\,\theta(1-\theta)^{k-1}=\theta,$$

единственное решение к-рого есть

$$T(X)=\begin{cases}1, & X=1,\\ 0, & X\geqslant 2.\end{cases}$$

Очевидно, что статистика T является хорошей только, если θ очень близко к 1 либо к 0, в противном случае T не несет никакой полезной информации о параметре θ.

Пример 5. Пусть случайная величина X подчиняется биномиальному закону с параметрами n и θ, т. е. для любого $k=0, 1, \ldots, n$

$$\mathsf{P}\{X=k\mid n,\ \theta\}=\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k},\quad 0<\theta<1.$$

Известно, что наилучшей Н. о. (в смысле минимума квадратичного риска) параметра успеха θ является статистика $T=X/n$. Тем не менее, если θ — иррациональное число, то $\mathsf{P}\{T=\theta\}=0$. Этот пример отражает одно общее свойство случайных величин, заключающееся в том, что случайная величина, вообще говоря, не обязана принимать значение, совпадающее с ее математич. ожиданием. И наконец, возможны случаи, когда Н. о. вообще не существуют. Так, если в условиях примера 5 в качестве оцениваемой функции выбрать $f(\theta)=1/\theta$, то (см. пример 6) не существует Н. о. $T(X)$ для $1/\theta$.

Приведенные примеры демонстрируют, что само по себе понятие Н. о., при всей своей естественности, не помогает экспериментатору избавиться от всех ос-

ложнений, к-рые могут ждать его при построении статистич. оценок, так как Н. о. может оказаться как очень хорошей, так и совершенно бессмысленной, она может быть неединственной, а может вовсе не существовать. Кроме того, Н. о., как и всякая точечная оценка, обладает еще следующим недостатком: она дает лишь нек-рое приближенное значение для истинного значения оцениваемой величины, к-рое как было неизвестным до эксперимента, таковым и остается после его проведения. Вообще, в задаче построения точечных статистич. оценок нет серьезных обоснований к тому, чтобы во всех случаях стремиться к получению Н. о., если не считать того, что при изучении Н. о. возникает простая и стройная теория. Так, напр., *Рао — Крамера неравенство* имеет простой вид для Н. о. Именно, если $T=T(X)$ — Н. о. для функции $f(\theta)$, то при довольно широких условиях регулярности семейства $\{\mathsf{P}_\theta\}$ и функции $f(\theta)$ из неравенства Рао — Крамера следует, что

$$\mathsf{D}\{T\}=\mathsf{E}\{[T-f(\theta)]^2\}\geqslant\frac{1}{I(\theta)}f'(\theta), \qquad (1)$$

где $I(\theta)$ — информационное количество Фишера. Таким образом, существует нижняя граница для дисперсий Н. о. функции $f(\theta)$, и этой границей служит $f'(\theta)/I(\theta)$. В частности, если $f(\theta)\equiv\theta$, то из (1) следует, что

$$\mathsf{D}\{T\}\geqslant 1/I(\theta).$$

Статистич. оценка, для к-рой в неравенстве Рао — Крамера достигается равенство, наз. э ф ф е к т и в н о й. Так, статистика $T=X/n$, рассмотренная в примере 5, является эффективной Н. о. параметра успеха θ биномиального закона, т. к.

$$\mathsf{D}\{T\}=\frac{1}{n}\theta(1-\theta)$$

и

$$I(\theta)=\mathsf{E}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left[\theta^X(1-\theta)^{n-X}\right]\right]^2\right\}=\frac{n}{\theta(1-\theta)},$$

т. е. $T=X/n$ является наилучшей точечной оценкой параметра в смысле минимума квадратичного риска в классе всех Н. о.

Естественно, что для экспериментатора представляет интерес тот случай, когда класс Н. о. достаточно богат, чтобы иметь возможность выбора наилучшей в каком-то смысле Н. о. В этой связи большую роль играет *Рао — Блэкуэлла — Колмогорова теорема*, позволяющая строить Н. о. с наименьшей дисперсией. Эта теорема утверждает, что если семейство $\{\mathsf{P}_\theta\}$ имеет достаточную статистику $\Psi=\Psi(X)$, а $T=T(X)$ — произвольная Н. о. функции $f(\theta)$, то статистика $T^*=\mathsf{E}_\theta\{T|\Psi\}$, получающаяся в результате осреднения T при фиксированной достаточной статистике Ψ, имеет риск, не превосходящий риска статистики T относительно произвольной выпуклой функции потерь при всех $\theta\in\Theta$. Если при этом семейство $\{\mathsf{P}_\theta\}$ является полным, то статистика T^* определяется единственным образом. То есть из теоремы Рао — Блэкуэлла — Колмогорова следует, что Н. о. нужно искать лишь в терминах достаточных статистик, если они существуют. Практич. ценность теоремы Рао — Блэкуэлла — Колмогорова заключается в том, что она дает рецепт построения наилучших Н. о., а именно: нужно построить произвольную Н. о. для $f(\theta)$, а затем осреднить ее по достаточной статистике.

П р и м е р 6. Пусть случайная величина X имеет распределение Паскаля (отрицательное биномиальное распределение) с параметрами r и θ ($r\geqslant 2$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$), т. е.

$$\mathsf{P}\{X=k\,|\,r,\theta\}=\binom{r+k-1}{k}\theta^r(1-\theta)^k,\quad k=r,\ r+1,\ldots$$

В этом случае статистика $T=(r-1)/(X-1)$ является Н. о. параметра θ. Так как статистика T выражена в терминах достаточной статистики X, а система функций $1, x, x^2, \ldots$ является полной на отрезке $[0, 1]$, то T является единственной Н. о., а следовательно, наилучшей оценкой для θ.

Пример 7. Пусть X — случайная величина, подчиняющаяся биномиальному закону с параметрами n и θ. Производящая функция $Q(z)$ этого биномиального закона выражается формулой

$$Q(z)=\mathsf{E}\{z^X\}=(z\theta+q)^n, \quad q=1-\theta,$$

откуда следует, что для любого целого числа $k=1, 2, \ldots, n$

$$Q^{(k)}(z)=n(n-1)\ldots(n-k+1)(z\theta+q)^{n-k}\theta^k=$$
$$=n^{[k]}(z\theta+q)^{n-k}\theta^k.$$

С другой стороны,

$$Q^{(k)}(1)=\mathsf{E}\{X(X-1)\ldots(X-k+1)\}=\mathsf{E}\{X^{[k]}\},$$

откуда следует, что

$$\mathsf{E}\left\{\frac{1}{n^{[k]}}X^{[k]}\right\}=\theta^k,$$

т. е. статистика

$$T_k(X)=\frac{1}{n^{[k]}}X^{[k]} \tag{2}$$

является Н. о. для θ^k, причем в силу того, что $T_k(X)$ выражена в терминах достаточной статистики X, а также в силу полноты системы функций $1, x, x^2, \ldots$ на отрезке $[0, 1]$ следует, что $T_k(X)$ — единственная, а значит, и наилучшая Н. о. для θ^k.

В связи с этим примером возникает следующий вопрос: какие функции $f(\theta)$ от параметра θ допускают несмещенное оценивание. А. Н. Колмогоров показал [1], что только для многочленов степени $m\leqslant n$ существуют Н. о. Так, если

$$f(\theta)=a_0+a_1\theta+\ldots+a_m\theta^m, \quad 1\leqslant m\leqslant n,$$

то из (2) следует, что статистика

$$T=a_0+\sum_{k=1}^{m}a_kT_k(X)$$

является единственной Н. о. для $f(\theta)$. Из этого результата, в частности, следует, что для функции $f(\theta)=1/\theta$ не существует Н. о.

Пример 8. Пусть X — случайная величина, подчиняющаяся закону Пуассона с параметром θ, т. е. для любого целого числа $k=0, 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{P}\{X=k\mid\theta\}=\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}, \quad \theta>0.$$

В силу того, что $\mathsf{E}\{X\}=\theta$, само наблюдение X является Н. о. своего математич. ожидания θ. В свою очередь, напр., Н. о. функции $f(\theta)=\theta^2$ является $X(X-1)$. Вообще, статистика

$$X^{[r]}=X(X-1)(X-2)\ldots(X-r+1), \quad r=1, 2, \ldots,$$

является Н. о. функции $f(\theta)=\theta^r$. Из этого факта, в частности, следует, что статистика

$$T(X)=1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^rX^{[r]}$$

является Н. о. функции $f(\theta)=(1+\theta)^{-1}$, $0<\theta<1$. Вообще, если функция $f(\theta)$ допускает несмещенное оценивание, то для нее должно выполняться уравнение несмещенности $\mathsf{E}\{T(X)\}=f(\theta)$, к-рое равносильно следующему:

$$\sum_{k=0}^{\infty}T(k)\frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}=f(\theta),$$

откуда получается, что Н. о. существует для любой функции $f(\theta)$, допускающей разложение в степенной ряд в своей области определения $\Theta \subset R_1^+$.

Пример 9. Пусть независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ подчиняются одному и тому же закону Пуассона с параметром θ, $\theta > 0$. Производящая функция этого закона, выражающаяся формулой

$$g_z(\theta) = \exp\{\theta(z-1)\},$$

является целой аналитич. функцией, и, следовательно, для нее существует единственная Н. о. Достаточной статистикой в этом случае является $X = X_1 + \ldots + X_n$, к-рая подчиняется закону Пуассона с параметром $n\theta$. Если $T(X)$ — Н. о. для $g_z(\theta)$, то она должна удовлетворять уравнению несмещенности

$$\mathsf{E}_\theta\{T(X)\} = g_z(\theta) = e^{\theta(z-1)},$$

откуда следует, что

$$T(X) = \begin{cases} \binom{X}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{X-k}, & 0 \leqslant k \leqslant X, \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. Н. о. для производящей функции закона Пуассона является производящая функция биномиального закона с параметрами X и $1/n$.

Примеры 6—9 демонстрируют, что в нек-рых случаях, довольно часто встречающихся на практике, именно благодаря понятию Н. о. задача построения наилучших оценок оказывается легко разрешимой, если ограничиться классом Н. о. А. Н. Колмогоров [1] рассмотрел вопрос построения Н. о., в частности задачу построения Н. о. функции распределения нормального закона, параметры к-рого неизвестны. Э. Леману (E. Lehmann) принадлежит более общее определение Н. о. Согласно определению Э. Лемана (см. [2]) статистич. оценка $T = T(X)$ параметра θ наз. несмещенной относительно функции потерь $L(\theta, T)$, если

$$\mathsf{E}_\theta\{L(\theta', T(X))\} \geqslant \mathsf{E}_\theta\{L(\theta, T(X))\} \text{ для всех } \theta,\ \theta' \in \Theta.$$

Имеется модификация этого определения (см. [3]). Ю. В. Линником и его учениками (см. [4]) была установлена независимость наилучшей Н. о. от функции потерь при довольно широких предположениях.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1950, т. 14, № 4, с. 303—26; [2] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; [3] Клебанов Л. Б., «Теория вероятн. и ее применения», 1976, т. 21, № 3, с. 584—98; [4] Клебанов Л. Б., Линник Ю. В., Рухин А. Л., «Докл. АН СССР», 1971, т. 200, № 5, с. 1024—25; [5] Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975. *М. С. Никулин.*

НЕСМЕЩЕННЫЙ КРИТЕРИЙ — статистический критерий размера α, $0 < \alpha < 1$, для проверки сложной гипотезы $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против сложной альтернативы $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, функция мощности к-рого $\beta(\cdot)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\beta(\theta) \leqslant \alpha, \text{ если } \theta \in \Theta_0,$$

$$\beta(\theta) \geqslant \alpha, \text{ если } \theta \in \Theta_1.$$

Во многих задачах статистич. проверки гипотез не существуют равномерно *наиболее мощные критерии*, но если ограничиться классом Н. к., то задача построения равномерно наиболее мощного критерия может иметь положительное решение. Если в задаче проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_1 существует равномерно наиболее мощный критерий, то он является Н. к., так как мощность такого критерия не может быть меньше мощности т. н. бесполезного критерия, критич. функция к-рого $\varphi(\cdot)$ постоянна и равна размеру критерия α, т. е. $\varphi(X) = \alpha$, где X — случайная величина, по реализации к-рой проверяют гипотезу H_0 против альтернативы H_1.

Пример. *Знаков критерий* является равномерно наиболее мощным Н. к. в задаче проверки гипотезы H_0, согласно к-рой неизвестное истинное значение параметра p биномиального распределения равно $1/2$, против альтернативы H_1: $p \neq 1/2$.

Лит.: [1] Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979.

М. С. Никулин.

НЕСОБСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — то же, что *вырожденное распределение.*

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл от неограниченной функции или от функции по неограниченному множеству. Пусть функция f определена на конечном или бесконечном полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и для любого $\eta \in [a, b)$ функция f интегрируема по Риману (по Лебегу) на отрезке $[a, \eta]$. Тогда предел

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x)\,dx \tag{1}$$

(в случае $b=+\infty$ условие $\eta \to b-0$ понимается как $\eta \to +\infty$) наз. несобственным интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если предел (1) существует, то говорят, что Н. и. сходится, если не существует — расходится. Напр., Н. и.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad a > 0,$$

при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ расходится. Если же $b < +\infty$, то

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Если $b < +\infty$ и функция f интегрируема по Риману (по Лебегу) на отрезке $[a, b]$, то Н. и. (1) совпадает с определенным интегралом.

Аналогично при соответствующих предположениях определяют Н. и. по промежутку $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to a+0} \int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Если функция f интегрируема по Риману (по Лебегу) на каждом отрезке $[\xi, \eta] \subset (a, b)$, $c \in (a, b)$ и существуют Н. и.

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^b f(x)\,dx,$$

то Н. и.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

определяется как сумма

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

и не зависит от выбора точки c.

Если на интервале (a, b) имеется конечное число точек x_k $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$ таких, что функция f интегрируема по Риману (по Лебегу) на каждом отрезке $[\xi, \eta]$, не содержащем ни одной точки x_k, и для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ существуют Н. и.

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx,$$

то Н. и.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

Это определение не зависит от выбора точек x_k.

На Н. и. переносятся общие свойства интегралов: линейность, аддитивность относительно промежутков, по к-рым производится интегрирование, правило интегрирования неравенств, теоремы о среднем, интегрирование по частям и замены переменного, формула Ньютона — Лейбница. Напр., если функция f почти всюду на $[a, b)$ совпадает с производной функции F, к-рая абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a, \eta]$, $a<\eta<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0)-F(a).$$

Для выяснения сходимости Н. и. от знакопостоянных функций применяется п р и з н а к с р а в н е н и я: напр., для Н. и. вида (1) при выполнении условия

$$f(x)=O(g(x)),$$

$x\to b-0$, $f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$, $x\in[a, b)$, из сходимости Н. и.

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

следует сходимость Н. и.

$$\int_a^b f(x)\,dx;$$

функция $g(x)$ наз. в этом случае ф у н к ц и е й с р а в н е н и я. В качестве функции сравнения для интегралов (1) в случае конечного предела интегрирования b часто используются функции $1/(b-x)^\alpha$; для интегралов вида (2) в случае конечности предела интегрирования a — функции $1/(x-a)^\alpha$, при наличии одного или двух бесконечных пределов интегрирования — функции $1/|x|^\alpha$. Из признака сравнения следует, напр., если для неотрицательной функции f, определенной при $x\geqslant a$, существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)=k,$$

то при $\alpha>1$ и $0\leqslant k<+\infty$ Н. и.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

вида (1) сходится, а при $\alpha\leqslant 1$ и $0<k\leqslant+\infty$ Н. и. расходится.

Необходимое и достаточное условие сходимости Н. и. дает критерий Коши. Так, Н. и. вида (1) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\eta\in[a, b)$, что для всех $\eta'\in(\eta, b)$, $\eta''\in(\eta, b)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Н. и.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

наз. а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я, если сходится Н. и.

$$\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Если Н. и. абсолютно сходится, то он сходится и совпадает с интегралом Лебега. Существуют Н. и. сходящиеся, но не абсолютно. Напр., для конечного промежутка Н. и.:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx,$$

а для бесконечного:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Существуют различные признаки для установления сходимости Н. и. Так, если функции f и g определены

для $x \geqslant a$, функция f имеет на полуоси $x \geqslant a$ ограниченную первообразную, а g — монотонная функция, стремящаяся к нулю при $x \to +\infty$, то Н. и.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

сходится. Другой признак: если Н. и.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

сходится, а функция g монотонна и ограничена при $x \geqslant a$, то Н. и.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

сходится.

Сходимость Н. и. можно выразить в терминах сходящихся рядов: напр., для того чтобы Н. и. (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $b_n \to b$, $a \leqslant b_n < b$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)\, dx,$$

причем в случае его сходимости сумма ряда совпадает с Н. и. (1).

Понятие Н. и. обобщается для функций многих переменных. Пусть функция f определена на открытом (ограниченном или неограниченном) множестве G n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и интегрируема по Риману на любом измеримом по Жордану множестве E, $\overline{E} \subset G$. Функцию f наз. интегрируемой в несобственном смысле по множеству G, если для любой последовательности измеримых по Жордану множеств E_k таких, что $\overline{E_k} \subset G$, $E_k \subset E_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = G$, существует предел

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{E_k} f(x)\, dx,$$

не зависящий от выбора указанной последовательности E_k. Этот предел, если он существует, наз. Н. и.

$$\int_G f(x)\, dx$$

и, как в одномерном случае, говорят, что этот интеграл сходится. Он существует тогда и только тогда, когда существует интеграл

$$\int_G |f(x)|\, dx.$$

В этом случае Н. и.

$$\int_G f(x)\, dG$$

совпадает с интегралом Лебега. Это обстоятельство связано с тем, что при $n = 1$ и данном выше определении Н. и. переход к пределу осуществлялся по весьма специальному классу измеримых по Жордану множеств, а именно по отрезкам. В качестве же E_k были взяты произвольные измеримые по Жордану множества. Впрочем, при $n \geqslant 2$ сделанное утверждение остается в силе и в том случае, когда в качестве множеств E_k взяты только измеримые по Жордану области. Таким образом, в этом случае понятие Н. и. не приводит к новому понятию по сравнению с интегралом Лебега.

Для Н. и. от функции многих переменных справедлив признак сравнения, аналогичный одномерному случаю. В качестве интегралов сравнения берут

$$\int_{r \leqslant 1} \frac{dx}{r^{\alpha}} \quad \text{и} \quad \int_{r \geqslant 1} \frac{dx}{r^{\alpha}},$$

где

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}.$$

Первый сходится при $\alpha<n$ и расходится при $\alpha\geqslant n$, второй сходится при $\alpha>n$ и расходится при $\alpha\leqslant n$.

К Н. и. относятся интегралы в смысле главного значения. Пусть функция f определена на открытом множестве $G\subset\mathbb{R}^n$, кроме, быть может, точки $x\in G$, и пусть для любого $\varepsilon>0$ функция f интегрируема (по Риману или по Лебегу) на множестве $G\setminus U(x,\ \varepsilon)$, где $U(x,\ \varepsilon)$ есть ε-окрестность точки x. Тогда если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{G\setminus U(x,\ \varepsilon)}f(x)\,dx,$$

то его наз. интегралом в смысле главного значения и обозначают

$$\text{v. p.}\int_G f(x)\,dx.$$

Если интеграл

$$\int_G f(x)\,dx$$

существует как Н. и., то он существует и в смысле главного значения. Обратное, вообще говоря, неверно. Напр., Н. и.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$$

расходится, а

$$\text{v. p.}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}=0.$$

Аналогично определяют интегралы в смысле главного значения в бесконечно удаленной точке.

Лит.: [1] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, т. 2, М., 1973; [2] Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 2. М., 1981; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 2, М., 1975. *Л. Д. Кудрявцев.*

НЕСОВМЕСТИМОСТЬ — свойство *формальной системы*, противоположное свойству *непротиворечивости*: формальная система наз. несовместимой, или несовместной, если она не является непротиворечивой. Если нек-рый класс формул в языке данной формальной системы не является непротиворечивым, то говорят, что он несовместим с данной формальной системой. В частности, если класс, состоящий из одной формулы, несовместим с формальной системой, эта формула наз. несовместимой с данной системой. Н. формулы означает, что если ее включить в множество аксиом, то получится несовместимая формальная система.

Несовместимые формальные системы не имеют содержательной интерпретации.

Обнаружение Н. отрицания нек-рой формулы с данной формальной системой составляет т. н. метод доказательства от противного: для широкого класса формальных систем из Н. формулы φ следует выводимость ее отрицания. *В. Е. Плиско.*

НЕСОИЗМЕРИМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ — см. *Соизмеримые и несоизмеримые величины.*

НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ — раздел математич. логики, посвященный приложению теории нестандартных моделей к исследованиям в традиционных областях математики: математич. анализе, теории функций, теории дифференциальных уравнений, топологии и др. В общих чертах основной метод Н. а. можно описать следующим образом. Рассматривается нек-рая математич. структура M и строится логико-математич. язык 1-го порядка, отражающий аспекты этой структуры, интересующие исследователя. Затем методами теории моделей строится нестандартная модель

теории структуры M, являющаяся собственным расширением M. При надлежащем построении новые, нестандартные, элементы модели могут быть истолкованы как предельные, «идеальные» элементы первоначальной структуры. Напр., если первоначально рассматривалось упорядоченное поле действительных чисел, то нестандартные элементы модели естественно рассматривать как «инфинитезимальные», т. е. бесконечно большие или бесконечно малые, но отличные от нуля действительные числа. При этом все обычные отношения между действительными числами автоматически переносятся и на нестандартные элементы с сохранением всех их свойств, выразимых в логико-математич. языке. Подобным образом в теории фильтров на данном множестве нестандартный элемент определяет непустое пересечение всех элементов фильтра; в топологии возникает семейство нестандартных точек, расположенных «бесконечно близко» к данной точке. Истолкование нестандартных элементов модели часто позволяет дать удобные критерии для обычных понятий в терминах нестандартных элементов. Напр., можно доказать, что стандартная действительная функция $f(x)$ непрерывна в стандартной точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x)$ бесконечно близка к $f(x_0)$ для всех (и нестандартных) точек x, бесконечно близких к x_0. Полученные критерии могут быть с успехом применены к доказательству обычных математич. результатов.

Результаты, полученные методами Н. а., могут быть естественно передоказаны и обычным образом, но рассмотрение нестандартной модели имеет то значительное преимущество, что позволяет актуально вводить в рассуждение «идеальные» элементы, что позволяет давать прозрачные формулировки для многих понятий, связанных с предельными переходами от конечного к бесконечному. В Н. а. на строгой математической основе реализуется до некоторой степени идея Г. Лейбница (G. Leibniz) и его последователей о существовании бесконечно малых величин, отличных от нуля,— идея, к-рая в последующем развитии математич. анализа была заменена точным понятием предела переменной величины.

С помощью Н. а. был обнаружен ряд новых фактов. Многие классич. доказательства заметно выигрывают в наглядности при изложении их методами нестандартного анализа. Н. а. был с успехом использован для построения точной теории нек-рых полуэмпирич. методов механики и физики.

Лит.: [1] Robinson A., Non-standard analysis, Amst., 1966; [2] Девис М., Прикладной нестандартный анализ, пер. с англ., М., 1980.

А. Г. Драгалин.

НЕСУЩЕСТВЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение $f: X \to Q^n$ топологич. пространства X в n-мерный шар Q^n такое, что существует непрерывное отображение $g: X \to Q^n$, совпадающее с f на прообразе $f^{-1}S^{n-1}$ границы S^{n-1} шара Q^n и переводящее X в S^{n-1} (т. е. $gX \subseteq S^{n-1}$). Для нормального хаусдорфова пространства X тогда и только тогда $\dim X < n$, когда любое непрерывное отображение $f: X \to Q^n$, $n = 1, 2, \ldots$, есть Н. о. (теорема Александрова).

Непрерывное отображение топологич. пространства в n-мерную сферу наз. несущественным, если оно гомотопно постоянному отображению.

Б. А. Пасынков.

НЕСЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО — бесконечное множество, не являющееся счетным множеством, т. е. неэквивалентное множеству натуральных чисел. Напр., множество действительных чисел, в отличие от множества рациональных, является Н. м.

М. И. Войцеховский.

НЁТЕР ПРОБЛЕМА — вопрос о рациональности поля инвариантов конечной группы, действующей автоморфизмами поля рациональных функций. Подробнее, пусть $K = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ — поле рациональных функций

от n переменных с коэффициентами в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, т. е. K — чисто трансцендентное расширение поля $\mathbb{Q}$ степени трансцендентности n. И пусть G — конечная группа, действующая автоморфизмами поля K посредством перестановок переменных $x_1, \ldots, x_n$. Будет ли подполе K^G в K, состоящее из всех неподвижных относительно G элементов, само полем рациональных функций от n (других) переменных с коэффициентами в $\mathbb{Q}$? Эта проблема была поставлена Э. Нётер [1] в связи с рассмотрением *Галуа теории обратной задачи*. В случае положительного решения Н. п. можно было бы построить расширение *Галуа поля* $\mathbb{Q}$ с заданной конечной группой Галуа G (см. [5]). Н. п. также тесно связана с *Люрота проблемой*.

Н. п. в общем случае решается отрицательно. Первый пример нерационального поля K^G был построен в [2], причем в этом примере группа G порождена циклич. перестановкой переменных. В [3] было установлено, что необходимое условие рациональности поля K^G, найденное в [2], является и достаточным. Вопрос о рациональности поля K^G в случае абелевой группы G тесно связан с теорией *алгебраических торов* (см. [4]).

Часто под Н. п. понимают более общую проблему, получающуюся заменой в оригинальной Н. п. поля $\mathbb{Q}$ произвольным полем k. Эта проблема решена положительно, напр., в случае, когда k алгебраически замкнуто, а G абелева.

Лит.: [1] Noether E., «Math. Ann.», 1917/1918, Bd 78, S. 221—29; [2] Swan R. G., «Invent. math.», 1969, v. 7, fasc. 2, p. 148; [3] Воскресенский В. Е., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1971, т. 35, с. 1037; [4] его же, Алгебраические торы, М., 1977; [5] Чеботарев Н. Г., Теория Галуа, М.— Л., 1936, с. 18—32 и 90—94. *В. Л. Попов.*

НЁТЕР ТЕОРЕМА — 1) Первая теорема Нётер — теорема, устанавливающая связь между инфинитезимальными симметриями функционала вида

$$A(u(x)) = \int L(x, u(x), u_{,j}(x))\, d^n x,$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — независимые переменные, $u(x) = (u^1(x), \ldots, u^N(x))$ — функции, определенные в нек-рой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $u_{,j} = \frac{\partial}{\partial x^j} u(x)$ — их частные производные, L — нек-рая функция (функция Лагранжа), и законами сохранения для соответствующей системы уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta L}{\delta u^a} \equiv \frac{\partial L}{\partial u^a} - \frac{d}{dx^i}\frac{\partial L}{\partial u^a_{,i}} = 0,$$

дающей необходимые условия экстремума функционала A. Именно, инфинитезимальной симметрии Z, т. е. векторному полю

$$Z = X^i(x)\, \partial/\partial x^i + U^a(x, u)\, \partial/\partial u^a,$$

к-рое порождает однопараметрич. группу преобразований, сохраняющую функционал A, соответствует закон сохранения

$$\nu_Z = \left[LX^i + (U^a - u^a_{,j} X^j) \frac{\partial L}{\partial u^a_{,i}} \right] dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx}^i \wedge \ldots dx^n$$

(где значок $\hat{}$ означает пропуск соответствующего множителя), т. е. зависящая от функции $u(x)$ $(n-1)$-форма, к-рая замкнута, если $u(x)$ удовлетворяет уравнениям Эйлера — Лагранжа.

В теории поля $n=4$ координаты x интерпретируются как координаты пространства-времени, функционал A наз. действием, а функция $u(x)$ — полем. Поля $u(x)$, доставляющие экстремум функционалу действия, соответствуют физически реализуемым полям с данной функцией Лагранжа. Если такое поле $u(x)$ обращается в нуль на границе области D, то в силу теоремы Стокса интеграл от закона сохранения ν по гиперповерхности $D \cap \{x' = c\}$ не зависит от выбора числа c. В частности,

если x^1 — координата времени, то этот интеграл дает величину, сохраняющуюся с течением времени.

Инвариантность функций Лагранжа различных физич. полей относительно параллельных переносов и преобразований Лоренца (являющаяся следствием однородности и изотропности пространства-времени Минковского) приводит по Н. т. к тензору энергии-импульса и тензору момента количества движения поля и к соответствующим им законам сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Инвариантность функционала действия электромагнитного поля относительно градиентных преобразований приводит к закону сохранения электрич. заряда. Аналогично из инвариантности лагранжиана того или иного поля относительно калибровочных преобразований получаются законы сохранения различных зарядов.

В классич. механике $n=1$ и координата x^1 интерпретируется как время. Если функция Лагранжа не зависит явно от x^1, то векторное поле $\partial/\partial x^1$ является симметрией и Н. т. приводит к закону сохранения энергии. Для механич. системы, движение к-рой описывается движением по геодезическим нек-рой римановой метрики, симметриями соответствующего функционала действия будут киллинговы поля. В этом случае закон сохранения, даваемый Н. т., геометрически означает, что величина проекции киллингова поля на направление геодезической постоянна вдоль этой геодезической. Общая современная формулировка Н. т. на языке расслоенных пространств состоит в следующем. Пусть $\pi : E \to M$ — расслоение над n-мерным многообразием M с фиксированной n-формой объема $\omega \in \Lambda^n(M)$, а $\pi_k : J^kE \to M$ — расслоение k-струй сечений расслоения π. Если x^i — локальные координаты в M, в к-рых форма ω имеет вид $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, а x^i, u^a — локальные координаты в E, то в J^kE возникают локальные координаты x^i, u^a, u^a_α, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leqslant k$. Значение координаты u^a_α на k-струе $j^k_{x_0} u(x)$ сечения $u(x)$ расслоения π равно

$$u^a_{,\alpha}(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \circ \ldots \circ \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n} u^a(x_0).$$

Гладкая функция $L : J^kE \to \mathbb{R}$ определяет функционал действия A, сопоставляющий сечению $s : x \to u(x)$ число

$$A(s) = \int_M L(x, u(x), u_{,\alpha}(x))\,\omega.$$

Экстремальные для этого функционала сечения $u(x)$ (в задаче с закрепленными концами) удовлетворяют уравнениям Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta L}{\delta u^a} \equiv \sum_{\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ |\alpha| \leqslant k} (-1)^{|\alpha|} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \frac{\partial L}{\partial u^a_{,\alpha}} = 0,$$

где

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} = \left(\frac{d}{dx_1}\right)^{\alpha_1} \circ \ldots \circ \left(\frac{d}{dx^n}\right)^{\alpha_n}$$

— полные производные. Инфинитезимальный автоморфизм расслоения π, т. е. векторное поле Z на E вида

$$Z = X^i(x)\,\partial/\partial x^i + U^a(x, u)\,\partial/\partial u^a,$$

наз. инфинитезимальной симметрией функционала A, если производная Ли от n-формы Лагранжа $L\omega \in \Lambda^n(J^kE)$ по направлению векторного поля $Z^{(k)}$, являющегося продолжением поля Z на J^kE, равна нулю:

$$Z^{(k)}(L\omega) = 0.$$

Для производной Ли справедлива следующая фундаментальная формула Нётер:

$$Z^{(k)}(L\omega) = \left[\overline{U}^a \frac{\delta L}{\delta u^a} + \frac{d}{dx^i} J^i\right] \omega,$$

где

$$\overline{U}^a = U^a - u^a_i X^i,\ J^i = LX^i + F^i,$$

а F^i — компоненты нек-рого векторного поля, зависящие от $\overline{U}^a$, L и их производных. В частности, $F^i = \overline{U}^a \frac{\partial L}{\partial u^a_i}$ при $k=1$. Если поле Z является инфинитезимальной симметрией, то

$$-\overline{U}^a \frac{\delta L}{\delta u^a} = \frac{d}{dx^i} J^i,$$

т. е. нек-рая линейная комбинация вариационных производных $\delta L/\delta u^a$ функции Лагранжа L является дивергенцией векторного поля $J = J^i \partial/\partial x^i$. В таком виде Н. т. впервые была сформулирована Э. Нётер (E. Noether). Дивергенция поля J (наз. т о к о м Н ё т е р) обращается в нуль на экстремалях функционала действия, а двойственная к нему $(n-1)$-форма $\nu_Z = J \rfloor \omega$, получающаяся из ω внутренним умножением на J, замкнута, т. е. является законом сохранения.

Имеются важные обобщения Н. т. (см., напр., [5]—[7]). Они основаны на расширении понятия инфинитезимальной симметрии. Вместо векторных полей на E, к-рым отвечают однопараметрич. группы преобразований, рассматриваются векторные поля на E, коэффициенты к-рых зависят от сечений $u(x)$ и их сколь угодно высоких производных. Такие поля Y уже не определяют никаких однопараметрич. групп преобразований, однако и для них можно чисто алгебраически определить понятие производной Ли. Поле Y наз. а л г е б р а и ч е с к о й и н ф и н и т е з и м а л ь н о й с и м м е т р и е й, если производная Ли от формы Лагранжа по направлению этого поля равна нулю или, более общо, обращается в нуль на экстремалях функционала действия. Обобщенная теорема Нётер сопоставляет каждой алгебраич. симметрии закон сохранения. В применении к различным уравнениям математич. физики таким образом получается большое число новых важных законов сохранения.

2) В т о р а я т е о р е м а Н ё т е р утверждает, что если функционал действия допускает бесконечномерную алгебру Ли инфинитезимальных симметрий, коэффициенты к-рых линейно зависят от p произвольных функций $\varphi^1(x)$, ..., $\varphi^p(x)$ и их производных до порядка m, то вариационные производные $\frac{\delta L}{\delta u^a}$ функции Лагранжа L удовлетворяют системе из p дифференциальных уравнений порядка m. Именно, если

$$Z = \varphi^s U^a_s \partial/\partial u^a + \varphi^s_{,\sigma}(x)\, U^{\sigma a}_s\, \partial/\partial u^a,$$

где

$$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n),\ |\sigma| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n \leqslant k$$

есть инфинитезимальная симметрия при любых гладких функциях $\varphi^s(x)$, $s=1, \ldots, p$, то справедливы тождества

$$U^a_s \frac{\partial L}{\delta u^a} + (-1)^{|\sigma|} \frac{d^\sigma}{dx^\sigma} \left(U^{\sigma a}_s \frac{\delta L}{\delta u^a} \right) = 0,\quad s = 1, \ldots, p.$$

Эта теорема находит применения, напр., в теории калибровочных полей.

Первая и вторая Н. т. доказаны Э. Нётер (E. Noether, 1918, см. [1]).

Лит.: [1] Н е т е р Э., в кн.: Вариационные принципы механики, М., 1959, с. 611—30; [2] Б о г о л ю б о в Н. Н., Ш и р к о в Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 2 изд., М., 1973; [3] Г е л ь ф а н д И. М., Ф о м и н С. В., Вариационное исчисление, М., 1961; [4] А р н о л ь д В. И., Математические методы классической механики, М., 1974; [5] О в с я н н и к о в Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978; [6] М а н и н Ю. И., в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, т. 11, М., 1978, с. 5—152; [7] В и н о г р а д о в А. М., «Докл. АН СССР», 1977, т. 236, № 2, с. 284—87; [8] Л ы ч а г и н В. В., «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 1, с. 137—65.

Д. В. Алексеевский.

3) Н. т. о нормализации: в любой конечно порожденной коммутативной целостной k-алгебре A, имеющей над полем k степень трансцендентности d, найдутся такие d элементов $x_1, \ldots, x_d$, что A цела над подалгеброй B, порожденной этими элементами. Если k-алгебра A обладает градуировкой вида $A=\bigoplus_{i\geqslant 0}A_i$, $A_0=k$, то элементы $x_1, \ldots, x_d$ могут быть выбраны однородными.

Эта теорема (иногда называемая также леммой Нётер о нормализации) доказана Э. Нётер [1]; в градуированном случае она была сформулирована еще Д. Гильбертом [2].

Элементы $x_1, \ldots, x_d$ алгебраически независимы над k, так что B — алгебра многочленов от переменных с коэффициентами из k. Если поле k бесконечно, то элементы $x_1, \ldots, x_d$ можно выбрать из линейных комбинаций образующих алгебры A над k. В случае алгебраически замкнутого поля k Н. т. допускает следующую геометрич. формулировку: любое неприводимое аффинное d-мерное алгебраич. многообразие X является конечнолистным (разветвленным) накрытием аффинного d-мерного пространства A^d, точнее, обладает конечным морфизмом на A^d. Более того, если X — замкнутое подмножество в k^n, то указанный морфизм может быть реализован как сужение на X нек-рого линейного отображения пространства k^n на его d-мерное линейное подпространство.

Алгебра A, как B-модуль, конечно порождена. Подалгебра B выбирается неоднозначно, однако ряд свойств B-модуля A не зависят от ее выбора. Напр., если A градуирована, как выше в условиях теоремы, а элементы $x_1, \ldots, x_d$ однородны (так что B тоже градуирована), то свойство алгебры A быть свободным B-модулем не зависит от выбора B.

Лит.: [1] Noether E., «Math. Ann.», 1927, Bd 96, S. 26—61; [2] Hilbert D., «Math. Ann», 1893, Bd 42, S. 313—73; [3] Атья М., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру, пер. с англ., М., 1972; [4] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [5] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963; [6] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

В. Л. Попов.

НЁТЕРА — ЭНРИКЕСА ТЕОРЕМА о канонических кривых — теорема о проективной нормальности *канонической кривой* и об определяемости ее квадратичными уравнениями.

Пусть $X\subset P^{g-1}$ — гладкая канонич. кривая (негиперэллиптическая) рода $g\geqslant 3$ над алгебраически замкнутым полем k и I_X — однородный идеал в кольце $k[x_0, \ldots, x_{g-1}]$, определяющий X в P^{g-1}. Теорема Нётера — Энрикеса (наз. иногда также теоремой Нётера — Энрикеса — Петри) утверждает, что:

1) X проективно нормальна в P^{g-1};

2) если $g\neq 3$, то X — плоская кривая степени 4, а если $g\geqslant 4$, то градуированный идеал I_X порождается компонентами степени 2 и 3 (и это означает, что кривая X является пересечением квадрик и кубик в P^{g-1}, через нее проходящих);

3) идеал I_X порождается компонентами степени 2 во всех случаях, кроме следующих: а) X — тригональная кривая, т. е. обладает линейным рядом (системой) g^1_3 размерности 1 и степени 3, б) X — кривая рода 6, изоморфная плоской кривой степени 5;

4) в исключительных случаях а) и б) квадрики, проходящие через X, высекают поверхность F, являющуюся соответственно: а) неособой рациональной линейчатой поверхностью степени $g-2$ в P^{g-1}, $g\geqslant 5$, причем ряд g^1_3 на X высекается линейной системой прямых на F, а при $g=4$ — квадрикой в P^3 (возможно конусом), б) поверхностью Веронезе V_4 в P^5.

Эта теорема (в несколько иной, алгебраич. формулировке) была установлена М. Нётером [1]. Геометрич.

изложение было дано Ф. Энрикесом (F. Enriques, о его результатах см. [2]; современное изложение в [3], [4], обобщение в [5]).

Лит.: [1] Nöther M., «Math. Ann.», 1880, Bd 17, S. 263—84; [2] Babbage D. W., «J. London Math. Soc.», 1939, v. 14, № 4, p. 310—14; [3] Saint-Donat B., «Math. Ann.», 1973, Bd 206, S. 157—75; [4] Шокуров В. В., «Матем. сб.», 1971, т. 86, № 3, с. 367—408; [5] Arbarello E., Sernesi E., «Invent. math.», 1978, v. 49, p. 99—119.

В. А. Исковских.

НЁТЕРОВ МОДУЛЬ — модуль, любой подмодуль к-рого обладает конечной системой образующих. Эквивалентные условия: любая строго возрастающая цепочка подмодулей обрывается на конечном номере; любое непустое множество подмодулей, упорядоченное относительно включения, содержит максимальный элемент. Подмодуль и фактормодуль Н. м. также нётеровы. Если в точной последовательности модулей

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

модули M' и M'' нётеровы, то M также нётеров. Модуль над *нётеровым кольцом* нётеров тогда и только тогда, когда он имеет конечное число образующих.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

Л. В. Кузьмин.

НЁТЕРОВ ОПЕРАТОР — линейный оператор, одновременно n-нормальный и d-нормальный (см. *Нормально разрешимый оператор*). Иначе говоря, Н. о. A — это нормально разрешимый оператор с конечной d-характеристикой ($n(A)<+\infty$, $d(A)<+\infty$). Индекс $\chi(A)$ Н. о. A также является конечным числом. Простейший пример Н. о.— линейный оператор действующий из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^l$. Название по имени Ф. Нётера [1], с работ к-рого теория Н. о. развивается параллельно теории сингулярных интегральных уравнений. Линейные операторы, порождаемые общими краевыми задачами для эллиптич. уравнений, часто являются Н. о.

На практике обычно удается проверить справедливость следующих предложений (теоремы Нётера):

1) либо уравнение $Ax=0$ не имеет нетривиальных решений, либо оно имеет конечное число n линейно независимых решений;

2) либо неоднородное уравнение $Ax=y$ разрешимо при любой правой части y, либо для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы $\langle y, \psi_i\rangle=0$, $i=1, \ldots, m$, где $\{\psi_i\}^m$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения или формально сопряженной однородной задачи.

Из 1), 2) следует, что A — Н. о.

Свойство нётеровости устойчиво: если A — Н. о., а B — линейный оператор достаточно малой нормы или вполне непрерывный, то $A+B$ — также Н. о., при этом $\chi(A+B)=\chi(A)$.

Пусть $A \in L(X, Y)$, где $L(X, Y)$ — пространство линейных операторов из X в Y, и является Н. о. Тогда имеют место прямые разложения

$$X=N(A)\dotplus \hat{X}, \quad Y=Z\dotplus R(A),$$

где $N(A)$ — подпространство нулей A, $R(A)$ — область значений A, $\dim Z=d(A)$. Общее решение уравнения $Ax=y$, $y\in R(A)$, имеет вид $x=\hat{A}^{-1}y+v$, где $\hat{A}=L(\hat{X}, R(A))$, $\hat{A}=A$ на $\hat{X}$ (сужение A), а $v\in N(A)$ — произвольно. Если A - Н. о. с d-характеристикой (n, m), то A^* Н. о. с d-характеристикой (m, n).

Лит.: [1] Noether F., «Math. Ann.», 1921, Bd 82, S. 42—63; [2] Крейн С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971; [3] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969.

В. А. Треногин.

НЁТЕРОВА ГРУППА, группа с условием максимальности для подгрупп,— группа, в к-рой любая строго возрастающая цепочка подгрупп обрывается на конечном номере. Названа в

честь Э. Нётер (E. Noether), к-рая изучала кольца с условием максимальности для идеалов — *нётеровы кольца*. Подгруппа и факторгруппа Н. г. также обладают этим свойством. Построены примеры Н. г., не являющихся конечными расширениями полициклических групп [1].

Лит.: [1] Ольшанский А. Ю., «Докл. АН СССР», 1979, т. 245, № 4, с. 785—87. *В. Н. Ремесленников.*

НЁТЕРОВА ИНДУКЦИЯ — принцип рассуждений, применимый к частично упорядоченному множеству, в к-ром любое непустое подмножество содержит минимальный элемент, напр. к множеству замкнутых подмножеств в нек-ром *нётеровом пространстве*. Пусть M — такое множество и F — его подмножество, обладающее тем свойством, что для любого $a \in F$ найдется строго меньший элемент $b \in F$. Тогда F пусто. Напр., пусть M — множество всех замкнутых подмножеств нек-рого нётерова пространства и F — множество тех замкнутых подмножеств, к-рые нельзя представить в виде конечного объединения неприводимых компонент. Если $Y \subset F$, то Y приводимо, т. е. $Y = Y_1 \cup Y_2$, где Y_1, Y_2 замкнуты, оба строго содержатся в Y и хоть одно из них принадлежит F. Следовательно F пусто.

Обращение порядка позволяет применять Н. и. также к частично упорядоченным множествам, любое непустое подмножество которых содержит максимальный элемент, например к решетке идеалов в *нётеровом кольце*.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *Л. В. Кузьмин.*

НЁТЕРОВА СХЕМА — схема, допускающая конечное открытое покрытие спектрами *нётеровых колец*. Аффинная Н. с.— в точности спектр нётерова кольца. Топологич. пространство Н. с. X является нётеровым топологич. пространством, а все локальные кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ нётеровы. Если каждая точка схемы обладает открытой аффинной нётеровой окрестностью, схема наз. локально нётеровой. Квазикомпактная локально Н. с. есть Н. с. Примером Н. с. является схема конечного типа над полем (алгебраич. многообразие) или над любым нётеровым кольцом. *В. И. Данилов.*

НЁТЕРОВО ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение, для к-рого справедливы теоремы Нётера (см. ниже). Пусть X — банахово пространство, A — линейный ограниченный оператор (отображение), отображающий X в себя: $A : X \to X$, A^* — сопряженный с A оператор,

$$Ax = y \qquad (1)$$

— *линейное уравнение*, где x — искомый, а y — заданный элементы пространства X. Пусть, далее, $R(A)$ — совокупность всех $y \in X$, для к-рых уравнение (1) разрешимо (область значений оператора A), и $N(A)$ — совокупность всех решений соответствующего однородного уравнения

$$Ax = 0 \qquad (2)$$

(нуль-пространство, или ядро оператора A). Отображение A (уравнение (1)) наз. *нётеровым оператором* (нётеровым уравнением), если выполняются следующие условия.

1) Определенный на всем банаховом пространстве оператор A (уравнение (1)) является нормально разрешимым, т. е. уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть y ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения

$$A^*\varphi = 0, \ \varphi \in X^*, \qquad (3)$$

т. е. $(\varphi, y) = 0$ для любого $\varphi \in N(A^*)$.

2) Однородные уравнения (2) и (3) могут иметь лишь конечное число линейно независимых решений; число

$$\varkappa_A = k - k^*,$$

где $k=\dim N(A)$, $k^*=\dim N(A^*)$, наз. индексом оператора A (индексом уравнения (1)).

Нётеров оператор с нулевым индексом наз. фредгольмовым оператором (абстрактным), а соответствующее уравнение (1) — фредгольмовым уравнением. Напр., если V — вполне непрерывный оператор $V: X \to X$, то уравнение

$$x - Vx = y \qquad (4)$$

будет фредгольмовым. Его наз. каноническим уравнением Фредгольма. Если в уравнении (4) вполне непрерывное отображение в нек-ром функциональном пространстве является интегральным оператором

$$(Vx)(s) = \int K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

то уравнение наз. интегральным уравнением Фредгольма. Аналогично, если в уравнении Нётера (1) линейное отображение задается с помощью интегральных операторов, то его наз. нётеровым интегральным уравнением.

Ф. Нётер [1] рассмотрел интегральные уравнения с *Гильберта ядром*

$$(A\varphi)(s) = a(s)\,\varphi(s) + \frac{b(s)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,\varphi(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t), \qquad (5)$$

где несобственный интеграл понимается в смысле главного значения. Для уравнения (5) он установил справедливость трех теорем, называемых ныне теоремами Нётера (предполагается, что заданные и искомая функции действительны, непрерывны в смысле Гёльдера и $a^2(s)+b^2(s)\neq 0$):

1) уравнение нормально разрешимо;
2) уравнение имеет конечный индекс;
3) индекс вычисляется по формуле:

$$\varkappa_A = \frac{1}{\pi}\,[\arg(a - ib)]_{-\pi}^{\pi},$$

где $[\ ]_{-\pi}^{\pi}$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки.

Теорема 3) впервые указала на существование таких линейных сопряженных интегральных уравнений, к-рые могут иметь различное число линейно независимых решений. Кроме того, из этой теоремы вытекает, что индекс уравнения (5) не зависит от его вполне непрерывной части.

Оператор Нётера иногда наз. фредгольмовым, обобщенно фредгольмовым, Φ-оператором, F-оператором.

Лит.: [1] Noether F., «Math. Ann.», 1921, Bd 82, S. 42—63; [2] Никольский С. М., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1943, т. 7, № 3, с. 147—66; [3] Аткинсон Ф. В., «Матем. сб.», 1951, т. 28, № 1, с. 3—14; [4] Крейн С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971; [5] Крачковский С. Н., Диканский А. С., в кн.: Итоги науки. Математический анализ. 1968, М., 1969, с. 39—71; [6] Данилюк И. И., Нерегулярные граничные задачи на плоскости, М., 1975; [7] Прёсдорф З., Некоторые классы сингулярных уравнений, пер. с нем., М., 1979. *Б. В. Хведелидзе.*

НЁТЕРОВО КОЛЬЦО левое (правое) — кольцо A, удовлетворяющее одному из следующих эквивалентных условий:

1) A — левый (правый) *нётеров модуль* над собой;
2) любой левый (правый) идеал в A имеет конечный базис;
3) любая строго возрастающая цепочка левых (правых) идеалов в A обрывается на конечном номере.

Примером Н. к. может служить любое кольцо главных идеалов, в к-рых любой идеал имеет одну образующую.

Н. к. названы по имени Э. Нётер (E. Noether), систематически исследовавшей такие кольца и перенесшей на них ряд результатов, известных ранее только при более жестких ограничениях (напр., теорию примарного разложения Ласкера).

Кольцо нётерово справа не обязано быть нётеровым слева и наоборот. Напр., пусть A — кольцо матриц вида $\begin{Vmatrix} a & \alpha \\ 0 & \beta \end{Vmatrix}$, где a — целое рациональное число и α, β — рациональные числа с обычным сложением и умножением. Тогда A нётерово справа, но не нётерово слева, т. к. левый идеал элементов вида $\begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ не имеет конечного базиса.

Факторкольцо и конечная прямая сумма Н. к. снова нётеровы, но подкольцо Н. к. может не быть нётеровым. Напр., кольцо многочленов над нек-рым полем от бесконечного числа переменных не является нётеровым, хотя оно содержится в своем поле частных, к-рое нётерово.

Если A — нётерово слева кольцо, то кольцо многочленов $A[x]$ также нётерово слева. Аналогичное свойство справедливо и для кольца формальных степенных рядов над Н. к. В частности, кольца многочленов вида $K[X_1, \ldots, X_n]$ или $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, где K — нек-рое поле, а $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, а также любые их факторкольца являются нётеровыми. Любое *артиново кольцо* нётерово. Локализация коммутативного Н. к. A относительно нек-рой мультипликативной системы S снова является Н. к. В коммутативном Н. к. A для любого идеала $\mathfrak{m}$ такого, что все элементы вида $1+m$, где $\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}$, не являются делителями нуля, выполняется соотношение $\bigcap_{k=1} \mathfrak{m}^k = 0$. Это соотношение означает, что любой такой идеал $\mathfrak{m}$ определяет на A отделимую $\mathfrak{m}$-адическую топологию. В коммутативном Н. к. любой идеал представим в виде несократимого пересечения конечного числа примарных идеалов. Хотя такое представление не однозначно, но однозначно определены число идеалов в представлении и множество простых идеалов, ассоциированных с данными примарными идеалами.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977. *Л. В. Кузьмин.*

НЁТЕРОВО ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство X, удовлетворяющее условию обрыва убывающих цепочек замкнутых подмножеств. Эквивалентное условие: любое непустое семейство замкнутых подмножеств в X, упорядоченное относительно включения, имеет минимальный элемент. Любое подпространство Н. п. снова нётерово. Если пространство X допускает конечное покрытие нётеровыми подпространствами, то X само нётерово. Пространство X нётерово тогда и только тогда, когда любое открытое подмножество в X квазикомпактно. Н. п. X является объединением конечного числа своих неприводимых компонент.

Примеры Н. п. доставляют спектры коммутативных колец. Для кольца A пространство $\mathrm{Spec}(A)$ (спектр A) нётерово тогда и только тогда, когда A — *нётерово кольцо.*

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971. *Л. В. Кузьмин.*

НЕФОРМАЛЬНЫЙ АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД — аксиоматический метод, не фиксирующий жестко применяемого языка и тем самым не фиксирующий границы содержательного понимания предмета, но требующий аксиоматич. определения всех специальных для данного предмета исследования понятий. Этот термин не имеет общепринятого толкования.

История развития аксиоматич. метода характеризуется все возрастающей степенью формализации. Н. а. м. — определенная ступень в этом процессе.

Первоначальное, данное Евклидом, аксиоматич. построение геометрии отличалось дедуктивным характером изложения, при к-ром в основу клались определения (пояснения) и аксиомы (очевидные утверждения). Из них, опираясь на здравый смысл и очевидность, выводились следствия. При этом в выводе неявно иногда использовались не зафиксированные в аксиомах предположения геометрич. характера, особенно относящиеся к движению в пространстве и взаимному расположению прямых и точек. Впоследствии были выявлены геометрич. понятия и регламентирующие их употребление аксиомы, неявно используемые Евклидом и его последователями. При этом возникал вопрос: действительно ли выявлены все аксиомы. Руководящий принцип для решения этого вопроса сформулировал Д. Гильберт (D. Hilbert): «Следует добиться того, чтобы с равным успехом можно было говорить вместо точек, прямых и плоскостей о столах, стульях и пивных кружках». Если доказательство не теряет доказательной силы после такой замены, то действительно все используемые в этом доказательстве специальные предположения зафиксированы в аксиомах. Достигаемая при таком подходе степень формализации представляет собой уровень формализации, характерный для Н. а. м. Эталоном здесь может служить классич. труд Д. Гильберта «Основания геометрии» [1].

Н. а. м. применяется не только для придания определенной завершенности аксиоматически излагаемой конкретной теории. Он представляет собой действенное орудие математич. исследования. Поскольку при изучении системы объектов по этому методу не используется их специфика, или «природа», то доказанные утверждения переносятся на любую систему объектов, удовлетворяющую рассматриваемым аксиомам. Согласно Н. а. м., аксиомы — это неявные определения первоначальных понятий (а не очевидные истины). Что представляют собой изучаемые объекты — неважно. Все, что нужно о них знать, сформулировано в аксиомах. Предметом изучения аксиоматич. теории служит любая ее *интерпретация*.

Н. а. м., кроме непременного аксиоматич. определения всех специальных понятий, имеет и другую характерную особенность. Это свободное, неконтролируемое аксиомами, основанное на содержательном понимании использование идей и понятий, к-рые можно применить к любой мыслимой интерпретации, независимо от ее содержания. В частности, широко используются теоретико-множественные и логич. понятия и принципы, а также понятия, связанные с идеей счета, и др. Проникновение в аксиоматич. метод рассуждений, основанных на содержательном понимании и здравом смысле, а не на аксиомах, объясняется нефиксированностью языка, на к-ром формулируются и доказываются свойства аксиоматически заданной системы объектов. Фиксирование языка ведет к понятию формальной аксиоматич. системы (см. *Аксиоматический метод*) и создает материальную основу для выявления и четкого описания допустимых логич. принципов, для контролируемого употребления теоретико-множественных и других общих или не специальных для исследуемой области понятий. Если в языке нет средств (слов) для передачи теоретико-множественных понятий, то этим отсеиваются все доказательства, основанные на использовании таких средств. Если в языке есть средства для выражения нек-рых теоретико-множественных понятий, то их применение в доказательствах можно ограничить определенными правилами или аксиомами.

Фиксируя различным образом язык, получают различные теории основного объекта рассмотрения. Напр., рассматривая язык узкого исчисления предикатов для теории групп, получают элементарную теорию групп, в к-рой нельзя сформулировать какого-либо утвержде-

ния о подгруппах. Если перейти к языку исчисления предикатов второй ступени, то появляется возможность рассматривать свойства, в к-рых фигурирует понятие подгруппы. Формализацией Н. а. м. в теории групп служит переход к языку системы Цермело — Френкеля с ее аксиоматикой.

Лит.: [1] Гильберт Д., *Основания геометрии*, пер. с нем., М.— Л., 1948; [2] Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., [т. 1], М., 1979. *В. Н. Гришин.*

НЕФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение, для к-рого неверны те или иные *Фредгольма теоремы*. Иногда Н. и. у. наз. особым интегральным уравнением.

Так, напр., интегральное уравнение Фурье

$$\varphi(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(xs)\, \varphi(s)\, ds = 0 \qquad (1)$$

имеет решение

$$\varphi_a(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax} + \frac{x}{a^2+x^2},$$

где a — произвольное положительное число; собственному значению $\sqrt{2/\pi}$ уравнения (1) соответствует бесконечное множество линейно независимых решений, т. е. для уравнения (1) перестает быть справедливой теорема Фредгольма о том, что однородное уравнение имеет конечное число линейно независимых решений.

В случае интегрального уравнения Лалеско — Пикара

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|}\, \varphi(s)\, ds = 0 \qquad (2)$$

любое $\lambda \in (0, +\infty)$ является собственным значением, а именно, любому положительному числу λ соответствуют два линейно независимых решения:

$$\varphi_\lambda^{(1)}(x) = e^{\sqrt{1-2\lambda}\, x}, \quad \varphi_\lambda^{(2)}(x) = e^{-\sqrt{1-2\lambda}\, x}.$$

Следовательно, для уравнения (2) перестает быть справедливой теорема Фредгольма о том, что множество собственных значений уравнения не более чем счетно.

Подробно разработаны теории двух классов Н. и. у.: уравнений, в к-рых искомая функция содержится под знаком несобственного интеграла в смысле главного значения *(сингулярные интегральные уравнения)*; уравнения, в к-рых искомая функция содержится под знаком интегрального преобразования свертки *(интегральные уравнения типа свертки)*. Для таких уравнений, вообще говоря, нарушается равенство чисел линейно независимых решений однородных союзных (сопряженных) уравнений, а также альтернатива Фредгольма.

Лит.: [1] Привалов И. И., Интегральные уравнения, 2 изд., М.— Л., 1937; [2] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1951. См. также лит. при статьях *Интегральное уравнение типа свертки* и *Сингулярные интегральные уравнения*. *Б. В. Хведелидзе.*

НЕХОПФОВА ГРУППА — группа, допускающая эндоморфизм на себя с нетривиальным ядром, т. е. изоморфная нек-рой своей собственной факторгруппе (в противном случае группа наз. хопфовой). Термин происходит от проблемы Хопфа (H. Hopf, 1932) о существовании таких групп с конечным множеством порождающих. Оказалось, что существуют даже конечно определенные Н. г. Примером конечно порожденной Н. г. является группа с порождающими x, y и одним определяющим соотношением

$$x^{-1}y^2x = y^3.$$

Бесконечно порожденные Н. г. строятся совсем просто, таково, напр., прямое произведение бесконечного числа изоморфных между собой групп.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп, пер. с англ., М., 1974.

А. Л. Шмелькин.

НЕЦЕНТРАЛЬНОЕ «ХИ-КВАДРАТ» РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, нецентральное χ^2-распределение,— непрерывное, сосредоточенное на положительной полуоси $0<x<\infty$ распределение вероятностей с плотностью

$$p(x)=\frac{e^{-\frac{x+\lambda}{2}}\,x^{\frac{n-2}{2}}}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r x^r}{(2r)!}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+r\right)},$$

где n — число степеней свободы, а λ — параметр нецентральности. При $\lambda=0$ эта плотность совпадает с плотностью обычного (центрального) *«хи-квадрат» распределения*. Характеристич. функция Н. «х.-к.» р. выражается формулой

$$\varphi(t)=(1-2it)^{-n/2}\exp\left\{\frac{\lambda it}{1-2it}\right\};$$

математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $n+\lambda$ и $2(n+2\lambda)$. Н. «х.-к.» р. принадлежит классу *безгранично делимых распределений*.

Обычно Н. «х.-к.» р. появляется как распределение суммы квадратов независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих нормальное распределение с отличными от нуля средними m_i и единичными дисперсиями, точнее, сумма $X_1^2+\ldots+X_n^2$ имеет Н. «х.-к.» р. с n степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda=\sum_{i=1}^{n}m_i^2$. Сумма нескольких взаимно независимых случайных величин с Н. «х.-к.» р. имеет распределение этого же типа, и его параметры суть суммы соответствующих параметров слагаемых.

Если число n четное, то функция распределения Н. «х.-к.» р. $F_n(x;\lambda)$ (всегда равная нулю при $x\leqslant 0$) при $x>0$ равна

$$F_n(x;\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m+\frac{n}{2}}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m\left(\frac{x}{2}\right)^k}{m!k!}\,e^{-\frac{\lambda+x}{2}}.$$

Эта формула устанавливает связь между Н. «х.-к.» р. и *Пуассона распределением*. Именно, если X и Y имеют распределения Пуассона с параметрами $\frac{x}{2}$ и $\frac{\lambda}{2}$ соответственно, то для любого целого $s>0$

$$\mathsf{P}\{X-Y\geqslant s\}=F_{2s}(x;\lambda).$$

Н. «х.-к.» р. часто возникает в задачах математич. статистики, посвященных исследованию мощности критериев типа «хи-квадрат». Так как существующие таблицы Н. «х.-к.» р. недостаточно полны, то в статистич. приложениях широко используют различные приближения с помощью «хи-квадрат» распределения и нормального распределения.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [2] Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; [3] Patnaik P. B., «Biometrika», 1949, v. 36, p. 202.

А. В. Прохоров.

НЕЧЕТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, меняющая знак при изменении знака независимого переменного, т. е. функция, удовлетворяющая условию $f(-x)=-f(x)$. График Н. ф. симметричен относительно начала координат.

НЕЧЕТНОЕ ЧИСЛО — целое число, не делящееся (без остатка) на 2.

НЕЭФФЕКТИВНАЯ СТАТИСТИКА — *статистическая оценка*, дисперсия к-рой больше дисперсии эффективной оценки. Иначе говоря, для Н. с. в *Рао — Крамера неравенстве* равенство не достигается хотя бы при одном значении оцениваемого параметра. Мерой качества Н. с. служит величина e, наз. ее эффективностью и равная отношению дисперсии эффектив-

ной оценки к дисперсии Н. с. Эффективность e неотрицательна и не превосходит 1. Величина $1/e$ показывает, во сколько раз нужно увеличить число наблюдений при использовании Н. с. по сравнению с эффективной статистикой, чтобы считать эквивалентными результаты применения этих двух статистик. Напр., медиана μ_n эмпирич. распределения, построенного по n независимым нормально $N(\theta, \sigma^2)$ распределенным случайным величинам $X_1, \ldots, X_n$, асимптотически нормально распределена с параметрами θ и $\sigma^2\pi/2n$ и является неэффективной порядковой статистикой для математич. ожидания θ. Эффективной статистикой в данном случае является оценка $\overline{X}=(X_1+\ldots+X_n)/n$, к-рая распределена по нормальному закону с $N(\theta, \sigma^2/n)$. Эффективность e статистики μ_n равна

$$e=\mathsf{D}(\overline{X})/\mathsf{D}(\mu_n)=\frac{2}{\pi}.$$

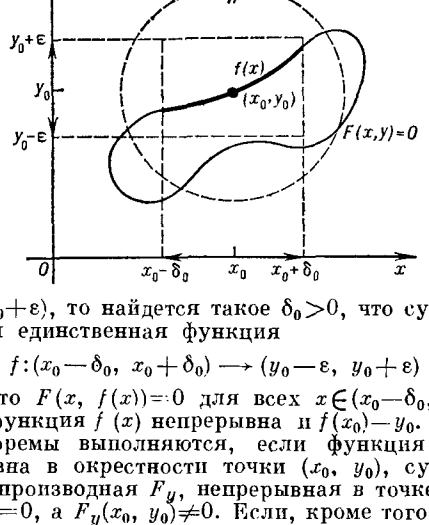
Следовательно, при использовании статистики μ_n в среднем необходимо в $\pi/2\approx 1{,}57$ раза больше наблюдений по сравнению со статистикой $\overline{X}$, чтобы получить одну и ту же точность в оценке неизвестного математич. ожидания θ.

Лит.: [1] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [2] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968.

М. С. Никулин.

НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ — функция $f: E \to Y$, заданная уравнением $F(x, y)=z_0$, где $F: X\times Y \to Z$, $x\in X$, $y\in Y$, $E\subset X$, X, Y и Z — нек-рые множества, т. е. такая функция f, что при любом $x\in E$ имеет место $F(x, f(x))=z_0$. Если X, Y и Z — топологич. пространства и для нек-рой точки $(x_0, y_0)\in X\times Y$ выполняется условие $F(x_0, y_0)=z_0$, то при определенных условиях в нек-рой окрестности точки (x_0, y_0) уравнение $F(x, y)=z_0$ однозначно разрешимо относительно одной из переменных. Свойства решения этого уравнения описываются теоремами о Н. ф.

Простейшая теорема о Н. ф. состоит в следующем. Пусть X и Y — подмножества числовой прямой $\mathbb{R}$, $x_0\in X$, $y_0\in Y$, (x_0, y_0) — внутренняя точка множества $X\times Y$ на плоскости; тогда если функция F непрерывна в нек-рой окрестности точки (x_0, y_0), $F(x_0, y_0)=0$ и существуют такие $\delta>0$ и $\varepsilon>0$, что при любом фиксированном $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ функция $F(x, y)$ как функция переменного y строго монотонна на интервале



$(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, то найдется такое $\delta_0>0$, что существует и притом единственная функция

$$f: (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \longrightarrow (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$$

такая, что $F(x, f(x))=0$ для всех $x\in(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$, причем функция $f(x)$ непрерывна и $f(x_0)=y_0$. Условия этой теоремы выполняются, если функция $F(x, y)$ непрерывна в окрестности точки (x_0, y_0), существует частная производная F_y, непрерывная в точке (x_0, y_0), $F(x_0, y_0)=0$, а $F_y(x_0, y_0)\neq 0$. Если, кроме того, существует и частная производная F_x, также непрерывная

в точке (x_0, y_0), то Н. ф. f дифференцируема в точке x_0, причем

$$\frac{df(x_0)}{dx} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Эта теорема обобщается на случай системы уравнений, т. е. когда F является векторной функцией. Пусть $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ суть n- и m-мерные евклидовы пространства с фиксированными системами координат, точки к-рых соответственно $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_m)$. Пусть F отображает нек-рую окрестность W точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, в пространство $\mathbb{R}^m$ и F_i, $i=1, 2, \ldots, m$, – координатные функции (от $n+m$ переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$) отображения F, т. е. $F=(F_1, \ldots, F_m)$. Если отображение F дифференцируемо на W, $F(x_0, y_0)=0$, а якобиан

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0,$$

то существуют окрестности U и V точек x_0 и y_0 соответственно в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, $U \times V \subset W$ и единственное отображение $f: U \to V$ такие, что для всех $x \in U$ выполняется условие $F(x, f(x))=0 \in \mathbb{R}^m$. При этом $f(x_0)=y_0$, отображение f дифференцируемо на U, а если $f=(f_1, \ldots, f_m)$, то явное выражение для частных производных $\partial f_j/\partial x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$, находится из системы m линейных относительно этих производных уравнений

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0,$$

$k=1, 2, \ldots, m$, i фиксировано ($i=1, 2, \ldots, n$). Иногда основное утверждение теоремы формулируется следующим образом: существуют окрестности U и W_0 точек x_0 и (x_0, y_0) в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $W_0 \subset W$, и единственное отображение $f: U \to \mathbb{R}^m$ такие, что для всех $x \in U$ выполняются условия $(x, f(x)) \in W_0$, $F(x, f(x))=0$. Иначе говоря, условия

$$(x, y) \in W_0, \quad F(x, y)=0$$

равносильны условиям $x \in U$, $y=f(x)$. В этом случае говорят, что уравнение $F(x, y)=0$ однозначно разрешимо в окрестности W_0 точки (x_0, y_0).

Сформулированная классич. теорема о Н. ф. обобщается на случай более общих пространств следующим образом. Пусть X — топологич. пространство, Y и Z — аффинные нормированные пространства над полем действительных или комплексных чисел, т. е. аффинные пространства над указанными полями, к-рым сопоставлены соответственно нормированные векторные пространства $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$, причем $\boldsymbol{Y}$ — полное пространство, $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ — множество линейных непрерывных отображений пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$, W — открытое множество в произведении пространств $X \times Y$ и $(x_0, y_0) \in W$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$.

Пусть $F: W \to Z$ — непрерывное отображение W в Z и $F(x_0, y_0)=z_0$. Если при каждом фиксированном x и $(x, y) \subset W$ отображение F имеет частную *Фреше производную* $F_y \in \mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, причем $F_y(x, y): W \to \mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ является непрерывным отображением W в $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, а линейное отображение $F_y(x_0, y_0): \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$ имеет непрерывное обратное линейное отображение (т. е. является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$), то существуют такие открытые соответственно в пространствах X и Y множества $U \subset X$ и $V \subset Y$, $x_0 \in U$, $y_0 \in V$, что для любого $x \in U$ существует и притом единственный элемент $y \in V$, обозначаемый $y=f(x)$ и удовлетворяющий условиям:

$$f(x) \in V \text{ и } F(x, f(x))=z_0.$$

При этом так определенная функция $y=f(x)$ является непрерывным отображением U в V и $y_0=f(x_0)$.

Если X также является аффинным нормированным пространством, то при определенных условиях Н. ф. $f: x \mapsto y$, удовлетворяющая уравнению

$$F(x, y) = z_0, \tag{1}$$

также дифференцируема. Именно, пусть X, Y, Z — аффинные нормированные пространства, W — открытое множество из $X \times Y$, $F: W \to Z$, $F(x_0, y_0) = z_0$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, и пусть f — неявное отображение, задаваемое уравнением (1) и отображающее нек-рую окрестность U точки x_0 в открытое подмножество V пространства Y, $U \times V \subset W$. Таким образом, для всех $x \in U$ имеет место

$$f(x) \in V, \quad F(x, f(x)) = z_0. \tag{2}$$

Пусть, кроме того, отображение f непрерывно в точке x_0 и $f(x_0) = y_0$. Тогда если отображение F дифференцируемо в точке (x_0, y_0) и его частные производные Фреше $F_x(x_0, y_0)$ и $F_y(x_0, y_0)$ являются линейными непрерывными операторами, отображающими соответственно векторные пространства $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, сопоставленные аффинным пространствам X и Y, в векторное пространство $\boldsymbol{Z}$, сопоставленное аффинному пространству Z, причем оператор $F_y(x_0, y_0)$ является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, то отображение f дифференцируемо в точке x_0 и его производная Фреше задается формулой

$$f'(x_0) = -F_y^{-1}(x_0, y_0) \circ F_x(x_0, y_0).$$

Эта формула получается в результате формального дифференцирования функции (2):

$$F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0) \circ f'(x_0) = 0 \in \mathscr{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$$

и умножения слева этого равенства на $F_y^{-1}(x_0, y_0)$.

Если, кроме того, отображение $F: W \to Z$ непрерывно дифференцируемо на W, Н. ф. $f: U \to V$ непрерывна на U, $U \times V \subset W$ и для любого $x \in U$ частная производная Фреше $F_y(x, f(x))$ является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, то отображение f — непрерывно дифференцируемое отображение U в V.

Можно указать и в общем случае условия существования и единственности Н. ф. в терминах непрерывности производной Фреше: если пространство Z полно, отображение $F: W \to Z$ непрерывно дифференцируемо на W, $F(x_0, y_0) = z_0$ и частная производная Фреше $F_y(x_0, y_0)$ является обратимым элементом пространства $\mathscr{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$, то уравнение (1) однозначно разрешимо в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0), т. е. существуют окрестности U и V точек x_0 и y_0 соответственно в пространствах X и Y, $U \times V \subset W$ и единственная Н. ф. $f: U \to V$, удовлетворяющая условиям (2). При этом отображение f непрерывно дифференцируемо на U. В таком виде теорема о Н. ф. для нормированных пространств представляет собой прямое обобщение соответствующей классич. теоремы о Н. ф. для одного скалярного уравнения с двумя переменными.

Если, кроме того, функция $F: W \to Z$ непрерывно дифференцируема в окрестности W точки (x_0, y_0) k раз ($k = 1, 2, \ldots$), то Н. ф. $f: U \to V$ также k раз непрерывно дифференцируема.

Более далекие обобщения классич. теоремы о Н. ф. на случай дифференциальных операторов даны Дж. Нэшем (J. Nash) (см. *Нэша теорема*).

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [3] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [4] Шварц Л., Анализ, пер. с франц., т. 1, М., 1972; [5] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971.

Л. Д. Кудрявцев.

НЕЯВНАЯ ФУНКЦИЯ в алгебраической геометрии — функция, задаваемая алгебраич. уравнением. Пусть $F(X_1, \ldots, X_n, Y)$ — многочлен от $X_1, \ldots, X_n, Y$ (напр., с комплексными коэффициентами). Тогда многообразие $V(F)\subset\mathbb{C}^{n+1}$ нулей этого многочлена можно рассматривать как график нек-рого соответствия $y : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Это соответствие и называют, допуская известную неточность, функцией, неявно заданной уравнением $F(x, y)=0$. Вообще говоря, соответствие y многозначное и не всюду определенное и поэтому не является функцией в обычном смысле. Имеется два способа превратить это соответствие в функцию. Первый, восходящий к Б. Риману (B. Riemann), заключается в том, что областью определения Н. ф. y считают не $\mathbb{C}^n$, а многообразие $V(F)$, конечнолистно накрывающее $\mathbb{C}^n$. Этот прием приводит к очень содержательному понятию *римановой поверхности*. При таком подходе понятие Н. ф. смыкается с понятием *алгебраической функции*.

Другой способ состоит в том, чтобы представить $V(F)$ локально как график однозначной функции. Различные теоремы о Н. ф. утверждают существование открытых $U\subset\mathbb{C}^n$ и $W\subset\mathbb{C}$, для к-рых $(U\times W)\cap V(F)$ является графиком гладкой в том или ином смысле функции $y : U \to W$ (см. *Неявная функция*). Однако открытые подмножества U и W, как правило, не являются открытыми в топологии Зарисского и лишены смысла в абстрактной алгебраич. геометрии. Поэтому указанный способ модифицируется следующим образом. Формальным ростком (или ветвью) в точке $a\subset\mathbb{C}^n$ Н. ф., заданной уравнением $F(X, Y)=0$, наз. формальный степенной ряд $y\in\mathbb{C}[[X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n]]$ такой, что $F(X, y)=0$. Вообще, степенной ряд y, удовлетворяющий полиномиальному уравнению $F(X,Y)=0$, наз. алгебраическим степенным рядом. Алгебраический степенной ряд сходится в некоторой окрестности точки a.

Пусть A — локальное нётерово кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Элемент y из пополнения $\hat{A}$ локального кольца A наз. алгебраическим над A, если $F(y)=0$ для нек-рого многочлена $F(Y)\in A[Y]$. Множество алгебраических над A элементов $\hat{A}$ образует кольцо $\tilde{A}$. Следующий вариант теоремы о Н. ф. показывает, что алгебраич. функций достаточно много. Пусть

$$f(Y)=(f_1(Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, f_m(Y_1, \ldots, Y_m))$$

— набор m многочленов из $A[Y_1, \ldots, Y_m]$ и пусть $\bar{y}^0=(\bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_m^0)$ — элементы поля вычетов $A/\mathfrak{m}$ такие, что:

1) $f(\bar{y}^0)=0$ (черта сверху означает редукцию по модулю $\mathfrak{m}$);

2)

$$\overline{\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial Y_j}\right)}(\bar{y}^0)\neq 0.$$

Тогда существуют алгебраические над A элементы $y=(y_1, \ldots, y_m)$ такие, что $f(y)=0$ и $\bar{y}=\bar{y}^0$. Другими словами, A — *гензелево кольцо*.

Другой результат того же типа — теорема Артина об аппроксимации (см. [2]). Пусть A — локальное кольцо, являющееся локализацией алгебры конечного типа над полем. Пусть, далее, задана система $f(Y)=0$ полиномиальных уравнений с коэффициентами из A (или из $\tilde{A}$) и $\hat{y}$ — вектор с коэффициентами из пополнения $\hat{A}$ такой, что $f(\hat{y})=0$. Тогда найдется вектор $\tilde{y}$ с коэффициентами из $\tilde{A}$, сколь угодно близкий к $\hat{y}$ и такой, что $f(\tilde{y})=0$. Вариант этой теоремы верен [3] и для систем аналитич. уравнений.

Лит.: [1] Артин М., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 1, с. 181–205; [2] Artin M., «Publ. Math. IHES», 1969, № 36, p. 23—58; [3] его же, «Invent. math.», 1968, v. 5, p. 277–91.

В. И. Данилов.

НЕЯВНЫЙ ОПЕРАТОР — решение $y=f(x)$ нелинейного операторного уравнения $F(x, y)=0$, в к-ром x играет роль параметра, а y — неизвестного. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $F(x, y)$ — нелинейный оператор, непрерывный в окрестности Ω точки $(x_0, y_0)\in X+Y$ и отображающий Ω в окрестность нуля в Z. Если *Фреше производная* $F_y(x, y)$ непрерывна в Ω, существует и ограничен оператор $[F_y(x_0, y_0)]^{-1}$, а $F(x_0, y_0)=0$, то найдутся числа $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ такие, что при $\|x-x_0\|<\delta$ в шаре $\|y-y_0\|<\varepsilon$ уравнение $F(x, y)=0$ имеет единственное решение $y=f(x)$. При этом Н. о. $f(x)$ непрерывен по x и $f(x_0)=y_0$. Если дополнительно $F(x, y)$ n раз дифференцируем в Ω, то и $f(x)$ n раз дифференцируем. Если $F(x, y)$ — *аналитический оператор* в Ω, то и $f(x)$ — аналитический. Эти утверждения обобщают известные предложения о неявных функциях. О вырожденных случаях см. *Ветвление решений* нелинейных уравнений.

Лит.: [1] Hildebrandt T. H., Graves L. M., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1927, v. 29, p.127—53; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [3] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [4] Ниренберг Л., Лекции по нелинейному функциональному анализу, пер. с англ., М., 1977.
В. А. Треногин.

НИГДЕ НЕ ПЛОТНОЕ МНОЖЕСТВО топологического пространства X — множество A, определяемое следующим свойством: каждое непустое открытое множество $\Gamma\subset X$ содержит непустое открытое множество $\Gamma_0\subset\Gamma$ такое, что $A\cap\Gamma_0=\varnothing$. Другими словами, A — Н. не п. м., если оно не плотно ни в каком непустом открытом множестве. *М. И. Войцеховский.*

НИЖНИЙ ПРЕДЕЛ последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ в топологическом пространстве X — совокупность точек $p\in X$, любая окрестность к-рых пересекается со всеми элементами последовательности, начиная с нек-рого N.

Н. п. числовой последовательности см. в ст. *Верхний и нижний пределы.* *А. А. Мальцев.*

НИЖНЯЯ ГРАНЬ множества — см. *Верхняя и нижняя грани.*

НИЖНЯЯ ГРАНЬ семейства топологий F (заданных на одном множестве X) — теоретико-множественное пересечение этого семейства топологий, т. е. $\bigcap F$. Обозначается $\wedge F$. Всегда $\wedge F$ — топология на X. Если топологии $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ заданы на множестве X и $\mathscr{T}_1$ содержится в $\mathscr{T}_2$ (как множество), то пишут $\mathscr{T}_1\leqslant\mathscr{T}_2$.

Топология $\wedge F$ обладает свойством: если $\mathscr{T}'$ — топология на X и $\mathscr{T}'\leqslant\mathscr{T}$ для всех $\mathscr{T}\in F$, то $\mathscr{T}'\leqslant\wedge F$. Свободная сумма пространств, получающихся при наделении множества X всеми отдельно взятыми топологиями из семейства F, канонически отображается на пространство X, $\wedge F$. Важным свойством этого отображения является его факторность. На этой основе доказываются общие теоремы о сохранении ряда свойств при операции пересечения топологий.

Лит.: [1] Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.
А. В. Архангельский.

НИКОЛЬСКОГО ПРОСТРАНСТВО — банахово пространство $H_p^r(\Omega)$, состоящее из функций, определенных на открытом множестве Ω n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и обладающих определенными разностно-дифференциальными свойствами, характеризующимися вектором $r=(r_1, \ldots, r_n)$, $r_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, в метрике L_p, $1\leqslant p\leqslant+\infty$. Введены С. М. Никольским.

Н. п. $H_p^r(\Omega)$ можно описать в терминах свойств разностей от частных производных порядка r_i^* по переменной x_i, где $r_i=r_i^*+\alpha_i$, r_i^* — целое, $0<\alpha_i\leqslant1$, $i=1, 2, \ldots, n$;

если через $\Delta^s_{h_i} f$ обозначить разность порядка $s=1, 2, \ldots$ с шагом h_i по переменной x_i функции f, то

$$f \in H^r_p(M_1, \ldots, M_n; \Omega), M_i > 0,$$

тогда и только тогда, когда функция f имеет в Ω обобщенные частные производные

$$f^{(r_i^*)}_{x_i} = \partial^{r_i^*} f / \partial x_i^{r_i^*},$$

$i=1, 2, \ldots, n$, и при $0<\alpha_i<1$ имеет место неравенство

$$\left\| \Delta^1_{h_i} f^{(r_i^*)}_{x_i} \right\|_{L_p(\Omega_{|h_i|})} \leqslant M_i |h_i|^{\alpha_i},$$

а при $\alpha=1$ — неравенство

$$\left\| \Delta^2_{h_i} f^{(r_i^*)}_{x_i} \right\|_{L_p(\Omega_{2|h_i|})} \leqslant M_i |h_i|,$$

где Ω_η — множество точек $x \in \Omega$, удаленных от границы множества Ω больше чем на $\eta>0$, а h_i — произвольно.

Пространство $H^r_p(\Omega) = H^{r_1, \ldots, r_n}_p(\Omega)$ определяется как объединение всех $H^r_p(M_1, \ldots, M_n; \Omega)$ при всевозможных $M_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Если $\Omega \neq \varnothing$, то при любых $r_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ Н. п. $H^{r_1, \ldots, r_n}_p(\Omega)$ не пусто и в нем существуют функции, не принадлежащие Н. п. $H^{r_1, \ldots, r_{i-1}, r_i+\varepsilon, r_{i+1}, \ldots, r_n, \ldots}_p$ ни при каком $\varepsilon>0$ и ни при каком $i=1, 2, \ldots, n$.

В случае $p=\infty$, не целых r_i и непрерывности рассматриваемых производных Н. п. является *гёльдеровым пространством*. Понятие Н. п. обобщается на случай функций, определенных на достаточно гладких многообразиях (см. [2]).

Имеется описание Н. п. $H^{r_1, \ldots, r_k}_p(\Omega)$ в терминах свойств разностей от частных производных, меньших чем r_i^* порядков, в частности в терминах свойств разностей достаточно высокого порядка от самой функции.

Пусть $H^r_p(\Omega)$ — изотропное пространство, т. е. $r_1 = \ldots = r_n = r$. Если область Ω такова, что любую функцию f класса $H^r_p(\Omega)$ можно продолжить с сохранением класса на все пространство $\mathbb{R}^n$, т. е. так, что продолженная функция будет принадлежать классу $H^r_p(\mathbb{R}^n)$ (это всегда имеет место, если граница области достаточно гладкая), то для того, чтобы $f \in H^r_p(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых целых неотрицательных k и s таких, что $0<r-s<k$, у функции f существовали все частные производные $f^{(s)}$ порядка s и существовала постоянная $M>0$, для к-рой выполнялись неравенства

$$\| \Delta^k_h f^{(s)} \|_{L_p(\Omega_{k(h)})} \leqslant M |h|^{r-s}, \qquad (1)$$

где $h=(h_1, \ldots, h_n)$, $\Delta^k_h f^{(s)}$ — разность k-го порядка с векторным шагом h от функции $f^{(s)}$. Условие (1) эквивалентно аналогичному условию для модуля непрерывности производной $f^{(s)}$: существует такое $M>0$, что

$$\Omega^k(f^{(s)}, \delta) \leqslant M \delta^{r-s}, \quad \delta > 0,$$

где

$$\Omega^k(f^{(s)}, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|h|=1} \sup_{0<t\leqslant\delta} \| \Delta^k_{th} f^{(s)} \|_{L_p(\Omega_{kt})} \leqslant M \delta^{r-s}.$$

Если для функции $f \in H^r_p(\Omega)$ через M_f обозначить нижнюю грань всех M, для к-рых выполняется условие (1) для всех $h \in \mathbb{R}^n$ и всех частных производных допустимого порядка s, то

$$\| f \| \stackrel{\text{def}}{=} \| f \|_{L_p(\Omega)} + M_f$$

является нормой в Н. п. $H_p^r(\Omega)$, причем нормы, получающиеся при различных допустимых парах k, s, эквивалентны между собой.

Н. п., состоящее из функций, определенных на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, можно охарактеризовать в терминах наилучших приближений функций из этого пространства с помощью целых функций экспоненциального типа. Пусть $E_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(f)_p$ — наилучшее приближение в метрике $L_p(\mathbb{R}^n)$ функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ при помощи целых функций $q_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x_1, \ldots, x_n) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ экспоненциального типа степеней $\nu_1, \ldots, \nu_n$ соответственно по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Для Н. п. справедливы следующие прямая и обратная теоремы типа теорем Бернштейна, Джексона, Зигмунда.

Если функция $f \in H_p^{r_1, \ldots, r_n}(M_1, \ldots, M_n; \mathbb{R}^n)$, то для любых $\nu_i > 0$ выполняется неравенство

$$E_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(f) \leqslant c \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\nu_i^{r_i}} \tag{2}$$

(постоянная $c > 0$ не зависит от функции f).

Наоборот, если для функции $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство (2) для $\nu_i = a_i^k$, $k = 0, 1, \ldots$, $a_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и q является целой функцией степени единица по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$, для к-рой

$$\| f - q \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant c \sum_{i=1}^{n} M_i$$

(она существует в силу (2) при $k = 0$), то

$$f - q \in H_p^{r_1, \ldots, r_n}(M_1^*, \ldots, M_n^*; \mathbb{R}^n),$$

где

$$M_i^* = c_i \sum_{j=1}^{n} M_j, \tag{3}$$

причем постоянные $c > 0$ в (2) и $c_i > 0$ в (3) не зависят от M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В случае периодической по всем переменным функций f аналогичное описание Н. п. делается посредством наилучших приближений функций через тригонометрич. полиномы вместо целых функций экспоненциального типа (см. [1], [4]).

Н. п. могут быть описаны с помощью оператора Бесселя — Макдональда, применяемого к нек-рому классу обобщенных функций (*см. Вложения теоремы*).

Для пространств $H_p^{r_1, \ldots, r_n}(\Omega)$ С. М. Никольским доказаны транзитивные теоремы вложения для разных размерностей и метрик (см. [3] и *Вложения теоремы*), перенесенные в дальнейшем на более общие классы функций. Эти теоремы показывают, что Н. п. образуют замкнутую систему относительно граничных значений входящих в них функций: следы функций из Н. п. на гладких многообразиях в определенном смысле полностью описываются в терминах Н. п.

Свойства Н. п. дали возможность получить необходимые и достаточные условия разрешимости *Дирихле задачи* в соответствующих Н. п. в терминах принадлежности граничной функции также к нек-рому Н. п.: для того чтобы гармонич. функция u принадлежала классу $H_p^r(\Omega)$, $r > 1/p$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы граничные значения $u|_{\partial\Omega}$ принадлежали к классу $H_p^{r-1/p}(\partial\Omega)$. Отсюда при $p = 2$ следует, в частности, что если $u|_{\partial\Omega} \in H_2^{\rho}(\partial\Omega)$, $\rho > 1/2$, то *Дирихле интеграл* $D(u)$ от функции u по области Ω конечен и потому задачу Дирихле можно решить прямым вариационным методом. Из теорем вложения для Н. п. следует, что если для функции u ее интеграл Дирихле по области Ω конечен, то $u/\partial\Omega \in H_2^{1/2}(\partial\Omega)$ (см. [6]).

Обобщением Н. п. является пространство Бесова $B^{r_1, \ldots, r_n}_{p\theta}$.

Лит.: [1] Никольский С. М., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 38, с. 244—78; [2] его же, «Матем. сб.», 1953, т. 33, № 2, с. 261—326; [3] его же, «Докл. АН СССР», 1958, т. 118, № 1, с. 35—37; [4] его же, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; [5] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1975; [6] Никольский С. М., «Докл. АН СССР», 1953, т. 88, в. 3, с. 409—11. *Л. Д. Кудрявцев.*

НИКОМЕДА КОНХОИДА — плоская алгебраич. кривая 4-го порядка, уравнение к-рой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$(x^2+y^2)(y-a)^2-l^2y^2=0;$$

в полярных координатах:

$$\rho=\frac{a}{\sin\varphi}\pm l.$$

а) $l<a$ б) $l>a$ в) $l=a$

Внешняя ветвь (см. рис.). Асимптота $x=a$. Две точки перегиба B и C.

Внутренняя ветвь. Асимптота $x=a$. Начало координат — двойная точка, характер к-рой зависит от величин a и l: при $l<a$ — изолированная точка, кривая имеет еще две точки перегиба E, F; при $l>a$ — узловая точка; при $l=a$ — возврата точка. Н. к.— *конхоида* прямой $x=a$.

Н. к. названа по имени Никомеда (3 в. до н. э.), к-рый применял ее для решения задачи о трисекции угла.

Лит.: [1] Савелов А. А., Плоские кривые, М., 1960. *Д. Д. Соколов.*

НИЛЬАЛГЕБРА — алгебра с ассоциативными степенями (в частности, ассоциативная), в к-рой всякий элемент нильпотентен. Частным случаем Н. являются нильпотентная и локально нильпотентная алгебра. В ассоциативном случае построение Н., не являющихся локально нильпотентными, представляет собой трудную задачу; по существу известен лишь один пример такой алгебры (см. [5]).

Класс Н. замкнут относительно взятия гомоморфных образов и перехода к подалгебрам. Кроме того, расширение Н. с помощью Н. снова оказывается Н. Поэтому во всякой алгебре сумма всех нильидеалов является наибольшим нильидеалом, содержащим всякий нильидеал. Он наз. верхним нильрадикалом алгебры, факторалгебра по нему не содержит ненулевых нильидеалов. Вопрос о том, будет ли сумма односторонних нильидеалов односторонним нильидеалом, составляет содержание проблемы Кёте. Неизвестно также (1982), существуют ли простые нильколька. Выполнение условий «бернсайдовского типа» для Н. часто влечет ее нильпотентность или локальную нильпотентность; нётерова Н. нильпотентна; артинова Н. (в частности, конечномерная) нильпотентна; Н. ограниченного индекса (индексы нильпотентности элементов ограничены в совокупности) над полем нулевой характеристики нильпотентна (теорема Хигмена); Н., удовлетворяющая полиномиальному тождеству, локально нильпотентна. Не выяснено (1982), будет ли нильпотентной конечно определенная нильалгебра.

Особый интерес представляют условия, при к-рых радикал Джекобсона $\mathrm{Rad}\,A$ алгебры A над полем k совпадает с нильрадикалом. Вот нек-рые из них: A артинова, в частности конечномерная, алгебра ($\mathrm{Rad}\,A$ даже нильпотентен); $\mathrm{card}\,k>\dim_k A$, в частности если A конечно порождена над k и k несчетно; алгебраич. алгебра A; A конечно порожденная над k алгебра с по-

линомиальным тождеством и k бесконечно. Радикал конечно порожденной алгебры с полиномиальным тождеством над полем нулевой характеристики нильпотентен. Этот факт эквивалентен условию выполнимости в такой алгебре нек-рого стандартного тождества.

Некоторые из сформулированных утверждений имеют аналоги в неассоциативных алгебрах. Так, в альтернативном кольце с условием максимальности для правых идеалов, не имеющем элементов порядка 2 и 3 в аддитивной группе, всякий односторонний нильидеал нильпотентен. В йордановой алгебре A над полем k радикал Джекобсона $\mathrm{Rad}\, A$ является нильидеалом, если выполнено одно из следующих условий: $\mathrm{card}\, k > 2 + \dim A$; A — алгебраич. алгебра. Всякое альтернативное или специальное йорданово нилькольцо ограниченного индекса без элементов 2-го порядка в аддитивной группе локально нильпотентно (теорема Ширшова). Конечномерная обобщенно стандартная Н. нильпотентна.

Всякая антикоммутативная алгебра является Н. в определенном выше смысле, поэтому в классе антикоммутативных колец понятие Н. бессодержательно. Однако полезными оказываются различные аналоги этого понятия. Так, в классе колец Ли аналогом Н. являются энгелевы алгебры, т. е. алгебры, в к-рых внутренние дифференцирования элементов нильпотентны. Энгелева алгебра не обязана быть локально нильпотентной, однако если индексы нильпотентности внутренних дифференцирований ограничены в совокупности и основное поле имеет нулевую характеристику, то энгелева алгебра локально нильпотентна. Неизвестно (1982), будет ли она при этих ограничениях нильпотентной (проблема Хиггинса).

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [3] Кострикин А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1957, т. 21, № 4, с. 515—40; [4] Ширшов А. И., «Матем. сб.», 1957, т. 41, № 3, с. 381—94; [5] Голод Е. С., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 28, № 2, с. 273—76; [6] Higman G., «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1956, v. 52, p. 1—4; [7] Higgins P., там же, 1954, v. 50, p. 8—15; [8] Жевлаков К. А., «Алгебра и логика», 1967, т. 6, № 4, с. 11—17; [9] McGrimmon K., «Proc. Nat. Acad. Sci. USA», 1969, v. 62, № 3, p. 671—78. *В. Н. Латышев.*

НИЛЬГРУППА — группа, в к-рой любые два элемента x, y связаны соотношением

$$[[\ldots[[x, y]\, y], \ldots]\, y] = 1,$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор

$$[a, b] = a^{-1} b^{-1} ab,$$

причем в определении число коммутирований n зависит, вообще говоря, от пары x, y. В случае, если число n ограничено для всех x, y из данной группы, группа наз. энгелевой. Всякая *локально нильпотентная группа* является Н. Обратное в общем случае неверно, но верно при нек-рых дополнительных предположениях, напр. при условии локальной разрешимости группы. Вопрос о локальной нильпотентности энгелевой группы открыт (1981).

Термин «Н.» иногда употребляется в ином смысле. А именно, нильгруппой наз. группу, в к-рой всякая циклич. подгруппа субнормальна, т. е. включается в нек-рый субнормальный ряд группы (см. *Нормальный ряд* группы).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967.

А. Л. Шмелькин.

НИЛЬМНОГООБРАЗИЕ — компактное факторпространство связной нильпотентной группы Ли (иногда, впрочем, компактности не требуется).

Лит.: [1] Мальцев А. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, № 1, с. 9—32.

Д. В. Аносов.

НИЛЬПОЛУГРУППА — полугруппа с нулем, некоторая степень каждого элемента к-рой равна нулю. Н. составляют один из важнейших классов *периодических*

полугрупп: это в точности периодич. полугруппы с единственным идемпотентом, являющимся нулем. Более узкий класс составляют **локально нильпотентные полугруппы** (л. н. п., то есть полугруппы, каждая конечно порожденная подполугруппа к-рых нильпотентна, см. *Нильпотентная полугруппа*). Для любого $n>1$ существует полугруппа с тождеством $x^n=0$, не являющаяся л. н. п. (см., напр., [1] гл. VIII, § 4). Конечная Н. нильпотентна, и л. н. п.— это в точности локально конечные Н. (см. *Локально конечная полугруппа*). Еще более узкий класс составляют **полугруппы с возрастающим аннуляторным рядом** (в. а. р.). Полугруппа S наз. полугруппой с в. а. р., если она обладает начинающимся с нуля возрастающим идеальным рядом (см. *Идеальный ряд* полугруппы), для любых двух соседних членов A_α, $A_{\alpha+1}$ к-рого имеет место

$$SA_{\alpha+1}\cup A_{\alpha+1}S\subseteq A_\alpha.$$

Н. будет полугруппой с в. а. р. тогда и только тогда, когда она обладает возрастающим рядом идеалов, все факторы к-рого конечны. Всякая полугруппа с в. а. р. имеет единственное неприводимое порождающее множество, состоящее из ее неразложимых элементов. Произвольная же л. н п. может совпадать со своим квадратом. Наложение на Н. многих условий конечности (см. *Полугруппа с условием конечности*) влечет конечность полугруппы; таковы, напр., условие минимальности для идеалов, условие максимальности для правых (левых) идеалов. Если все нильпотентные подполугруппы Н. S конечны, то и S конечна.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] Шеврин Л. Н., «Матем. сб.», 1961, т. 53, № 3, с. 367—86; [3] его же, там же, т. 55, № 4, с. 473—480.

Л. Н. Шеврин.

НИЛЬПОТЕНТНАЯ АЛГЕБРА — алгебра, для к-рой существует такое натуральное число n, что любое произведение n элементов алгебры равно нулю. Если при этом существует произведение $n-1$ элементов, не равное нулю, то n наз. **индексом нильпотентности** Н. а.

Примерами Н. а. являются: алгебры с нулевым умножением, алгебра строго верхнетреугольных матриц, прямые суммы Н. а., индексы нильпотентности к-рых ограничены в совокупности, тензорное произведение двух алгебр, из к-рых одна нильпотентна.

Класс Н. а. замкнут относительно взятия гомоморфных образов и перехода к подалгебрам. В ассоциативной алгебре сумма конечного числа нильпотентных идеалов является нильпотентным идеалом, а сумма произвольного множества нильпотентных идеалов является, вообще говоря, локально нильпотентным идеалом. Конечномерная алгебра над полем нулевой характеристики, обладающая базисом, состоящим из нильпотентных элементов, нильпотентна. Если алгебра удовлетворяет полиномиальному тождеству степени d, то всякое ее нильпотентное подкольцо в степени $[d/2]$ принадлежит сумме нильпотентных идеалов. Производная алгебра конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики нильпотентна. Нильпотентные подалгебры, совпадающие со своим нормализатором (**подалгебры Картана**), играют существенную роль в классификации простых алгебр Ли конечной размерности. Н. а. Ли обладает внешним автоморфизмом. Алгебра Ли с регулярным автоморфизмом (т. е. автоморфизмом, не имеющим неподвижных элементов, кроме нулевого) простого периода нильпотентна.

Лит.: [1] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [2] его же, Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964; [3] Albert A. A., Structure of algebras, [3 ed.], Providence, [1968]; [4] Jacobson N., «Proc. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 6, № 2, p. 281—83; [5] Higman G., «J. Lond. Math. Soc.», 1957, v. 32, № 3, p. 321—34.

В. Н. Латышев.

НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — группа, обладающая *нормальным рядом*

$$G = A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_k \supseteq A_{k+1} = \{1\}$$

таким, что каждый его фактор A_i/A_{i+1} лежит в центре факторгруппы G/A_{i+1} (такой ряд наз. центральным). Длина наиболее короткого центрального ряда Н. г. наз. ее классом (или ступенью) нильпотентности. В любой Н. г. нижний (а также верхний) центральный ряд (см. *Подгрупп ряд*) обрывается на единичной подгруппе и имеет длину, равную классу нильпотентности группы.

Конечные Н. г. исчерпываются прямыми произведениями p-групп, т. е. групп порядков p^k, где p — простое число. В любой Н. г. элементы конечных порядков образуют подгруппу, факторгруппа по к-рой не имеет кручения. Конечно порожденные Н. г. без кручения исчерпываются группами целочисленных треугольных матриц с единицами на главной диагонали и их подгруппами. Любая конечно порожденная Н. г. без кручения аппроксимируется конечными p-группами для любого простого p. Конечно порожденные Н. г. являются *полициклическими группами*, более того, они имеют центральный ряд с циклич. факторами.

Все Н. г. класса нильпотентности не больше c образуют многообразие (см. *Групп многообразие*), определяемое тождеством

$$[[\ldots[[x_1, x_2]\, x_3], \ldots]\, x_{c+1}] = 1.$$

Свободные группы этого многообразия наз. свободными нильпотентными группами. О пополнении Н. г. без кручения см. *Локально нильпотентная группа*.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977. *А. Л. Шмелькин.*

НИЛЬПОТЕНТНАЯ ПОЛУГРУППА — полугруппа S с нулем, для к-рой существует такое n, что $S^n = 0$; это эквивалентно выполнению в S тождества

$$x_1 \ldots x_n = y_1 \ldots y_n.$$

Наименьшее для данной полугруппы число n с указанным свойством наз. ступенью (иногда классом) нильпотентности Н. п. Если $S^2 = 0$, то S наз. полугруппой с нулевым умножением. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны: 1) S есть Н. п., 2) S обладает конечным аннуляторным рядом (т. е. возрастающим аннуляторным рядом конечной длины, см. *Нильполугруппа*), 3) существует такое k, что любая подполугруппа из S может быть включена в идеальный ряд длины $\leqslant k$ полугруппы S.

Более широким является понятие нильпотентной полугруппы в смысле Мальцева [2]. Так называется полугруппа, удовлетворяющая для нек-рого n тождеству

$$X_n = Y_n,$$

где слова X_n, Y_n определяются по индукции следующим образом: $X_0 = x$, $Y_0 = y$, $X_n = X_{n-1} u_n Y_{n-1}$, $Y_n = Y_{n-1} u_n X_{n-1}$, x, y, u_1, …, u_n — переменные. Группа будет Н. п. в смысле Мальцева тогда и только тогда, когда она нильпотентна в обычном теоретико-групповом смысле (см. *Нильпотентная группа*), причем выполнение тождества $X_n = Y_n$ эквивалентно тому, что ступень ее нильпотентности $\leqslant n$. Всякая полугруппа с законом сокращения, удовлетворяющая тождеству $X_n = Y_n$, вложима в группу, удовлетворяющую тому же тождеству.

Лит.: [1] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960; [2] Мальцев А. И., «Уч. зап. Ивановского гос. пед. ин-та», 1953, т. 4, с. 107—11; [3] Шеврин Л. Н., «Матем. сб.», 1961, т. 53, № 3, с. 367—86; [4] его же, там же, 1963, т. 61, № 2, с. 253—56. *Л. Н. Шеврин.*

НИЛЬПОТЕНТНЫЙ ИДЕАЛ — односторонний или двусторонний идеал M кольца или полугруппы с нулем A такой, что для нек-рого натурального n выполняется $M^n = \{0\}$, т. е. произведение любых n элементов идеала M равно нулю. Напр., в кольце Z/p^nZ вычетов по модулю p^n, где p — нек-рое простое число, все идеалы, отличные от самого кольца, нильпотентны. В групповом кольце $F_p[G]$ конечной p-группы G над полем из p элементов идеал, порожденный элементами вида $\sigma - 1$, где $\sigma \in G$, нильпотентен. В кольце верхних треугольных матриц над нек-рым полем матрицы, у к-рых на главной диагонали стоят нули, образуют Н. и.

Любой элемент Н. и. нильпотентен. Любой Н. и. является одновременно нильидеалом и содержится в радикале *Джекобсона кольца*. В артиновых кольцах радикал Джекобсона нильпотентен, и понятия Н. и. и нильидеала совпадают. Последнее свойство справедливо и для *нётеровых колец*. В нётеровом слева кольце любой левый (правый) нильидеал нильпотентен.

Все Н. и. коммутативного кольца содержатся в нильрадикале, к-рый в общем случае может быть не нильпотентным, а лишь нильидеалом. Простой пример такой ситуации доставляет прямая сумма колец Z/p^nZ по всем натуральным n. В коммутативном кольце любой *нильпотентный элемент* a содержится в нек-ром Н. и., напр. в главном идеале, порожденном a. В некоммутативном кольце могут существовать нильпотентные элементы, к-рые не содержатся ни в одном Н. и. (и даже нильидеале). Напр., в полном кольце матриц над полем имеются нильпотентные элементы, в частности нильпотентны упоминавшиеся выше матрицы, у к-рых ненулевые элементы стоят только над главной диагональю, но это кольцо просто и, следовательно, не имеет ненулевых Н. и.

В конечномерной алгебре Ли G существует максимальный Н. и., состоящий из элементов $x \in G$, для к-рых эндоморфизм $y \to [x, y]$ для $y \in G$ нильпотентен.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Джекобсон Н., Строение колец, пер. с англ., М., 1961; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977; [4] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [5] Бурбаки Н., Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, пер. с франц., М., 1976.

Л. В. Кузьмин.

НИЛЬПОТЕНТНЫЙ ЭЛЕМЕНТ, нильпотент,— элемент a кольца или полугруппы с нулем A, удовлетворяющий равенству $a^n = 0$ для нек-рого натурального n. Минимальное значение n, для к-рого справедливо это равенство, наз. индексом нильпотентности элемента a. Напр., в кольце вычетов по модулю p^n, где p — нек-рое простое число, класс вычетов числа p — нильпотент индекса n, матрица $\left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\|$ является нильпотентом индекса 2 в кольце (2×2)-матриц с коэффициентами в нек-ром поле K, в групповой алгебре $F_p[G]$, где F_p — поле из p элементов, а G — циклич. группа порядка p с образующей σ, элемент $1-\sigma$ является нильпотентом индекса p.

Если a — Н. э. индекса n, то справедливо равенство

$$1 = (1-a)(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}),$$

т. е. элемент $(1-a)$ обратим в кольце A и обратный к нему элемент записывается в виде многочлена от a.

В коммутативном кольце A элемент a нильпотентен тогда и только тогда, когда он содержится во всех простых идеалах кольца. Все Н. э. образуют идеал J, наз. нильрадикалом кольца и совпадающий с пересечением всех простых идеалов кольца A. Кольцо A/J уже не имеет Н. э., отличных от нуля.

При интерпретации коммутативного кольца A как кольца функций на пространстве Spec A (спектре A) нильпотентам соответствуют функции, тождественно равные нулю. Тем не менее рассмотрение нильпотентов часто оказывается полезным в алгебраич. геометрии,

т. к. они позволяют получить чисто алгебраич. аналог ряда понятий, типичных для анализа и дифференциальной геометрии (бесконечно малые деформации и т. п.).

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Херстейн И., Некоммутативные кольца, пер. с англ., М., 1972; [3] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

Л. В. Кузьмин.

НИЛЬПОТОК — поток на *нильмногообразии* $M=G/H$, определяемый действием на M какой-нибудь однопараметрич. подгруппы g_t нильпотентной группы Ли G: если M состоит из смежных классов gH, то под действием Н. такой класс за время t переходит в класс $g_t gH$.

Лит.: [1] Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф., Потоки на однородных пространствах, пер. с англ., М., 1966.

Д. В. Аносов.

НИТЬ обратного спектра $\{X_\alpha, \omega_\alpha^\beta;\ \alpha\in\mathfrak{A}\}$ топологических пространств X_α — такая система $x=\{x_\alpha\}$ точек $x_\alpha\in X_\alpha$ (по одной точке из каждого X_α), т. е. такая точка произведения $\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}X_\alpha$ множеств X_α, что $\omega_\alpha^\beta(x_\beta)=x_\alpha$ всякий раз, когда $\beta>\alpha$.

Б. А. Пасынков.

НОМОГРАФИЯ — раздел математики, в к-ром изучаются способы графич. представления функциональных зависимостей. Получающиеся при этом чертежи наз. номограммами. Каждая номограмма строится для определенной функциональной зависимости в заданных пределах изменения переменных. На номограммах вычислительная работа заменяется выполнением простейших геометрич. операций, указанных в ключе пользования номограммой, и считыванием ответов.

Точность получения ответов по номограммам зависит от вида номографированной зависимости, пределов изменения переменных, размеров чертежа и выбранного типа номограммы. В среднем номограммы могут обеспечить получение ответов с 2—3 верными значащими цифрами. Когда точность номограмм недостаточна, их можно использовать для прикидочных расчетов, для нахождения нулевых приближений, для контроля вычислений с целью обнаружения грубых ошибок.

Номограммы можно применять и для исследования функциональных зависимостей, положенных в их основу. Часто такое исследование выполняется на номограммах значительно проще и нагляднее, чем иными способами. С помощью номограмм можно исследовать влияние различных переменных на искомую переменную, дать наглядную геометрич. интерпретацию каким-либо ранее известным свойствам данной зависимости, установить ранее неизвестные ее особенности. Номографические методы исследования можно, напр., применять в задачах на подбор параметров эмпирич. формул по результатам наблюдений, на аппроксимацию одной функции другой, на нахождение экстремальных значений функции.

Значения переменных изображаются на номограммах помеченными точками и помеченными линиями. Множество помеченных точек, зависящее от одной переменной, наз. шкалой. Уравнения шкалы переменной α_1 в прямоугольной системе координат xOy записываются в виде

$$x=f_1,\quad y=g_1,$$

где f_1 и g_1 — функции $f(\alpha_1)$ и $g(\alpha_1)$. Схема шкалы α_1 приведена на рис. 1.

Множество помеченных точек, зависящее от двух переменных, наз. бинарным полем. Бинарное поле обычно оформляется в виде сетки, состоящей из двух семейств помеченных линий. Точка в бинарном поле определяется как точка пересечения линий с заданными пометками. В системе прямоугольных координат xOy бинарное поле переменных α_1 и α_2 задается уравнениями

$$x=f_{12},\quad y=g_{12},$$

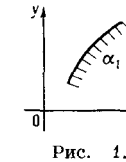


Рис. 1.

Рис. 2.

где f_{12} и g_{12} — функции $f_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$ и $g_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$. Предполагается, что функции f_{12} и g_{12} таковы, что в заданной области изменения переменных каждой паре значений α_1 и α_2 отвечает только одна пара значений x и y. Схема бинарного поля (α_1, α_2) приведена на рис. 2.

Шкалы, семейства помеченных линий и бинарные поля в номограммах оформляются так, чтобы было удобно находить точки и линии с заданными пометками и определять пометки ответных точек и линий.

Элементарными номограммами наз. номограммы, в к-рых ответ или ответы находятся в результате выполнения одной геометрич. операции (определение точки на шкале или в бинарном поле; проведение прямой через две точки; построение окружности по известному центру и радиусу; деление отрезка в заданном отношении; проведение прямой, параллельной данной; откладывание отрезка, длина к-рого равна длине данного отрезка; построение параллелограмма по трем его известным вершинам; наложение одной плоскости на другую).

К элементарным номограммам относятся: график функции; сдвоенная шкала; сетчатая; из выравненных точек; из равноудаленных точек; циркульная; с параллельным индексом; барицентрическая; ромбоидальная, с ориентированным транспарантом и с транспарантом общего вида.

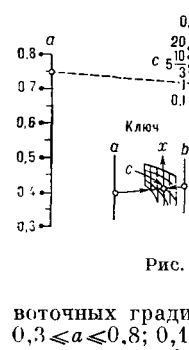


Рис. 3.

На рис. 3 приведена элементарная номограмма из выравненных точек для определения величины x из уравнения

$$x^{a-1} = b\,\frac{\ln(c-x)}{c-x-1},$$

применяющегося при термическом расчете вентиляторных противоточных градирен. Номограмма построена в пределах: $0{,}3 \leqslant a \leqslant 0{,}8$; $0{,}1 \leqslant b \leqslant 20$; $0{,}1 \leqslant c \leqslant 20$; $0{,}001 \leqslant x \leqslant 0{,}5$. Переменные a и b представлены на номограмме шкалами; переменные c и x — бинарным полем. На номограмме показано решение числового примера (дано: $a = 0{,}75$; $b = 7$; $c = 10$; ответ: $x = 0{,}1$).

Элементарные номограммы имеют простое геометрич. обоснование: номографич. интерпретация условия расположения трех точек на одной прямой приводит к номограмме из выравненных точек; формулы расстояния между двумя точками — к номограмме из равноудаленных точек и к циркульной; формул для координат точки, делящей отрезок в заданном отношении, — к барицентрич. номограмме; условия параллельности двух прямых — к номограмме с параллельным индексом; формул, определяющих координаты четвертой вершины параллелограмма по трем его заданным вершинам, — к ромбоидальной номограмме; формул преобразования прямоугольных координат без поворота и с поворотом осей — к номограммам на двух плоскостях (с ориентированным транспарантом и с транспарантом общего вида).

Каждому виду элементарной номограммы соответствует своя канонич. форма зависимости, к-рую можно изобразить номограммой. Нек-рые канонич. формы допускают построение элементарных номограмм различного типа.

Наиболее общая канонич. форма, представимая элементарной номограммой из выравненных точек, имеет

вид

$$\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}}=\frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}.$$

Соответствующая номограмма состоит из трех бинарных полей (α_1, α_2), (α_3, α_4) и (α_5, α_6), связанных одним выравниванием.

Ниже приведены часто встречающиеся на практике канонич. формы для отдельных уравнений и систем уравнений, представимые номограммами того или иного типа.

Канонич. формы для отдельных уравнений: а) с тремя переменными:

$$f_1=f_{23},\ f_1f_3+f_2g_3+h_3=0,\ f_1+f_2=f_3,\ f_1=f_2f_3;$$

б) с четырьмя переменными:

$$f_{12}=f_{34},\ f_1f_{34}+f_2g_{34}+h_{34}=0,\ f_{12}=f_3+f_4;$$

в) с пятью переменными:

$$f_{12}=f_{34}+f_{35},\ f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=0,$$
$$f_5=F(f_{12}+f_{34},\ g_{12}+g_{34});$$

г) с шестью переменными:

$$f_{12}+f_{13}=f_{45}+f_{46},\ f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6=0;$$

д) с семью переменными:

$$f_7=F(f_{12}+f_{34}+f_{56},\ g_{12}+g_{34}+g_{56}),$$
$$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6+f_7=0;$$

канонич. формы для систем уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} f_3=f_{12},\\ g_4=g_{12}; \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} f_{12}+f_{34}=f_{56},\\ g_{12}+g_{34}=f_{56}; \end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l} f_{12}-f_{56}=f_{34}-f_{78},\\ g_{12}-g_{56}=g_{34}-g_{78}; \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{l} f_{12}-f_7=f_{34}-f_8=f_{56}-f_9,\\ g_{12}-g_7=g_{34}-g_8=g_{56}-g_9. \end{array}\right\}$$

Составными номограммами наз. номограммы, состоящие из элементарных номограмм одного или разных типов. Введение составных номограмм значительно расширяет класс номографируемых зависимостей. Сводку канонич. форм, представимых элементарными и составными номограммами, см. в [3], [4].

Всегда номографируемы зависимости с тремя переменными. Зависимости с четырьмя и бо́льшим числом переменных допускают построение номограмм лишь в частных случаях.

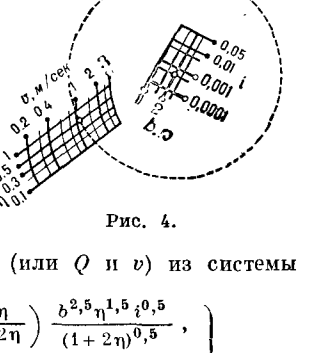


Рис. 4.

Для расширения круга номографируемых зависимостей применяют приближенное номографирование. Оно основано на замене с нек-рой допустимой погрешностью данной зависимости номографируемой.

На рис. 4 приведена приближенная номограмма из равноудаленных точек для определения величин η и v (или Q и v) из системы уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} Q=\left(76{,}9+17{,}72\lg\dfrac{b\eta}{1+2\eta}\right)\dfrac{b^{2{,}5}\eta^{1{,}5}i^{0{,}5}}{(1+2\eta)^{0{,}5}},\\ v=\left(76{,}9+17{,}72\lg\dfrac{b\eta}{1+2\eta}\right)\dfrac{b^{0{,}5}\eta^{0{,}5}i^{0{,}5}}{(1+2\eta)^{0{,}5}}, \end{array}\right\}$$

применяющейся при гидравлич. расчете прямоугольных лотков. Эта система для возможности номографирования была приближенно заменена системой:

$$Q=\frac{76b^{2{,}616}\eta^{1{,}616}i^{0{,}5}}{(1+2\eta)^{0{,}616}},\qquad v=\frac{76b^{0{,}616}\eta^{0{,}616}i^{0{,}5}}{(1+2\eta)^{0{,}616}}$$

с относительной погрешностью в величинах Q и r, не превышающей 2,5%. Штриховая окружность на номограмме соответствует решению числового примера (дано: $i=0{,}0005$; $b=2$ м; $Q=2{,}2$ м³/сек; ответы: $\eta=0{,}5$ и $v=1{,}1$ м/сек).

В нек-рых случаях методы приближенного номографирования дают возможность представлять номограммами таблицы с несколькими входами.

Для номографирования данной зависимости ее приводят точно или приближенно к номографируемому виду и записывают уравнения элементов номограммы в прямоугольной системе координат. Входящие в эти уравнения параметры преобразования (а иногда и произвольные функции) подбирают так, чтобы придать номограмме удобный для пользования вид. Далее рассчитывают таблицы координат отдельных элементов номограммы, а затем вычерчивают номограмму.

Получила развитие машинная номография (см. [4]): разработаны системы процедур и стандартных программ для автоматич. расчета и построения элементов номограмм с помощью ЭВМ и графопостроителя, а также стандартные программы для автоматич. конструирования, расчета и вычерчивания номограмм различных типов.

Основными проблемами теоретич. Н. являются проблемы представимости и единственности. Суть первой проблемы состоит в том, чтобы выяснить, можно ли заданное уравнение или систему уравнений привести к той или иной канонич. форме, и если возможно, то указать алгоритм такого приведения. Получены решения этой проблемы для нек-рых канонич. форм. Они сложны и на практике не применяются. Суть второй проблемы заключается в том, чтобы выяснить, единственным ли способом приводится данная зависимость к канонич. форме, и если не единственным, то указать все возможные способы и установить возможности преобразования номограмм в каждом из них.

Лит.: [1] Пентковский М. В., Номография, М.—Л., 1949; [2] Невский Б. А., Справочная книга по номографии, М.—Л., 1951; [3] Хованский Г. С., Основы номографии, М., 1976; [4] его же, Номография и ее возможности, М., 1977.

Г. С. Хованский.

НОРМА — 1) Отображение $x \to \|x\|$ векторного пространства X над полем действительных или комплексных чисел в совокупность действительных чисел, подчиненное условиям:

$$\|x\| \geqslant 0, \text{ причем } \|x\|=0 \text{ только при } x=0;$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \text{ для каждого скаляра } \lambda;$$

$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ для всех x, $y \in X$ (аксиома треугольника). При этом число $\|x\|$ наз. нормой элемента x.

Векторное пространство X с отмеченной Н. наз. нормированным пространством. Н. индуцирует на X *метрику* по формуле $\operatorname{dist}(x, y)=\|x-y\|$, а следовательно и топологию, совместимую с этой метрикой. Тем самым нормированное пространство наделяется естественной структурой топологического векторного пространства. Нормированное пространство, полное относительно указанной метрики, наз. банаховым пространством. Каждое нормированное пространство обладает банаховым пополнением.

Отделимое (хаусдорфово) топологическое векторное пространство наз. нормируемым, если его топология совместима с нек-рой Н. Нормируемость равносильна существованию выпуклой ограниченной окрестности нуля (теорема Колмогорова, 1934). Н. в нормированном векторном пространстве X тогда и только тогда порождается скалярным произведением (т. е. пространство X изометрически изоморфно *предгильбертову пространству*), когда для всех x, $y \in X$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Две Н. $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, заданные на одном и том же векторном пространстве X, наз. эквивалентными, если они индуцируют одну и ту же топологию. Это равносильно существованию таких констант C_1 и C_2, что

$$\|x\|_1 \leqslant C_1\|x\|_2, \quad \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1 \text{ для всех } x \in X.$$

Если пространство X полно относительно обеих Н., то их эквивалентность является следствием согласованности. При этом согласованность означает, что выполнение предельных соотношений

$$\|x_n - a\|_1 \to 0, \quad \|x_n - b\|_2 \to 0$$

влечет за собой равенство $a = b$.

Не на каждом топологическом векторном пространстве, даже в предположении локальной выпуклости, существует непрерывная Н. Напр., непрерывной Н. нет на бесконечном произведении прямых с топологией покоординатной сходимости. Отсутствие непрерывной Н. может служить очевидным препятствием к непрерывному погружению одних топологич. пространств в другие.

Если Y — замкнутое подпространство в нормированном пространстве X, то факторпространство X/Y классов смежности по Y наделяется Н.

$$\|\tilde{x}\| = \inf\{\|x\| : x \in \tilde{x}\},$$

относительно к-рой оно становится нормированным пространством. Н. образа элемента x относительно естественной проекции $X \to X/Y$ наз. факторнормой элемента x по подпространству Y.

Совокупность X^* непрерывных линейных функционалов ψ на нормированном пространстве X образует банахово пространство относительно Н.

$$\|\psi\| = \sup\{|\psi(x)| : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Н. всех функционалов достигаются в подходящих точках единичного шара исходного пространства тогда и только тогда, когда пространство рефлексивно.

Совокупность $L(X, Y)$ линейных непрерывных (ограниченных) операторов A из нормированного пространства X в нормированное пространство Y превращается в нормированное пространство путем введения операторной нормы:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Относительно этой Н. пространство $L(X, Y)$ полно, если полно Y. При полном $X = Y$ пространство $L(X) = L(X, X)$ с умножением (суперпозицией) операторов становится *банаховой алгеброй*, поскольку операторная Н. удовлетворяет условию

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|, \quad \|I\| = 1,$$

где I — тождественный оператор (единица алгебры). Интересны и другие эквивалентные Н. на $L(X)$, подчиненные тому же условию. Такие Н. наз. алгебраическими, или кольцевыми. Алгебраич. Н. можно получить, эквивалентно перенормируя X и беря соответствующую операторную Н., однако даже при $\dim X = 2$ на этом пути получаются не все алгебраич. Н. на $L(X)$.

Преднормой, или полунормой, на векторном пространстве X наз. отображение p со свойствами Н., кроме свойства невырожденности: равенство $p(x) = 0$ не исключает $x \neq 0$. Если $\dim X < \infty$, то ненулевая преднорма p на $L(X)$, подчиненная условию $p(AB) \leqslant p(A)p(B)$, фактически оказывается Н. (т. к. в этом случае $L(X)$ не имеет нетривиальных двусторонних идеалов). С другой стороны, для бесконечномерных нормированных пространств это уже не так. Если X — банахова алгебра над $\mathbb{C}$, то спектральный радиус

$$|x| = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n}$$

является полунормой тогда и только тогда, когда он равномерно непрерывен на X, и это условие равносильно коммутативности факторалгебры по радикалу.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [3] Шилов Г. Е., Математический анализ. (Специальный курс), 2 изд., М., 1961; [4] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [5] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; [6] Дэдин М. М., Нормированные линейные пространства, пер. с англ., М., 1961; [7] Глазман И. М., Любич Ю. И., Конечномерный линейный анализ в задачах, М., 1969; [8] Aupetit B., Propriétés Spectrales des Algèbres de Banach, B.—Hdlb.—N. Y., 1979; [9] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д., Теоремы и задачи функционального анализа, М., 1979. *Е. А. Горин.*

2) Н.— то же, что *абсолютное значение* на теле или кольце (см. также *Нормирование*).

3) Н. группы — совокупность элементов группы, перестановочных со всеми подгруппами, т. е. пересечение *нормализаторов* всех подгрупп. Н. содержит *центр* группы и содержится во втором *гиперцентре* Z_2. Для группы без центра Н. равна единичной подгруппе E.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *О. А. Иванова.*

НОРМАЛИЗАТОР подмножества M группы G в подгруппе H той же группы G — множество

$$N_H(M)=\{h \mid h\in H,\ h^{-1}Mh=M\},$$

т. е. множество всех таких элементов h подгруппы H, для к-рых при любом $m\in M$ элемент $h^{-1}mh$ (сопряженный с m посредством h) также принадлежит M. При любых M и H нормализатор $N_H(M)$ является подгруппой в H. Чаще всего рассматриваются Н. подгрупп группы G во всей группе G. Подгруппа A группы G тогда и только тогда инвариантна в G, когда $N_G(A)=G$. Н. множества, состоящего из одного элемента, совпадает с его *централизатором*. При любых H и M мощность класса подмножества, сопряженных с M элементами из H (т. е. подмножеств вида $h^{-1}Mh$, $h\in H$), равна индексу $|H : N_H(M)|$.

Лит.: [1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 2 изд., М., 1977. *Н. Н. Вильямс.*

НОРМАЛИЗАТОРНОЕ УСЛОВИЕ для подгрупп — условие на группу, заключающееся в том, что всякая ее собственная подгруппа строго содержится в своем нормализаторе. Всякая группа, удовлетворяющая Н. у.,— *локально нильпотентная группа*. С другой стороны, Н. у. удовлетворяют все нильпотентные группы и даже группы, обладающие возрастающим центральным рядом (*ZA*-группы). Однако существуют группы с Н. у., имеющие тривиальный центр. Таким образом, класс групп с Н. у. является строго промежуточным между классами *ZA*-групп и локально нильпотентных групп.

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967. *А. Л. Шмелькин.*

НОРМАЛИЗАЦИИ ПРИНЦИП — см. *Нормальный алгорифм.*

НОРМАЛЬ к кривой линии (поверхности) в данной ее точке — прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная к *касательной* прямой (*касательной плоскости*) в этой точке кривой (поверхности). Плоская гладкая кривая имеет в каждой точке единственную Н., расположенную в плоскости кривой. Если кривая на плоскости в прямоугольных координатах определяется уравнением $y=f(x)$, то уравнение Н. к кривой в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$(x-x_0)+(y-y_0)f'(x_0)=0.$$

Пространственная кривая имеет в каждой своей точке бесконечное множество Н., заполняющих нек-рую плоскость (*нормальную плоскость*). Н., лежащая в *соприкасающейся плоскости*, наз. *главной нормалью*; Н., перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, наз. *бинормалью.*

Н. к поверхности, заданной уравнением $z=f(x, y)$, в точке (x_0, y_0, z_0) определяется уравнением

$$\frac{x-x_0}{-\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{-\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{1}.$$

Если уравнение поверхности имеет вид $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, то векторное уравнение Н.:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v].$$

БСЭ-3.

НОРМАЛЬНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — 1) То же, что стационарный (в узком смысле) *гауссовский процесс*, рассматриваемый как динамич. система.

2) В 40—50-х гг. 20 в. так иногда называли динамич. системы (измеримые потоки и каскады) в *Лебега пространстве* (последнее в то время называли нормальным пространством с мерой).

Д. В. Аносов.

НОРМАЛЬНАЯ КРИВИЗНА регулярной поверхности — величина, характеризующая отклонение поверхности в направлении $\boldsymbol{l}$ от своей касательной плоскости в точке P, совпадающая по абсолютной величине с кривизной соответствующего нормального сечения. Н. к. в направлении $\boldsymbol{l}$ равна

$$k_l=(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{N})\,k,$$

где k — кривизна нормального сечения в направлении $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор главной нормали нормального сечения, $\boldsymbol{N}$ — единичный вектор нормали поверхности. Н. к. поверхности в данном направлении совпадает с Н. к. соприкасающегося параболоида в том же направлении. Н. к. поверхности, параметризованной параметрами u, v, может быть выражена через значения первой и второй квадратичных форм поверхности, вычисленных для значений $(du : dv)$, соответствующих направлению $\boldsymbol{l}$ по формуле

$$k_l=\frac{II}{I}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}.$$

Кривизна регулярной кривой, лежащей на поверхности, связана с Н. к. поверхности в направлении $\boldsymbol{l}$, касательном к кривой, и с геодезич. кривизной k_g этой кривой соотношением

$$k\boldsymbol{n}=k_g[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}]+k_l\boldsymbol{N}$$

(см. также *Мёнье теорема*). С помощью Н. к. конструируется *Дюпена индикатриса*, гауссова и средняя кривизны поверхности и многие другие понятия локальной геометрии поверхности.

Д. Д. Соколов.

НОРМАЛЬНАЯ МАТРИЦА — квадратная матрица A, перестановочная со своей сопряженной (т. е. $AA^*=A^*A$).

НОРМАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ пространственной кривой в данной ее точке M — плоскость, проходящая через M перпендикулярно к *касательной* прямой в той же точке. Н. п. содержит все *нормали* к кривой, проходящие через данную точку. Если кривая задана в прямоугольных координатах уравнениями

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=h(t),$$

то уравнение Н. п. в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, соответствующей значению t_0 параметра t, может быть записано в виде

$$(x-x_0)\frac{df(t_0)}{dt}+(y-y_0)\frac{dg(t_0)}{dt}+(z-z_0)\frac{dh(t_0)}{dt}=0.$$

Если уравнение кривой имеет вид $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, то уравнение Н. п.:

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=0.$$

БСЭ-3.

НОРМАЛЬНАЯ ПОДГРУППА — то же, что *нормальный делитель*.

НОРМАЛЬНАЯ ПОДПОЛУГРУППА полугруппы S — подполугруппа H, удовлетворяющая следующему условию: для любых $x, y \in S^1$ (по поводу обозначения S^1 см. *Нормальный комплекс*) таких, что $xy \in S$, и любого $h \in H$ включения $xhy \in H$ и $xy \in H$ эквивалентны. Подмножество полугруппы S будет Н. п. тогда и только тогда, когда оно является полным прообразом единицы при нек-ром гомоморфизме полугруппы S на полугруппу с единицей.

Лит.: [1] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960.

Л. Н. Шеврин.

НОРМАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ — производная функции в направлении нормали к заданному многообразию.

Л. Д. Кудрявцев.

НОРМАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ интегральных уравнений — свойство линейного интегрального уравнения быть разрешимым тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна всем решениям соответствующего сопряженного однородного уравнения. При соответствующих условиях Н. р. обладают *Фредгольма уравнения*, *сингулярные интегральные уравнения*, *интегральные уравнения типа свертки*.

Б. В. Хведелидзе.

НОРМАЛЬНАЯ СХЕМА — схема, все локальные кольца к-рой являются нормальными кольцами (т. е. приведенными и целозамкнутыми в полном кольце частных). Н. с. локально неприводима; для такой схемы понятия связной и неприводимой компоненты совпадают. Множество особых точек нётеровой Н. с. имеет коразмерность, бо́льшую 1. Имеется следующий критерий нормальности [1]: нётерова схема X нормальна тогда и только тогда, когда выполняются два условия: 1) для любой точки $x \in X$ коразмерности $\leqslant 1$ локальное кольцо $O_{X,x}$ регулярно; 2) для любой точки $x \in X$ коразмерности >1 глубина кольца $O_{X,x}$ больше 1. Для любой приведенной схемы X существует канонически связанная с ней Н. с. X^H (нормализация). X-схема X^H является целой, хотя и не всегда конечной над X. Однако если схема X превосходная (см. *Превосходное кольцо*), напр. если X — схема конечного типа над полем, то X^H является конечной над X.

Лит.: [1] Серр Ж.-П., «Математика», 1963, т. 7, № 5, с. 3—93.

В. И. Данилов.

НОРМАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ — сходимость ряда

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \qquad (1)$$

составленного из ограниченных отображений $u_k : X \to Y$ множества X в нормированное пространство Y, такая, что сходится ряд с положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$, составленный из норм отображений

$$\|u_k\| = \sup \{\|u_k(x)\| : x \in X\}.$$

Из Н. с. ряда (1) вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, состоящего из элементов пространства Y; обратное заключение неверно. Напр., если $u_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть действительная функция, определяемая равенствами: $u_k(x) = \sin \pi x/k$ при $k \leqslant x \leqslant k+1$ и $u_k(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus [k, k+1]$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ расходится.

Пусть, в частности, $u_k : \mathbb{R} \to Y$ — кусочно непрерывные функции на нек-ром некомпактном интервале $I \subset \mathbb{R}$ и имеет место Н. с. ряда (1), тогда возможно почленное интегрирование на интервале I:

$$\int_I f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I u_k(t)\, dt.$$

Несобственный интеграл

$$\int_I f(t;\lambda)\,dt,\ \lambda\in A, \qquad (2)$$

наз. нормально сходящимся на множестве A, если существует кусочно непрерывная положительная функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такая, что для любого $x\in I$ и любого $\lambda\in A$ выполняется неравенство $\|f(x;\lambda)\|\leqslant g(x)$ и интеграл $\int_I g(t)dt$ сходится. Из Н. с. интеграла (2) следует его абсолютная и равномерная сходимость; обратное заключение неверно.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Общая топология, пер. с франц., М., 1975; [2] его же, Функции действительного переменного. Элементарная теория, пер. с франц., М., 1965; [3] Шварц Л., Анализ, пер. с франц., т. 1, М., 1972. *Е. Д. Соломенцев.*

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА — 1) Н. ф. матрицы A — матрица N заранее определенного специального вида, получаемая из A с помощью преобразований определенного типа. В зависимости от рассматриваемого типа преобразований, от области K, к к-рой принадлежат коэффициенты A, от вида A и, наконец, от специфики решаемой задачи (напр., от желания расширять или не расширять K при переходе от A к N, от необходимости определить N по A однозначно или, наоборот, с нек-рым произволом) рассматриваются и различные Н. ф. Часто вместо термина «Н. ф.» употребляют термины «каноническая форма», «канонический вид». К числу классических Н. ф. относятся следующие (ниже через $M_{m\times n}(K)$ обозначается множество всех матриц из m строк и n столбцов с коэффициентами из K).

Нормальная форма Смита. Пусть K — либо кольцо $\mathbb{Z}$ целых рациональных чисел, либо кольцо $F[\lambda]$ многочленов от λ с коэффициентами из поля F. Матрица $B\in M_{m\times n}(K)$ наз. эквивалентной матрице $A\in M_{m\times n}(K)$, если найдутся такие обратимые матрицы $C\in M_{m\times m}(K)$ и $D\in M_{n\times n}(K)$, что $B=CAD$. Матрица B эквивалентна A тогда и только тогда, когда B может быть получена из A с помощью последовательности элементарных строчных и столбцовых преобразований, т. е. преобразований следующих трех типов: а) перестановка строк (столбцов); б) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца) с множителем из K; в) умножение строки (столбца) на обратимый элемент кольца K. Для преобразований этого типа справедливо следующее утверждение: всякая матрица $A\in M_{m\times n}(K)$ эквивалентна матрице $N\in M_{m\times n}(K)$ вида

$$N=\begin{Vmatrix} d_1 & & & & 0\\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r & \\ & & & & 0\\ & & & & & \ddots\\ 0 & & & & & & 0 \end{Vmatrix},$$

где $d_i\neq 0$ при всех i, d_i делит d_{i+1} при $i=1,\ \ldots,\ r-1$, и если $K=\mathbb{Z}$, то все d_i положительны, а если $K=F[\lambda]$, то старшие коэффициенты всех многочленов d_i равны 1. Указанная матрица N наз. нормальной формой Смита матрицы A. Элементы d_i наз. инвариантными множителями матрицы A, а число r — ее рангом. Нормальная форма Смита определена по A однозначно и может быть найдена следующим образом. Ранг A равен порядку наименьшего ненулевого минора матрицы A. Пусть $i\leqslant j\leqslant r$; тогда среди всех миноров порядка j матрицы A имеется хоть один ненулевой. Пусть Δ_j,

$j=1, \ldots, r$.— наибольший общий делитель всех ненулевых миноров порядка j матрицы A (нормированный условием, что $\Delta_j>0$ при $K=\mathbb{Z}$ и что старший коэффициент многочлена Δ_j равен 1 при $K=F[\lambda]$) и пусть $\Delta_0=1$. Тогда $d_j=\Delta_j/\Delta_{j-1}$, $j=1, \ldots, r$. Инвариантные множители являются полным набором инвариантов классов эквивалентных матриц: две матрицы из $M_{m\times n}(K)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда у них совпадают ранги и инвариантные множители с равными номерами.

Инвариантные множители $d_1, \ldots, d_r$ раскладываются (единственным способом с точностью до порядка сомножителей) в произведение степеней неприводимых в кольце K элементов $e_1, \ldots, e_s$ (являющихся нек-рыми целыми положительными числами, большими 1, если $K=\mathbb{Z}$, и нек-рыми многочленами положительной степени со старшим коэффициентом 1, если $K=F[\lambda]$),

$$d_i=e_1^{n_{i1}}e_2^{n_{i2}}\ldots e_s^{n_{is}}, \quad i=1, \ldots, r,$$

где n_{ij} — целые неотрицательные числа. Каждый множитель $e_j^{n_{ij}}$, для к-рого $n_{ij}>0$, наз. элементарным делителем матрицы A (над K). Каждый элементарный делитель входит в совокупность $\mathfrak{S}_{A,K}$ всех элементарных делителей матрицы A столько раз, в разложении скольких инвариантных множителей он встречается. Элементарные делители, в отличие от инвариантных множителей, зависят от того, над каким кольцом K рассматривается A: если $K=F[\lambda]$, а $\tilde{F}$ — нек-рое расширение поля F и $\tilde{K}=\tilde{F}[\lambda]$, то матрица $A\in M_{m\times n}(K)\subset M_{m\times n}(\tilde{K})$ имеет, вообще говоря, различные элементарные делители (но одинаковые инвариантные множители) в зависимости от того, рассматривается ли A как элемент $M_{m\times n}(K)$ или как элемент $M_{m\times n}(\tilde{K})$. Инвариантные множители восстанавливаются по полному набору элементарных делителей и наоборот.

Практический способ нахождения нормальной формы Смита см., напр., в [1].

Указанный основной результат о нормальной форме Смита получен для $K=\mathbb{Z}$ (см. [7]), для $K=F[\lambda]$ (см. [8]). Практически без изменений теория нормальных форм Смита переносится на случай, когда K — любое кольцо главных идеалов (см. [3], [6]). Нормальная форма Смита имеет важные приложения, напр. на ней по существу основывается структурная теория конечно порожденных модулей над кольцами главных идеалов (см. [3], [6]) и, в частности, теория конечно порожденных абелевых групп и теория жордановой Н. ф. (см. ниже).

Естественная нормальная форма. Пусть K — поле. Две квадратные матрицы A и $B\in M_{n\times n}(K)$ наз. подобными над K, если найдется такая невырожденная матрица $C\in M_{n\times n}(K)$, что $B=CAC^{-1}$. Имеется тесная связь между подобием и эквивалентностью: матрицы A и $B\in M_{n\times n}(K)$ подобны тогда и только тогда, когда матрицы $\lambda E-A$ и $\lambda E-B$, где E — единичная матрица, эквивалентны. Таким образом, для подобия A и B необходимо и достаточно совпадения инвариантных множителей или, что то же,— наборов элементарных делителей над $K[\lambda]$ у матриц $\lambda E-A$ и $\lambda E-B$. Практический способ нахождения матрицы C для подобных матриц A и B см. в [1], [4].

Матрица $\lambda E-A$ наз. характеристической матрицей матрицы $A\in M_{n\times n}(K)$, а инвариантные множители $\lambda E-A$ наз. инвариантами подобия матрицы A; их n штук. Пусть $d_1, \ldots, d_n$ — инварианты подобия матрицы A. Многочлен d_n равен определителю матрицы $\lambda E-A$ и наз. характеристическим многочленом матрицы A. Пусть $d_1=\ldots=d_q=1$, а степень d_j при $j\geqslant q+1$ больше 1.

Тогда справедливо утверждение: матрица A подобна над K блочнодиагональной матрице $N_1 \in M_{n\times n}(K)$ вида

$$N_1 = \begin{Vmatrix} L(d_{q+1}) & & & 0 \\ & L(d_{q+2}) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & L(d_n) \end{Vmatrix},$$

где через $L(f)$ для многочлена

$$f = \lambda^p + \alpha_1\lambda^{p-1} + \ldots + \alpha_p$$

обозначена т. н. сопровождающая матрица многочлена

$$L(f) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & -\alpha_{p-2} & \ldots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица N_1 определена по A однозначно и наз. первой естественной Н. ф. матрицы A (см. [1], [2]).

Пусть теперь $\mathscr{E}_{A,\,K[\lambda]}$ — набор всех элементарных делителей матрицы $\lambda E - A$. Тогда справедливо следующее основное утверждение: матрица A подобна над K блочнодиагональной матрице N_2, блоки к-рой — это сопровождающие матрицы всевозможных элементарных делителей $e_j^{n_i}\in\mathscr{E}_{A,\,K[\lambda]}$ матрицы $\lambda E - A$:

$$N_2 = \begin{Vmatrix} \ddots & & 0 \\ & L\left(e_j^{n_i}\right) & \\ & & \ddots \\ 0 & & \end{Vmatrix}.$$

Матрица N_2 определена по A лишь с точностью до порядка следования клеток по главной диагонали; она наз. второй естественной Н. ф. матрицы A (см. [1], [2]), а также ее фробениусовой, рациональной, канонической и квазиестественной Н. ф. (см. [4]). В отличие от первой естественной Н. ф., вторая естественная Н. ф., вообще говоря, меняется при переходе от поля K к его расширению.

Жорданова нормальная форма. Пусть K — поле, $A\in M_{n\times n}(K)$ и $\mathscr{E}_{A,\,K[\lambda]} = \{e_i^{n_i}\}$ — набор всех элементарных делителей матрицы $\lambda E - A$ над $K[\lambda]$. Пусть K обладает тем свойством, что характеристич. многочлен d_n матрицы A раскладывается в $K[\lambda]$ на линейные множители (так будет, напр., если K — поле комплексных чисел или, более общо, любое алгебраически замкнутое поле). Тогда каждый из многочленов e_i имеет вид $\lambda - a_i$ для нек-рого $a_i\in K$, а элементарный делитель $e_i^{n_i}$ соответственно имеет вид $(\lambda - a_i)^{n_i}$. Матрица $J(f)$ из $M_{s\times s}(K)$ вида

$$J(f) = \begin{Vmatrix} a & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{Vmatrix},$$

где $f = (\lambda - a)^s$, $a\in K$, наз. гиперсопровождающей матрицей многочлена f (см. [1]), или жордановой клеткой порядка s с собственным числом a. Справедливо следующее фундаментальное утверждение: матрица A подобна над K блочнодиагональной матрице $J\in M_{n\times n}(K)$,

блоки к-рой — это гиперсопровождающие матрицы всевозможных элементарных делителей матрицы $\lambda E - A$:

$$J = \begin{Vmatrix} \cdot & & 0 \\ & \cdot & \\ & & J\left(e_i^{n_{ij}}\right) \\ & & & \cdot \\ 0 & & & & \cdot \end{Vmatrix}.$$

Матрица J определена лишь с точностью до порядка следования клеток на главной диагонали; она является жордановой матрицей и наз. ж о р д а н о в о й Н. ф. матрицы A. Если K не обладает указанным выше свойством, то A нельзя привести над K к жордановой Н. ф. (но можно над нек-рым конечным расширением K). О так наз. обобщенной жордановой Н. ф., приведение к к-рой возможно уже над любым полем K, см. [4].

Помимо различных теорий Н. ф. для произвольных матриц возможны соответствующие теории и для матриц какого-либо специального вида. Классическими примерами являются теории Н. ф. симметрич. и кососимметрич. матриц. А именно, пусть K — поле. Две матрицы A, $B \in M_{n\times n}(K)$ наз. к о н г р у э н т н ы м и (см. [1]), если найдется такая невырожденная матрица $C \in M_{n\times n}(K)$, что $B = CAC^T$. Н. ф. относительно отношения конгруэнтности наиболее исследованы для классов симметрич. и кососимметрич. матриц. Пусть Char $K \neq 2$ и A — кососимметрич. матрица, т. е. $A^T = -A$. Тогда A конгруэнтна однозначно определенной матрице H вида

$$H = \begin{Vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & 0 \end{Vmatrix},$$

к-рая может рассматриваться как Н. ф. A относительно отношения конгруэнтности. Если же A — симметрич. матрица, т. е. $A^T = A$, то она конгруэнтна матрице D вида

$$D = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \varepsilon_r & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \cdot \\ 0 & & & & & & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\varepsilon_i \neq 0$ при всех i. Число r равно рангу A и определено однозначно, а дальнейшее уточнение выбора элементов ε_i зависит от свойств поля K. Так, если K алгебраически замкнуто, то можно считать, что $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_r = 1$; если K — поле действительных чисел, то можно считать, что $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_p = 1$ и $\varepsilon_{p+1} = \ldots = \varepsilon_r = -1$ для нек-рого p. Этими свойствами D уже определена однозначно и может рассматриваться как Н. ф. A относи-

тельно отношения конгруэнтности. О Н. ф. симметрич. матриц для ряда других полей, а также об эрмитовых аналогах этой теории см. [6], [10] и ст. *Квадратичная форма*.

Объединяющим обстоятельством в рассмотренных (а также и других) теориях Н. ф. является то, что допустимые преобразования над рассматриваемым множеством матриц определяются действием нек-рой группы, так что классы матриц, переводимых друг в друга с помощью этих преобразований,— *орбиты* этой группы, а указание Н. ф. есть выделение в каждой орбите нек-рого канонич. представителя. Так, классы эквивалентных матриц — орбиты группы $G=\mathrm{GL}_m(K)\times\mathrm{GL}_n(K)$ (где $\mathrm{GL}_s(K)$ — группы обратимых квадратных матриц порядка s с коэффициентами из K), действующей на $M_{m\times n}(K)$ по правилу $A\to CAD^{-1}$, где $(CD)\in G$. Классы подобных матриц — это орбиты группы $\mathrm{GL}_n(K)$ на $M_{m\times n}(K)$, действующей по правилу: $A\to CAC^{-1}$, где $C\in\mathrm{GL}_n(K)$. Классы конгруэнтных симметрич. или кососимметрич. матриц — это орбиты группы $\mathrm{GL}_n(K)$ на множестве всех симметрич. или кососимметрич. матриц порядка n, действующей по правилу $A\to CAC^T$, где $C\in\mathrm{GL}_n(K)$. С этой точки зрения каждая теория Н. ф. является конкретным примером решения части общей задачи орбитального разложения для действия нек-рой группы преобразований.

Лит.: [1] Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972; [2] Ланкастер П., Теория матриц, пер. с англ., М., 1978; [3] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [4] Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; [5] Бурбаки Н., Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, пер. с франц., М., 1962; [6] Бурбаки Н., Алгебра. Модули, кольца, формы, пер. с франц., М., 1966; [7] Smith H. J., The Collected Mathematical Paper, v. 1, Oxf., 1894, p. 367—409; [8] Frobenius G., «J. reine und angew. Math.», 1879, Bd 86, S. 146—208; [9] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 2 изд., М., 1966; [10] Серр Ж.-П., Курс арифметики, пер. с франц., М., 1972.

В. Л. Попов.

2) Н. ф. оператора — представление с точностью до изоморфизма *самосопряженного оператора* A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, в виде ортогональной суммы операторов умножения на независимую переменную.

Пусть, сначала, A — циклический оператор; это означает, что существует элемент $h_0\in\mathscr{H}$ такой, что любой элемент $h\in\mathscr{H}$ однозначно представим в виде $F(A)h_0$, где $F(\xi)$ — нек-рая функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\xi)|^2\,d\,(E_\xi h_0,\ h_0)<\infty,$$

здесь E_ξ, $-\infty<\xi<\infty$,— спектральная функция оператора A. Пусть $\mathscr{L}^2_\rho$ — пространство функций, суммируемых с квадратом на $(-\infty,\ +\infty)$ с весом $\rho(\xi)=(E_\xi h_0,\ h_0)$, и $K_\rho F=\xi F(\xi)$ — оператор умножения на независимую переменную с областью определения

$$D_{K_\rho}=\left\{F(\xi):\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\,|F(\xi)|^2\,d\rho(\xi)<\infty\right\}.$$

Тогда операторы A и K_ρ изоморфны, $A\simeq K$, т. е. существует изоморфное и изометрич. отображение $U:\mathscr{H}\to\mathscr{L}^2_\rho$ такое, что $UD_A=D_{K_\rho}$ и $A=U^{-1}K_\rho U$.

Пусть, теперь, A — произвольный самосопряженный оператор. Тогда H можно разложить в ортогональную сумму инвариантных подпространств H_α, на каждом из к-рых A индуцирует циклич. операторы A_α, так что $H=\sum\oplus H_\alpha$, $A=\sum\oplus A_\alpha$ и $A_\alpha\simeq K_{\rho_\alpha}$. Если на $\mathscr{L}^2=\sum\oplus\mathscr{L}^2_{\rho_\alpha}$ задать оператор $K=\sum\oplus K_{\rho_\alpha}$, то $A\simeq K$.

Оператор K наз. нормальной формой, или каноническим представлением, оператора A. Теорема о канонич. представлении рас-

пространяется на случай произвольных *нормальных операторов*.

Лит.: [1] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965; [2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966. *В. И. Соболев.*

3) Н. ф. оператора — представление оператора A, действующего в *Фока пространстве*, построенном над нек-рым пространством $L_2(M, \sigma)$, где (M, σ) — пространство с мерой, в виде суммы

$$A = \sum_{m, n \geqslant 0} \int K_{n, m}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \times$$
$$\times a^*(x_1) \ldots a^*(x_n)\, a(y_1) \ldots a(y_m) \prod_{i=1}^{n} d\sigma(x_i) \times$$
$$\times \prod_{j=1}^{m} d\sigma(y_j), \qquad (1)$$

где $\{a(x), a^*(x), x \in M\}$ — операторнозначные обобщенные функции, порождающие семейства операторов уничтожения $\{a(f), f \in L_2(M, \sigma)\}$ и рождения $\{a^*(f), f \in L_2(M, \sigma)\}$:

$$a(f) = \int_M a(x) f(x)\, d\sigma(x), \quad a^*(f) = \int_M a^*(x) \bar{f}(x)\, d\sigma(x).$$

В выражении (1) в каждом слагаемом множители $a(y_j)$, $j=1, \ldots, m$, стоят правее всех множителей $a^*(x_i)$, $i=1, \ldots, n$, функции (возможно обобщенные) $K_{n, m}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ от двух наборов переменных $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$, $(y_1, \ldots, y_m) \in M^m$, $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, в случае симметричного (бозонного) пространства Фока симметричны по переменным каждого из наборов в отдельности, а в случае антисимметричного (фермионного) пространства Фока — антисимметричны по этим переменным.

Для любого ограниченного оператора A нормальная форма существует и единственна.

Представление (1) можно переписать в виде, непосредственно содержащем операторы уничтожения и рождения:

$$A = \sum_{m, n} \sum_{(i_1, \ldots, i_n);\ j_1, \ldots, j_m} c_{i_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_m} \times$$
$$\times a^*(f_{i_1}) \ldots a^*(f_{i_n}) a(f_{j_1}) \ldots a(f_{j_m}), \qquad (2)$$

где $\{f_i, i = 1, 2, \ldots\}$ — нек-рый ортонормированный базис в $L_2(M, \sigma)$, и суммирование в (2) происходит по всем парам конечных наборов $\{f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}\}$, $\{f_{j_1}, \ldots, f_{j_m}\}$ элементов этого базиса.

В случае произвольного (сепарабельного) гильбертова пространства H Н. ф. оператора A, действующего в пространстве Фока $\Gamma(H)$, построенном над H, определяется при фиксированном базисе $\{f_i, i = 1, 2, \ldots\}$ в H с помощью выражения (2), где $a(f)$, $a^*(f)$, $f \in H$, — семейства операторов уничтожения и рождения, действующих в $\Gamma(H)$.

Лит.: [1] Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, М., 1965. *Р. А. Минлос.*

4) Н. ф. рекурсивной функции — способ задания n-местной рекурсивной функции φ в виде

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = g(\mu z(f(x_1, \ldots, x_n, z) = 0)), \qquad (*)$$

где f есть $(n+1)$-местная примитивно рекурсивная функция, g — одноместная примитивно рекурсивная функция, $\mu z(f(x_1, \ldots, x_n, z) = 0)$ — результат применения *наименьшего числа оператора* к функции f. Теорема Клини о Н. ф. утверждает: существует такая примитивно рекурсивная функция g, что каждая рекурсивная функция φ представима в виде (*) с подходящей функцией f, зависящей от φ, т. е.

$$(\exists g)\ (\forall \varphi)\ (\exists f)\ (\forall x_1, \ldots, x_n)\ [\varphi(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= g(\mu z(f(x_1, \ldots, x_n, z) = 0))].$$

Теорема о Н. ф. является одной из важнейших теорем в теории рекурсивных функций.

А. А. Марков [2] получил характеристику тех функций g, к-рые могут использоваться в теореме о Н. ф. в представлении (*). Функция g тогда и только тогда может использоваться в качестве функции, существование к-рой утверждается в теореме о Н. ф., когда уравнение $g(x) = n$ при любом n имеет бесконечно много решений. Такие функции наз. ф у н к ц и я м и б о л ь ш о г о р а з м а х а.

Лит.: [1] М а л ь ц е в А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [2] М а р к о в А. А., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1949, т. 13, № 5, с. 417—24. *В. Е. Плиско.*

5) Н. ф. с и с т е м ы д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

вблизи инвариантного многообразия M — такая формальная система

$$\dot{y}_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

к-рая получается из (1) обратимой формальной заменой координат

$$x_i = \xi_i(y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

и в к-рой ряды Тейлора — Фурье ψ_i содержат только *резонансные члены*. Впервые Н. ф. для одного случая встречается в диссертации А. Пуанкаре (H. Poincaré, см. [1]). Посредством Н. ф. (2) нек-рые системы (1) интегрируются, многие исследуются на устойчивость и интегрируются приближенно, для систем (1) отыскиваются периодич. решения и семейства условно периодич. решений, изучаются их *бифуркации*.

Н. ф. в окрестности неподвижной точки. Пусть M — неподвижная точка $X \equiv (x_1, \ldots, x_n) = 0$ системы (1) (т. е. $\varphi_i(0) = 0$), функции φ_i аналитичны в ней и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $\|\partial\varphi_i/\partial x_j\|$ при $X = 0$. Пусть $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$. Тогда в полной окрестности точки $X = 0$ система (1) имеет следующую Н. ф. (2): матрица $\|\partial\psi_i/\partial y_j\|$ при $Y \equiv (y_1, \ldots, y_n) = 0$ имеет Н. ф. (напр., жорданову), а ряды Тейлора

$$\psi_i = y_i \sum_{Q \in N_i} g_{iQ} Y^Q, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

содержат только резонансные члены, для к-рых

$$(Q, \Lambda) \equiv q_1\lambda_1 + \ldots + q_n\lambda_n = 0. \tag{5}$$

Здесь $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $Y^Q = y_1^{q_1} \ldots y_n^{q_n}$,

$$N_i = \{Q : \text{целые } q_j \geqslant 0,\ q_i \geqslant -1,\ q_1 + \ldots + q_n \geqslant 0\}.$$

Если уравнение (5) не имеет в $N = N_1 \cup \ldots \cup N_n$ решений $Q \neq 0$, то Н. ф. (2) является линейной:

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Всякая система (1) с $\Lambda \neq 0$ в окрестности неподвижной точки приводится к своей Н. ф. (2) нек-рым формальным преобразованием (3), где ξ_i — степенные ряды (возможно, расходящиеся), $\xi_i(0) = 0$ и $\det\|\partial\xi_i/\partial y_j\| \neq 0$ при $Y = 0$.

Вообще говоря, нормализующее преобразование (3) и Н. ф. (2) (т. е. коэффициенты g_{iQ} в (4)) неоднозначно определяются исходной системой (1). Н. ф. (2) сохраняет многие свойства системы (1): вещественность, симметричность, гамильтоновость и др. (см. [2], [3]). Если в исходной системе имеются малые параметры, то их можно включить в число координат x_j, тогда $\dot{x}_j = 0$. При нормализующем преобразовании такие координаты не меняются (см. [3]).

Если k — число линейно независимых решений $Q \in N$ уравнения (5), то с помощью преобразования

$$y_i = z_1^{\alpha_{i1}} z_2^{\alpha_{i2}} \ldots z_n^{\alpha_{in}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где α_{ij} — целые и $\det\|\alpha_{ij}\|=\pm 1$, Н. ф. (2) переводится в систему вида

$$\dot{z}_i = z_i f_i(z_1, \ldots, z_k), \quad i=1, \ldots, n$$

(см. [2], [3]). Решение этой системы сводится к решению подсистемы из первых k уравнений и к $n-k$ квадратурам. Подсистему надо исследовать в окрестности сложной особой точки $z_1 = \ldots = z_k = 0$, ибо $f_1, \ldots, f_k$ не содержат линейных членов. Это можно сделать с помощью локального метода (см. [3]).

Рассматривался вопрос (см. [2]): при каких условиях на Н. ф. (2) сходится (аналитично) нормализующее преобразование аналитической системы (1)? Пусть

$$\omega_k = \min |(Q, \Lambda)|$$

по таким $Q \in \mathcal{N}$, для к-рых

$$(Q, \Lambda) \neq 0, \quad q_1 + \ldots + q_n < 2^k.$$

Условие ω: $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln \omega_k^{-1} < \infty$.

Условие $\bar{\omega}$: $\overline{\lim}\, 2^{-k} \ln \omega_k^{-1} < \infty$ при $k \to \infty$.

Условие $\bar{\omega}$ слабее условия ω. Оба они выполнены для почти всех Λ (по мере Лебега) и являются очень слабыми арифметич. ограничениями на Λ.

Условие А в случае $\mathrm{Re}\Lambda = 0$ (общий случай см. в [2]): существует такой степенной ряд $a(Y)$, что в (4) $\psi_i = \lambda_i y_i a$, $i = 1, \ldots, n$.

Если у аналитич. системы (1) Λ удовлетворяет условию ω и Н. ф. (2) удовлетворяет условию А, то существует аналитич. преобразование системы (1) к нек-рой Н. ф. Если Н. ф. (2) получается из нек-рой аналитич. системы и не удовлетворяет хотя бы одному из условий $\bar{\omega}$ и А, то существует такая аналитич. система (1), к-рая имеет (2) своей Н. ф. и всякое преобразование к-рой к Н. ф. расходится (не аналитично).

Таким образом, поставленный выше вопрос решен для всех Н. ф., кроме тех, у к-рых Λ удовлетворяет условию ω и не удовлетворяет условию $\bar{\omega}$, а остальные коэффициенты Н. ф. удовлетворяют условию А. Условие А является очень жестким ограничением на коэффициенты Н. ф., и для больших n оно выполнено, вообще говоря, только в вырожденных случаях. Т. е. основная причина расходимости преобразований к Н. ф.— это не *малые знаменатели*, а невырожденность Н. ф.

Но и в случаях расходимости нормализующего преобразования (3) по Н. ф. (2) можно изучить свойства решений системы (1). Так, для вещественной системы (1) гладкое преобразование к Н. ф. (2) существует и в тех случаях, когда нет аналитического. Большинство результатов о гладкой нормализации получено при условии, что все $\mathrm{Re}\lambda_j \neq 0$. При этом условии с помощью замены $X \to V$ конечного класса гладкости систему (1) можно привести к укороченной Н. ф.

$$\dot{v}_i = \tilde{\psi}_i(V), \quad i=1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $\tilde{\psi}_i$ — многочлены степени m (см. [4] — [6]). Если в нормализующем преобразовании (3) отбросить все члены степени выше m, то получится преобразование

$$x_i = \tilde{\xi}_i(U), \quad i=1, \ldots, n \tag{7}$$

($\tilde{\xi}_i$ — многочлены), к-рое приводит (1) к виду

$$\dot{u}_i = \tilde{\psi}_i(U) + \tilde{\varphi}_i(U), \quad i=1, \ldots, n, \tag{8}$$

где $\tilde{\psi}_i$ — многочлены, содержащие только резонансные члены, $\tilde{\varphi}_i$ — сходящиеся степенные ряды, содержащие только члены степени выше m. Решения укороченной Н. ф. (6) служат приближениями для решений системы (8) и после преобразования (7) дают приближения решений исходной системы (1). Во многих случаях для

(6) удается построить такую *Ляпунова функцию* (или *Четаева функцию*) $f(V)$, что

$$|f(V)| \leqslant c_1 |V|^\nu \text{ и } \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial v_j} \tilde{\varphi}_j \right| > c_2 |V|^{\nu+m},$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные. Тогда $f(U)$ будет функцией Ляпунова (Четаева) для системы (8), т. е. точка $X = 0$ будет устойчивой (неустойчивой). Напр., если все $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то можно взять $m = 1$, $f = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$ и получится теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению (см. [7]; другие примеры см. в обзоре [8]).

По Н. ф. (2) можно находить инвариантные аналитические множества системы (1). В дальнейшем для простоты изложения предполагается, что $\operatorname{Re}\Lambda = 0$. По Н. ф. (2) выделяется формальное множество

$$\mathcal{A} = \{Y : \psi_i = \lambda_i y_i a, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

где a — свободный параметр. На множестве $\mathcal{A}$ выполняется условие А. Пусть K — объединение таких подпространств вида $\{Y : y_i = 0, \quad i = i_1, \ldots, i_l\}$, что соответствующие собственные значения λ_j, $j \neq i_1, \ldots, i_l$, $1 \leqslant j \leqslant n$, попарно соизмеримы. Формальное множество $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap K$ аналитично в системе (1). Из $\mathcal{A}$ выделяется подмножество $\mathcal{B}$, к-рое аналитично в системе (1), если выполнено условие ω (см. [3]). На множествах $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{B}$ лежат периодич. решения и семейства условно периодич. решений системы (1). Рассматривая множества $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{B}$ в системах с малыми параметрами, можно изучить все аналитич. возмущения и бифуркации таких решений (см. [9]).

Обобщения. Если систему (1) приводить не к Н. ф. (2), а к системе, правые части к-рой содержат нек-рые нерезонансные члены, то упрощение получается менее значительным, зато можно улучшить качество преобразования. Так, приведение к «полунормальной форме» будет аналитическим при ослабленном условии А (см. [2]). Другой вариант — преобразование, нормализующее систему (1) лишь на нек-рых подмногообразиях (напр., на нек-рых координатных подпространствах; см. [2]). Комбинации этих подходов позволяют доказать для системы (1) существование инвариантных подмногообразий и решений определенного вида (см. [9]).

Пусть система (1) определена и аналитична в окрестности инвариантного многообразия M размерности $k+l$, к-рое расслаивается на l-мерные инвариантные торы. Тогда вблизи M можно ввести такие локальные координаты

$$S = (s_1, \ldots, s_k), \quad Y = (y_1, \ldots, y_l), \quad Z = (z_1, \ldots, z_m), \quad k+l+m = n,$$

что $Z = 0$ на M, y_j имеют период 2π, S пробегает нек-рую область H, и система (1) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{S} &= \Phi^{(1)}(S, Y, Z), \\ \dot{Y} &= \Omega(S, Y) + \Phi^{(2)}(S, Y, Z), \\ \dot{Z} &= A(S, Y) Z + \Phi^{(3)}(S, Y, Z), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\Phi^{(j)} = O(|Z|)$, $j = 1,2$, $\Phi^{(3)} = O(|Z|^2)$, A — матрица. Если $\Omega = \text{const}$ и матрица A треугольна с постоянной главной диагональю $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то (при слабом ограничении на малые знаменатели) существует формальное преобразование локальных координат S, Y, $Z \to U$, V, W, к-рое приводит систему (9) к Н. ф.

$$\left.\begin{aligned} \dot{U} &= \sum \psi^{(1)}_{PQ}(U) W^Q \exp i(P, V), \\ \dot{V} &= \sum \psi^{(2)}_{PQ}(U) W^Q \exp i(P, V), \\ \dot{w}_j &= w_j \sum g_{jPQ}(U) W^Q \exp (P, V), \quad j = 1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $P \in \mathbb{Z}^l$, $Q \in \mathbb{N}^m$, $U \in H$ и $i(P, \Omega) + (Q, \Lambda) = 0$.

Если среди координат Z есть малый параметр, то систему (9) можно осреднить *Крылова — Боголюбова методом усреднения* (см. [10]), и осредненная система будет Н. ф. Вообще, теорию возмущений можно рассматривать как частный случай теории Н. ф., когда одна из координат является малым параметром (см. [11]).

На системы (9) и (10) переносятся теоремы о сходимости нормализующей замены, теоремы о существовании аналитических инвариантных множеств и т. д. Здесь наиболее изучен случай, когда M — периодич. решение, т. е. $k = 0$, $l = 1$. В этом случае теория Н. ф. во многом идентична случаю, когда M — неподвижная точка. А. Пуанкаре предложил рассматривать точечное преобразование нормального сечения за период. В связи с этим возникла теория Н. ф. точечных отображений, к-рая параллельна соответствующей теории для систем (1). Другие обобщения Н. ф. см. в [3], [6], [12], [13].

Лит.: [1] Пуанкаре А., Избр. труды, пер. с франц., т. 3, М., 1974; [2] Брюно А. Д., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1971, т. 25, с. 119—262; 1972, т. 26, с. 199—239; [3] его же, Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979; [4] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970; [5] Самовол В. С., «Докл. АН СССР», 1972, т. 206, № 3, с. 545—48; [6] Белицкий Г. Р., Нормальные формы, инварианты и локальные отображения, К., 1979; [7] Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, 2 изд., М.— Л., 1935; [8] Куницын А. Л., Маркеев А. П., Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, т. 4, М., 1979, с. 58—139; [9] Bibi'kov J. N., Local theory of nonlinear analytic ordinary *differential equations*, В. [а. о.], 1979; [10] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; [11] Брюно А. Д., «Proc. VIII Intern. Conf. on Nonlinear Oscillations», Prague, 1979, v. 1, p. 177—82; [12] Костін В. В., Ле Дінь Тхюі, «Доповіді АН УРСР. Сер. А», 1975, № 11, с. 982—85; [13] Zehnder E. J., «Manus. math.», 1978, v. 23, p. 363 -71.

А. Д. Брюно.

НОРМАЛЬНАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — такая фундаментальная система решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ этой системы уравнений, что для любой другой фундаментальной системы решений $\hat{x}_1(t), \ldots, \hat{x}_n(t)$ той же системы уравнений имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\hat{x}_i(t)} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_{x_i(t)};$$

здесь

$$\lambda_{y(t)} = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t} \ln |y(t)|$$

— *Ляпунова характеристический показатель* решения $y(t)$. Н. ф. с. р. введены А. М. Ляпуновым [1], к-рый доказал, что они существуют у всякой линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x,$$

где $A(\cdot)$ — суммируемое на каждом отрезке отображение

$$\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ (или } \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)),$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \int_0^t \| A(\tau) \| \, d\tau < +\infty.$$

Лит.: [1] Ляпунов А. М., Собр. соч., т. 2, М., 1956.

В. М. Миллионщиков.

НОРМАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор с замкнутой областью значений. Пусть A — линейный оператор с плотной в банаховом пространстве X областью определения и с областью значений $R(A)$ в банаховом пространстве Y. Тогда A — Н. р. о., если $\overline{R(A)} = R(A)$, т. е. если $R(A)$ является замкнутым подпространством в Y. Пусть A^* — опера-

тор, сопряженный к A. Для того чтобы A был Н. р. о., необходимо и достаточно, чтобы $R(A)=^{\perp}N(A^*)$, т. е. чтобы область значений A являлась ортогональным дополнением к подпространству нулей оператора A^*.

Пусть дано уравнение с Н. р. о.

$$Ax=y \qquad (*)$$

(нормально разрешимое уравнение). Если $N(A^*)=\{0\}$, т. е. однородное сопряженное уравнение $A^*\psi=0$ имеет только тривиальное решение, то $R(A)=Y$. Если же $N(A^*)\neq\{0\}$, то для разрешимости (*) необходимо и достаточно, чтобы $\langle y,\psi\rangle=0$ для всех решений уравнения $A^*\psi=0$.

Пусть ниже A — замкнутый оператор. Н. р. о. A наз. n-нормальным, если его подпространство нулей $N(A)$ конечномерно ($n(A)=\dim N(A)<+\infty$). Н. р. о. A наз. d-нормальным, если его дефектное подпространство конечномерно ($d(A)=\dim{}^{\perp}R(A)<+\infty$). n-нормальные и d-нормальные операторы наз. иногда полуфредгольмовыми. Для того чтобы оператор A был n-нормальным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого компактного множества из $R(A)$ был локально компактным.

Пусть X компактно вложено в банахово пространство X_0. Для n-нормальности A необходимо и достаточно наличие априорной оценки

$$\|x\|_X\leqslant a\|x\|_{X_0}+b\|Ax\|_Y,\quad x\in D(A).$$

Оказывается, оператор A d-нормален тогда и только тогда, когда A^* n-нормален. При этом $n(A)=d(A^*)$. Следовательно, если X^* компактно вложено в банахово пространство Z, то для d-нормальности A необходимо и достаточно наличие априорной оценки

$$\|f\|_{Y^*}\leqslant a\|f\|_Z+b\|A^*f\|_{X^*},\quad f\in D(A^*).$$

Пара чисел $(n(A), d(A))$ наз. d-характеристикой оператора A. Если Н. р. о. A n-нормален или d-нормален, то число

$$\chi(A)=n(A)-d(A)$$

наз. индексом оператора A. Свойства n-нормальности и d-нормальности устойчивы: если A — n-нормален (d-нормален), а B — линейный оператор малой нормы или вполне непрерывный, то $A+B$ n-нормален (d-нормален).

Лит.: [1] Хаусдорф Ф., Теория множеств, пер. с нем., М.— Л., 1937, с. 266—90; [2] Аткинсон Ф., «Матем. сб.», 1951, т. 28, № 1, с. 3—14; [3] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.

В. А. Треногин.

НОРМАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО — такое подпространство A в пространстве X, что для каждой его открытой окрестности U в X существует множество H, являющееся объединением счетного семейства замкнутых в X множеств и удовлетворяющее условию $A\subset H\subset U$. Если A нормально расположено в пространстве X, а пространство X является Н. р. п. в пространстве Y, то A нормально расположено в Y. Н. р. п. в *нормальном пространстве* само является нормальным пространством в индуцированной топологии — этим и объясняется название. Финальная компактность пространства равносильна его нормальной расположенности в каком-нибудь (а тогда и в любом) *бикомпактном расширении* этого пространства. Вообще, Н. р. п. в финально компактном пространстве само финально компактно.

Лит.: [1] Смирнов Ю. М., «Матем. сб.», 1951, т. 29, с. 173—76.

А. В. Архангельский.

НОРМАЛЬНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ ЗОНА — область вида $0\leqslant x\leqslant\psi(n)$, для к-рой

$$\frac{P\{Z_n\geqslant x\}}{P\{Y\geqslant x\}}\longrightarrow 1 \quad\text{или}\quad \frac{P\{Z_n\leqslant -x\}}{P\{Y\leqslant -x\}}\longrightarrow 1$$

при $n \to \infty$, где $\psi(n) \uparrow \infty$, $\{Z_n\}$ — последовательность случайных величин, Y — случайная величина, имеющая *нормальное распределение*. Изучены Н. п. з. в случае, когда

$$Z_n = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - a),$$

где $\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математич. ожиданием a и конечной положительной дисперсией σ^2.

Лит.: [1] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965.

В. В. Петров.

НОРМАЛЬНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО — аналитическое пространство, локальные кольца всех точек к-рого нормальны, т. е. являются целозамкнутыми областями целостности. Точка x аналитич. пространства X наз. нормальной (говорят также, что X нормально в точке x), если локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ нормально. В окрестности такой точки пространство обладает приведенной и неприводимой локальной моделью. Любая простая (неособая) точка является нормальной. Простейший пример Н. а. п. — *аналитическое многообразие*.

В дальнейшем основное (полное недискретно нормированное) поле k предполагается алгебраически замкнутым. В этом случае получены наиболее полные результаты о Н. а. п. (см. [1]) и построена теория нормализации [2], к-рая естественным образом связывает с произвольным приведенным аналитическим пространством некоторое Н. а. п. Пусть $N(X)$ — множество точек аналитич. пространства X, не являющихся нормальными, а $S(X)$ — множество особых точек в X. Тогда:

1) $N(X)$ и $S(X)$ — замкнутые аналитич. подмножества в X, причем $N(X) \subset S(X)$;

2) для $x \in X \setminus N(X)$ выполняется неравенство

$$\dim_x S(X) \leqslant \dim_x X - 2$$

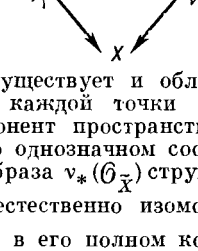
(т. е. Н. а. п. гладко в коразмерности 1);

3) если X является полным пересечением в точке x и выполнено предыдущее неравенство, то X нормально в этой точке.

Нормализацией приведенного аналитич. пространства X наз. пара $(\tilde{X}, \nu)$, где $\tilde{X}$ — Н. а. п., а $\nu: \tilde{X} \to X$ — конечное сюръективное аналитич. отображение, индуцирующее изоморфизм открытых множеств

$$\tilde{X} \setminus \nu^{-1}(N(X)) \xrightarrow{\sim} X \setminus N(X).$$

Нормализация определена однозначно с точностью до изоморфизма, т. е. если $(\tilde{X}_1, \nu_1)$ и $(\tilde{X}_2, \nu_2)$ — две нормализации, то существует единственный аналитич. изоморфизм $\varphi: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ такой, что диаграмма



коммутативна. Нормализация существует и обладает следующими свойствами. Для каждой точки $x \in X$ множество неприводимых компонент пространства X в точке x находится во взаимно однозначном соответствии с $\nu^{-1}(x)$. Слой прямого образа $\nu_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ структурного пучка $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ в точке $x \in X$ естественно изоморфен целому замыканию кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ в его полном кольце частных.

Понятие Н. а. п. над $\mathbb{C}$ может быть введено в терминах аналитич. продолжения голоморфных функций [3]. Именно, приведенное комплексное пространство нормально тогда и только тогда, когда для него справедлива первая теорема Римана об устранении особенностей: если $U \subset X$ — открытое

подмножество, а $A \subset U$ — замкнутое аналитич. подмножество, не содержащее неприводимых компонент множества U, то любая функция, голоморфная на $U \setminus A$ и локально ограниченная на U, допускает единственное аналитич. продолжение до голоморфной функции на U. Для нормальных комплексных пространств верна также и вторая теорема Римана об устранении особенностей: если $\operatorname{codim}_x A \geqslant 2$ в каждой точке $x \in A$, то упомянутое аналитич. продолжение возможно без требования ограниченности функции. Приведенное комплексное пространство X нормально тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \subset X$ отображение ограничения голоморфных функций

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U \setminus S(X), \mathcal{O}_X)$$

биективно. Свойство нормальности можно сформулировать также на языке локальных когомологий — оно равносильно равенству $\mathcal{H}^1_{S(X)}\mathcal{O}_X = 0$ (см. [5]). Для любого приведенного комплексного пространства X можно определить пучок колец $\tilde{\mathcal{O}}_X$ ростков слабо голоморфных функций, т. е. функций, удовлетворяющих условиям первой теоремы Римана. Оказывается, что кольцо $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$ конечно как $\mathcal{O}_{X,x}$-модуль и равно целому замыканию кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ в его полном кольце частных. Иными словами, $\tilde{\mathcal{O}}_X = \nu_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$, где $\nu : \tilde{X} \to X$ — отображение нормализации.

Нормальное комплексное пространство можно охарактеризовать также следующим образом: комплексное пространство нормально тогда и только тогда, когда каждая его точка обладает окрестностью, допускающей аналитич. наложение на область пространства $\mathbb{C}^n$ (см. [3], [8]).

Приведенное комплексное пространство X является *Штейна пространством* тогда и только тогда, когда этим свойством обладает его нормализация $\tilde{X}$ (см. [4]). На нормальные комплексные пространства может быть распространено понятие метрики Ходжа (см. *Кэлера метрика*). На компактные нормальные пространства с такой метрикой переносится теорема Кодаиры о проективном вложении [6].

В алгебраич. геометрии рассматриваются аналоги Н. а. п.— нормальные алгебраич. многообразия (см. *Нормальная схема*). Для алгебраич. многообразий над полным недискретным нормированным полем оба понятия совпадают (см. [7], [1]).

Лит.: [1] Abhyankar S. S., Local analytic geometry, N. Y.— L., 1964; [2] Houzel C., в кн.: Séminaire H. Cartan, 13 année. 1960/61, t. 2, P., 1963, exp. 18—21; [3] Grauert H., Remmert R., «Math. Ann.», 1958, Bd 136, S. 245—318; [4] Narasimhan R., «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa», 1962, v. 16, p. 327—33; [5] Sin Y. T., Trautmann G., Gapsheaves and extension of coherent analytic subsheaves, B.— Hdlb.— N. Y., 1971; [6] Грауэрт Г., в кн.: Комплексные пространства. Сб. пер., М., 1965, с. 45—104; [7] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [8] Фукс Б. А., Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, М., ч. 1, 1962.

Д. Н. Ахиезер.

НОРМАЛЬНОЕ p-ДОПОЛНЕНИЕ конечной группы G — нормальный делитель A группы G такой, что $G = AS$ и $A \cap S = 1$, где S — нек-рая силовская p-подгруппа в G (см. *Силовская подгруппа*). Группа G обладает нормальным p-дополнением, если нек-рая силовская p-подгруппа S группы G лежит в центре своего нормализатора (теорема Бёрнсайда). Необходимое и достаточное условие существования нормального p-дополнения в группе G дается теоремой Фробениуса: группа G обладает нормальным p-дополнением тогда и только тогда, когда либо для любой неединичной p-подгруппы H группы G факторгруппа $N_G(H)/C_G(H)$ есть p-группа (где $N_G(H)$ — нормализатор H в G, а $C_G(H)$ — централизатор H в G),

либо подгруппа $N_G(H)$ для любой неединичной p-подгруппы H группы G обладает нормальным p-дополнением.

Лит.: [1] Gorenstein D., Finite groups, N. Y., 1968.

Н. Н. Вильямс.

НОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО — топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме T_4 (см. *Отделимости аксиома*), т. е. такое топологич. пространство, в к-ром одноточечные множества замкнуты и любые два дизъюнктные замкнутые множества отделимы окрестностями (т. е. содержатся в дизъюнктных открытых множествах). Н. п. образуют частный случай *вполне регулярных пространств* (тихоновских), особенно важный для *размерности теории*. Всякое замкнутое подпространство Н. п. нормально (нормальность наследуется по замкнутым множествам). Пространства, все подпространства к-рых нормальны, наз. наследственно нормальными. Для наследственной нормальности достаточно, чтобы все его открытые подпространства были Н. п. Для наследственной нормальности пространства необходимо и достаточно, чтобы были отделимы окрестностями всякие два множества, из к-рых ни одно не содержит точек соприкосновения другого. Н. п. наз. совершенно нормальным, если в нем каждое замкнутое множество является пересечением счетного числа открытых множеств. Всякое совершенно Н. п. есть наследственно Н. п.

Произведение двух Н. п. не обязано быть Н. п., и даже произведение Н. п. на отрезок может быть не нормальным.

Существуют важные классы пространств, более общие, чем нормальные, и менее общие, чем вполне регулярные. Среди этих пространств, близких к нормальным, первыми [2] были т. н. квазинормальные, или l-нормальные, пространства. Это — тихоновские пространства, в к-рых отделимы окрестностями всякие два дизъюнктные l-множества, т. е. множества, являющиеся пересечением конечного числа замкнутых *канонических множеств*. Тихоновские пространства, в к-рых отделимы окрестностями всякие два дизъюнктные замкнутые канонич. множества, наз. $\varkappa$-нормальными [3]; $\varkappa$-нормальные пространства, в к-рых каждое замкнутое канонич. множество является пересечением счетного числа открытых канонич. множеств, наз. совершенно $\varkappa$-нормальными. Классы тихоновских $\varkappa$-нормальных, квазинормальных и, наконец, совершенно $\varkappa$-нормальных пространств идут последовательно убывая, причем никакие два из этих классов не совпадают между собою.

Лит.: [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; [2] Зайцев В. И., «Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ.», 1967, № 3, с. 48—57; [3] Щепин Е. В., «Сиб. матем. ж.», 1972, т. 13, № 5, с. 1182—1196.

П. С. Александров.

НОРМАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО в нек-рой точке P к поверхности F^m пространства V^n — ортогональное дополнение N_pF к касательному пространству T_pF (см. *Аналитическое пространство*) в точке P поверхности F. Размерность Н. п. равна $n-m$ (коразмерность поверхности F). Любое его одномерное подпространство наз. *нормалью* к поверхности F в точке P. Если F — гладкая гиперповерхность, то в каждой точке F существует единственная нормаль.

А. Б. Иванов.

НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — одно из важнейших распределений вероятностей. Термин «Н. р.», принадлежащий К. Пирсону (K. Pearson) (более старые названия *Гаусса закон*, *Гаусса — Лапласа распределение*), применяют как по отношению к распределениям вероятностей *случайных величин*, так и по отношению к совместным распределениям вероятностей нескольких случайных величин (т. е. к распределениям конечномерных случайных векторов), а также *случай-*

ных элементов и *случайных процессов*. Общее определение Н. р. сводится к одномерному случаю.

Распределение вероятностей случайной величины X наз. нормальным, если оно имеет плотность вероятности

$$p(x;\ a,\ \sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}. \qquad (*)$$

Семейство Н. р. (*) зависит, т. о., от двух параметров a и $\sigma>0$. При этом математич. ожидание X равно a, дисперсия X равна σ^2, а характеристич. функция имеет вид

$$f(t)=\mathsf{E}e^{itX}=e^{iat-\sigma^2t^2/2}.$$

Кривая Н. р. $y=p(x;\ a,\ \sigma)$ симметрична относительно ординаты, проходящей через точку $x=a$, и имеет в этой точке единственный максимум, равный $1/\sqrt{2\pi}\sigma$. С уменьшением σ кривая Н. р. становится все более островершинной. Изменение a при постоянном σ не меняет форму кривой, а вызывает лишь ее смещение по оси абсцисс. Площадь, заключенная под кривой Н. р., всегда равна единице. При $a=0$, $\sigma=1$ соответствующая функция распределения равна

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

В общем случае функция распределения Н. р. (*) $F(x;\ a,\ \sigma)$ может быть вычислена по формуле $F(x;\ a,\ \sigma)=\Phi(t)$, где $t=(x-a)/\sigma$. Для функции $\Phi(t)$ (и нескольких ее производных) составлены обширные таблицы (см., напр., [1], [2] и ст. *Интеграл вероятности*). Для Н. р. вероятность неравенства $|X-a|>k\sigma$, равная $1-\Phi(k)+\Phi(-k)$, убывает весьма быстро с ростом k (см. табл.).

k	Вероятность	k	Вероятность
1	0,31731	3	$0{,}26998\cdot10^{-2}$
2	$0{,}45500\cdot10^{-1}$	4	$0{,}63342\cdot10^{-4}$

Во многих практич. вопросах при рассмотрении Н. р. пренебрегают поэтому возможностью отклонений от a, превышающих 3σ,— т. н. правило трех сигма (соответствующая вероятность, как видно из табл., меньше 0,003). Вероятное отклонение для Н. р. равно $0{,}67449\sigma$.

Н. р. встречается в большом числе приложений. Издавна известны попытки объяснения этого обстоятельства. Теоретич. обоснование исключительной роли Н. р. дают *предельные теоремы* теории вероятностей (см. также *Лапласа теорема*, *Ляпунова теорема*). Качественно соответствующий результат может быть объяснен следующим образом: Н. р. служит хорошим приближением каждый раз, когда рассматриваемая случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин, максимальная из к-рых мала по сравнению со всей суммой (см. *Центральная предельная теорема*).

Н. р. может появляться также как точное решение нек-рых задач (в рамках принятой математич. модели явления). Так обстоит дело в теории случайных процессов (в одной из основных моделей броуновского движения). Классич. примеры возникновения Н. р. как точного принадлежат К. Гауссу (C. Gauss, закон распределения ошибок наблюдения) и Дж. Максвеллу (J. Maxwell, закон распределения скоростей молекул) (см. также *Независимость*, *Характеризационная теорема*).

Распределение случайного вектора $X=(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ в $\mathbb{R}^n$ или совместное распределение случайных величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ наз. Н. р. (многомерным нормальным), если при любом фиксированном $t\in\mathbb{R}^n$ скалярное произведение $(t,\ X)$ имеет или Н. р., или равно константе (как иногда говорят,

имеет Н. р. с дисперсией, равной нулю). Для случайных элементов со значениями из какого-либо векторного пространства E это определение сохраняется с заменой t на любой элемент l сопряженного пространства E^* и скалярного произведения (t, X) на линейный функционал $l(X)$. Совместное распределение нескольких случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеет характеристическую функцию

$$f(t) = \exp\left\{ i\mathsf{E}(t, X) - \frac{1}{2} Q(t) \right\},$$

$$t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$\mathsf{E}(t, X) = t_1 \mathsf{E}X_1 + t_2 \mathsf{E}X_2 + \ldots + t_n \mathsf{E}X_n$$

— линейная форма,

$$Q(t) = \mathsf{E}(t, X - \mathsf{E}X)^2 = \sum_{k, l=1}^{n} \sigma_{kl} t_k t_l$$

— неотрицательно определенная квадратичная форма и $\|\sigma_{kl}\|$ — ковариационная матрица вектора X. В случае положительной определенности соответствующее Н. р. имеет плотность вероятности

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \exp\{-Q^{-1}(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n)\},$$

где Q^{-1} — квадратичная форма, обратная Q, параметры $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны математич. ожиданиям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ соответственно, а постоянная

$$C = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \|\sigma_{kl}\|}}.$$

Общее количество параметров, задающих Н. р., равно

$$(n+1)(n+2)/2 - 1$$

и быстро растет с ростом n (оно равно 2 при $n=1$, 20 при $n=5$ и 65 при $n=10$). Многомерное Н. р. служит основной моделью *многомерного статистического анализа*. Оно используется также в теории случайных процессов (где рассматриваются Н. р. в бесконечномерных пространствах, см. *Случайный элемент*, а также *Винера мера*, *Винеровский процесс*, *Гауссовский процесс*).

Из важных свойств Н. р. необходимо отметить следующие. Сумма X независимых случайных величин X_1 и X_2, имеющих Н. р., имеет Н. р.; обратно, если $X = X_1 + X_2$ имеет Н. р. и X_1 и X_2 независимы, то X_1 и X_2 имеют Н. р. (теорема Крамера). Это свойство обладает определенной «устойчивостью»: если распределение X «близко» к Н. р., то и распределения X_1 и X_2 «близки» к Н. р. С Н. р. связаны нек-рые другие важные распределения (см. *Логарифмически нормальное распределение*, *Нецентральное «хи-квадрат» распределение*, *Стьюдента распределение*, *Уишарта распределение*, *Фишера z-распределение*, *Хотеллинга T^2-распределение*, *«Хи-квадрат» распределение*). Для приближенного представления распределений, близких к Н. р., широко применяются ряды типа *Эджворта рядов* и *Грама — Шарлье рядов*.

О вопросах, связанных с оценкой параметров Н. р. по результатам наблюдений, см. ст. *Несмещенная оценка*. О проверке гипотезы нормальности см. *Непараметрические методы статистики*. См. также *Вероятностная бумага*.

Лит.: [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 2 изд., М., 1968; [2] Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и ее нормированных производных, М., 1960; [3] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; [4] Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; [5] Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966; [6] Их же, Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

Ю. В. Прохоров.

НОРМАЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ подмногообразия — расслоение, состоящее из касательных век-

торов к объемлющему многообразию, нормальных к подмногообразию. Если X — риманово многообразие, Y — его (погруженное) подмногообразие, T_X и T_Y — касательные расслоения над X и Y, то Н. р. $N_{Y/X}$ подмногообразия Y есть подрасслоение в $T_X|Y$, составленное векторами $u \in T_{X,y}$, $y \in Y$, ортогональными к $T_{Y,y}$.

С помощью Н. р. строятся, напр., трубчатые окрестности подмногообразий. Н. р. над Y, рассматриваемое с точностью до эквивалентности, не зависит от выбора римановой метрики на X, поскольку может быть определено без помощи метрики как факторрасслоение $T_X|Y/T_Y$. Несколько более общей является конструкция Н. р. произвольного погружения $f : Y \to X$ дифференцируемых многообразий:

$$N_{Y/X} = f^*T_X/T_Y.$$

Аналогично определяется Н. р. $N_{Y/X}$ неособого алгебраич. подмногообразия Y в неособом алгебраич. многообразии $\overline{X}$ или Н. р. аналитич. подмногообразия Y в аналитич. многообразии X; оно является алгебраическим (соответственно аналитическим) векторным расслоением над Y, ранг к-рого есть codim Y. Если, в частности, codim $Y = 1$, то расслоение $N_{Y/X}$ изоморфно ограничению на Y расслоения над X, определяемого дивизором Y.

В случае, когда Y — аналитич. подпространство аналитич. пространства (X, O_X), Н. р. подпространства Y иногда называют аналитич. семейство векторных пространств $N_{Y/X} \to Y$, двойственное к конормальному пучку $N^*_{Y/X}$ (см. *Нормальный пучок*). О приложениях Н. р. к вопросу о сгягиваемости подмногообразий см. *Исключительное аналитическое множество*, *Исключительное подмногообразие*.

Лит.: [1] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 15, М., 1977, с. 132—56; [2] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы, пер. с англ., М., 1979; [3] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [4] Хирш М., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1979; [5] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972.

А. Л. Онищик.

НОРМАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ поля — алгебраическое расширение L поля K, удовлетворяющее одному из следующих эквивалентных условий:

1) любое вложение поля L в алгебраич. замыкание $\overline{K}$ поля K является автоморфизмом поля L;

2) L — поле разложения нек-рого семейства многочленов с коэффициентами из K;

3) любой неприводимый над K многочлен $f(x)$ с коэффициентами из K, имеющий корень в L, распадается в L на линейные множители.

Для любого алгебраич. расширения F/K существует максимальное промежуточное подполе L, нормальное над K, причем $L = \bigcap_\sigma F^\sigma$, где σ — всевозможные вложения поля F в $\overline{K}$. Существует также однозначно определенное минимальное Н. р. поля K, содержащее F. Это поле является композитом всех полей F^σ. Оно наз. нормальным замыканием поля F относительно K. Если L_1 и L_2 — нормальные расширения поля K, то пересечение $L_1 \cap L_2$ и композит $L_1 \cdot L_2$ снова нормальны над K. Однако даже если расширения L/K' и K'/K нормальны, расширение L/K может и не быть нормальным.

Для полей характеристики 0 любое нормальное расширение является расширением Галуа. В общем случае Н. р. является расширением Галуа тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.

Лит.: [1] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., М., 1976; [2] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [3] Постников М. М., Теория Галуа, М., 1963.

Л. В. Кузьмин.

НОРМАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО аналитических функций в области — такое семейство S од-

нозначных аналитич. функций $f(z)$ комплексных переменных $z=(z_1, \ldots, z_n)$ в области D пространства $\mathbb{C}^n$, $n\geqslant 1$, что из любой последовательности функций из S можно выделить подпоследовательность $\{f_\nu(z)\}$, равномерно сходящуюся внутри D к аналитич. функции или к бесконечности. При этом, по определению, подпоследовательность $\{f_\nu(z)\}$ равномерно внутри D сходится к бесконечности, если для любых компакта $K\subset D$ и числа $M>0$ можно указать такой номер $N=N(K, M)$, что $|f_\nu(z)|>M$ для всех $\nu>M$, $z\in K$.

Семейство S наз. нормальным семейством в точке $z^0\in D$, если S нормально в нек-ром шаре с центром z^0. Семейство S нормально в области D тогда и только тогда, когда оно нормально в каждой точке $z^0\in D$. Всякое компактное семейство голоморфных функций является Н. с.; обратное заключение неверно (см. *Компактности принцип*). Если семейство S голоморфных функций в области $D\subset\mathbb{C}^n$ таково, что ни одна из функций $f(z)\in S$ не принимает двух определенных значений, то S есть Н. с. в D (теорема Монтеля). Этот признак Н. с. значительно упрощает исследование аналитич. функций в окрестности *существенно особой точки* (см. также *Пикара теорема*).

Нормальное семейство мероморфных функций в области $D\subset\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$ определяется аналогично: S есть Н. с. мероморфных функций в D, если из любой последовательности функций из S можно выделить подпоследовательность $\{f_\nu(z)\}$, равномерно внутри D сходящуюся к мероморфной функции $f(z)$ или к бесконечности. При этом, по определению, $\{f_\nu(z)\}$ равномерно внутри D сходится к $f(z)$ (случай $f(z)\equiv\infty$ включается), если для любых компакта $K\subset D$ и числа $\varepsilon>0$ существуют номер $N=N(\varepsilon, K)$ и круг $B=B(z^0, r)$ радиуса $r=r(\varepsilon, K)$ с центром в любой точке $z^0\in K$ такие, что при $\nu>N$ выполняется

$$|f_\nu(z)-f(z)|<\varepsilon,\quad z\in B,$$

когда $f(z^0)\neq\infty$, или

$$\left|\frac{1}{f_\nu(z)}-\frac{1}{f(z)}\right|<\varepsilon,\ z\in B,$$

когда $f(z^0)=\infty$. Если семейство S мероморфных функций в области $D\subset\mathbb{C}$ таково, что ни одна из функций $f(z)\in S$ не принимает трех определенных значений, то S есть Н. с. (теорема Монтеля). Семейство S мероморфных функций есть Н. с. в области $D\subset\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда

$$\sup\{\rho(f(z)): f(z)\in S\}<\infty$$

на каждом компакте $K\subset D$, где

$$\rho(f(z))=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

— т. н. сферическая производная функции $f(z)$.

Начиная с 30-х гг. 20 в. Н. с. приобрели большое значение в исследованиях *граничных свойств аналитических функций* (см. также *Предельное множество*, [3], [4]). Мероморфная функция $f(z)$ в односвязной области $D\subset\mathbb{C}$ наз. нормальной функцией в области D, если семейство $\{f(\gamma(z))\}$ есть Н. с. в D; здесь $\gamma(z)$ пробегает семейство всех конформных автоморфизмов области D. Функция $f(z)$ наз. нормальной в многосвязной области D, если она нормальна на универсальной накрывающей поверхности D. Если мероморфная в D функция $f(z)$ опускает три значения, то $f(z)$ — нормальная функция. Для того чтобы $f(z)$, $f(z)\neq\text{const}$, была нормальной в единичном круге $G=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}<\frac{c}{1-|z|^2},\ z\in G,\ c=c(f)=\text{const}.$$

Для нормальной мероморфной функции $f(z)$ в единичном круге G из существования *асимптотического значения* α в граничной точке $\zeta \in \Gamma = \{\zeta \in \mathbb{C}: |\zeta| = 1\}$ следует, что α — *угловое граничное значение* $f(z)$ в ζ. Однако мероморфная нормальная функция в круге G может и не иметь вовсе асимптотич. значений. Напротив, если $f(z)$ — голоморфная нормальная функция в G, то даже угловые граничные значения существуют на множестве точек единичной окружности Γ, плотном на Γ.

Лит.: [1] Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, пер. с франц., М.— Л., 1936; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; [3] Коллингвуд Э., Ловатер А., Теория предельных множеств, пер. с англ., М., 1971; [4] Ловатер А., в кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 10, М., 1973, с. 99—259.

Е. Д. Соломенцев.

НОРМАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ гладкой поверхности Φ в точке P в направлении l — сечение поверхности Φ плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке P и через направление l в касательной плоскости к Φ в точке P. Задачу об изучении локальной структуры поверхности можно свести к задаче об изучении локальной структуры семейства кривых — Н. с. поверхности в данной точке и в различных направлениях (см. *Кривизна*, *Нормальная кривизна*). Метод исследования локальной структуры поверхности с помощью Н. с. допускает обобщения на случай поверхностей произвольной размерности и с произвольной коразмерностью.

Д. Д. Соколов.

НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, нормированное уравнение, прямой на плоскости — уравнение вида

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где x, y — декартовы прямоугольные координаты плоскости; $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ — координаты единичного вектора $\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, перпендикулярного к прямой; $p > 0$ — расстояние от начала координат до прямой. К Н. у. уравнение прямой вида

$$Ax + By + C = 0$$

приводится умножением на нормирующий множитель λ, модуль к-рого есть $1/\sqrt{A^2+B^2}$, а знак противоположен знаку C (при $C=0$ знак λ можно выбирать произвольно).

Аналогично случаю прямой, уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

приводится к Н. у.

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора, перпендикулярного к плоскости, умножением на нормирующий множитель λ, модуль к-рого есть $1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, а знак λ противоположен знаку D.

А. Б. Иванов.

НОРМАЛЬНОЕ ЧИСЛО — действительное число α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, обладающее следующим свойством: для каждого натурального s любая заданная s-членная скобка $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s)$, состоящая из знаков $0, 1, \ldots, g-1$, появляется в последовательности

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots, \qquad (1)$$

получающейся при разложении числа α в бесконечную g-ичную дробь

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{g} + \frac{\alpha_2}{g^2} + \frac{\alpha_3}{g^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{g^n} + \ldots,$$

с асимптотич. частотой $1/g^s$.

Подробнее, пусть $g > 1$ — натуральное число и

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)\ (\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{s+1})\ (\alpha_3, \ldots, \alpha_{s+2}) \ldots \qquad (2)$$

— бесконечная последовательность s-членных скобок, соответствующая последовательности (1). Через $N(n, \delta)$ обозначается число появлений скобки $\delta=(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_s)$ среди первых n скобок последовательности (2). Число

$$\alpha=\frac{\alpha_1}{g}+\frac{\alpha_2}{g^2}+\ldots$$

наз. нормальным, если для любого натурального s и любой заданной s-членной скобки δ, состоящей из знаков $0, 1, \ldots, g-1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n, \delta)}{n}=\frac{1}{g^s}.$$

Понятие Н. ч. для $n=10$ было введено Э. Борелем (см. [1], [2] с. 197). Э. Борель называл действительное число α слабо нормальным к основанию g, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n, \delta)}{n}=\frac{1}{g},$$

где $N(n, \delta)$ — число появлений знака δ, $0\leqslant\delta\leqslant g-1$, среди первых n членов последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, и называл α нормальным, если числа $\alpha, g\alpha, g^2\alpha, \ldots$ слабо нормальны к основаниям $g, g^2, g^3, \ldots$ Он установил также, что для Н. ч.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n, \delta)}{n}=\frac{1}{g^s}$$

при любом s и любой заданной s-членной скобке $\delta=(\delta_1, \ldots, \delta_s)$. Позднее было показано (см. [3], [4], а также [8]), что выполнимость последнего соотношения эквивалентна борелевскому определению Н. ч.

Число α наз. абсолютно нормальным, если оно нормально по отношению ко всякому натуральному основанию $g>1$. Существование нормальных и абсолютно Н. ч. было установлено Э. Борелем на основе теории меры. Построение Н. ч. в явном виде впервые было осуществлено в [5]. Ранее (см. [6], [7]) был указан эффективный процесс построения абсолютно Н. ч. О других способах построения Н. ч. и о связи понятия Н. ч. с понятием случайности см. [8].

Равномерное распределение дробных долей $\{\alpha g^x\}$, $x=1, 2, 3, \ldots$, на отрезке $[0, 1]$ эквивалентно тому, что α — нормальное число.

Лит.: [1] Borel E., «Rend. circ. math. Palermo», 1909, t. 27, p. 247—71; [2] его же, Léçons sur la théorie des fonctions, 3 éd., P., 1928; [3] Pillai S., «Proc. Indian Acad. Sci. Sec. A», 1940, v. 12, p. 179—84; [4] Niven I., Zuckerman H., «Pacific J. Math.», 1951, v. 1, p. 103—09; [5] Champernowne D. G., «J. London Math. Soc.», 1933, v. 8, p. 254—60; [6] Sierpinski W., «Bull. Soc. math. France», 1917, t. 45, p. 127—32; [7] Lebesque H., там же, p. 132—44; [8] Постников А. Г., Арифметическое моделирование случайных процессов, М., 1960 («Тр. Матем. ин-та АН СССР», т. 57).

С. А. Степанов.

НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ЭЛЛИПС — геометрическая конструкция, к-рая характеризует распределение кривизн в нек-рой точке регулярной поверхности M^2 в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Пусть P — точка поверхности M^2 и N_l есть $(n-1)$-мерное подпространство, содержащее нормальное дополнение N и M^2 в P и касательное к M^2 в точке P направление l. Сечение M^2 подпространством N_l наз. нормальным сечением γ_l в точке P. Вектор $\frac{d^2\gamma_l}{ds^2}$, лежащий в N, где s — натуральный параметр на сечении γ_l, наз. вектором нормальной кривизны M^2 в направлении l. Концы векторов нормальной кривизны образуют эллипс нормальной кривизны.

Для того чтобы двумерная поверхность M^2 с ненулевой гауссовой кривизной в E^n лежала в нек-ром трехмерном подпространстве E^3, необходимо и достаточно,

чтобы ее Н. к. э. во всех точках P вырождался в отрезок, проходящий через P (см. [2]).

Аналогично определяется индикатриса кривизны для подмногообразия M^m произвольной размерности m. Она является $(m-1)$-мерной алгебраич. поверхностью степени 2^{m-1}. Векторы нормальной кривизны образуют конус, к-рый вместе с касательным пространством к M^m определяет подпространство E^{m_1}, наз. о б л а с т ь ю к р и в и з н ы M^2 в точке P. Размерность m_1 удовлетворяет условиям

$$m_1 \leqslant \frac{m(m+3)}{2}, \quad m_1 \leqslant n.$$

Точки, для к-рых $m_1=m+1$, наз. а к с и а л ь н ы м и т о ч к а м и, $m_1=m+2$ — п л а н а р н ы м и т о ч к а м и, $m_1=m+3$ — с п е ц и а л ь н ы м и т о ч к а м и. Иногда для подмногообразий с большой коразмерностью рассматривают *Дюпена индикатрису*, построение к-рой вполне аналогично построению индикатрисы Дюпена для поверхности в трехмерном пространстве.

Лит.: [1] С х о у т е н И. А., С т р о й к Д. Д ж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, пер. с нем., т. 2, М. – Л., 1948; [2] А м и н о в Ю. А., «Укр. геометр. сб.», 1975, в. 17, с. 3—22.

Д. Д. Соколов.

НОРМАЛЬНЫЙ АЛГОРИФМ — название, закрепившееся за *алгоритмами* некоторого точно охарактеризованного типа. Наряду с *рекурсивными функциями* и *Тьюринга машинами* Н. а. получили известность в качестве одного из наиболее удобных уточнений общего интуитивного представления об алгоритме. Понятие Н. а. было выработано в 1947 А. А. Марковым в ходе его исследований по проблеме тождества для ассоциативных систем (см. *Ассоциативное исчисление*). Детально определение и общая теория Н. а. изложены в [1] (гл. I—V).

Всякий Н. а. $\mathfrak{A}$, являясь алгоритмом в нек-ром *алфавите* A, порождает в нем детерминированный процесс переработки *слов*. Указание этого алфавита входит в определение Н. а. $\mathfrak{A}$ в качестве обязательной составной части, и в рассматриваемой ситуации про Н. а. $\mathfrak{A}$ говорят, что он является Н. а. в алфавите A. Любой Н. а. в фиксированном алфавите A вполне определяется указанием его с х е м ы — упорядоченного конечного списка формул подстановки в A. Каждая такая формула по существу представляет собой упорядоченную пару (U, V) слов в A. Слово U наз. левой частью этой формулы, а V — ее правой частью. Среди формул данной схемы нек-рые выделяются специально и объявляются з а к л ю ч и т е л ь н ы м и. Обычно в схеме Н. а. заключительная формула записывается в виде $U \to \cdot V$, а незаключительная — в виде $U \to V$.

Н. а. $\mathfrak{A}$ в а л ф а в и т е A есть предписание строить, исходя из произвольного слова P в A, последовательность слов P_i согласно следующему правилу. Слово P берется в качестве начального члена P_0 этой последовательности, и процесс ее построения продолжается далее. Пусть для нек-рого $i \geqslant 0$ слово P_i построено и процесс построения рассматриваемой последовательности еще не завершился. Если в схеме Н. а. $\mathfrak{A}$ нет формул, левые части к-рых входили бы в P_i, то P_{i+1} полагают равным P_i, и процесс построения последовательности на этом считается закончившимся. Если же в схеме $\mathfrak{A}$ имеются формулы с левыми частями, входящими в P_i, то в качестве P_{i+1} берется результат подстановки правой части первой из таких формул вместо первого *вхождения* ее левой части в слово P_i; при этом процесс построения последовательности считается завершившимся, если примененная на этом шаге формула подстановки была заключительной, и продолжающимся в противном случае. Если процесс построения упомянутой последовательности обрывается, то говорят, что рассматриваемый Н. а. $\mathfrak{A}$ п р и м е н и м к с л о в у P. Последний член Q этой

последовательности считается результатом применения Н. а. $\mathfrak{A}$ к слову P и обозначается символом $\mathfrak{A}(P)$. При этом говорят, что $\mathfrak{A}$ перерабатывает P в Q, и пишут $\mathfrak{A}(P)=Q$. Н. а. в каком-либо расширении алфавита A наз. Н. а. над этим алфавитом.

Имеются веские основания считать, что уточнение общего представления об *алгоритме в алфавите*, произведенное с помощью понятия Н. а., является адекватным. Именно, считается, что для всякого алгоритма $\mathfrak{A}$ в каком-либо алфавите A может быть построен Н. а. $\mathfrak{B}$ над этим алфавитом, перерабатывающий произвольное слово P в A в тот же самый результат, в к-рый перерабатывает его исходный алгоритм $\mathfrak{A}$. Это соглашение известно в теории алгоритмов под названием принципа нормализации. Уточнение понятия алгоритма, осуществленное на основе понятия Н. а., оказывается эквивалентным другим известным уточнениям (см., напр., [2]). Вследствие этого принцип нормализации оказывается равносильным *Чёрча тезису*, предлагающему считать понятие частично рекурсивной функции адекватным уточнением понятия вычислимой арифметич. функции.

Возникшие первоначально в связи с алгебраич. проблематикой Н. а. оказались удобным рабочим аппаратом во многих исследованиях, требующих точного понятия алгоритма,— особенно тогда, когда основные объекты рассмотрения имеют неарифметич. природу и допускают удобное представление в виде слов в нек-рых алфавитах (такова, напр., ситуация в *конструктивном анализе*).

Лит.: [1] Марков А. А., Теория алгорифмов, М., 1954 (Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 42); [2] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971.

Н. М. Нагорный.

НОРМАЛЬНЫЙ ДЕЛИТЕЛЬ, нормальная подгруппа, инвариантная подгруппа,— подгруппа H группы G, для к-рой левостороннее разложение группы G по подгруппе H совпадает с правосторонним, т. е. такая подгруппа, что для любого элемента $a\in G$ смежные классы aH и Ha равны (в смысле совпадения этих множеств). Если подгруппа H является Н. д. группы G, то говорят также, что H нормальна в G, и пишут $H\trianglelefteq G$. Если $H\trianglelefteq G$ и $H\neq G$, то пишут $H\triangleleft G$. Подгруппа H нормальна в группе G тогда и только тогда, когда вместе с каждым своим элементом h она содержит все с ним сопряженные в группе G (см. *Сопряженный элемент*), т. е. $H^G\subseteq H$. Н. д. может быть определен также как подгруппа, к-рая совпадает со всеми своими сопряженными подгруппами, вследствие чего он наз. также самосопряженной подгруппой.

При любом гомоморфизме $\varphi: G\to G'$ множество T элементов группы G, отображающихся в единицу группы G' (ядро гомоморфизма φ), является Н. д. группы G, и обратно, всякий Н. д. группы G есть ядро нек-рого гомоморфизма, в частности Н. д. T служит ядром канонич. гомоморфизма на *факторгруппу* G/T.

Пересечение любого множества Н. д., а также подгруппа, порожденная любой системой Н. д. группы G, сами являются Н. д. группы G.

О. А. Иванова.

НОРМАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС полугруппы S — непустое подмножество $N\subseteq S$, удовлетворяющее следующему условию: для любых x, $y\in S^1$ (здесь $S^1=S$, если S содержит единицу, и S^1 есть полугруппа, получаемая из S присоединением единицы, если S не содержит единицу) и любых a, $b\in N$ из $xay\in N$ следует $xby\in N$. Подмножество N будет Н. к. полугруппы S тогда и только тогда, когда N является классом нек-рой конгруэнции на S.

Лит.: [1] Ляпин Е. С., Полугруппы, М., 1960.

Л. Н. Шеврин.

НОРМАЛЬНЫЙ МОНОМОРФИЗМ — морфизм, обладающий характеристическим свойством вложения группы (кольца) в группу (кольцо) в качестве нормального делителя (идеала). Пусть $\mathfrak{K}$ — категория с нулевыми морфизмами. Морфизм $\mu: U \to A$ наз. нормальным мономорфизмом, если всякий морфизм $\varphi: X \to A$, для которого из $\mu\alpha = 0$, $\alpha: A \to Y$, всегда следует $\varphi\alpha = 0$, однозначно представим в виде $\varphi = \varphi'\mu$. *Ядро* любого морфизма является Н. м. Обратное в общем случае неверно, однако при существовании в категории *коядер* морфизмов всякий Н. м. оказывается ядром своего коядра. В любой *абелевой категории* всякий мономорфизм нормален. Понятие Н. м. двойственно понятию *нормального эпиморфизма*.

М. Ш. Цаленко.

НОРМАЛЬНЫЙ НУЛЬМЕРНЫЙ ЦИКЛ, цикл индекса нуль,— цикл $z = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i^0$ такой, что $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$. Гомологичный нулю цикл всегда нормален; факторгруппа группы нормальных циклов по подгруппе циклов, гомологичных нулю, наз. приведенной нульмерной группой гомологий. Для связного комплекса приведенная группа — нулевая, что удобно во всякого рода определениях ацикличности. *Истинный цикл* $z^0 = \{z_1^0, \ldots, z_k^0, \ldots\}$ наз. нормальным, если нормален каждый из циклов z_k^0.

А. А. Мальцев.

НОРМАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — замкнутый линейный оператор A, определенный на плотном в гильбертовом пространстве H линейном многообразии D_A, такой, что $A^*A = AA^*$, где A^* — оператор, сопряженный с A. Если A — Н. о., то $D_{A^*} = D_A$ и $\|A^*\| = \|A\|$. Обратно, выполнение этих условий обеспечивает нормальность A. Если A — Н. о., то: A^* также нормален; $\alpha A + \beta I$ — Н. о. при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; A^{-1} нормален в случае, когда этот оператор существует; если $AB = BA$, где B — ограниченный линейный оператор, то также $A^*B = BA^*$.

Для Н. о. A имеют место:

1) мультипликативное разложение

$$A = U\sqrt{A^*A} = \sqrt{AA^*}U, \quad A^* = U^{-1}\sqrt{AA^*} = \sqrt{A^*A}U^{-1},$$

где U — унитарный оператор, однозначно определяемый на ортогональном дополнении подпространства нулей операторов A и A^*;

2) аддитивное разложение

$$A = A_1 + iA_2, \quad A^* = A_1 - iA_2,$$

где A_1 и A_2 — однозначно определяемые самосопряженные операторы, перестановочные между собой.

Из аддитивного разложения следует, что для упорядоченной пары (A, A^*) существует единственная двумерная спектральная функция $E(\Delta_\xi)$, где Δ_ξ — двумерный интервал $\Delta_\zeta = \Delta_\xi \times \Delta_\eta$, $\zeta = \xi + i\eta$, такая, что

$$A = \int_{\Delta_\infty} \zeta dE(\Delta_\zeta), \quad A^* = \int_{\Delta_\infty} \overline{\zeta} dE(\Delta_\zeta).$$

Из этого разложения следует также, что Н. о. A является функцией нек-рого самосопряженного оператора C, $A = F(C)$. Обратно, всякая функция любого самосопряженного оператора есть Н. о.

Важным свойством Н. о. является равенство $\|A^n\| = \|A\|^n$, из к-рого следует, что спектральный радиус Н. о. A совпадает с его нормой $\|A\|$. Собственные элементы Н. о., соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Лит.: [1] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, М., 1965; [2] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975.

В. И. Соболев.

НОРМАЛЬНЫЙ ПУЧОК — аналог *нормального расслоения* в теории пучков. Пусть

$$(f, f^{\#}):(Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

— морфизм окольцованных пространств такой, что гомоморфизм $f^{\#} : f^*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ сюръективен, и пусть $\mathcal{I} = \operatorname{Ker} f^{\#}$. Тогда $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ есть пучок идеалов в $f^*\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_Y$ и поэтому является $\mathcal{O}_Y$-модулем. Пучок $\mathcal{N}^*_{Y/X} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ наз. **конормальным пучком морфизма** f, а двойственный $\mathcal{O}_Y$-модуль $\mathcal{N}_{Y/X} = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{N}^*_{Y/X}, \mathcal{O}_Y)$ — **нормальным пучком морфизма** f. Эти пучки обычно рассматриваются в следующих частных случаях.

1) X, Y — дифференцируемые (напр., класса C^∞) многообразия, $f : Y \to X$ — погружение. Имеется точная последовательность $\mathcal{O}_Y$-модулей

$$0 \to \mathcal{N}^*_{Y/X} \xrightarrow{\delta} f^*\Omega^1_X \to \Omega^1_Y \to 0,$$

где Ω^1_X, Ω^1_Y — пучки ростков гладких 1-форм на X и Y, а δ определяется дифференцированием функций. Двойственная точная последовательность

$$0 \to \mathcal{T}_Y \to f^*\mathcal{T}_X \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0,$$

где $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{T}_Y$ — касательные пучки на X, Y, показывает, что $\mathcal{N}_{Y/X}$ изоморфен пучку ростков гладких сечений *нормального расслоения* погружения f. Если Y — погруженное подмногообразие, то $\mathcal{N}_{Y/X}$ и $\mathcal{N}^*_{Y/X}$ наз. **нормальным и конормальным пучками подмногообразия** Y.

2) $(X, \mathcal{O}_X)$ — неприводимая отделимая схема конечного типа над алгебраически замкнутым полем k, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — ее замкнутая подсхема, $f : Y \to X$ — вложение. Тогда $\mathcal{N}_{Y/X}$ и $\mathcal{N}^*_{Y/X}$ наз. **нормальным и конормальным пучками подсхемы** Y. Имеется также последовательность $\mathcal{O}_Y$-модулей

$$\mathcal{N}^*_{Y/X} \xrightarrow{\delta} \Omega_X \otimes \mathcal{O}_Y \to \Omega_Y \to 0, \qquad (*)$$

где Ω_X, Ω_Y — пучки дифференциалов на X, Y. Пучки $\mathcal{N}^*_{Y/X}$ и $\mathcal{N}_{Y/X}$ квазикогерентны, а если X — нётерова схема, то они когерентны. Если X — неособое многообразие над k, то Y является неособым многообразием тогда и только тогда, когда пучок $\mathcal{N}^*_{Y/X}$ локально свободен или когда в $(*)$ гомоморфизм δ инъективен. В этом случае получается двойственная точная последовательность

$$0 \to \mathcal{T}_Y \to \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}_Y \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0,$$

так что Н. п. $\mathcal{N}_{Y/X}$ — локально свободный пучок ранга $r = \operatorname{codim} Y$, отвечающий нормальному расслоению над Y. В частности, если $r = 1$, то $\mathcal{N}_{Y/X}$ — обратимый пучок, отвечающий дивизору Y.

В терминах Н. п. выражается самопересечение $Y \cdot Y$ неособого подмногообразия $Y \subset X$. А именно, $Y \cdot Y = f_* c_r(\mathcal{N}_{Y/X})$, где c_r есть r-й *Чжэня класс*, $f_* : A(Y) \to A(X)$ — гомоморфизм *Чжоу колец*, отвечающий вложению $f : Y \to X$.

3) $(X, \mathcal{O}_X)$ — комплексное пространство, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — его замкнутое аналитич. подпространство, f — вложение. Пучки $\mathcal{N}_{Y/X}$ и $\mathcal{N}^*_{Y/X}$ наз. **нормальным и конормальным пучками подпространства** Y; они когерентны. Если X — аналитич. многообразие, а Y — его аналитич. подмногообразие, то $\mathcal{N}_{Y/X}$ есть пучок ростков голоморфных сечений нормального расслоения над Y.

Лит.: [1] Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [2] Hartshorne R., Algebraic geometry, N. Y.—Hdlb.—B., 1977.

А. Л. Онищик.

НОРМАЛЬНЫЙ РЯД группы — ряд нормальных подгрупп

$$G=H_1\supseteq H_2\supseteq\ldots\supseteq H_n\supset H_{n+1}=\{1\}$$

группы G (см. *Подгрупп ряд*). Если каждый член ряда нормален не во всей группе, а только в предыдущем члене, то такой ряд наз. субнормальным. Кроме конечных рассматриваются также бесконечные убывающие и бесконечные возрастающие нормальные и субнормальные ряды — их члены нумеруются уже порядковыми числами (трансфинитами). Рассматриваются и более общие нормальные и субнормальные системы, члены которых нумеруются элементами упорядоченного множества.

Фактором ряда наз. факторгруппа некрого члена ряда по следующему (или предыдущему, если ряд записан в порядке возрастания членов) члену. Длиной ряда наз. количество его факторов, отличных от единицы. Неуплотняемый дэлее Н. р. наз. главным, а субнормальный — композиционным. Факторы этих рядов наз. соответственно главными и композиционными факторами. Два нормальных (субнормальных) ряда наз. изоморфными, если между их факторами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие друг другу факторы изоморфны. Любые два нормальных (субнормальных) ряда обладают изоморфными уплотнениями. В частности, любые два главных (композиционных) ряда изоморфны (*Жордана — Гёльдера теорема*).

Параллельно существует и другая терминология, а именно: нормальным рядом наз. то, что выше названо субнормальным, а для приведенного здесь понятия «нормальный ряд» используется термин — «инвариантный ряд». *А. Л. Шмелькин.*

НОРМАЛЬНЫЙ ЭПИМОРФИЗМ — морфизм, обладающий характеристич. свойством естественного отображения группы на факторгруппу или кольца на факторкольцо. Пусть $\mathfrak{K}$ категория с нулевыми морфизмами. Морфизм $\nu: A\to V$ наз. нормальным эпиморфизмом, если всякий морфизм $\varphi: A\to Y$, для к-рого из $\alpha\nu=0$, $\alpha: X\to A$, всегда следует $\alpha\varphi=0$, однозначно представим в виде $\varphi=\nu\varphi'$. *Ядро* любого морфизма является Н.э. Обратное утверждение в общем случае неверно, однако при существовании в категории ядер морфизмов всякий Н. э. оказывается коядром. В *абелевой категории* всякий эпиморфизм нормален. Двойственным к понятию Н. э. является понятие *нормального мономорфизма*. *М. Ш. Цаленко.*

НОРМЕННОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — отображение $N_{K/k}$ поля K в поле k, где K - конечное расширение поля k, ставящее в соответствие элементу $\alpha\in K$ элемент $N_{K/k}(\alpha)$, являющийся определителем матрицы k-линейного отображения $K\to K$, переводящего $x\in K$ в αx. Элемент $N_{K/k}(\alpha)$ наз. нормой элемента α.

Равенство $N_{K/k}(\alpha)=0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha=0$. Для любых $\alpha,\ \beta\in K$

$$N_{K/k}(\alpha\beta)=N_{K/k}(\alpha)\,N_{K/k}(\beta),$$

т. е. $N_{K/k}$ индуцирует гомоморфизм мультипликативных групп $K^*\to k^*$, к-рый также наз. норменным отображением. Для любого $\alpha\in k$

$$N_{K/k}(\alpha)=\alpha^n,\ \text{где } n=[K:k].$$

Группа $N_{K/k}(K^*)$ наз. норменной подгруппой в k^*, или группой норм (из поля K в поле k). Если $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ — характеристич. многочлен элемента $\alpha\in K$ относительно поля k, то

$$N_{K/k}(\alpha)=(-1)^n a_0.$$

Пусть расширение K/k сепарабельно. Тогда для любого α из K

$$N_{K/k}(\alpha) = \Pi_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha),$$

где σ_i — все k-изоморфизмы поля K в алгебраич. замыкание $\bar{k}$ поля k.

Н. о. обладает свойством транзитивности. Если L/K и K/k — конечные расширения, то

$$N_{L/k}(\alpha) = N_{K/k}(N_{L/K}(\alpha))$$

для любого α из L.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 2 изд., М., 1972.

Л. В. Кузьмин.

НОРМЕННЫЙ ВЫЧЕТ, символ норменного вычета, символ Гильберта,— функция, сопоставляющая упорядоченной паре элементов x, y мультипликативной группы K^* нек-рого *локального поля* K элемент $(x, y) \in K^*$, являющийся корнем из единицы. Эта функция может быть определена следующим образом. Пусть $\zeta_n \in K$ — нек-рый первообразный корень степени n из единицы. Максимальное абелево расширение L поля K с группой Галуа $G(L/K)$ показателя n получается присоединением к K корней $\sqrt[n]{a}$ для всех $a \in K^*$. С другой стороны, существует канонич. изоморфизм (основной изоморфизм локальной *полей классов теории*)

$$\theta: K/K^{*n} \to G(L/K).$$

Норменный вычет для пары x, y определяется из соотношения

$$\theta(y)(\sqrt[n]{x}) = (x, y)\sqrt[n]{x}.$$

В частном случае, для квадратичных полей, понятие символа Н. в. было введено Д. Гильбертом (D. Hilbert). Существует явное и использующее только локальную теорию полей классов определение Н. в. [4].

Свойства символа (x, y):

1) билинейность: $(x_1 x_2, y) = (x_1, y)(x_2, y)$, $(x, y_1 y_2) = (x, y_1)(x, y_2)$;

2) кососимметричность: $(x, y)(y, x) = 1$;

3) **невырожденность**: из $(x, y) = 1$ для всех $x \in K^*$ следует, что $y \in K^{*n}$; из $(x, y) = 1$ для всех $y \in K^*$ следует, что $x \in K^{*n}$;

4) если $x + y = 1$, то $(x, y) = 1$;

5) если σ — автоморфизм поля K, то

$$(\sigma x, \sigma y) = \sigma(x, y);$$

6) пусть K' — конечное расширение поля K, $a \in K'^*$ и $b \in K^*$. Тогда

$$(a, b) = (N_{K'/K}(a), b),$$

где в левой части формулы символ Н. в. рассматривается для поля K', в правой части — для поля K, а $N_{K'/K}$ — *норменное отображение* из K' в K;

7) из $(x, y) = 1$ следует, что y является нормой из расширения $K(\sqrt[n]{x})$ (это свойство дало название символу).

Функция (x, y) индуцирует невырожденное билинейное спаривание

$$K^*/K^{*n} \times K^*/K^{*n} \to \mu(n),$$

где $\mu(n)$ — группа корней из единицы, порожденная ζ_n. Пусть задано отображение $\Psi: K^* \times K^* \to A$ в некоторую абелеву группу A, удовлетворяющее условиям 1), 4) и условию непрерывности: для любого $y \in K^*$ множество $\{x \in K^* | \Psi(x, y) = 1\}$ замкнуто в K^*. Символ Н. в. обладает следующим свойством универсальности [3]: существует гомоморфизм $\varphi: \mu(n) \to A$ такой, что для любых $x, y \in K^*$

$$\Psi(x, y) = \varphi((x, y)).$$

Это свойство служит основой аксиоматич. определения Н. в.

Если F — *глобальное поле*, а K — пополнение поля F относительно нек-рой точки v, то символом Н. в. называют также функцию $(x, y)_v$, определенную на $F^* \times F^*$, получающуюся композицией (локального) символа Н. в. (x, y) с естественным вложением $F^* \to K^*$.

Иногда символом Н. в. наз. автоморфизм $\theta(x)$ максимального абелева расширения поля K, соответствующий элементу $x \in K^*$ в силу локальной теории полей классов.

Лит.: [1] Алгебраическая теория чисел, пер. с англ., М., 1969; [2] Кох Х., Теория Галуа p-расширений, пер. с нем., М., 1973; [3] Милнор Дж., Введение в алгебраическую K-теорию, пер. с англ., М., 1974; [4] Шафаревич И. Р., «Матем. сб.», 1950, т. 26, № 1, с. 113–46. *Л. В. Кузьмин.*

НОРМИРОВАНИЕ, логарифмическое нормирование, оценка поля,— отображение $v : K \to \Gamma_\infty$ поля K в $\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\infty\}$, где Γ — линейно упорядоченная абелева группа, а присоединяемый элемент ∞ считается больше любого элемента из группы Γ и $x + \infty = \infty + x = \infty$ для любого $x \in \Gamma$. При этом Н. должно удовлетворять следующим условиям:

1) $v(0) = \infty$, $v(x) < \infty$ при $x \neq 0$;
2) $v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$;
3) $v(a - b) \geqslant \min(v(a), v(b))$.

Образ $K^* = K - \{0\}$ при отображении v является подгруппой группы Γ и называется группой значений нормирования v. Всюду в дальнейшем будет предполагаться, что $v(K^*)$ совпадает с Γ.

Теми же аксиомами определяется логарифмическое нормирование колец. Всякое кольцо с неархимедовым *абсолютным значением* может быть превращено в логарифмически нормированное кольцо, если в группоиде значений перейти от мультипликативной записи к аддитивной и заменить упорядоченность на инверсную. Элемент 0 при этом естественно обозначить символом ∞. Обратный переход от кольца с логарифмическим Н. к кольцу с неархимедовым абсолютным значением также возможен. Если в кольце было задано неархимедово *вещественное нормирование*, то соответствующий переход можно получить, заменяя любое положительное действительное число α числом $-\lg \alpha$. Получающееся при этом логарифмическое Н. также принято называть вещественным.

Нормирования $v_1 : K \to \Gamma_\infty^1$ и $v_2 : K \to \Gamma_\infty^2$ наз. эквивалентными, если существует такой изоморфизм $\varphi : \Gamma^1 \to \Gamma^2$ упорядоченных групп, что для всех ненулевых элементов $x \in K$

$$v_2(x) = \varphi(v_1(x)).$$

Множество таких элементов x поля K, что $v(x) \geqslant 0$, является подкольцом A поля K и наз. кольцом нормирования v в поле K. Кольцо Н. всегда является *локальным кольцом*. Элементы поля K, для которых $v(x) > 0$, образуют максимальный идеал m_v кольца A; он наз. идеалом нормирования v. Факторкольцо A/m, являющееся полем, наз. полем вычетов нормирования v.

Пусть в поле K заданы Н. v_1 и v_2. Кольца этих Н., рассматриваемые как подкольца поля K, тогда и только тогда совпадают, когда эти Н. эквивалентны. Таким образом, обозрение всех (с точностью до эквивалентности) Н. поля K сводится к обозрению всех таких подколец, которые могут служить для этого поля кольцами Н. Описание таких подколец дает следующая теорема: подкольцо A поля K тогда и только тогда может служить для этого поля кольцом Н., когда для всякого ненулевого элемента $x \in K$, хотя бы один из элементов x, x^{-1} принадлежит к A. Кольцо Н., таким образом, может быть абстрактно определено как це-

лостное кольцо (*область целостности*), удовлетворяющее условию сформулированной выше теоремы по отношению к своему полю частных. Всякое такое кольцо служит кольцом т. н. канонического нормирования для своего поля частных, группой значений канонического Н. является группа K^*/U, где U — мультипликативная группа обратимых элементов кольца A, упорядоченная отношением делимости.

Кольца Н. можно определить еще одним способом. Если $A \subset B \subseteq K$ — два локальных кольца с максимальными идеалами m и n соответственно, то говорят, что B доминирует A, если $m \subset n$. Отношение доминирования является отношением частичного порядка на множестве подколец поля K. Максимальные элементы этого множества и только они являются кольцами Н. поля K. Если A — кольцо Н., а $B \supset A$ — кольцо с тем же полем частных, что и A, то B также кольцо Н. и B является локализацией кольца A по нек-рому простому идеалу.

Примеры нормирований.

1) Нормирование поля, определяемое формулой:

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ \infty, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

наз. несобственным, или тривиальным, Н. Таково любое Н. конечного поля. Ему соответствует точка $\mathrm{id} : K \to K$ (тождественное отображение K).

2) Пусть k — нек-рое поле и $K = k((t))$ — поле формальных степенных рядов над k. Сопоставление ряду $a_n t^n + a_{n-1} t^{n+1} + \ldots$, где $a_n \neq 0$, его порядка n (а нулевому ряду $-\infty$) продолжается до Н. с группой значений $\mathbb{Z}$ (аддитивная группа целых чисел) и кольцом Н. $k[[t]]$. Ассоциированная точка сопоставляет ряду $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$ из $k[[t]]$ свободный член a_0.

Н. со значениями в группе $\mathbb{Z}$ наз. дискретным; о их кольцах Н. см. *Дискретного нормирования кольцо*. Описание всех Н. поля рациональных чисел см. в [4].

Для любой линейно упорядоченной абелевой группы Γ существует Н. некоторого поля, группа значений к-рого изоморфна Γ.

Идеалы колец нормирования. Множество идеалов кольца Н. линейно упорядочено относительно включения, любой идеал конечного типа — главный, т. е. кольцо Н. является *Безу кольцом*. Более полно описание строения идеалов кольца Н. можно дать в терминах группы значений Н.

Подмножество M линейно упорядоченного множества наз. мажорным (или мажорантом), если из соотношений $x \in M$ и $y > x$ следует, что $y \in M$. Пусть A — кольцо Н. v поля K с группой значений Γ, Γ^+ — подполугруппа положительных элементов Γ и M — мажорное множество в Γ^+. Отображение $M \to \alpha(M) = \{x | x \in K, v(x) \in M \cup \{\infty\}\}$ является биективным (взаимно однозначным) отображением множества мажорных подмножеств из Γ^+ на множество идеалов кольца A. При этом главным идеалам соответствуют мажоры, обладающие минимальным элементом. Простым идеалам тоже соответствуют мажоры специального вида, а именно: мажоры вида $M_H = \Gamma^+ - H^+$, где H^+ — положительная часть нек-рой выпуклой подгруппы H группы Γ. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между простыми идеалами A и выпуклыми подгруппами группы значений Γ.

Пусть p — простой идеал, соответствующий выпуклой подгруппе H, тогда композиция отображений $K \xrightarrow{v} \Gamma \to \Gamma/H$ будет Н. поля K с кольцом Н. A_p и идеалом Н. pA_p; кроме того, на поле A_p/pA_p индуцируется Н. со значениями в группе H и кольцом Н. A/p. Тем самым Н. расщепляется на более простые. Пусть A — кольцо Н., тогда простой спектр A без нуля ($\mathrm{Spec}\, A - (0)$) является линейно упорядоченным множеством и его

тип наз. высотой, или рангом, соответствующего Н. Если Spec A конечен, то высота Н. есть число элементов в Spec $A-(0)$, и это число совпадает с числом выпуклых подгрупп группы Γ, отличных от самой Γ. Н. конечного ранга сводятся к Н. ранга 1. Последние характеризуются тем, что их группа значений — *архимедова группа*, т. е. изоморфна нек-рой подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел. В этом случае отображение $x \to \exp(-v(x))$ является ультраметрическим абсолютным значением поля K.

Важное свойство колец Н.— целозамкнутость. Более того, для произвольного целостного кольца A его целое замыкание равно пересечению всех колец Н., содержащих A. Кольцо Н. вполне целозамкнуто тогда и только тогда, когда его Н. вещественное, т. е. имеет ранг 1. Кольцо Н. нётерово тогда и только тогда, когда Н. дискретно.

Связь нормирования и топологии. Пусть $v: K \to \Gamma_\infty$ Н. поля K и $V_\gamma = \{x | x \in K,\ v(x) > \gamma\}$, где $\gamma \in \Gamma$. Совокупность всех V_γ, $\gamma \in \Gamma$, образует фундаментальную систему окрестностей нуля топологии τ_v поля K, называемой топологией, определяемой нормированием v. Топология τ_v отделима и несвязна. Топология, индуцируемая τ_v на кольце A, как правило, отлична от топологии локального кольца. Для нетривиального Н. поля K топология τ_v локально компактна тогда и только тогда, когда Н. v дискретно, кольцо Н. полное, а поле вычетов Н. v конечно; кольцо A при этом будет компактно. Пополнение $\hat{K}$ поля K относительно топологии τ_v является полем; Н. v продолжается по непрерывности до Н. $\hat{v}: K \to \Gamma_\infty$, и топология $\hat{K}$ совпадает с $\tau_{\hat{v}}$. Кольцо $\hat{A}$ нормирования $\hat{v}$ является пополнением кольца A нормирования v.

Нормирования v_1 и v_2 поля K наз. независимыми, если топологии τ_{v_1} и τ_{v_2} различны; это эквивалентно тому, что кольца нормирований A_{v_1} и A_{v_2} порождают поле K. Неэквивалентные нормирования высоты 1 всегда независимы. Имеет место теорема аппроксимации для нормирований: пусть $v_i: K \to \Gamma_\infty^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,— независимые нормирования, $a_i \in K$, $\alpha_i \in \Gamma^i$, тогда найдется такой элемент x поля K, что $v_i(x - a_i) \geqslant \alpha_i$ для всех i.

Продолжения нормирований. Если $v': L \to \Gamma'_\infty$ — Н. поля L, а K — подполе L, то ограничение $v = v'|K$ нормирования v' на поле K является Н. поля K, а его группа значений Γ — подгруппой группы Γ'; v' наз. при этом продолжением Н. v. Обратно, если v — Н., а L расширение поля K, то всегда существует Н. поля L, продолжающее v. Индекс $[\Gamma' : \Gamma]$ подгруппы Γ в группе Γ' наз. индексом ветвления Н. v' относительно v и обозначается $e(v'/v)$. Поле вычетов k_v нормирования v отождествляется с подполем поля вычетов $k_{v'}$, степень расширения $[k_{v'} : k_v]$ обозначается $f(v'/v)$ и наз. степенью вычетов Н. v' относительно v. Продолжение v' нормирования v наз. непосредственным, если $e(v'/v) = f(v'/v) = 1$.

Пусть L — расширение поля K, а $\{v_i \mid i \in I\}$ — множество всех продолжений Н. v на L. Если L — конечное расширение поля K степени n, то множество всех продолжений v конечно, и

$$\sum_{i \in I} e(v_i/v)\, f(v_i/v) \leqslant n.$$

В ряде случаев это неравенство можно заменить на равенство, напр. когда v дискретно и либо K полно, либо L сепарабельно над K. Если L — нормальное расширение K, то продолжения v на L переводятся друг в друга K-автоморфизмами L, в частности если L — радикальное расширение K, то v имеет единствен-

ное продолжение. В случае произвольного бесконечного расширения $K \subset L$ или продолжения v' нормирования v степень трансцендентности L над K больше или равна сумме

$$S(v'/v)+r(v'/v),$$

где $S(v'/v)$ — степень трансцендентности расширения поля вычетов v' над полем вычетов v, а $r(v'/v)$ — размерность пространства $(\Gamma_{v'}/\Gamma_v)\otimes\mathbb{Q}$.

Понятие «Н.» ввел и изучил В. Крулль [1]. Это понятие широко используется также в алгебраич. геометрии. Так, в терминах «колец Н.» строится абстрактная риманова поверхность поля (см. [3]).

Лит.: [1] Krull W., «J. reine und angew. Math.», 1932, Bd 167, S. 160—96; [2] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [3] Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 2, М., 1963; [4] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973.

В. И. Данилов.

НОРМИРОВАННАЯ АЛГЕБРА — алгебра над полем действительных или комплексных чисел, являющаяся одновременно *нормированным пространством*, умножение в к-рой подчиняется определенным условиям непрерывности. Простейшее из таких условий — раздельная непрерывность. Раздельная непрерывность, вообще говоря, слабее непрерывности по совокупности сомножителей. Если, напр., на множестве всех финитных последовательностей $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots)$ алгебраич. операции задать покоординатно, а норму — формулой $\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|k^{-2}$, то возникает алгебра, в к-рой умножение раздельно непрерывно, но не непрерывно по совокупности. Непрерывность умножения в Н. а. по совокупности сомножителей равносильна существованию такой константы C, что $\|xy\|\leqslant C\|x\|\|y\|$. В этом и только в этом случае пополнение обладает структурой Н. а., расширяющей исходную, и является *банаховой алгеброй*.

Е. А. Горин.

НОРМИРОВАННАЯ СИСТЕМА — система $\{x_i\}$ элементов банахова пространства B, нормы к-рых равны единице, т. е. $\|x_i\|_B=1$. В частности, система $\{f_i(x)\}$ функций, принадлежащих пространству $L^2[a, b]$, наз. Н. с., если

$$\int_a^b f_i^2(x)\,dx=1.$$

Нормирование в банаховом пространстве B системы $\{x_i\}$ отличных от нуля элементов этого пространства означает определение нормированной в B системы вида $\{\lambda_i x_i\}$, где λ_i — отличные от нуля числа, наз. нормирующими множителями. В качестве последовательности нормирующих множителей можно взять $\lambda_i=1/\|x_i\|_B$.

Лит.: [1] Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, пер. с нем., М., 1958; [2] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977.

А. А. Талалян.

НОРМИРОВАННОЕ КОЛЬЦО — 1) то же, что нормированная или *банахова алгебра*.

2) Кольцо с заданным на нем *нормированием*.

НОРМИРОВАННОЕ ПОЛЕ — поле, на к-ром задано *нормирование* (см. также *Абсолютное значение* на теле).

НОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО — *векторное пространство* над полем действительных и комплексных чисел с отмеченной *нормой*.

Е. А. Горин.

НОСИТЕЛЬ МЕРЫ μ — множество $S(\mu)=G\setminus G_0(\mu)$, где G — локально (би) компактное пространство, на к-ром определена мера μ, $G_0(\mu)$ — наибольшее открытое множество, для к-рого $\mu(G_0)=0$. Другими словами, $S(\mu)$ — наименьшее замкнутое множество, на к-ром сосредоточена мера μ (при этом μ сосредоточена на E, если $\mu(G\setminus E)=0$). Если $S(\mu)$ компакт, то мера μ наз. финитной.

М. И. Войцеховский.

НОСИТЕЛЬ МОДУЛЯ M над коммутативным кольцом A — множество всех простых идеа-

лов $\mathfrak{g}$ кольца A, для к-рых локализованные модули $M_{\mathfrak{g}}$ ненулевые. Это множество обозначается Supp (M). Оно является подмножеством спектра кольца. Напр., для конечной абелевой группы M, рассматриваемой как модуль над кольцом целых чисел, Supp (M) состоит из всех простых идеалов (p), где p делит порядок M. Для произвольного модуля M множество Supp (M) пусто тогда и только тогда, когда $M=0$.

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

Л. В. Кузьмин.

НОСИТЕЛЬ ФУНКЦИИ f — наименьшее замкнутое множество $S=\operatorname{supp} f\subset X$ такое, что значения числовой функции f, определенной на топологич. пространстве X, равны нулю всюду на дополнении $CS=X\setminus S$. Иначе, S есть замыкание множества всех точек $x\in X$, в к-рых $f(x)\neq 0$.

Е. Д. Соломенцев.

НУЛЕВОЙ ОБЪЕКТ категории — такой объект (обозначаемый обычно 0), что для каждого объекта X этой категории множества $H(X, 0)$ и $H(0, X)$ одноэлементны. Н. о., если он существует в данной категории, определен однозначно с точностью до изоморфизма. В категории множеств с отмеченной точкой Н. о. является одноэлементное множество, в категории групп — единичная группа, в категории модулей — нулевой модуль и т. д. Всякая категория содержит Н. о., но его всегда можно формально присоединить к любой заданной категории. Всякая категория с Н. о. есть категория с нулевыми морфизмами.

М. Ш. Цаленко.

НУЛЬ — 1) Число, обладающее тем свойством, что любое (действительное или комплексное) число при сложении с ним не меняется. Обозначается символом 0. Произведение любого числа на Н. равно Н.:

$$a\cdot 0=0\cdot a=0.$$

Если произведение двух чисел равно Н., то один из сомножителей равен Н. (т. е. из $ab=0$ следует, что или $a=0$, или $b=0$). Деление на Н. не определено. Непосредственным обобщением этого понятия является понятие Н. абелевой группы.

2) Н. абелевой группы — элемент абелевой группы A (в аддитивной записи), также обозначаемый символом 0 и удовлетворяющий аксиоме $0+a=a$ для всех $a\in A$. Н. абелевой группы определен однозначно.

3) Н. кольца (в частности, тела, поля) — Н. его аддитивной группы. Н. кольца (как и число 0) относительно операции умножения обладает свойством поглощения: $a\cdot 0=0\cdot a=0$. Однако в произвольном кольце произведение двух ненулевых элементов может быть равно Н. Такие элементы наз. *делителями нуля*. Поля, тела и области целостности делителей Н. не имеют.

4) Левый Н. полугруппы A (в мультипликативной записи) — элемент $0\in A$, удовлетворяющий аксиоме $0\cdot a=0$ для всех $a\in A$. Правый Н. определяется двойственной аксиомой. Двусторонний Н. (т. е. левый и правый одновременно) в полугруппе может быть только один. Н. кольца является также Н. мультипликативной полугруппы этого кольца.

5) Н. решетки — наименьший элемент этой решетки. Полная решетка всегда обладает Н., он — пересечение всех ее элементов.

6) Н. алгебраической системы — элемент, отмеченный нульарной операцией (см. *Алгебраическая операция*, *Алгебраическая система*). В большинстве рассмотренных выше примеров Н. является единственным в данной системе и даже образует нулевую подсистему.

Н. наз. также нулевым элементом.

7) Н. категории — см. в ст. *Нулевой объект* категории.

8) Н. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающей значения в нек-рой абелевой группе (кольце, поле, теле)

A, — набор значений переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, при к-ром $f(x_1, \ldots, x_n)=0$. *О. А. Иванова, Л. В. Кузьмин.*

НУЛЬ — ЕДИНИЦА ЗАКОН — утверждение в теории вероятностей о том, что всякое событие (т. н. «остаточное событие»), наступление к-рого определяется лишь сколь угодно удаленными элементами последовательности независимых случайных событий или случайных величин, имеет вероятность нуль или единица. Этот закон распространяется на системы случайных величин, зависящих от непрерывного параметра (см. ниже).

Для отдельных остаточных событий равенство их вероятностей нулю или единице было установлено в нач. 20 в. Так, если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — нек-рая последовательность независимых событий, то для остаточного события A, состоящего в том, что наступает бесконечно много событий A_k:

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

обязательность одного из равенств

$$P(A)=0 \text{ или } P(A)=1$$

была отмечена Э. Борелем [1]. Простым подсчетом было показано, что

$$P(A)=0, \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

и

$$P(A)=1, \text{ если } \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

(см. *Бореля — Кантелли лемма*).

Далее, если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, то вероятность сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ может быть равна только нулю или единице; этот факт (одновременно с критерием, позволяющим различать эти два случая) был установлен А. Н. Колмогоровым (1928, см. [2], [5]).

Изучались и остаточные события, связанные с аналитич. свойствами сумм функциональных рядов, напр. степенных рядов со случайными членами. Так, расплывчатому утверждению Э. Бореля (1896) о том, что при «произвольных коэффициентах» граница круга сходимости степенного ряда является естественной границей представляемой им аналитич. функции, была придана Х. Штейнхаузом [3] следующая точная форма. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — независимые равномерно распределенные на $(0, 1)$ случайные величины, a_k — заданные числа и пусть ряд

$$f(z; X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i X_k} z^{k-1}$$

имеет радиус сходимости $R>0$; тогда (остаточное) событие, состоящее в том, что функция f не продолжима через границу круга $|z|\leqslant R$, имеет вероятность, равную единице. Б. Йессен [4] доказал, что любое остаточное событие, связанное с последовательностью независимых равномерно распределенных на $(0, 1)$ случайных величин, имеет вероятность, равную нулю или единице.

Общая теорема о вероятностях, равных нулю или единице, была сформулирована А. Н. Колмогоровым (см. [5]) следующим образом. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — какая-либо последовательность случайных величин, а $f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ — борелевская функция переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ такая, что условная вероятность

$$\mathsf{P}\{f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)=0 \mid X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

соотношения

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)=0$$

при известных n первых величинах $X_1, X_2, \ldots, X_n$ остается равной абсолютной (безусловной) вероятности

$$\mathsf{P}\{f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) = 0\} \qquad (*)$$

для каждого n. При этих условиях вероятность (*) равна нулю или единице. Для независимых $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ отсюда вытекает Н.—е. з., как он сформулирован в начале статьи.

Указанная теорема Колмогорова вытекает, как показал П. Леви (1937, см. [6]), из более общего свойства условных вероятностей, состоящего в том, что

$$\lim \mathsf{P}\{f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) = 0 \mid X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

почти наверное равен или единице или нулю (в соответствии с тем, будет ли $f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots) = 0$ или нет). В свою очередь, это утверждение вытекает из теорем о мартингалах (см. [7] гл. III, § 1; гл. VII, §§ 4,5,7 и комментарии к ним; в § 11 имеется аналог Н.— е. з. для случайных процессов с независимыми приращениями; из него вытекает, в частности, что выборочные функции сепарабельного гауссовского процесса с непрерывной корреляционной функцией с вероятностью 1 непрерывны в каждой точке либо с вероятностью 1 имеют разрыв второго рода в каждой точке, см. [8]).

Для специального случая последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых и одинаково распределенных случайных величин было показано (см. [9]), что вероятность не только любого остаточного, но и любого инвариантного относительно перестановок конечного числа членов последовательности события равна нулю или единице.

Лит.: [1] Borel E., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1909, v. 27, p. 247—71; [2] Колмогоров А. Н., «Math. Ann.», 1928, Bd 99, S. 309—19; [3] Steinhaus H., «Math. Z.», 1929, Bd 31, S. 408—16; [4] Jessen B., «Acta math.», 1934, v. 63, p. 249—323; [5] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; [6] Levy P., Théorie de l'addition des variable aléatoires, 2 éd., P., 1954; [7] Дуб Дж., Вероятностные процессы, пер. с англ., М., 1956; [8] Добрушин Р. Л., «Теория вероятн. и ее применения», 1960, т. 5, № 1, с. 132—34; [9] Hewitt E., Savage L. J., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1955, v. 80, № 2, p. 470—501.

А. В. Прохоров, Ю. В. Прохоров.

НУЛЬМЕРНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ — непрерывное отображение $f: X \to Y$ (X, Y — топологич. пространства) такое, что $f^{-1}(y)$ — нульмерное множество (в смысле ind) для всякого $y \in Y$. Применение Н. о. и близких к ним позволяет свести исследование данного пространства к изучению другого, более простого. Так, многие размерностные свойства и другие кардинальнозначные инварианты переходят от X к Y (или, чаще, от Y к X).

Пример 1. Всякое метрич. пространство X с $\dim X \leqslant n$ допускает вполне Н. о. в пространство Y со счетной базой, причем $\dim Y \leqslant n$ (теорема Катетова). При этом полная нульмерность означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $y \in f(X)$ существует окрестность $U_y \subset Y$, прообраз $f^{-1}(U_y)$ к-рой распадается в дискретную в X систему открытых в X множеств диаметра $< \varepsilon$.

Пример 2. Если Н. о. $f: X \to Y$, где X — нормальное локально связное пространство, является *совершенным отображением*, то вес X совпадает с весом Y.

Лит.: [1] Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности, М., 1973.

М. И. Войцеховский.

НУЛЬМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО в смысле ind — пространство, обладающее базой из множеств одновременно открытых и замкнутых в нем. Каждое *дискретное пространство* нульмерно, однако Н. п. может не иметь изолированных точек (пример — пространство рациональных чисел $\mathbb{Q}$). Все нульмерные пространства вполне регулярны. Нульмерность пространства наследуется его подпространствами и влечет сильную несвязность пространства: единственными связными множествами в Н. п. являются одноточечное

и пустое. Однако последнее свойство, наз. в п о л н е н е с в я з н о с т ь ю, не равносильно нульмерности. Существуют ненульмерные пространства, в к-рых каждая точка представима в виде пересечения нек-рого семейства открыто-замкнутых множеств, но среди таких пространств нет бикомпактов.

Иногда нульмерность пространства понимается более узко. Пространство наз. н у л ь м е р н ы м в с м ы с л е dim, если во всякое его конечное открытое покрытие можно вписать открытое покрытие, элементы к-рого не пересекаются. Пространство наз. н у л ь м е р н ы м в с м ы с л е Ind, если любая окрестность любого его замкнутого подмножества содержит открыто-замкнутую окрестность этого подмножества. В классе T_1-пространств нульмерность в смысле ind вытекает как из нульмерности в смысле dim, так и из нульмерности в смысле Ind. В классе *метризуемых пространств* со счетной базой, а также в классе бикомпактов указанные три определения нульмерности равносильны. Для всех метризуемых пространств нульмерность в смысле dim равносильна нульмерности в смысле Ind, однако известен пример нульмерного в смысле ind метризуемого пространства, к-рое не нульмерно в смысле Ind. Ни нульмерность в смысле dim, ни нульмерность в смысле Ind не наследуется, вообще говоря, *подпространствами*. Среди T_1-пространств Н. п. в смысле ind характеризуются с точностью до гомеоморфизма как подпространства обобщенных канторовых дисконтинуумов D^τ — произведений *двоеточий*. Любые *вполне регулярные пространства* можно получить как *образы* Н. п. при достаточно хороших отображениях, напр. при *совершенных отображениях* и при непрерывных *открытых отображениях* с бикомпактными прообразами точек. Однако непрерывные отображения, открытые и замкнутые одновременно, сохраняют нульмерность в смысле ind и в смысле Ind. Неизвестно (1981), каждое ли вполне регулярное пространство содержит всюду плотное нульмерное подпространство.

Лит.: [1] А л е к с а н д р о в П. С., П а с ы н к о в Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973.

А. В. Архангельский.

НУЛЬ-СИСТЕМА — инволюционная корреляция n-мерного проективного пространства, оператор к-рой является антисимметричным. Пусть Н.-с. имеет вид

$$'u = Ax,$$

тогда скалярное произведение $'ux$, равное

$$(x, Ax) = -(x, Ax),$$

обращается в нуль.

Лит.: [1] Р о з е н ф е л ь д Б. А., Многомерные пространства, М., 1966.

Д. Д. Соколов.

НУМЕРАЦИЯ — основное понятие раздела теории алгоритмов — т е о р и и н у м е р а ц и й, изучающей общие свойства классов объектов, занумерованных с помощью каких-либо *конструктивных объектов*. В роли конструктивных объектов, служащих номерами элементов рассматриваемых классов, чаще всего выступают натуральные числа.

Идея Н. объектов нечисловой природы (напр., логич. формул) натуральными числами и перенесение содержательных утверждений об этих объектах в область формальной арифметики натуральных чисел впервые были использованы К. Гёделем (K. Gödel) при доказательстве *Гёделя теоремы о неполноте* арифметики Пеано. В дальнейшем эти идеи были использованы для Н. фундаментальных объектов теории алгоритмов таких, как *Тьюринга машин*, *частично рекурсивных функций* и рекурсивно перечислимых множеств. Наделение этих классов объектов подходящими Н. позволило во многих случаях выяснить более отчетливо природу этих объектов, выявить ряд их важных и новых свойств. Так возникла идея о систематич. изучении Н. произвольных множеств. При реализации этой идеи

было замечено, что многие известные результаты теории алгоритмов оказываются следствиями общих закономерностей теории Н. (о построении теории Н., создании ее специфич. понятий и методов, о формировании перспективных направлений в теории Н. см. [1] — [4]). В частности, был плодотворно использован язык теории *категорий*, позволивший взглянуть на проблематику теории Н. с новой точки зрения (см. [4]).

Нумерованным множеством наз. пара $\mathfrak{A}=\langle A, \nu\rangle$, где A — нек-рое счетное множество, а ν — некоторое отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на A. Отображение ν наз. нумерацией множества A. Если $\nu(n)=a$, то n наз. номером объекта a при нумерации ν. Н. ν_1 множества A сводится к Н. ν_2 множества A (отношение сводимости Н. обозначается $\leqslant$), если существует одноместная общерекурсивная функция f такая, что $\nu_1(n)=\nu_2(f(n))$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Нумерации ν_1 и ν_2 множества A наз. эквивалентными, если $\nu_1\leqslant\nu_2$ и $\nu_2\leqslant\nu_1$. С точки зрения теории Н. эквивалентные Н. одного и того же множества неразличимы. По этой причине объектом исследования обычно является множество $L(A)$ — множество классов эквивалентных Н. множества A, частично упорядоченное отношением сводимости Н. $\leqslant$. Часто рассматривается и множество $L(A, \nu)$ — множество классов эквивалентных Н. множества A, сводящихся к Н. ν. Множества $L(A)$ и $L(A, \nu)$ во многих случаях служат нек-рой «мерой сложности» множества A.

При сравнении Н. двух множеств A и B основным понятием является понятие морфизма. Морфизмом из нумерованного множества $\mathfrak{A}=\langle A, \nu_1\rangle$ в нумерованное множество $\mathfrak{B}=\langle B, \nu_2\rangle$ наз. всякое отображение μ из A в B, для к-рого существует одноместная общерекурсивная функция f такая, что $\mu\nu_1(n)=\nu_2(f(n))$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Через $\mathrm{Mor}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ обозначают множество всевозможных морфизмов из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. С изучением множеств Mor, в частности с выяснением возможности наделения этого множества «хорошими» Н., тесно связаны многие вопросы общей теории алгоритмов.

Категория $\mathfrak{N}$ нумерованных множеств состоит из нумерованных множеств и морфизмов. Исследование свойств этой категории $\mathfrak{N}$ является основной задачей теории Н. Исходным пунктом такого исследования часто является изучение связей нумерованных множеств с важнейшими конкретными Н. — нумерацией Клини φ всех одноместных частично рекурсивных функций и нумерацией Поста π всех рекурсивно перечислимых множеств. В теории алгоритмов доказано существование двуместной частично рекурсивной функции $U(x, y)$, универсальной для класса всех одноместных частично рекурсивных функций, т. е. такой, что для любой частично рекурсивной функции $f(x)$ можно найти число a такое, что $f(x)=U(a, x)$. Нумерация Клини φ задается тогда следующим образом: $\varphi_x(y)=U(x, y)$. Если π_x обозначает область значений функции φ_x, то получаем нумерацию Поста π всех рекурсивно перечислимых множеств.

Фундаментальную роль при исследовании категории $\mathfrak{N}$ играет введенное А. И. Мальцевым понятие полной Н., к-рое в самой общей форме синтезировало главные свойства нумераций Клини φ и Поста π. Н. ν множества A наз. полной, если среди элементов множества A имеется такой выделенный элемент a, что для любой одноместной частично рекурсивной функции f существует одноместная общерекурсивная функция h такая, что

$$\nu h(x)=\begin{cases}\nu f(x), & \text{если значение } f(x) \text{ определено,}\\ a & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Полные Н. играют роль «инъективных» элементов категории $\mathfrak{N}$ и наличие у A полных Н. свидетельствует

о значительной универсальности и важности класса объектов A. В частности, и нумерация Клини φ частично рекурсивных функций, и нумерация Поста π рекурсивно перечислимых множеств суть полные Н. (в первом случае выделенным элементом a является нигде не определенная функция, а во втором — пустое множество). Важным направлением в исследовании категории $\mathfrak{N}$ является также выделение и изучение различных видов подобъектов нумерованных множеств (см. [4]).

Часть теории Н., связанная с изучением нумераций Клини и Поста, а также их подобъектов, наиболее разработана, т. к. в этих случаях использование методов теории алгоритмов наиболее эффективно. Здесь в первую очередь изучаются т. н. вычислимые Н. Если множество A, напр., является семейством рекурсивно перечислимых множеств, то Н. ν этого семейства наз. в ы ч и с л и м о й, если отношение $x \in \nu(y)$ само является рекурсивно перечислимым. Множество классов эквивалентных вычислимых Н. семейства A обозначают $L^\circ(A)$. Это множество, как и $L(A)$, частично упорядочивается отношением сводимости Н. $\leqslant$. Максимальный элемент множества $L^\circ(A)$, если он существует, наз. г л а в н о й в ы ч и с л и м о й н у м е р а ц и е й семейства A. В частности, нумерации Клини и Поста являются главными вычислимыми Н. для соответствующих семейств Φ (всех одноместных частично рекурсивных функций) и P (всех рекурсивно перечислимых множеств). Большое число работ в теории Н. посвящено изучению множеств $L^\circ(\Phi)$ и $L^\circ(P)$. При этом нужно учесть, что многие свойства частично рекурсивных функций и рекурсивно перечислимых множеств, выявленные в теории алгоритмов, по существу являются отражениями алгебраич. свойств множеств $L^\circ(\Phi)$ и $L^\circ(P)$. Так, напр., легко укладываются в схему теории Н. изучаемые в теории алгоритмов и играющие там важную роль так наз. m-степени множеств. Если рассматривать семейство A, состоящее всего из двух множеств $\varnothing$ и $\{0\}$, то m-с т е п е н и м н о ж е с т в есть не что иное, как $L(A)$, а m-с т е п е н и р е к у р с и в н о п е р е ч и с л и м ы х м н о ж е с т в суть $L^\circ(A)$. Имеется полное алгебраич. описание устройства множеств $L(A)$ и $L^\circ(A)$ (см. [4]).

Пусть A — нек-рое семейство рекурсивно перечислимых множеств (для частично рекурсивных функций рассматриваемые понятия вводятся аналогично). И н д е к с н ы м (или н о м е р н ы м) м н о ж е с т в о м семейства A наз. множество

$$\theta A = \{x \mid \pi_x \in A\}$$

номеров рекурсивно перечислимых множеств семейства A в нумерации Поста. В теории Н. изучаются индексные множества θA для различных семейств A. Так, теорема Райса — Шапиро дает описание тех семейств A, для к-рых множество θA рекурсивно перечислимо. Такие семейства в теории Н. носят название в п о л н е п е р е ч и с л и м ы х к л а с с о в. Даны также описания других видов подобъектов нумерации Поста — специальных стандартных классов, факторизаций и ретрактов. Большую роль играют т. н. стандартные классы.

Семейство S рекурсивно перечислимых множеств наз. с т а н д а р т н ы м к л а с с о м, если существует общерекурсивная функция f такая, что: $S = \{\pi(f(0)), \pi(f(1)), \ldots\}$; при этом, если $\pi(x) \in S$, то $\pi(x) = \pi(f(x))$. Стандартные классы тесно связаны с полными Н. В настоящее время (1982) нет удовлетворительного описания стандартных классов. Такое описание могло бы пролить свет на многие вопросы теории алгоритмов. В теории Н. также рассматривались главные, эффективно-главные и другие виды подобъектов нумерации Поста (см. [4]).

Алгоритмич. аналогом понятия *алгебраической системы*, т. е. множества с заданными на нем функциями

и предикатами, является понятие нумерованной, или конструктивной, алгебраической системы. Идея состоит в следующем. Рассматриваемое множество A наделяется Н. Вместо функций и предикатов, заданных на объектах множества A, рассматриваются «переводы» этих функций и предикатов, оперирующие соответствующим образом с натуральными числами как с номерами объектов множества A. Если при этом можно добиться того, чтобы эти «переводы» функций и предикатов были общерекурсивными, то говорят, что данная алгебраич. система конструктивизируема. Первое систематич. изучение теории конструктивных алгебраич. систем было предпринято А. И. Мальцевым [3].

Следует отметить два наиболее ярких применения теории Н. к задачам теории алгоритмов: завершение построения теории Майхилла об универсальных объектах и построение теории вычислимых функционалов конечных типов (см. [4]). Методы и результаты теории Н. могут быть использованы в смежных к математич. логике и теории алгоритмов науках, в частности в программировании. Так, с помощью теории Н. могут быть решены нек-рые вопросы семантики языков программирования.

Лит.: [1] Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 3, с. 3—60; [3] Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; [4] Ершов Ю. Л., Теория нумераций, М., 1977.

И. А. Лавров.

НУМЕРИЧЕСКИ ВЫРАЗИМЫЙ ПРЕДИКАТ — арифметический предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$, обладающий по отношению к данной *формальной системе* S арифметики следующим свойством: существует такая формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ в языке *арифметики формальной*, что для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n$

1) если $P(k_1, \ldots, k_n)$ истинно, то $\vdash_S F(k_1, \ldots, k_n)$,

2) если $P(k_1, \ldots, k_n)$ ложно, то $\vdash_S \neg F(k_1, \ldots, k_n)$,

где $\vdash_S$ означает выводимость в системе S, а $F(k_1, \ldots, k_n)$ — результат подстановки в формулу $F(x_1, \ldots, x_n)$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ — термов, изображающих числа $k_1, \ldots, k_n$. В этом случае говорят, что формула $F(x_1, \ldots, x_n)$ нумерически выражает предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$. Для формальной системы S арифметики имеет место утверждение: в S нумерически выразимы все рекурсивные предикаты и только они.

n-местная арифметич. функция f наз. нумерически представимой в формальной системе S арифметики, если существует такая арифметич. формула $F(x_1, \ldots, x_n, y)$, что для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_n, l$

1) если $f(k_1, \ldots, k_n) = l$, то $\vdash_S F(k_1, \ldots, k_n, l)$,

2) $\vdash_S \exists y F(k_1, \ldots, k_n, y) \,\&\, \forall x \forall y (F(k_1, \ldots, k_n, x) \,\&\, F(k_1, \ldots, k_n, y) \supset x = y)$.

В обычных формальных системах арифметики нумерически представимы все *общерекурсивные функции* и только они.

Лит.: [1] Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

В. Е. Плиско.

НУМЕРОВАННАЯ МОДЕЛЬ — пара $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\mathfrak{M}$ — модель нек-рой фиксированной сигнатуры σ_0 и ν — *нумерация* основного множества M модели $\mathfrak{M}$. Наиболее развитым направлением в изучении Н. м. является *конструктивных моделей теория*. Другим направлением в теории Н. м. является исследование проблемы сложности Н. м., под к-рой понимается сложность множеств натуральных чисел $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu))$, либо множества $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}_0(\mathfrak{M}, \nu))$. В качестве γ здесь берется нек-рая гёделева нумерация всех формул сигнатуры $\sigma \leftrightarrows \sigma_0 \cup \{c_0, \ldots, c_n, \ldots\}$, где константы c_n не принадлежат сигнатуре σ_0, а $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu)$ — это множество всех замкнутых формул сигнатуры σ истинных на системе $\mathfrak{M}_\nu$, к-рая получается из системы $\mathfrak{M}$ обо-

гащением сигнатуры σ_0 до σ, причем значение константы c_n полагает равным элементу $\nu(n)$, а $\mathrm{Th}_0(\mathfrak{M}, \nu)$ означает соответственно, множество всех бескванторных предложений, истинных на системе $\mathfrak{M}_\nu$.

Различные специальные модели *элементарных теорий* играют важную роль в математич. логике и алгебре. Один из важных вопросов — проблема их сложности. Получены следующие результаты. Пусть Σ_n^A, Π_n^A, Δ_n^A и $\Sigma_n^{1,A}$, $\Pi_n^{1,A}$, $\Delta_n^{1,A}$ обозначают соответственно арифметическую и аналитическую *иерархии* относительно множества A.

Если теория T рекурсивна относительно A и имеет простую модель $\mathfrak{M}$, то существует нумерация ν модели $\mathfrak{M}$ такая, что $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu)) \in \Delta_2^A$, то есть $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu))$ рекурсивно относительно множества A' всех гёделевых номеров x таких вычислимых относительно A функций φ_x^A, для к-рых $\varphi_x^A(x)$ определено.

Если теория T рекурсивна относительно A и имеет счетную насыщенную модель $\mathfrak{M}$, то существует нумерация ν модели $\mathfrak{M}$ такая, что $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, 0)) \in \Delta_1^{1,A}$, то есть $\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu))$ есть гиперарифметич. множество относительно A; эти оценки сложности являются в нек-ром смысле точными.

С нахождением точной оценки связан также следующий результат. Известно, что любая непротиворечивая формула имеет Н. м. $(\mathfrak{M}, \nu)$ сложности Δ_2^0, т. е.

$$\gamma^{-1}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \nu)) \in \Delta_2^0.$$

Иерархия Ершова дает более тонкую классификацию множеств из Δ_2^0. Доказана теорема: для любого n существует непротиворечивая формула φ_n, не имеющая Н. м. $(\mathfrak{M}, \nu)$ с предикатами из Σ_n^{-1}, то есть $\nu^{-1}(P_i) \in \Sigma_n^{-1}$ и $\mathfrak{M} \vdash \neg\varphi_n$, где $\sigma_0 = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$. В конструктивной безатомной булевой алгебре $(\mathfrak{M}, \nu)$ построен рекурсивно перечислимый идеал I (т. е. множество $\nu^{-1}(I)$ рекурсивно перечислимо) такой, что булева алгебра $\mathfrak{M}/I$ не конструктивизируема. Это позволило доказать нерекурсивную представимость решетки рекурсивно перечислимых множеств.

Исследование нумерованных линейных порядков позволило опровергнуть гипотезу сильной однородности для тьюринговых степеней.

Лит.: [1] Гончаров С. С., Дроботун Б. Н., «Сиб. матем. ж.», 1980, т. 21, № 2, с. 25—41; [2] Денисов С. Д., «Алгебра и логика», 1972, т. 11, № 6, с. 648—55; [3] Дроботун Б. Н., «Сиб. матем. ж.», 1977, т. 18, № 5, с. 1002—14; [4] Ершов Ю. Л., Теория нумераций, М., 1977; [5] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; [6] Feiner L., «J. Symbol. Logic», 1970, v. 35, p. 365—74; [7] его же, там же, p. 375—77.

С. С. Гончаров

НУССЕЛЬТА ЧИСЛО — безразмерный параметр, характеризующий интенсивность конвективного теплообмена между поверхностью тела и потоком газа (жидкости): $\mathrm{Nu} = \alpha l/\lambda$, где $\alpha = Q/\Delta TS$ — коэффициент теплообмена, Q — количество тепла, отдаваемого (или получаемого) поверхностью тела в единицу времени, $T\Delta > 0$ — разница между температурой поверхности тела и температурой газа (жидкости) вне пограничного слоя, S — площадь поверхности, l — характерный размер, λ — коэффициент теплопроводности газа.

Н. ч. наз. по имени В. Нуссельта (W. Nusselt).

БСЭ-3.

НЬЮТОНА БИНОМ — формула разложения произвольной натуральной степени двучлена в многочлен, расположенный по степеням одного из слагаемых двучлена:

$$(z_1 + z_2)^m = z_1^m + \frac{m}{1!} z_1^{m-1} z_2 + \frac{m(m-1)}{2!} z_1^{m-2} z_2^2 + \ldots$$

$$\ldots + z_2^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k z_1^{m-k} z_2^k, \qquad (*)$$

где $C_m^k = m!/k!\,(m-k)!$ — *биномиальные коэффициенты*. Для n слагаемых формула (*) принимает вид

$$(z_1 + \ldots + z_n)^m = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=m} \frac{m!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_n!}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n}.$$

При произвольном показателе m, действительном или даже комплексном, в правой части (*) получается, вообще говоря, *биномиальный ряд*.

Постепенное освоение формулы Н. б., начинавшееся с ее простейших частных случаев (формул «квадрата суммы» и «куба суммы»), прослеживается уже с 11 в. Заслуга И. Ньютона (I. Newton), собственно говоря, состоит в открытии биномиального ряда.

Е. Д. Соломенцев.

НЬЮТОНА ДИАГРАММА, многоугольник Ньютона,— выпуклая ломаная, введенная И. Ньютоном (I. Newton) в 1669 (см. [1]) для определения показателей главных членов алгебраич. функций. Процесс последовательного нахождения членов разложения алгебраич. функции с помощью Н. д. носит название метода диаграммы Ньютона. Более подробно метод Н. д. был разработан В. Пюизё [2], и в математич. литературе Н. д. иногда наз. диаграммой Пюизё. Алгебраич. вариант Н. д. задолго до В. Пюизё был исследован Ж. Лагранжем [3].

Пусть $F(x, y)$ — псевдомногочлен относительно y, т. е.

$$F(x, y) = \sum_{s=0}^{n} F_s(x)\, y^s,$$

где

$$F_s(x) = x^{\rho_s} \sum_{r=0}^{\infty} F_{rs} x^{r/p},$$

x, y — комплексные переменные, F_{rs} — комплексные числа, p — натуральное число, ρ_s — неотрицательные рациональные числа, $F_n(x) \not\equiv 0$, $F_0(x) \not\equiv 0$. Обычно считается, что если $F_s(x) \not\equiv 0$, то $F_{0s} \neq 0$, а значит $F_{00} \neq 0$, $F_{0n} \neq 0$. Решения $y = y(x)$ уравнения

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

ищутся в виде ряда

$$y = y_\varepsilon x^\varepsilon + y_{\varepsilon'} x^{\varepsilon'} + y_{\varepsilon''} x^{\varepsilon''} + \ldots, \qquad (2)$$

где $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \ldots$ или, короче, $y = y_\varepsilon x^\varepsilon + z$, где $z = o(x^\varepsilon)$ при $x \to 0$. Для определения возможных значений ε и y_ε подставляется (2) в (1), собираются члены с одинаковыми степенями x и приравниваются нулю коэффициенты при этих степенях.

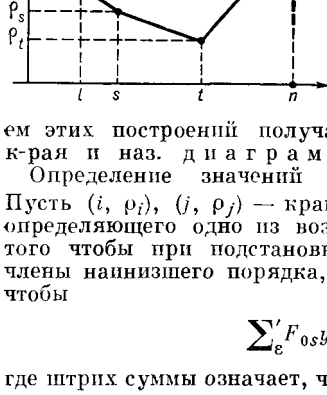
Процесс начинается с члена наинизшей степени. Пока показатель ε не определен, нельзя сказать, какие из полученных членов будут наинизшими по x. Однако члены наинизшего порядка содержатся среди следующих:

$$F_{00} x^{\rho_0},\ F_{0k} y_\varepsilon^k x^{\rho_k + k\varepsilon},\ F_{0n} y_\varepsilon^n x^{\rho_n + n\varepsilon}, \qquad (3)$$

где k пробегает те из значений $1, 2, \ldots$, для к-рых $F_k(x) \not\equiv 0$. Для уничтожения членов наинизшего порядка необходимо подобрать ε так, чтобы по меньшей мере два из показателей ρ_0, $\rho_k + k\varepsilon$, $\rho_n + n\varepsilon$ совпали, а остальные были не меньше их. Это соображение и приводит к Н. д.

На плоскости выбирается прямоугольная декартова система координат и строятся точки $(0, \rho_0)$, (k, ρ_k), (n, ρ_n), где k пробегает те же значения, что и в (3). Через точку $(0, \rho_0)$ проводится прямая, совпадающая с осью ординат, к-рая затем вращается вокруг точки $(0, \rho_0)$ против часовой стрелки до тех пор, пока она не попадет на какую-либо из нанесенных точек, напр. (l, ρ_l). Тангенс угла, составленного прямой L, проходящей через точки $(0, \rho_0)$ и (l, ρ_l), с отрицательным направлением оси абсцисс, равен одному из значений ε,

так как $\rho_0=\rho_l+l\varepsilon$, а $\rho_k+k\varepsilon > \rho_l+l\varepsilon$, если $(k, \rho_k)\notin L$. Пусть (s, ρ_s) — точка на L с наибольшей абсциссой и пусть теперь L вращается против часовой стрелки вокруг точки (s, ρ_s), пока она не попадет на другую из нанесенных точек, скажем (t, ρ_t) с $t > s$. Пусть L' — прямая, проходящая через (s, ρ_s) и (t, ρ_t). Тангенс угла, образованного L' с отрицательным направлением оси абсцисс, даст еще одно из возможных значений ε. Продолжением этих построений получается выпуклая ломаная, к-рая и наз. диаграммой Ньютона.



Определение значений коэффициента y_ε таково. Пусть (i, ρ_i), (j, ρ_j) — крайние точки отрезка Н. д., определяющего одно из возможных значений ε. Для того чтобы при подстановке (2) в (1) уничтожились члены наинизшего порядка, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum\nolimits'_\varepsilon F_{0s}y_\varepsilon^s=0, \qquad (4)$$

где штрих суммы означает, что суммирование проводится по ρ, удовлетворяющим соотношению $\rho_s+s\varepsilon = \rho_l+l\varepsilon$. Уравнение (4) имеет $j-i$ отличных от нуля корней (с учетом их кратности), т. е. столько корней, какова длина проекции взятого отрезка Н. д. Отсюда видно, что методом Н. д. получаются все n значений главного члена $y_\varepsilon x^\varepsilon$ в формуле (2). Этим же методом определяется следующий член в разложении (2), и т. д. В результате все n решений уравнения (1) имеют вид (2) т. н. рядов Пюизё (см. *Алгебраическая функция*). Метод Н. д. применяется также и при решении дифференциальных уравнений.

Лит.: [1] Ньютон И., Математические работы, пер. с латин., М.— Л., 1937, с. 33—34; [2] Puiseux V., «J. math. pure et appl.», 1850, t. 15, p. 365—480; [3] Lagrange J., «Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci.», 1776; [4] Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969; [5] Исаак Ньютон. 1643—1727. Сб. статей к трехсотлетию со дня рождения, М.— Л., 1943; [6] Брюно А. Д., Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений, М., 1979. *В. А. Треногин.*

НЬЮТОНА ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ — три основных закона, описывающие движения материальных тел под действием приложенных к ним сил.

Первый закон: если на материальную точку не действуют никакие силы (или если приложенные к ней силы взаимно уравновешиваются), то по отношению к инерциальной *отсчета системе* материальная точка будет находиться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Второй закон: если на материальную точку действует сила $\boldsymbol{F}$, то точка получает по отношению к инерциальной системе отсчета такое ускорение $\boldsymbol{w}$, что произведение массы m точки на это ускорение равно силе $\boldsymbol{F}$:

$$m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}.$$

Третий закон: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по абсолютной величине и направленными в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Н. з. м. перестают быть справедливыми для движения объектов очень малых размеров (элементарных частиц) и при движениях со скоростями, близкими к скорости света.

Законы сформулированы И. Ньютоном (I. Newton, 1687). *С. М. Тарг.*

НЬЮТОНА ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА — форма записи *Лагранжа интерполяционной формулы*,

использующая разделенные разности:

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)\,f(x_0;\,x_1) + \\ + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0;\,x_1;\,x_2) + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots \\ \ldots(x-x_{n-1})\,f(x_0;\,x_1;\,\ldots;\,x_n), \qquad (1)$$

где $f(x_0; x_1; \ldots; x_k)$ — разделенные разности k-го порядка; рассматривалась И. Ньютоном (I. Newton, 1687). Формула (1) наз. Н. и. ф. для неравных промежутков. В случае, когда значения x_i являются равноотстоящими, т. е.

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h,$$

введя обозначение $(x - x_0)/h = t$ и выразив разделенные разности $f(x_0; \ldots; x_k)$ через конечные разности $f^k_{k/2}$ по формуле

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_k) = f^k_{k/2}/h^k k!,\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

получают запись многочлена $L_n(x)$ в форме

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = \\ = f_0 + tf^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!} f^2_1 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!} f^n_{n/2}, \qquad (2)$$

которая наз. Н. и. ф. для интерполирования вперед. Если такая же замена переменных в интерполяционном многочлене L_n производится по узлам $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}$, где $x_{-k} = x_0 - kh$,

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)\,f(x_0;\,x_{-1}) + \\ + (x-x_0)(x-x_1)\,f(x_0;\,x_{-1};\,x_{-2}) + \ldots \\ \ldots + (x-x_0)\ldots(x-x_{-n+1})\,f(x_0;\,\ldots;\,x_n),$$

то получается Н. и. ф. для интерполирования назад:

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = f_0 + tf^1_{-1/2} + \\ + \frac{t(t+1)}{2!} f^2_{-1} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!} f^n_{-n/2}. \qquad (3)$$

Формулы (2), (3) удобны при вычислении таблиц заданной функции $f(x)$, если точка x находится в начале или конце таблицы, поскольку в этом случае добавление одного или нескольких узлов, вызванное стремлением повысить точность приближения, не приводит к повторению всей проделанной работы заново, как при вычислениях по формуле Лагранжа.

Лит.: [1] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; [2] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *М. К. Самарин.*

НЬЮТОНА МЕТОД, метод касательных,— метод приближенного нахождения корней действительного уравнения

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

где f — дифференцируемая функция. Последовательные приближения Н. м. вычисляются по формулам

$$x^{k+1} = x^k - [f'(x^k)]^{-1} f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема, x^* — простой корень уравнения (1) и начальное приближение x^0 лежит достаточно близко к x^*, то Н. м. обладает квадратичной сходимостью, т. е.

$$|x^{k+1} - x^*| \leqslant c\,|x^k - x^*|^2,$$

где c — константа, зависящая только от функции f и начального приближения x^0.

Часто вместо (2) для решения задачи (1) применяется т. н. модифицированный метод Ньютона:

$$x^{k+1} = x^k - [f'(x^0)]^{-1} f(x^k). \qquad (3)$$

При тех же предположениях, при к-рых Н. м. имеет квадратичную сходимость, метод (3) имеет линейную

сходимость, т. е. сходится со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем меньше единицы.

Применительно к решению нелинейного операторного уравнения $A(u) = 0$ с оператором $A : B_1 \to B_2$, где B_1 и B_2 — нек-рые банаховы пространства, обобщение (2) наз. методом Ньютона—Канторовича. Формулы этого метода имеют вид

$$u^{k+1} = u^k - [A'(u^k)]^{-1} A(u^k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где $A'(u^k)$ — производная Фреше оператора A в точке u^k, являющаяся обратимым оператором, действующим из B_1 в B_2. При специальных предположениях метод Ньютона — Канторовича обладает квадратичной сходимостью, а соответствующий модифицированный метод — линейной сходимостью.

Н. м. разработан И. Ньютоном (I. Newton, 1669).

Лит.: [1] Канторович Л. В., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 6, с. 89—185; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [3] Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, пер. с нем., М., 1969; [4] Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; [5] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *Ю. А. Кузнецов.*

НЬЮТОНА ЧИСЛО — один из критериев подобия механич. движения, к-рый получается из уравнения, выражающего второй закон Ньютона: $\mathrm{Ne} = 2P/\rho v^2$, где P — характерное давление, ρ — плотность и v — характерная скорость.

НЬЮТОНА—КОТЕСА КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА — интерполяционная квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

для вычисления интеграла по конечному промежутку $[a, b]$, узлы к-рой выбираются следующим образом: $x_k^{(n)} = a + kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, где n — натуральное число и $h = (b-a)/n$, число узлов $N = n+1$. Коэффициенты определяются тем, что квадратурная формула интерполяционная, т. е.

$$B_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!\,n} \int_0^n \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)}{t-k}\,dt.$$

При $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ все коэффициенты положительны, при $n = 8$ и $n \geqslant 10$ среди них имеются как положительные, так и отрицательные. Алгебраич. степень точности Н.—К. к. ф. (число d такое, что формула точна для всех многочленов степени не выше d и не точна для x^{d+1}) равна n при n нечетном и равна $n+1$ при n четном. Простейшие частные случаи Н.—К. к. ф.: $n = 1$, $h = b-a$, $N = 2$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

— *трапеций формула*; $n = 2$, $h = (b-a)/2$, $N = 3$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

— *Симпсона формула*; $n = 3$, $h = (b-a)/3$, $N = 4$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)\right]$$

— квадратурная формула «трех восьмых». При больших n Н.—К. к. ф. применяются редко (из-за упомянутого выше свойства коэффициентов при $n \geqslant 10$). Предпочитают пользоваться составными Н.—К. к. ф. при небольших n. Таковы составные квадратурная формула трапеций и квадратурная формула Симпсона.

Коэффициенты Н.—К. к. ф. при $n = 1(1)20$ приведены в [3].

Н.—К. к. ф. впервые появились в письме И. Ньютона (I. Newton) к Г. Лейбницу (G. Leibniz) в 1676 (см. [1]), а затем в книге Р. Котеса [2], где указаны коэффициенты формул при $n = 1(1)10$.

Лит.: [1] Ньютон И., Математические начала натуральной философии, пер. с латин., в кн.: Крылов А. Н., Собр. трудов, т. 7, М.— Л., 1936; [2] Cotes R., Harmonia Mensurarum, pt 1—2, L., 1722; [3] Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966; [4] Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *И. П. Мысовских.*

НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА ФОРМУЛА — формула, выражающая значение определенного интеграла от заданной функции f по отрезку в виде разности значений на концах отрезка любой первообразной F этой функции

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (*)$$

Названа именами И. Ньютона (I. Newton) и Г. Лейбница (G. Leibniz), т. к. правило, выражаемое формулой (*), было известно им обоим, но опубликовано позже.

Эта формула справедлива, если функция f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$, в частности если функция f непрерывна на этом отрезке и

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

где C — нек-рая постоянная. В этом случае функция F абсолютно непрерывна и почти всюду на отрезке $[a, b]$ (всюду, если f непрерывна на $[a, b]$) справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Обобщением Н.— Л. ф. является *Стокса формула* для ориентированных многообразий с краем.

Л. Д. Кудрявцев.

НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ в широком смысле — потенциал с ньютоновым ядром $1/|x-y|^{N-2}$, где $|x-y|$ — расстояние между точками x и y евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, т. е. интеграл вида

$$u(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}}, \qquad (1)$$

где интегрирование производится по нек-рой мере Радона μ на $\mathbb{R}^N$ с компактным носителем S. В случае неотрицательной меры μ Н. п. (1) есть супергармонич. функция во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ (см. *Субгармоническая функция*).

Вне носителя S меры μ Н. п. (1) имеет производные всех порядков по координатам точки x и является регулярным решением уравнения Лапласа $\Delta u(x) = 0$, т. е. $u(x)$ — *гармоническая функция* на открытом множестве CS, регулярная и на бесконечности, $u(\infty) = 0$. В случае абсолютно непрерывной меры μ Н. п. $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = \int_D \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y)\,d\omega(y), \qquad (2)$$

где $d\omega$ — элемент объема в $\mathbb{R}^N$, D — нек-рая конечная область. Если при этом плотность $f(y)$ непрерывна по Гёльдеру в замкнутой области D и граница ∂D состоит из конечного числа замкнутых гиперповерхностей Ляпунова, то $u(x)$ имеет непрерывные производные 2-го порядка внутри D и удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u(x) = -(N-2)\,2\pi^{N/2} f(x)/\Gamma(N/2)$.

В работах И. Ньютона (I. Newton) понятие «потенциала» еще не встречается. Впервые существование силовой функции ньютоновых сил тяготения доказал Ж. Лагранж (J. Lagrange, 1773). Термины «потенциальная функция» и «потенциал», применительно к интегралам вида (2) при $N=3$, впервые встречаются соответственно у Дж. Грина (G. Green, 1828) и у К. Гаусса (C. Gauss, 1840). Термин «Н. п.» иногда употребляется в узком смысле применительно только к объемным потенциалам вида (2), а иногда — применительно только к физически реальному случаю (2) потенциала сил тяготения при $N=3$, создаваемого массами, распределенными в области D с плотностью $f(y)$.

Если интеграл типа (2) или (1) распространен по гиперповерхности $S \subset \mathbb{R}^N$, т. е.

$$u(x) = \int_S \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y)\, d\sigma(y), \qquad (3)$$

то говорят о ньютоновом потенциале простого слоя, к-рый является регулярной гармонич. функцией всюду вне S. Если S — замкнутая гиперповерхность Ляпунова и плотность $f(y)$ непрерывна по Гёльдеру на S, то Н. п. простого слоя непрерывен всюду в $\mathbb{R}^N$, а его производные непрерывны вне S. При этом его нормальная производная по направлению внешней к S нормали n_0 в точке $y_0 \in S$ имеет различные пределы при приближении к S изнутри и извне, выражающиеся соответственно формулами

$$\lim_{x \to y_0} \frac{du}{dn_0}\bigg|_i = \frac{du(y_0)}{dn_0} + \frac{(N-2)\,\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} \frac{du}{dn_0}\bigg|_e = \frac{du(y_0)}{dn_0} - \frac{(N-2)\,\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

где

$$\frac{du(y_0)}{dn_0} = (N-2)\int_S f(y)\frac{\cos(y-y_0, n_0)}{|y-y_0|^{N-1}}\, d\sigma(y), \quad y_0 \in S,$$

— т. н. прямое значение нормальной производной Н. п. простого слоя, $(y-y_0, n_0)$ — угол между вектором $y-y_0$ и нормалью n_0; при этом нормальная производная $du(y_0)/dn_0$ непрерывна на S.

Ньютонов потенциал двойного слоя имеет вид

$$v(x) = \int_S f(y)\frac{\cos(y-x, n)}{|y-x|^{N-1}}\, d\sigma(y), \qquad (4)$$

где n — внешняя нормаль к S в точке $y \in S$. Н. п. двойного слоя — также гармонич. функция вне S, но при приближении к S он терпит разрыв. При тех же предположениях на S и $f(y)$ он имеет пределы изнутри и извне S, выражающиеся соответственно формулами

$$\lim_{x \to y^0} v(x)\Big|_i = v(y_0) + \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

$$\lim_{x \to y_0} v(x)\Big|_e = v(y_0) - \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} f(y_0),$$

где

$$v(y_0) = \int_S f(y)\frac{\cos(y-y_0, n)}{|y-y_0|^{N-1}}\, d\sigma(y)$$

— т. н. прямое значение Н. п. двойного слоя в точке $y_0 \in S$. При несколько более жестких условиях на S и $f(y)$ нормальная производная Н. п. двойного слоя, напротив, непрерывна при переходе через S.

См. также *Двойного слоя потенциал*, *Объемный потенциал*, *Потенциала теория*, *Простого слоя потенциал*.

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Сретенский Л. Н., Теория ньютоновского потенциала, М.— Л., 1946; [3] Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966; [4] Брело М., Основы классической теории потенциала, пер. с франц., М., 1964; [5] Эрмер Дж., Теория потенциала, пер. с англ., М., 1980; [6] Kellogg O. D., Foundations of potential theory, B., 1929.

Е. Д. Соломенцев.

НЭША ТЕОРЕМА в теории игр — теорема о существовании ситуаций равновесия в смешанном расширении конечной *бескоалиционной игры*

$$\Gamma = \langle J, \{S_i\}_{i \in J}, \{H_i\}_{i \in J} \rangle,$$

где J, $\{S_i\}_{i \in J}$ — конечные множества соответственно игроков и их стратегий, $H_i : S = \prod_{i \in J} S_i \to \mathbb{R}^1$ — функция выигрыша игрока $i \in J$ (см. также *Игр теория*). Установлена Дж. Нэшем (J. Nash [1]). Пусть M_i, $i \in J$, — множества всех вероятностных мер, заданных на S_i. Н. т. утверждает: существует такая мера $\mu^* \in M =$

$= \prod_{i \in J} M_i$, для к-рой выполняются неравенства

$$H_i(\mu^*) \geqslant H_i(\mu^* \| \mu_i)$$

для всех $\mu_i \in M_i$, $i \in J$, где через $\mu^* \| \mu_i$ обозначена мера из M, полученная заменой i-й компоненты в векторе μ^* на μ_i, а $H_i(\mu) = \mathsf{E}(H_i, \mu)$. Известные доказательства Н. т. опираются на теоремы о неподвижной точке.

Лит.: [1] Нэш Дж., в кн.: Матричные игры, М., 1961; [2] Воробьев Н. Н., Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков, Л., 1974.

Е. Б. Яновская.

НЭША ТЕОРЕМЫ в дифференциальной геометрии — две группы теорем об изометрич. вложениях и погружениях римановых многообразий в евклидовы пространства, и первоначальные варианты к-рых принадлежат Дж. Нэшу (J. Nash).

1) Н. т. о C^1-вложениях и C^1-погружениях. Погружение класса C^1 (вложение) $f: V^n \to E^m$ n-мерного риманова пространства V^n класса C^0 с метрикой g в m-мерное евклидово пространство E^m наз. коротким, если индуцированная им на V^n метрика g_f такова, что квадратичная форма $g_n - g_f$ положительно определена. Тогда если V^n допускает короткое погружение (вложение) в E^m, $m \geqslant n+1$, то V^n допускает и изометрич. погружение (вложение) класса C^1 в E^m. Эта теорема при ограничении $m \geqslant n+2$ доказана в [1], а в приведенной формулировке доказана в [2]. Из этой теоремы вытекает, в частности, что если компактное риманово многообразие V^n имеет C^1 вложение (погружение) в E^m, $m \geqslant n+1$, то V^n допускает и изометрич. C^1-вложение (погружение) в E^m. Другим следствием Н. т. является наличие у каждой точки V^n достаточно малой окрестности, допускающей изометрич. вложение класса C^1 в E^{n+1}.

2) Н. т. о регулярных вложениях. Всякое компактное риманово многообразие V^n класса C^r, $3 \leqslant r \leqslant \infty$, допускает изометрич. C^r вложение в E^m, где $m = {}^1/_2(3n^2+11n)$. Если V^n некомпактно, то оно допускает изометрич. C^r вложение в E^{m_1}, где $m_1 = {}^1/_2(3n^2+11n)(n+1)$.

Н. т. о регулярных вложениях получена в результате применения теоремы об обращении широкого класса дифференциальных операторов — Н. т. о неявной функции. Смысл этой теоремы состоит в том, что из разрешимости нек-рой линейной алгебраич. системы уравнений, естественно связанной с дифференциальным оператором L, и при введении разумной топологии в образе и прообразе рассматриваемый оператор является открытым отображением, т. е. оператор L локально обратим вблизи любой точки из множества его значений. Для уравнений вложения риманова пространства в евклидово эти условия сводятся к тому, что первые и вторые производные отображения $f: V^n \to E^m$ по внутренним координатам V^n должны быть линейно независимыми. Такие вложения были впервые рассмотрены в [4]; они наз. свободными вложениями. Из Н. т. о неявной функции вытекает, что компактное риманово многообразие V^n, достаточно близкое к компактному римановому многообразию $\bar{V}^n$, допускающему свободное вложение в E^m, также допускает свободное вложение в E^m. Этот факт и своеобразный метод продолжения по параметру привели к Н. т. о регулярных вложениях (см. [3]). С помощью распространения методов Нэша на некомпактные многообразия и аналитич. вложения, а также с помощью кардинального усовершенствования процесса продолжения по параметру доказано, что всякое бесконечно дифференцируемое (аналитическое) риманово многообразие V^n допускает изометрическое дифференцируемое (аналитическое) вложение в E^m, где $m = {}^1/_2 n(n+1) + 3n + 5$.

Лит.: [1] Нэш Дж., «Математика», 1957, т. 1, № 2, с. 3—16; [2] Кёйпер Н., там же, т. 1, № 2, с. 17—28; [3] Нэш Дж., «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 4, с. 173—216; [4] Бурстин К., «Матем. сб.», 1931, т. 38, № 3—4, с. 74—85.

Д. Д. Соколов.

ОБВЕРТЫВАЮЩИЙ РЯД для числа A — ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

такой, что

$$|A-(a_0+a_1+\ldots+a_n)|<|a_{n+1}|$$

при всех $n=0, 1, 2, \ldots$ О. р. может сходиться или расходиться; если он сходится, то его сумма равна A. Ряд (*) обвертывает действительное число A в узком смысле, если числа a_n действительны и при всех $n=0, 1, 2, \ldots$

$$A-(a_0+a_1+\ldots+a_n)=\theta_n a_{n+1},\ 0<\theta_n<1.$$

В этом случае A заключено между двумя любыми последовательными частичными суммами ряда. Напр., при $x>0$ функции e^{-x}, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{-p}$ $(p>0)$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $J_0(x)$ обвертываются в узком смысле своими рядами Маклорена.

Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

обвертывает при $x>R>0$ функцию $f(x)$, принимающую действительные значения, и числа a_n действительны, то знаки чисел $a_1, a_2, \ldots$ чередуются и ряд является обвертывающим в узком смысле. Этот ряд является асимптотич. разложением функции $f(x)$ при $x\to+\infty$; если он расходится, то наз. полусходящимся рядом. Такие ряды используются для приближенного вычисления значений функции $f(x)$ при больших значениях x.

Лит.: [1] Полиа Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, пер. с нем., 3 изд., ч. 1—2, М., 1978; [2] Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951. *М. В. Федорюк.*

ОБИЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ — векторное алгебраическое или аналитическое расслоение, пучок регулярных (соответственно аналитических) сечений которого обилен (см. *Обильный пучок*, *Положительное расслоение*). *О. А. Иванова.*

ОБИЛЬНЫЙ ПУЧОК — обобщение понятия обильного *обратимого пучка*. Пусть X — нётерова схема над полем k, $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок на X (т. е. пучок сечений нек-рого векторного алгебраич. расслоения $E\to X$). Пучок $\mathscr{E}$ наз. обильным, если для всякого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X существует целое число n_0, зависящее от $\mathscr{F}$, такое, что пучок $\mathscr{F}\otimes S^n\mathscr{E}$ при $n\geqslant n_0$ порождается своими глобальными сечениями (здесь $S^n\mathscr{E}$ обозначает n-ю симметрическую степень пучка $\mathscr{E}$).

Локально свободный пучок $\mathscr{E}$ на X обилен тогда и только тогда, когда обилен обратимый тавтологич. пучок $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ на проективизации $P(E)$ расслоения E. Другой критерий обильности состоит в том, что для всякого когерентного пучка $\mathscr{F}$ на X должно существовать целое число n_0, зависящее от $\mathscr{F}$, такое, что группа когомологий $H^i(X, \mathscr{F}\otimes S^n\mathscr{E})$ равна нулю при $n\geqslant n_0$ и $i>0$. Если пучки $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ обильны, то и $\mathscr{E}\otimes\mathscr{F}$ — обильный пучок [1]. Если X — неособая комплексная проективная кривая, то пучок $\mathscr{E}$ на X обилен тогда и только тогда, когда $\mathscr{E}$ и все его факторпучки имеют положительные степени [2]. Касательный пучок на P^N

обилен для любого N (см. [1]). Справедливо и обратное утверждение: любое неособое N-мерное алгебраич. многообразие с обильным касательным пучком изоморфно P^N (см. [1], [3]).

Лит.: [1] Hartshorne R., «Publ. math. IHES», 1966, № 29, p. 319—50; [2] его же, «Nagoya Math. J.», 1971, v. 43, p. 73—89; [3] Demazure M., в кн.: «Semin. Bourbaki», 1979/80, № 544.

В. А. Исковских.

ОБЛАСТЬ—непустое связное открытое множество точек топологич. пространства X. Замыкание $\overline{D}$ области D наз. замкнутой областью; замкнутое множество $\mathrm{Fr}D = \overline{D} \setminus D$ наз. границей О. D. Точки $x \in D$ наз. также внутренними точками О. D; точки $x \in \mathrm{Fr}\, D$ наз. граничными точками для О. D; точки дополнения $C\overline{D} = X \setminus \overline{D}$ — внешними точками для О. D.

Любые две точки О. D действительного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ (либо комплексного пространства $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 1$, либо римановой поверхности или римановой области), можно соединить путем (или дугой), целиком расположенным в D, а в случае $D \subset \mathbb{R}^n$ или $D \subset \mathbb{C}^m$ — даже ломаной линией с конечным числом звеньев. Конечные и бесконечные открытые интервалы — единственные О. на числовой прямой $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$; их границы состоят не более чем из двух точек. Область D на плоскости наз. односвязной, если любой замкнутый путь в D можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь все время в О. D. Вообще говоря, граница односвязной О. открытой плоскости $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C} \cdot \mathbb{C}^1$ может состоять из любого числа k связных компонент, $0 \leqslant k \leqslant \infty$. Если же D рассматривается как О. компактной расширенной плоскости $\overline{\mathbb{R}}^2$ или $\overline{\mathbb{C}}$ и число k компонент границы конечно, то k наз. порядком связности плоской О. D; при $k > 1$ О. D наз. многосвязной. Иначе говоря, порядок связности k на единицу больше минимального числа разрезов, попарно соединяющих компоненты границы, к-рые нужно провести, чтобы превратить О. D в односвязную. При $k = 2$ О. наз. двусвязной, при $k = 3$ — трехсвязной и т. д.; при $k < \infty$ имеем конечносвязные О., при $k = \infty$ — бесконечносвязные О. Порядок связности плоской О. характеризует ее топологический тип. Топологич. типы О. пространств $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, или $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 2$, нельзя характеризовать каким-либо одним числом.

Даже в случае односвязной плоской О. метрич. строение ее границы $\mathrm{Fr}\, D$ может быть очень сложным (см. *Граничные элементы*). В частности, точки границы делятся на достижимые точки $x_0 \in \mathrm{Fr}D$, для к-рых существует путь $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x(0) \in D$, $x(1) = x_0$, соединяющий x_0 в D с любой точкой $x(0) \in D$, и недостижимые точки, для к-рых такого пути не существует. Множество достижимых точек границы $\mathrm{Fr}\, D$ любой плоской односвязной О. всюду плотно на $\mathrm{Fr}\, D$.

Область D пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^m$ наз. ограниченной, или конечной, если

$$\sup \{ |x| : x \in D \} < \infty;$$

в противном случае О. D наз неограниченной, или бесконечной. Замкнутая жорданова плоская

кривая разделяет плоскость $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$ на две жордановы О.: конечную D^+ и бесконечную D^-. Все граничные точки жордановых О. достижимы.

Е. Д. Соломенцев.

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ функции, множество значений функции,— множество всех элементов, к-рые заданной функцией поставлены в соответствие элементам из ее области определения, т. е. если $f: X \to Y$, то множеством значений функции f наз. множество Y_f всех таких элементов $y \in Y$, для каждого из к-рых существует такой элемент $x \in X$, что $f(x)=y$. Таким образом, О. з. функции является образом ее области определения. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ функции — множество, на к-ром задана рассматриваемая функция, т. е. совокупность X всех тех элементов x, каждому из к-рых данная функция f ставит в соответствие элемент y из нек-рого множества Y; таким образом, если $f: X \to Y$, то X наз. О. о. функции. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОБЛАСТЬ ЦЕЛОСТНОСТИ, целостное кольцо,— коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля. Любое поле, а также любое кольцо с единицей, содержащееся в нек-ром поле, является О. ц. Обратно, любая О. ц. может быть вложена в нек-рое поле. Такое вложение дает конструкция поля частных (см. *Частных кольцо*).

Если A — О. ц., то кольцо многочленов $A[X]$ и кольцо формальных степенных рядов $A[[X]]$ над A также будут О. ц. Если A — коммутативное кольцо с единицей и I — нек-рый идеал в A, то кольцо A/I является О. ц. тогда и только тогда, когда идеал I прост. Кольцо A будет О. ц. тогда и только тогда, когда спектр кольца A — неприводимое топологич. пространство.

Иногда в определении О. ц. не требуют коммутативности кольца A. Примерами некоммутативных областей целостности являются тела, а также подкольца тел, содержащие единицу. Однако, вообще говоря, неверно, что любая некоммутативная О. ц. может быть вложена в нек-рое тело (см. [2], а также *Вложение кольца*).

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; [2] Кон П., Свободные кольца и их связи, пер. с англ., М., 1975; [3] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977. *Л. В. Кузьмин.*

ОБЛОЖЕНИЕ — вес $d\sigma(x)$ системы ортогональных многочленов $\{P_n(x)\}$. Если $\sigma(x)$ есть неубывающая, ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция с бесконечным множеством точек роста, то мера $d\sigma(x)$, называемая обложением, однозначно определяет систему многочленов $\{P_n(x)\}$, имеющих положительный старший коэффициент и удовлетворяющих условию ортонормированности.

Функция распределения, или интегральный вес, $\sigma(x)$ представляется в виде

$$\sigma(x)=\sigma_1(x)+\sigma_2(x)+\sigma_3(x),$$

где $\sigma_1(x)$ — абсолютно непрерывная функция, называемая ядром, $\sigma_2(x)$ — сингулярная компонента и $\sigma_3(x)$ — функция скачков. Если $\sigma_2(x)\equiv\sigma_3(x)=0$, то под знаком интеграла можно сделать замену $d\sigma(x)=\sigma_1'(x)dx$; при этом производная $\sigma_1'(x)=h(x)$ наз. дифференциальным весом системы многочленов.

Из трех компонент функции распределения на асимптотич. свойства ортогональных многочленов влияет лишь ядро $\sigma_1(x)$.

Лит. см. при ст. *Ортогональные многочлены. П. К. Суетин.*

ОБОБЩЕННАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ — функция $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, удовлетворяющая системе

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+au+bv=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+cu+dv=0 \qquad (1)$$

с действительными коэффициентами a, b, c, d, являющимися функциями действительных переменных x и y. В обозначениях

$$2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y},$$

$$4A = a + b + i(c - b),\ 4B = a - d + i(c + b)$$

исходная система записывается в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + Aw + B\overline{w} = 0.$$

Если коэффициенты A и B системы (1) на всей плоскости E комплексного переменного z принадлежат классу $L_{p,\,2}$, $p > 2$, то в любой области D этой плоскости каждая О. а. ф. $w(z)$, удовлетворяющая уравнению (1), представляется в виде

$$w(z) = \Phi(z)\, e^{\omega(z)}, \tag{2}$$

где

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{A(\zeta) + B(\zeta)\dfrac{\overline{w}}{w}}{\zeta - z}\, d\xi d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta,$$

а $\Phi(z)$ — вполне определенная аналитическая в области D функция переменного z.

Связь между О. а. ф. и аналитич. функциями, осуществляемая формулой (2), является нелинейной, если $B \neq 0$. По заданной аналитич. функции из нелинейного интегрального уравнения (2) единственным образом определяется О. а. ф. $w(z)$.

Существует линейный оператор

$$w(z) = \Phi(z) + \iint_D \Gamma_1(z,\ \zeta)\ \overline{\Phi\zeta})\, d\xi d\eta + \iint_D \Gamma_2(z,\ \zeta)\,\overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi d\eta, \tag{3}$$

устанавливающий взаимно однозначное соответствие между множествами аналитических в ограниченной области D и непрерывных в замкнутой области $D \cup S$ функций $\Phi(z)$ и обобщенных аналитических в D функций $w(z)$, причем $\Gamma_1(z,\ \zeta)$ и $\Gamma_2(z,\ \zeta)$ — вполне определенные функции, к-рые выражаются через коэффициенты A и B системы (1).

Из формулы (3) получаются различные интегральные представления О. а. ф., обобщающие интегральное представление Коши для аналитич. функций. Представление О. ф. в виде (3) оказалось полезным при исследовании краевых задач для О. а. ф.

Если A и B — аналитич. функции действительных переменных x, y, то для О. а. ф. в односвязной области имеет место представление

$$w(z) = \exp\left(\int_{z_0}^{z} A(z,\ \tau)\, d\tau\right) + \left\{\Phi(z) + \int_{z_0}^{z} \tilde{\Gamma}_1(z,\ \bar{z},\ t)\,\Phi(t)\, dt + \int_{z_0}^{\bar{z}} \tilde{\Gamma}_2(z,\ \bar{z},\ t)\,\overline{\Phi(t)}\, dt\right\}, \tag{4}$$

в к-ром $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$ — аналитич. функции своих аргументов, выражающиеся через A и B, а $\Phi(z)$ — произвольная аналитич. функция переменного z. (Формула (4) не является частным случаем формулы (3).)

В случае, когда A и B — целые функции переменных x и y, представление (4) годится для любой односвязной области плоскости комплексного переменного z.

Проблема приведения общего эллиптич. уравнения 2-го порядка

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0 \tag{5}$$

к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu=0$$

эквивалентна задаче редукции к канонич. виду положительной квадратичной формы $adx^2+2bdxdy+cdy^2$. Последняя проблема, в свою очередь, сводится к отысканию гомеоморфизмов уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}-q(z)\frac{\partial w}{\partial z}=0,\ w=u+iv, \tag{6}$$

где

$$q(z)=(a-\sqrt{\Delta}-ib)/(a+\sqrt{\Delta}+ib),$$
$$\Delta=ac-b^2,\ |q(z)|<1.$$

Если (5) — равномерно эллиптич. уравнение ($\Delta\geqslant\geqslant\lambda_0=\text{const}>0$), то $|q(z)|<q_0=\text{const}<1$.

При изучении уравнения Бельтрами основным вопросом является построение нек-рого его гомеоморфизма для данной области D. Это вытекает из следующего утверждения: если $\omega(z)$ — гомеоморфизм уравнения Бельтрами, реализующий топологич. отображение области D на область $\omega(D)$, то всякое другое его решение в D имеет вид

$$w(z)=\Phi[\omega(z)], \tag{7}$$

где Φ — произвольная аналитич. функция в области $\omega(D)$.

Когда $q(z)$ измерима, $q(z)=0$ вне D и $|q(z)\leqslant q_0<1$, однолистным решением уравнения Бельтрами (6) является функция

$$w(z)=z-\frac{1}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)\,d\xi d\eta}{\zeta-z}, \tag{8}$$

где ρ удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению (интеграл понимается в смысле главного значения по Коши)

$$\rho(z)-\frac{q(z)}{\pi}\iint_E\frac{\rho(\zeta)\,d\xi d\eta}{(\zeta-z)^2}=q(z). \tag{9}$$

Это уравнение имеет единственное решение в нек-ром классе $L_p(E)$, $p>2$; его можно получить, напр., методом последовательных приближений. Функция (8) принадлежит классу $C_\alpha(E)$, $\alpha=(p-2)/2$, реализует топологич. отображение плоскости на себя, причем $w(\infty)=\infty$, $z^{-1}w\to 1$ при $z\to\infty$. Если $q\in C_\alpha^m(E)$, $0<\alpha<1$, $m\geqslant 0$, то $w(z)\in C_\alpha^{m+1}$.

Равномерно эллиптич. система двух уравнений 1-го порядка общего вида в комплексной записи имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}-q_1(z)\frac{\partial w}{\partial z}-q_2(z)\frac{\partial \bar w}{\partial \bar z}+Aw+B\bar w=0. \tag{10}$$

С помощью гомеоморфизма нек-рого уравнения вида (6) систему (10) можно привести к виду (1). Но ее можно изучить также непосредственно, что позволяет избежать нек-рых дополнительных ограничений.

Пусть уравнение (10) рассматривается в нек-рой ограниченной области при условии, что A, $B\in L_p(D)$, $p>2$. Тогда всякое решение уравнения (10) представимо в виде

$$w(z)=\Phi[\omega(z)]\,e^{\varphi(z)}, \tag{11}$$

где $\omega(z)$ — нек-рый гомеоморфизм уравнения Бельтрами (6) с коэффициентом

$$q(z)=q_1(z)+q_2(z)\frac{\partial\bar w/\partial\bar z}{\partial w/\partial z},$$

$\Phi(\omega)$ — аналитич. функция в области $\omega(D)$, функция $\varphi(z)\in C_\alpha(E)$, $\alpha=(p-2)/2$, голоморфна вне $D\cup S$ и исчезает на бесконечности. Представление (11) имеет место и тогда, когда коэффициенты в левой части урав-

нения (10) зависят от w и от ее производных любого порядка, лишь бы на рассматриваемых решениях выполнялись указанные выше условия. Как и (2), формула (11) допускает обращение.

Формула (11) позволяет перенести целый ряд свойств классич. теории аналитич. функций на решения уравнения (10): теорему единственности, принцип аргумента, *принцип максимума* и др.

Общее Q-квазиконформное отображение является решением нек-рой равномерно эллиптич. системы вида (10) (при $A=B=0$). Справедливо и обратное утверждение. Поэтому указанные выше результаты позволяют решить чисто аналитич. путем основные проблемы квазиконформных отображений.

Теория О. а. ф. позволила исчерпывающим образом исследовать о б о б щ е н н у ю з а д а ч у Р и м а н а — Г и л ь б е р т а: найти решение уравнения (1), непрерывное в $D \cup S$, по краевому условию

$$\operatorname{Re}[\overline{\lambda(z)}\, w(z)] = \alpha u + \beta v = \gamma, \quad z \in S, \tag{12}$$

где α, β, γ — заданные действительные функции из класса $C_\alpha(S)$, $0 < \alpha < 1$, причем $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Область D, вообще говоря, многосвязна.

Задачу (12) можно редуцировать к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению и получить полный качественный анализ краевой задачи (12).

Пусть граница S области D состоит из конечного числа простых замкнутых кривых $S_0, \ldots, S_m$, удовлетворяющих условиям Ляпунова. Так как при конформных отображениях вид уравнения и краевого условия сохраняются, то без ущерба общности можно считать, что S_0 — единичная окружность с центром в точке $z=0$, принадлежащая рассматриваемой области D, а $S_1, \ldots, S_m$ — окружности, лежащие внутри S_0.

И н д е к с о м задачи (12) наз. целое число n, равное приращению

$$\frac{1}{2\pi} \arg [\alpha(\zeta) + i\beta(\zeta)],$$

когда точка ζ один раз обойдет S в положительном направлении. Краевое условие можно привести к более простому виду

$$\operatorname{Re}[z^{-n} e^{iC(z)} w(z)] = \gamma, \quad z \in S,$$

где $C(z) = C_j$ на S_j, причем $C_0 = 0$, а $C_1, \ldots, C_m$ — некоторые действительные параметры, к-рые однозначно выражаются через α и β.

Для сопряженной задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} - A w^* - \overline{B} w^* = 0, \quad z \in D, \\ &\operatorname{Re}[(\alpha + i\beta) \frac{d\bar{z}}{ds} w^*(z)] = 0, \quad z \in S. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Индекс вычисляется по формуле $n' = m - n - 1$.

Основные результаты по задаче (12) можно сформулировать в виде следующих утверждений.

1) Задача (12) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_S (\alpha + i\beta)\, w^* \gamma\, ds = 0,$$

где w^* — производное решение сопряженной задачи.

2) Пусть l и l' — числа линейно независимых решений однородных задач (12) и (13) соответственно. Тогда $l - l' = n$ или $l - l' = 2n - m + 1$.

3) Если $n < 0$, то однородная задача (12) не имеет нетривиальных решений.

4) Если $n > m - 1$, то однородная задача (12) имеет ровно $l = 2n + m - 1$ линейно независимых решений, а неоднородная задача (12) всегда разрешима. Если $n < 0$, то неоднородная задача (12) имеет решение (единствен-

ное) тогда и только тогда, когда $\int_S (\alpha+i\beta)w_j^* \gamma ds=0$, $j=1,\ldots, l'$, $l'=m-2n+1$, где w_j^* — полная система решений однородной задачи (13).

5) Если $m=0$ и $n=0$, то $l=1$ и все решения однородной задачи имеют вид $w(z)=ice^{\omega_0(z)}$, где c — действительная постоянная, а ω_0 — непрерывная в $D\cup S$ функция.

Приведенные результаты полностью характеризуют задачу (12) в односвязном ($m=0$) и многосвязном ($n<0$, $n>m-1$) случаях. Особого рассмотрения требует случай $0\leqslant n\leqslant m-1$.

Лит.: [1] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

А. В. Бицадзе.

ОБОБЩЕННАЯ ГРУППА — то же, что *инверсная полугруппа.*

ОБОБЩЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ типа функции — распространение понятия производной на некоторые классы недифференцируемых функций. Первое определение принадлежит С. Л. Соболеву (см. [1], [2]), к-рый подошел к определению О. п. с точки зрения идеи введенного им понятия *обобщенной функции.*

Пусть $f=f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$ и $\varphi=\varphi(x)=\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — локально интегрируемые функции на открытом множестве Ω n-мерного пространства R^n, т. е. интегрируемые по Лебегу на любом замкнутом ограниченном множестве $F\subset\Omega$. Тогда φ есть обобщенная частная производная от f по x_j на Ω и пишут $\varphi=\partial f/\partial x_j$, если для любой бесконечно дифференцируемой функции ψ, финитной в Ω (см. *Финитная функция*),

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}(x)\,dx=-\int_\Omega \varphi(x)\,\Psi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Второе эквивалентное определение О. п. $df/dx_j=\varphi$ заключается в следующем. Если f можно видоизменить на множестве n-мерной меры нуль так, что видоизмененная функция (к-рая снова обозначается через f) будет локально абсолютно непрерывной по x_j почти для всех (в смысле $(n-1)$-мерной меры) $x^j=(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, принадлежащих к проекции Ω^j области Ω на плоскость $x_j=0$, то f имеет частную (в обычном смысле этого слова) производную $\partial l/dx_j$ почти всюду на Ω. Если функция $\varphi=\frac{\partial f}{\partial x_j}$ почти всюду на Ω, то φ есть О. п. от f по x_j на Ω. Таким образом, О. п. определена на Ω почти всюду; если f непрерывна и имеет на Ω непрерывную обычную производную df/dx_j, то последняя есть в то же время О. п. от f по x_j на Ω.

О. п. $\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j$, $\partial^3 f/\partial x i\partial^2 x_j$, ..., высшего порядка определяются по индукции. Они не зависят (почти всюду) от порядка дифференцирования.

Имеется третье эквивалентное определение О. п. Пусть для всякого замкнутого ограниченного $F\subset\Omega$ функции f и φ, заданные на Ω, обладают свойствами:

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_F |f_\nu-f|\,dx=0,$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_F \left|\frac{\partial f_\nu}{\partial v_j}-\varphi\right| dx=0,$$

где функции f_ν, $x=1, 2, \ldots$, непрерывны на Ω вместе со своими частными производными $\partial f_\nu/\partial x_j$; тогда φ есть О. п. по x_j от f на Ω ($\varphi=\partial f/\partial x_j$) (см. также *Соболева пространство*).

С точки зрения теории обобщенных функций О. п. определяется следующим образом. Пусть задана функция $f(x)$, локально суммируемая на Ω, рассматриваемая как обобщенная функция, и пусть $\partial f/\partial x_j=\varphi$ — частная производная в смысле теории обобщенных функций. Если окажется, что φ представляет локально суммируемую на Ω функцию, то тогда (по первому (исходному) определению) φ есть О. п.

Понятие О. п. вводилось и ранее (см., напр., [3], где рассматривались О. п. с интегрируемым квадратом на Ω). В дальнейшем многие исследователи приходили к этому понятию независимо от своих предшественников (см. по этому вопросу [4]).

Лит.: [1] Соболев С. Л., «Докл. АН СССР», 1935, т. 8, с. 291—94; [2] его же, «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 39—72; [3] Levi B., «Rend. Circolo mat. Palermo», 1906, v. 22, p. 293—359; [4] Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.

С. М. Никольский.

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ — математическое понятие, обобщающее классич. понятие функции. Потребность в таком обобщении возникает во многих технич., физич. и математич. задачах. Понятие О. ф. дает возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, точечного заряда, точечного диполя, (пространственную) плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного источника и т. д. С другой стороны, в понятии О. ф. находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физич. величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в достаточно малых окрестностях данной точки. Таким образом, техника О. ф. служит удобным и адекватным аппаратом для описания распределений различных физич. величин. Поэтому иначе О. ф. наз. р а с п р е д е л е н и я м и (distributions).

О. ф. были введены впервые в кон. 20-х гг. 20 в. П. Дираком (P. Dirac, см. [1]) в его исследованиях по квантовой механике, где он систематически использует понятие δ-функции и ее производных (см. *Дельта-функция*). Основы математич. теории О. ф. были заложены С. Л. Соболевым [2] в 1936 при решении задачи Коши для гиперболич. уравнений, а в 50-х гг. Л. Шварц (см. [3]) дал систематич. изложение теории О. ф. и указал многие применения. В дальнейшем теория О. ф. интенсивно развивалась многими математиками и физиками-теоретиками, главным образом в связи с потребностями теоретич. и математич. физики и теории дифференциальных уравнений (см. [4] — [7]). Теория О. ф. далеко продвинута, имеет многочисленные применения и широко вошла в обиход математика, физика и инженера.

Формально О. ф. f определяется как линейный непрерывный функционал над тем или иным векторным пространством достаточно «хороших» (основных) функций $\varphi(x)$; $f:\varphi\to(f,\varphi)$. Важным примером основного пространства является пространство $D(O)$ — совокупность финитных $C^\infty(O)$-функций в открытом множестве $O\subset\mathbb{R}^n$, снабженная топологией строгого индуктивного предела (объединения) пространств $C_0^\infty(\overline{O_k})$, $O_k\Subset O_{k+1}$, $\bigcup_k O_k=O$. Пространство $C_0^\infty(\overline{O_k})$ есть совокупность $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-функций с носителем в $\overline{O_k}$, снабженная топологией счетного числа норм

$$\|\varphi\|_{C^p(\overline{O_k})}=\max_{|\alpha|\leqslant p}|D^\alpha\varphi(x)|,\quad p=0,\ 1,\ \ldots$$

Примером основной функции из $D(\mathbb{R}^n)$ служит «шапочка»:

$$\omega_\varepsilon(x)=\begin{cases}C_\varepsilon\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right), & |x|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x|>\varepsilon,\end{cases}\qquad\int\omega_\varepsilon(x)\,dx=1.$$

Сопряженное к $D(O)$ пространство есть п р о с т р а н с т в о О. ф. $D'(O)$; $D=D(\mathbb{R}^n)$, $D'=D'(\mathbb{R}^n)$. Сходимость последовательности О. ф. из $D'(O)$ определяется как с л а б а я с х о д и м о с т ь функционалов из $D'(O)$, т. е. $f_k\to0$, $k\to\infty$, в $D'(O)$ означает, что $(f_k,\varphi)\to0$, $k\to\infty$, для всех $\varphi\in D(O)$.

Для того чтобы линейный функционал f на $D(O)$ был О. ф. в O, т. е. $f\in D'(O)$, необходимо и достаточно,

чтобы для любого открытого множества $O' \Subset O$ существовали числа K и m такие, что

$$|(f, \varphi)| \leqslant K \|\varphi\|_{C^m(\overline{O'})}, \quad \varphi \in D(O'). \qquad (1)$$

Если в неравенстве (1) целое число m можно выбрать независящим от O', то О. ф. f имеет конечный порядок; наименьшее такое m наз. порядком f в O. Таким образом, в силу (1), всякая О. ф. f из $D'(O)$ имеет конечный порядок в любом $O' \Subset O$.

Пространство $D'(O)$ — полное: если последовательность О. ф. f_k, $k = 1, 2, \ldots$, из $D'(O)$ такова, что для любой функции $\varphi \in D(O)$ числовая последовательность (f_k, φ) сходится, то функционал

$$(f, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi)$$

принадлежит $D'(O)$.

Простейшими примерами О. ф. являются функционалы, порождаемые локально суммируемыми в O функциями

$$\varphi \to (f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in D(O). \qquad (2)$$

О. ф., определяемые локально суммируемыми в O функциями $f(x)$ по формуле (2), наз. регулярными О. ф. в O; остальные О. ф. наз. сингулярными. Между локально суммируемыми в O функциями и регулярными О. ф. в O существует взаимно однозначное соответствие. В этом смысле «обычные», т. е. локально суммируемые в O, функции являются (регулярными) О. ф. из $D'(O)$.

Примером сингулярной О. ф. в $\mathbb{R}^n$ служит δ-функция Дирака

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D.$$

Она описывает плотность массы 1, сосредоточенной в точке $x = 0$. При этом «шапочка» $\omega_\varepsilon(x)$ (слабо) аппроксимирует δ-функцию

$$\omega_\varepsilon \to \delta, \quad \varepsilon \to +0 \text{ в } D'.$$

Пусть $f \in D'(O)$ и $\omega_\varepsilon(x)$ — «шапочка». Тогда функция

$$f_\varepsilon(x) = (f(y), \omega_\varepsilon(x - y))$$

из $C^\infty(O_\varepsilon)$ наз. регуляризацией f, и $f_\varepsilon \to f$, $\varepsilon \to +0$ в $D'(O)$. Более того, всякая f из $D'(O)$ есть слабый предел функций из $D(O)$. Последнее свойство иногда берется в качестве исходного для определения О. ф., что вместе с теоремой о полноте пространства О. ф. приводит к эквивалентному определению О. ф. [8].

О. ф., вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках. Тем не менее можно говорить о совпадении О. ф. с локально суммируемой функцией на открытом множестве: О. ф. f из $D'(O)$ совпадает в $O' \subset O$ с локально суммируемой в O' функцией $f_0(x)$, если ее сужение на O' есть f_0, т. е. в соответствии с (2)

$$(f, \varphi) = \int f_0(x) \varphi(x)\, dx$$

для всех $\varphi \in D(O')$, при этом считается $f = f_0(x)$, $x \in O'$. В частности, при $f_0 = 0$ получается определение того, что О. ф. f обращается в нуль в O'. Множество точек O, ни в какой окрестности к-рых О. ф. не обращается в нуль, наз. носителем О. ф. f и обозначается $\operatorname{supp} f$. Если $\operatorname{supp} f \Subset O$, то О. ф. f наз. финитной в O.

Справедлива теорема о кусочном склеивании обобщенной функции: пусть в окрестности $U_y \Subset O$ каждой точки $y \in O$ задана О. ф. f_y из $D'(U_y)$, причем элементы f_y согласованы, т. е. $f_{y_1} = f_{y_2}$ в $U_{y_1} \cap U_{y_2} \neq \varnothing$; тогда существует О. ф. f из $D'(O)$, совпадающая с f_y в U_y при всех $y \in O$.

Примеры обобщенных функций.
1) δ-функция Дирака: $\operatorname{supp}\delta=\{0\}$.

2) О. ф. $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$, определяемая равенством

$$\left(\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right),\ \varphi\right)=\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,\quad \varphi\in D(\mathbb{R}^1),$$

наз. конечной частью, или главным значением, интеграла от функции $\frac{1}{x}$; $\operatorname{supp}\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=\mathbb{R}^1$. О. ф. $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ сингулярна в $\mathbb{R}^1$, однако на открытом множестве $x\neq 0$ она регулярна и совпадает с $\frac{1}{x}$.

3) Поверхностная δ-функция. Пусть S — кусочно гладкая поверхность и μ — непрерывная функция на S. О. ф. $\mu\delta_S$ определяется равенством

$$(\mu\delta_S)\varphi=\int_S\mu(x)\,\varphi(x)\,dS_x.$$

При этом $\mu\delta_S(x)=0$, $x\notin S$, $\mu\delta_S$ — сингулярная О. ф. Эта О. ф. описывает пространственную плотность масс или зарядов, сосредоточенных на поверхности S с поверхностной плотностью μ (плотность простого слоя).

Линейные операции над О. ф. вводятся как расширение соответствующих операций над основными функциями.

а) Замена переменных. Пусть $f\in D'(O)$ и $x=Ay+b$ — неособенное линейное преобразование O на O_1. О. ф. $f(Ay+b)$ из $D'(O_1)$ определяется равенством

$$(f(Ay+b),\ \varphi)=\left(f,\ \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{|\det A|}\right),\quad \varphi\in D(O_1).\qquad(3)$$

Так как операция $\varphi(y)\to\varphi[A^{-1}(x-b)]$ — изоморфизм $D(O)$ на $D(O_1)$, то операция $f(x)\to f(Ay+b)$ — изоморфизм $D'(O)$ на $D'(O_1)$. В частности, если $A=\lambda I$, $\lambda\neq 0$, $b=0$ ($x=\lambda y$ — подобие (с отражением при $\lambda<0$)), то

$$(f(\lambda y),\ \varphi)=\frac{1}{|\lambda|^n}\left(f,\ \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right);$$

если $A=I$ ($x=y+b$ — сдвиг на b), то

$$(f(y+b),\ \varphi)=(f,\ \varphi(x-b)).$$

Формула (3) позволяет определить трансляционно инвариантные, сферически симметричные, центрально симметричные, однородные, периодические, лоренц-инвариантные и т. д. О. ф.

Пусть функция $a\in C^1(\mathbb{R}^1)$ имеет только простые нули $x_1, x_2, \ldots$ на оси $\mathbb{R}^1$. Функция $\delta(a(x))$ определяется равенством

$$\delta(a(x))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta(x-x_k)}{|a'(x_k)|}.$$

Примеры. 4) $\delta(-x)=\delta(x)$.
5) $(\delta(x-x_0),\ \varphi)=\varphi(x_0)$.
6) $\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2a}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$, $a>0$.
7) $\delta(\sin x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k\pi)$.

б) Произведение. Пусть $f\in D'(O)$ и $a\in C^\infty(O)$. Произведение $af=fa$ определяется равенством

$$(af,\ \varphi)=(f,\ a\varphi),\quad \varphi\in D(O).$$

Оказывается, что $af\in D'(O)$ и для обычных локально суммируемых функций произведение af совпадает с обычным умножением функций $f(x)$ и $a(x)$.

Примеры. 8) $a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x)$.
9) $x\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=1$.

Однако эта операция произведения не допускает распространения на любые О. ф. так, чтобы она была

ассоциативной и коммутативной. Действительно, в противном случае получилось бы противоречие:

$$(x\delta(x))\,\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=0\,\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=0,$$

$$(x\delta(x))\,\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=(\delta(x)\,x)\,\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\delta(x)\left(x\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\delta(x).$$

В нек-рых классах О. ф. такое произведение можно определить, однако оно может оказаться неоднозначным.

в) Дифференцирование. Пусть $f\in D'(O)$. Обобщенная (слабая) производная О. ф. f

$$D^{\alpha}f(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad |\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n,$$

порядка $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ определяется равенством

$$(D^{\alpha}f,\ \varphi)=(-1)^{|\alpha|}\,(f,\ D^{\alpha}\varphi),\ \varphi\in D(O). \qquad (4)$$

Так как операция $\varphi\to(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\varphi$ линейна и непрерывна из $D(O)$ в $D(O)$, то функционал $D^{\alpha}f$, определяемый правой частью равенства (4), есть О. ф. из $D'(O)$. Если $f\in C^{p}(O)$, то $D^{\alpha}f\in C^{p-|\alpha|}(O)$ при всех α таких, что $|\alpha|\leqslant p$.

Имеют место следующие свойства: операция $f\to D^{\alpha}f$ линейна и непрерывна из $D'(O)$ в $D'(O)$, любая О. ф. из $D'(O)$ бесконечно дифференцируема (в обобщенном смысле); дифференцирование не зависит от порядка; справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения af, где $a\in C^{\infty}(O)$; дифференцирование не увеличивает носителя; всякая О. ф. f из $D'(O)$ во всяком открытом множестве $O'\subseteq O$ есть нек-рая производная от непрерывной функции в O'; любое дифференциальное уравнение $Lu=f$, $f\in D'(O)$, с постоянными коэффициентами разрешимо в $D'(O)$, если O — выпуклая область; любая О. ф. f порядка N с носителем в точке 0 единственным образом представляется в виде

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant N}a_{\alpha}D^{\alpha}\delta(x).$$

Примеры. 10) $\theta'(x)=\delta(x)$,
где θ — функция Хевисайда (функция включения):

$$\theta(x)=1,\ x\geqslant 0,\ \theta(x)=0,\ x<0.$$

11) $(\delta',\ \varphi)=-\varphi'(0)$;
$-\delta'(x)$ описывает плотность зарядов, соответствующих диполю момента $+1$ в точке $x=0$ и ориентированного вдоль положительного направления оси x.

12) Обобщением $\delta'(x)$ является нормальная производная от плотности простого слоя на ориентируемой поверхности S:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_S),\ \varphi\right)=-\int_S\mu\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS_x.$$

О. ф. $-\frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_S)$ описывает пространственную плотность зарядов, соответствующую распределению диполей на поверхности S с поверхностной плотностью момента μ и ориентированных вдоль заданного направления нормали n на S (плотность двойного слоя).

13) Общее решение уравнения $u'=0$ в классе $D'(\mathbb{R}^1)$ есть $u(x)=C$, где C — произвольная постоянная.

14) Общее решение уравнения $xu=0$ в классе $D'(\mathbb{R}^1)$ есть $u(x)=C\delta(x)$.

15) $x^m\delta^{(k)}(x)=0$, $k=0,\ 1,\ \dots,\ m-1$.

16) Тригонометрический ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_ke^{ikx},\ |a_k|\leqslant A(1+|k|)^m,$$

сходится в D' и его можно дифференцировать в D' почленно бесконечное число раз.

17) $\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2k\pi)$.

г) Прямое произведение. Пусть $f \in D'(O_1)$ и $g \in D'(O_2)$. Прямое произведение определяется по формуле

$$(f(x) \times g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi)), \qquad (5)$$

$$\varphi(x, y) \in D(O_1 \times O_2).$$

Так как операция $\varphi \to (g(y), \varphi(x, y))$ линейна и непрерывна из $D(O_1 \times O_2)$ в $D(O_1)$, то функционал $f(x) \times g(y)$, определяемый формулой (5), есть О. ф. из $D'(O_1 \times O_2)$. Прямое произведение — коммутативная и ассоциативная операция, причем

$$\operatorname{supp}(f \times g) = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g.$$

О. ф. $f(x, y)$ из $D'(O_1 \times O_2)$ не зависит от переменной y, если она представима в виде

$$f(x, y) = f_0(x) \times 1(y), \quad f_0 \in D'(O_1);$$

в этом случае пишется $f(x, y) = f_0(x)$.

Примеры. 18) $\delta(x) = \delta(x_1) \times \ldots \times \delta(x_n)$.

19) Общее решение в $D'(\mathbb{R}^2)$ уравнения колебаний однородной струны $u_{tt} = u_{xx}$ задается формулой

$$u(x, t) = f(x+t) + g(x-t),$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — произвольные О. ф. из $D'(\mathbb{R}^1)$.

д) Свертка. Пусть О. ф. f и g из $D'(\mathbb{R}^n)$ обладают тем свойством, что их прямое произведение $f(x) \times g(y)$ допускает расширение на функции вида $\varphi(x+y)$, где φ пробегает $D(\mathbb{R}^n)$, в следующем смысле: для всякой последовательности функций $\eta_k(x, y)$, $k \to \infty$, из $D(\mathbb{R}^{2n})$ со свойствами

$$|D^\alpha \eta_k(x, y)| \leqslant C_\alpha, \quad \eta_k(x, y) \to 1,$$

$$D^\alpha \eta_k(x, y) \Rightarrow 0, \quad |\alpha| \geqslant 1, \quad k \to \infty,$$

(на любом компакте), числовая последовательность $(f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y))$ имеет предел, не зависящий от последовательности $\{\eta_k\}$. Этот предел наз. сверткой О. ф. f и g и обозначается $f*g$, так что

$$(f*g, \varphi) = \lim_{k \to \infty} (f(x) \times g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x+y)),$$

$$\varphi \in D(\mathbb{R}^n). \qquad (6)$$

Из полноты пространства D' следует, что $f*g \in D'(\mathbb{R}^n)$. Как показывают элементарные примеры, свертка существует не для любых пар f и g. Она заведомо существует, если одна из О. ф. финитна. Если свертка существует в D', то она коммутативна $f*g = g*f$ и справедливы формулы дифференцирования свертки

$$f*D^\alpha g = D^\alpha(f*g) = D^\alpha f*g. \qquad (7)$$

Далее,

$$f*\delta = \delta*f = f, \qquad (8)$$

откуда из (7) получается

$$D^\alpha f = f*D^\alpha \delta.$$

Наконец,

$$\operatorname{supp}(f*g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

Как показывает пример:

$$(1*\delta')*\theta = 1'*\theta = 0*\theta = 0,$$

$$1*(\delta'*\theta) = 1*\theta' = 1*\delta = 1,$$

свертка — неассоциативная операция. Однако существуют ассоциативные (и коммутативные) сверточные алгебры. Единицей в них, в силу (8), служит δ-функция. Сверточную алгебру образует, напр., множество $D'(\Gamma)$, состоящее из О. ф. из D' с носителями в выпук-

лом остром и замкнутом конусе Γ с вершиной в 0. Обозначение:

$$D'_+ = D'([0, \infty)), \ n = 1.$$

О. ф. $\mathscr{E}$ из D' наз. фундаментальным решением (функцией точечного источника) дифференциального оператора $L(D)$ с постоянными коэффициентами, если она удовлетворяет уравнению

$$L(D)\,\mathscr{E}(x) = \delta(x).$$

Зная фундаментальное решение $\mathscr{E}$ оператора $L(D)$, можно построить решение уравнения $L(D)u = f$ для тех f из D', для к-рых свертка $f * \mathscr{E}$ существует, и это решение дается формулой $u = f * \mathscr{E}$.

Примеры. 20) Ядро оператора дробного дифференцирования и дробного интегрирования $f_\alpha(x)$, $-\infty < \alpha < \infty$:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta(x)\,x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha > 0, \\ f_{\alpha+N}^{(N)}(x), & \alpha + N > 0, \ N \text{ — целое}. \end{cases}$$

При этом $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, $f_0 = \delta$, $f_1 = \theta$, $f_{-k} = \delta^{(k)}$, k — целое. Если $f \in D'_+$, то $f * f_\alpha = f^{(-\alpha)}$ есть первообразная порядка α при $\alpha > 0$ (производная порядка $-\alpha$ при $\alpha < 0$).

21) $\Delta\mathscr{E} = \delta(x)$,

$$\mathscr{E}(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|, \ n = 2, \quad \mathscr{E}(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}, \ n = 3.$$

22) $\mathscr{E}_t - \mathscr{E}_{xx} = \delta(x, t)$, $\mathscr{E}(x, t) = \dfrac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-x^2/4t}$.

23) $\mathscr{E}_{tt} - \mathscr{E}_{xx} = \delta(x, t)$,

$$\mathscr{E}(x, t) = \frac{1}{2}\,\theta(t - |x|).$$

е) Преобразование Фурье. Оно определяется для класса О. ф. $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ медленного роста. Пространство основных функций $S = S(\mathbb{R}^n)$ состоит из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Топология в S задается счетным числом норм

$$\|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha| \leqslant p} (1 + |x|^2)^{p/2} |D^\alpha \varphi(x)|, \ \varphi \in S, \ p = 0, 1, \ldots$$

При этом $D \subset S$ и $S' \subset D'$, где указанные вложения непрерывны. Локально суммируемые в $\mathbb{R}^n$ функции медленного роста содержатся в S', определяя по формуле (2) регулярные функционалы на S.

Всякая О. ф. из S' есть нек-рая производная от непрерывной функции медленного роста и, стало быть, имеет конечный порядок в $\mathbb{R}^n$.

Преобразование Фурье $F[f]$ О. ф. f из S' определяется равенством

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]), \ \varphi \in S,$$

где

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x)\, e^{i(\xi, x)}\, dx,$$

$\varphi \in S$ — классич. преобразование Фурье. Так как операция $\varphi \to F[\varphi]$ — изоморфизм S на S, то и операция $f \to F[f]$ — изоморфизм S' на S', причем обратной операцией к F служит операция

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-\xi)], \ f \in S'.$$

Имеют место основные формулы для $f \in S'$:

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f], \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n};$$

$$F[D^\alpha f] = (i\xi)^\alpha F[f],$$

$$F[f * g] = F[f]\, F[g],$$

если g финитна. Если О. ф. f — периодическая с n-периодом $T=(T_1, \ldots, T_n)$, $T_j>0$, то $f\in S'$ и ее можно разложить в тригонометрич. ряд

$$f(x)=\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(f)\, e^{i(k\omega, x)}, \quad |c_k(f)|\leqslant A(1+|k|)^m,$$

сходящийся к f в S'; здесь

$$\omega=\left(\frac{2\pi}{T_1}, \ldots, \frac{2\pi}{T_n}\right), \quad k\omega=\left(\frac{2\pi k_1}{T_1}, \ldots, \frac{2\pi k_n}{T_n}\right).$$

Примеры. 24) $F[x^\alpha]=(2\pi)^n(-i)^{|\alpha|}D^\alpha\delta(\xi)$, в частности $F[1]=(2\pi)^n\delta(\xi)$.

25) $F[D^\alpha\delta]=(-i\xi)^\alpha$, в частности $F[\delta]=1$.

26) $F[0]=\frac{i}{\xi+i0}=\pi\delta(\xi)+i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\xi}\right)$.

ж) Преобразование Лапласа. Пусть О. ф. $g\in S'(\Gamma)=S'\cap D'(\Gamma)$, где Γ — замкнутый выпуклый острый конус. Пусть $C=\operatorname{int}\Gamma$, где $\Gamma^*=\{y:(y^*, \xi)\geqslant 0,\ \forall\xi\in\Gamma\}$ — сопряженный конус к Γ. Преобразованием Лапласа О. ф. f наз. выражение

$$L[g]\,z=F[g(\xi)\,e^{-(y,\xi)}]\ (x),\ z=x+iy. \tag{9}$$

Операция $g\to L[g]$ осуществляет изоморфизм сверточной алгебры $S'(\Gamma)$ на алгебру $H(C)$, состоящую из функций $f(z)$, голоморфных в трубчатой области $T^C=\mathbb{R}^n+iC$ и удовлетворяющих условию роста: существуют числа $\alpha=\alpha(f)\geqslant 0$ и $\beta=\beta(f)\geqslant 0$ такие, что для любого конуса $C'\Subset C$ (т. е. $\overline{C'}\subset C\cup\{0\}$) существует число $M_f(C')$ такое, что

$$|f(z)|\leqslant M_f(C')\,\frac{1+|z|^\alpha}{|y|^\beta},\ z\in T^{C'}.$$

Обратное преобразование к преобразованию Лапласа L задается равенством

$$g(\xi)=e^{(y,\xi)}F_x[f(x+iy)]\ (\xi), \tag{10}$$

причем правая часть (10) не зависит от $y\in C$.

Взаимно однозначное соответствие между $g(\xi)$ и $f(z)$, задаваемое равенствами (9) и (10), удобно изображать в виде следующей схемы:

$$g(\xi)\leftrightarrow f(z),$$

причем f наз. изображением g, а g — спектральной функцией функции f.

Всякая $f(z)$ из алгебры $H(C)$ имеет граничное значение $f(x+i0)$ при $y\to 0$, $y\in C$, в S', связанное со спектральной функцией g функции f формулой $f(x+i0)=F[g]$ согласно (9). Справедливы следующие основные формулы для преобразования Лапласа:

$$(i\xi)^\alpha g(\xi)\leftrightarrow D^\alpha f(z),$$

$$D^\alpha g(\xi)\leftrightarrow(-iz)^\alpha f(z),$$

$$g_1*g_2\leftrightarrow L[g_1](x)\,L[g_2](z),\ g_1,\ g_2\in S'(\Gamma).$$

Пример. 27) $f_\alpha(t)\leftrightarrow(-iz)^{-\alpha}$, в частности

$$\delta^{(k)}(t)\leftrightarrow(-iz)^k,\ \theta(t)\leftrightarrow\frac{i}{z}.$$

Лит.: [1] Дирак П. А. М., Основы квантовой механики, пер. с англ., 2 изд., М.—Л., 1937; [2] Соболев С. Л., «Матем. сб.», 1936, т. 1, с. 39—72; [3] Schwartz L., Théore des distributions, t. 1—2, P., 1950—51; [4] Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., 1969; [5] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, в. 1—3, М., 1958; [6] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [7] его же, Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; [8] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р., Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход, пер. с англ., М., 1976. *В. С. Владимиров.*

ОБОБЩЕННО НИЛЬПОТЕНТНАЯ ГРУППА — группа одного из обобщенно нильпотентных классов групп. Класс групп наз. обобщенно нильпо-

тентным, если он содержит все нильпотентные группы и пересекается с классом конечных групп по классу всех конечных нильпотентных групп. Рассматривалось довольно много классов О. н. г., причем в основном изучались связи между этими классами. Важнейшие классы О. н. г.— класс локально нильпотентных групп, классы нильгрупп и энгелевых групп, группы с нормализаторным условием. Большинство классов О. н. г. введено при рассмотрении тех или иных свойств центральных или нормальных рядов и систем подгрупп (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Курош А. Г., Черников С. Н., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 3, с. 18—59. *А. Л. Шмелькин.*

ОБОБЩЕННО РАЗРЕШИМАЯ ГРУППА — группа одного из обобщенно разрешимых классов групп. Класс групп наз. обобщенно разрешимым, если он содержит все разрешимые группы и пересекается с классом конечных групп по классу всех конечных разрешимых групп. Рассматривалось довольно много классов О. р. г., причем в основном изучались связи между различными такими классами. Важнейшим классом О. р. г. является класс *локально разрешимых групп*. Другие классы, как правило, вводились при рассмотрении тех или иных свойств нормальных и субнормальных рядов (см. [1], [2]).

Лит.: [1] Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; [2] Курош А. Г., Черников С. Н., «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 3, с. 18—59. *А. Л. Шмелькин.*

ОБОБЩЕННОГО СДВИГА ОПЕРАТОРЫ, гипергруппа,— понятие, возникшее в результате аксиоматизации нек-рых свойств операторов сдвига в пространствах функций на группе. В терминах операторов группового сдвига можно сформулировать такие важные математич. понятия как *свертка*, *групповая алгебра*, *положительно определенная функция*, *почти периодическая функция* и др. В рамках теории О. с. о. удается получить далеко идущие обобщения фундаментальных принципов и результатов, связанных с указанными понятиями. В частности, теория О. с. о. имеет существенные приложения к *гармоническому анализу абстрактному*.

Термины «О. с. о.» и «гипергруппа» принадлежат Ж. Дельсарту (см. [1] — [3]). Ему же принадлежат важные идеи и ряд первоначальных результатов в данной области. Систематич. построение теории О. с. о. дано главным образом в работах Б. М. Левитана (см., напр., [4] — [7]).

Основные понятия. Пусть H — произвольное множество, Φ — нек-рое векторное пространство комплекснозначных функций, определенных на H. Пусть каждому элементу $x \in H$ сопоставлен линейный оператор R^x в Φ, причем при любом фиксированном $h \in H$ функция $\psi(x) = R^x\varphi(h)$ содержится в Φ для всех $\varphi \in \Phi$. Линейный оператор $\varphi(x) \to \psi(x) = R^x\varphi(h)$ в Φ обозначается L^h (т. е. $L^h\varphi(x) = R^x\varphi(h)$). Линейные операторы R^x наз. операторами обобщенного сдвига, если выполнены следующие условия (аксиомы): 1) $R^xL^y = L^yR^x$ для любых x, $y \in H$ (аксиома ассоциативности), 2) существует в H такой элемент e, наз. нейтральным, что $R^e = I$, где I — тождественный оператор. В таком случае множество H наз. гипергруппой, так что понятия «О. с. о.» и «гипергруппа» равносильны. Операторы R^x часто наз. операторами правого сдвига, тогда как L^x наз. операторами левого сдвига.

О. с. о. очевидным образом возникают в любом инвариантном относительно сдвигов векторном пространстве функций на произвольной полугруппе с единицей, напр. на группе. Пусть $R^x : \varphi(h) \to \varphi(h \cdot x)$, где $h \cdot x$ — произведение элементов h, x в полугруппе, а $L^x : \varphi(h) \to \varphi(x \cdot h)$; тогда аксиома ассоциативности сводится к ассоциативности умножения в полугруппе, а нейтраль-

ным элементом является единица полугруппы, так что операторы R^x образуют семейство О. с. о. Нетривиальные примеры приводятся ниже.

В общем случае L^x не образуют О. с. о., так как оператор L^e не обязан быть тождественным. Однако L^e является проектором, и его образ $\tilde{\Phi}$ наз. основным подпространством в Φ. В пространстве $\tilde{\Phi}$ операторы L^x образуют семейство О. с. о., и симметрия между операторами левого и правого сдвига восстанавливается. Часто вторую из аксиом О. с. о. усиливают требованием, чтобы $L^e=I$, т. е. $\tilde{\Phi}=\Phi$. Условия 1) и 2) являются наиболее общими аксиомами О. с. о. Накладывая дополнительные условия, можно выделять более узкие классы О. с. о. Если $R^xR^y=R^yR^x$ для всех $x, y\in H$, то О. с. о. R^x наз. коммутативными; в этом случае и гипергруппа H наз. коммутативной. Если относительно H делаются дальнейшие предположения, то для О. с. о. естественным образом возникают новые условия. Напр., если H — локально бикомпактное пространство с мерой m, то обычно требуется, чтобы операторы R^x и L^x согласованно действовали в пространстве $C(H)$ непрерывных функций на H и в пространствах $L_p(H, m)$, $p\geqslant 1$, причем на R^x и L^x накладываются дополнительные условия типа непрерывности; если H — гладкое многообразие, то накладываются условия типа дифференцируемости, и т. п. Различные варианты аксиоматики даны в [1], [3] — [6], [8], [15] — [20].

Примеры О. с. о., связанных с группами. Операторы обобщенного сдвига Дельсарта. Пусть G — топологич. группа, K — нек-рая бикомпактная группа автоморфизмов группы G, dk — мера Хаара на K и $\int dk=1$. В пространстве $\Phi=C(G)$ непрерывных функций на G О. с. о. R^x определяются с помощью равенства

$$R^x\varphi(g)=\int_K \varphi(g\cdot k(x))\,dk,$$

где $\varphi\in\Phi$, $k(x)$ — образ элемента $x\in G$ при автоморфизме $k\in K$, $g\cdot k(x)$ — произведение элементов g и $k(x)$ в G. Нейтральным элементом является единица группы. Обе аксиомы О. с. о. выполняются; если G коммутативна, то коммутативны и О. с. о. Дельсарта. Основное подпространство $\tilde{\Phi}$ состоит из всех функций, постоянных на орбитах относительно действия группы K, а операторы R^x и R^y совпадают в $\tilde{\Phi}$, если x и y лежат на одной орбите. Поэтому пространство орбит H также можно наделить структурой гипергруппы, отождествляя $\tilde{\Phi}$ с пространством непрерывных функций на H и полагая $R^h=R^x$, где x — произвольный элемент орбиты h. Если G совпадает с $\mathbb{R}$, а группа автоморфизмов состоит из двух элементов (отражение относительно нуля и тождественное отображение), то $R^x\varphi(t)=(\varphi(t+x)+\varphi(t-x))/2$. В этом случае основное подпространство состоит из четных функций, а пространство орбит отождествляется с полуосью $0\leqslant t<\infty$. Другой частный случай О. с. о. Дельсарта получается при $G=K$ и $k(x)=k^{-1}xk$; при этом основное подпространство состоит из центральных функций на K, а гипергруппа, образованная орбитами, т. е. классами сопряженных элементов, коммутативна.

Двойные классы смежности по бикомпактной подгруппе. Пусть G — локально бикомпактная группа, K — ее бикомпактная подгруппа, H — пространство двойных классов смежности по подгруппе K (такой класс вместе с элементом $g\in G$ содержит и все элементы вида k_1gk_2, где $k_1, k_2\in K$). Если K — нормальный делитель в G, то H совпадает с факторгруппой G/K. Пусть Φ — пространство, состоящее из всех таких непрерывных функций на G,

что $\varphi(k_1gk_2)=\varphi(g)$ для любых элементов $k_1,\ k_2\in K$, $g\in G$. О. с. о. определяется формулой

$$R^x\varphi(g)=\int_K \varphi(xkg)\,dk.$$

Пространство Φ можно отождествить с пространством $C(H)$ непрерывных функций на H и так же, как для О. с. о. Дельсарта, можно наделить H структурой гипергруппы. Если G — линейная полупростая группа Ли, K — ее максимальная бикомпактная подгруппа, то гипергруппа H коммутативна и тесно связана со сферич. функциями на G (в частности, все сферич. функции лежат в Φ).

В описанных выше примерах наряду с пространствами непрерывных функций можно рассматривать и другие функциональные пространства (см. [8], [13], [15] — [19]).

Гиперкомплексные системы. Пусть Φ — конечная гиперкомплексная система, т. е. конечномерная ассоциативная алгебра с фиксированным базисом $H=\{h_1, \ldots, h_n\}$. Алгебра Φ отождествляется с пространством функций на конечном множестве H, причем функции $\varphi(h)$ соответствует элемент $\sum_{i=1}^n\varphi(h_i)h_i\in\Phi$. Пусть

$$R^x\varphi(h)=\sum_{i=1}^n \varphi(h_i)\,h_i*x,$$

где h_i*x — произведение элементов h_i и x в алгебре Φ. Операторы R^x образуют семейство О. с. о. тогда и только тогда, когда один из элементов базиса H является правой единицей в алгебре Φ; указанным способом устанавливается соответствие между любыми О. с. о. в пространстве функций на конечном множестве и конечными гиперкомплексными системами. Таким образом, понятие О. с. о. можно рассматривать как далеко идущее обобщение классич. понятия гиперкомплексной системы. Важные примеры О. с. о., к-рые естественно трактовать как гиперкомплексные системы со счетным или континуальным базисом, рассмотрены, напр., в [4], [5], [8].

Генераторы и теоремы Ли для О. с. о. Пусть гипергруппа H является дифференцируемым (или комплексно-аналитическим) многообразием и $u(x, y)=R^x\varphi(y)$ — дифференцируемая (соответственно голоморфная) функция на $H\times H$ при всех $\varphi\in\Phi$. Пусть $(h_1, \ldots, h_n)$ — локальные координаты точки $h\in H$, причем система координат выбрана так, что нейтральный элемент имеет координаты $(0, \ldots, 0)$. Генераторами (инфинитезимальными операторами) правого сдвига k-го порядка для О. с. о. R^x наз. линейные операторы вида

$$R_{k_1, \ldots, k_n;\,h}:\varphi(h)\to\frac{\partial^k u(x,\,h)}{\partial^{k_1}x_1\ldots\partial^{k_n}x_n}\Bigg|_{x=0},$$

где $u(x,\,h)=R^x\varphi(h)$, $k=k_1+\ldots+k_n$. Аналогично генераторы левого сдвига определяются равенством

$$L_{k_1, \ldots, k_n h}\varphi(h)\to\frac{\partial^k u(h,\,x)}{\partial^{k_1}x_1\ldots\partial^{k_n}x_n}\Bigg|_{x=0}.$$

Из аксиомы ассоциативности можно вывести, что любой генератор левого сдвига коммутирует со всеми генераторами правого сдвига (равно как и с операторами R^x). Дифференцирование условия ассоциативности $R^xL^y\varphi(h)=L^yR^x\varphi(h)$ по переменным $h_1, \ldots, h_n$ соответствующее число раз дает при $h=0$ систему уравнений

$$L_{k_1, \ldots, k_n;\,x}(u)=R_{k_1, \ldots, k_n;\,y}(u), \qquad (*)$$

где $u(x,\,y)=R^x\varphi(y)$. Эту систему следует рассматривать как обобщение на случай О. с. о. первой прямой теоремы Ли (см. [3] для О. с. о. Дельсарта и [5] для общего случая). Не обязательно привлекать все урав-

нения системы (*), чтобы определить $u(x, y)$. Напр., для сдвига на группе Ли уже генераторы 1-го порядка однозначно определяют функцию u (т. е. групповое умножение). В общем случае нек-рые генераторы низших порядков могут вырождаться, напр. в умножение на константу, так что соответствующие уравнения системы (*) не содержат полезной информации. Поэтому возникает задача: отобрать минимальное число уравнений из системы (*), однозначно определяющих О. с. о. При этом вырождающиеся генераторы пополняют число начальных условий. Если конечная система вида (*) при нек-рых начальных условиях, среди к-рых содержится условие $u|_{x=0}=\varphi(y)$, однозначно определяет решение $u(x, y)=R^x\varphi(y)$, причем операторы, стоящие в левых частях системы, коммутируют со всеми операторами, стоящими в правых частях, то операторы R^x суть О. с. о. Это утверждение является аналогом первой обратной теоремы Ли [5]. Для нек-рого класса О. с. о. доказаны (см. [5]) аналоги второй и третьей (прямой и обратной) теорем Ли. В частности, в пространстве бесконечно дифференцируемых функций от n переменных построены О. с. о., для к-рых генераторы правого (левого) сдвига порождают любую заданную n-мерную алгебру Ли. Получено явное описание этих генераторов в виде интегро-дифференциальных операторов 2-го порядка [10]. С помощью аналогичной техники построены [11] генераторы любого порядка, действующие в пространстве целых аналитич. функций (от n переменных) и порождающие любую n-мерную вещественную алгебру Ли; по этим генераторам восстанавливаются О. с. о. Можно строить О. с. о., исходя не только из алгебр Ли, но и из коммутационных соотношений более общего вида (см. [7], [12]). Так, напр., уже в [1] О. с. о. на прямой строились исходя из явно заданного генератора 2-го порядка с помощью ряда, аналогичного ряду Тейлора, к-рый дает разложение обычного сдвига по степеням оператора дифференцирования. Подробно описаны коммутативные О. с. о. на прямой с генератором 2-го порядка типа Штурма — Лиувилля (см. [4], [5]) и указаны приложения к операторам и уравнениям Штурма — Лиувилля. Дана [14] полная классификация О. с. о. с генератором типа Штурма — Лиувилля (в том числе некоммутативных) в пространстве дифференцируемых функций на прямой.

Представления О. с. о. и гипергрупповые алгебры. Теория представлений для О. с. о. не столь хорошо разработана, как в случае групп, но строится аналогичным образом. Эта аналогия простирается довольно далеко, напр. с помощью понятия генератора можно изучать представления О. с. о. инфинитезимальным методом так же, как это делается для групп Ли (см. [3], [5], [11]). Представления О. с. о. удобно трактовать как представления ассоциативных гипергрупповых алгебр, аналогичных групповым алгебрам; так же, как и в случае групп, различным типам гипергрупповых алгебр соответствуют различные варианты теории представлений и гармонич. анализа (см. *Бесконечномерное представление*). Если гипергруппа H локально бикомпактна, то пространство $M(H)$ комплексных мер Радона с бикомпактными носителями на H приобретает структуру гипергрупповой алгебры относительно обобщенной свертки $f*g$ элементов f, $g\in M(H)$, определяемой равенством

$$\int \varphi d\,(f*g) = \int\int R^y\varphi\,(x)\,df\,(x)\,dg\,(y),$$

где φ — любая непрерывная функция на H. Аналогично определяется структура гипергрупповой алгебры в пространстве $D(H)$ финитных обобщенных функций на (или в пространстве $A(H)$ аналитич. функционалов на H), если гипергруппа H является дифференцируемым

(комплексно-аналитическим) многообразием. Относительно естественных топологий $M(H)$, $D(H)$, $A(H)$ являются топологич. алгебрами; δ-функция, сосредоточенная в нейтральном элементе $e \in H$, является правой единицей в каждой из этих алгебр. Справедливо и обратное утверждение: если в пространстве $M(H)$ (соответственно $D(H)$, $A(H)$), наделенном естественной топологией, задана структура топологической ассоциативной алгебры с правой единицей, являющейся δ-функцией, то существует такая (единственная) структура гипергруппы на H, что обобщенная свертка совпадает с умножением в $M(H)$ (соответственно в $D(H)$ или $A(H)$). Непрерывные представления алгебры $M(H)$ ($D(H)$, $A(H)$) интерпретируются как непрерывные (бесконечно дифференцируемые, голоморфные) представления соответствующих О. с. о. [20].

Аналогом теории унитарных представлений групп является теория симметричных представлений гипергрупповых банаховых алгебр с инволюцией. Наиболее полные результаты (см. [4] — [6]) получены для представлений коммутативных и бикомпактных О. с. о. При нек-рых условиях структурой гипергрупповой банаховой алгебры с инволюцией наделяется пространство $L^1(H, m)$ суммируемых по положительной мере m функций на гипергруппе H. Одно из этих условий состоит в том, чтобы мера m была инвариантна относительно обобщенных сдвигов (различные варианты точных определений см. в [4] — [6], [15] — [19]). При естественных предположениях доказана единственность (с точностью до скалярного множителя) меры, инвариантной относительно правых или левых обобщенных сдвигов; имеются и достаточные условия существования такой меры (условия типа компактности, коммутативности или дискретности гипергруппы, см. [8], [16] — [18]). Однако вопрос о существовании инвариантной меры для О. с. о. общего вида остается открытым (1982). Наряду с $L^1(H, m)$ важную роль играют гипергрупповая банахова алгебра мер ограниченной вариации и гипергрупповая C^*-алгебра.

Гипергрупповые банаховы алгебры и их симметричные представления изучались в [4], [6], [8], [15] — [19]. Алгебры аналитич. функционалов, связанные с нек-рыми О. с. о. на прямой, описаны в [9]. Для О. с. о. общего типа топологические гипергрупповые алгебры и их представления рассмотрены в [20], при этом задачи спектрального анализа и синтеза трактовались как задачи изучения идеалов гипергрупповых алгебр. Техника гипергрупповых алгебр применена [12] для решения задач математич. физики в рамках операторного метода В. П. Маслова.

Гармонический анализ. Следующая модель вскрывает структуру коммутативных О. с. о. (см. [4], [5]). Пусть положительные меры m_1 и m_2 заданы на пространствах H_1 и H_2 соответственно и с помощью функции $\chi(x, y)$, определенной на $H_1 \times H_2$, задано обобщенное преобразование Фурье

$$\varphi(x) \to f(y) = \int \varphi(x)\, \overline{\chi(x, y)}\, dm_1(x),$$

к-рое определяет изоморфизм гильбертовых пространств $L^2(H_1, m_1)$ и $L^2(H_2, m_2)$. Пусть справедлива формула обращения

$$\varphi(x) = \int f(y)\, \chi(x, y)\, dm_2(y);$$

если мера m_2 дискретна, то эта формула дает разложение функции $\varphi(x)$ в обобщенный ряд Фурье. Оказывается, что H_1 имеет структуру гипергруппы, если для нек-рой точки $e \in H_1$ и для всех $y \in H_2$ справед-

ливо равенство $\chi(e, y)=1$. В этом случае О. с. о. определяются формулой

$$R^h\varphi(x)=\int f(y)\,\chi(h, y)\,\chi(x, y)\,dm_2(y).$$

Поэтому О. с. о. естественно возникают в задачах, связанных с разложениями по ортогональным системам функций, спектральной теорией операторов и т. п., что обеспечивает широкий круг приложений теории О. с. о. (см., напр., [4], [5], [8], [15]— [19]). На случай коммутативных О. с. о. обобщены теорема Бохнера о представлении положительно определенных функций и закон двойственности Понтрягина, определено обобщенное преобразование Фурье и доказан аналог *Планшереля теоремы* [6] (различные варианты этих результатов см. в [15] — [17]). С помощью теории представлений можно строить гармонич. анализ и для некоммутативных О. с. о. Напр., для О. с. о. получены некоммутативные аналоги теоремы Планшереля и формулы обращения, включающие в качестве частного случая соответствующие результаты для локально компактных групп; для бикомпактных О. с. о. справедлив аналог теоремы Петера — Вейля. Для О. с. о. рассматривались варианты гармонич. анализа в духе теорий почти периодических и средне периодических функций (см. [1], [2], [4], [8], [9], [14], [20]). Для коммутативных О. с. о. получен аналог *Винера тауберовой теоремы* и рассмотрены вопросы спектрального синтеза (см. [21], [22]). О приложениях О. с. о. к гармонич. анализу на группах см. [8], [13], [16], [19].

Лит.: [1] Delsarte J., «J. math. pures et appl.», 1938, t. 17, p. 213—31; [2] его же, «Acta math.», 1939, v. 69, p. 259—317; [3] его же, «Colloq. internat. CNRS», 1956, № 71, p. 29—45; [4] Левитан Б. М., «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1, с. 3—112; [5] его же, Теория операторов обобщенного сдвига, М., 1973; [6] его же, «Докл. АН СССР», 1945, т. 47, с. 3—6, 163—65, 323—26, 401—03; [7] его же, там же, 1958, т. 123, с. 243—45; [8] Березанский Ю. М., Крейн С. Г., «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 1, с. 147—52; [9] Красичков И. Ф., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1967, т. 31, № 1, с. 37—60; 1968, т. 32, № 5, с. 1024—32; [10] Грабовская Р. Я., Крейн С. Г., «Math. Nachr.», 1976, Bd 75, p. 9—29; [11] Грабовская Р. Я., Кононенко В. И., Осипов В. Б., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1977, т. 41, № 4, с. 912—36; [12] Маслов В. П., «Теорет. и матем. физика», 1977, т. 33, с. 185—209; [13] Рашевский П. К., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1979, т. 38, с. 139—85; [14] Гуревич Д. И., «Матем. заметки», 1979, т. 25, № 3, с. 393—408; [15] Dunkl Ch., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1973, v. 179, p. 331—48; [16] Jewett R., «Adv. Math.» 1975, v. 18, № 1, p. 1—101; [17] Spector R., «Lectures Notes in Math.», 1975, v. 497, p. 643—73; [18] его же, «Trans. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 239, p. 147—65; [19] Ross K., «Symposia Math.», 1977, v. 22, p. 189—203; [20] Литвинов Г. Л., «Тр. Семинара по вект. и тенз. анализу», 1978, в. 18, с. 345—71; [21] Chilana A., Ross K., «Pacific J. Math.», 1978, v. 76, p. 313—28; [22] Chilana A., Kumar A., «Pacif. J. Math.», 1979, v. 80, № 1, p. 59—76.

Б. М. Левитан, Г. Л. Литвинов.

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ — обобщение понятия классич. решений дифференциальных (псевдодифференциальных) уравнений. Это понятие возникло в связи с многими задачами математич. физики, когда под решениями дифференциальных уравнений потребовалось понимать функции, не имеющие достаточного числа производных, и даже вовсе недифференцируемые функции, а также более общие объекты — обобщенные функции, гиперфункции и т. д. Поэтому понятие О. р. тесно связано с понятием *обобщенной производной* и вообще *обобщенной функции*.

Под обобщенным решением дифференциального уравнения

$$L(x, D)(u)\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha D^\alpha u(x)=f(x),\ f\in D'(O),\quad(1)$$

$$a_\alpha\in C^\infty(O),$$

в классе $D'(O)$ понимается всякая обобщенная функция u из $D'(O)$, удовлетворяющая уравнению (1) в O, т. е. для любой основной функции $\varphi\in D(O)$ должно быть вы-

полнено равенство $(u, L^*\varphi) = (f, \varphi)$, где L^* — сопряженный оператор к L в смысле Лагранжа:

$$L^*\varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi).$$

О. р. краевых задач для дифференциальных уравнений удовлетворяют краевым условиям в надлежащем обобщенном смысле (в $L_p(\partial O)$ или $D'(\partial O)$ и т. д.), напр.: $u(rs) \to u(s)$, $r \to 1-0$, в $L_2(|s|=1)$, $u(x, t) \to u_0(x)$, $t \to +0$ в D'.

О. р. краевых задач для дифференциальных уравнений возникают при решении их вариационными методами, при применении разностных методов, а также как слабые пределы классич. решений при применении *Фурье метода*, *предельного поглощения принципа*, *предельной амплитуды принципа*, методов, связанных с введением вязкости, и т. д.

Примеры. 1) Общее решение уравнения $x^2u' = 0$ в классе $D'(\mathbb{R})$ дается формулой

$$u(x) = C_1 + C_2\theta(x) + C_3\delta(x),$$

где θ — функция Хевисайда: $\theta(x)=1$, $x \geqslant 0$, ; $\theta(x)=0$, $x<0$; δ — дельта-функция Дирака, C_1, C_2, ... — здесь и далее произвольные постоянные.

2) Уравнение $x^2u' + u = 0$ имеет одно решение в классе $C^\infty(\mathbb{R})$, равное $0(-x)\,e^{1/x}$, а в классе гиперфункций общее решение его дается формулой $u(x) = C_4\, e^{1/(x+i0)} + C_5\, e^{1/(x-i0)} + C_6\,\theta(-x)\, e^{1/x}$.

3) Общее решение волнового уравнения $u_{tt} - a^2u_{xx}$ в классе $C(\mathbb{R}^2)$ дается формулой $u(x, t) = f(x+at) + g(x-at)$, где f и g — произвольные функции класса $C'(\mathbb{R})$.

4) Всякое решение u из $D'(0)$ уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ — (вещественно) аналитическое в O.

5) Всякое решение u из D' уравнения теплопроводности $u_t = a^2\Delta u$ — бесконечно дифференцируемое.

6) Всякий дифференциальный оператор $L \not\equiv 0$ с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение (медленного роста) из класса S'.

7) Всякое уравнение $L(D)u = f$, где $L(D) \not\equiv 0$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, имеет при любом f из $L_2(O)$ О. р. u из $L_2(O)$, если O — ограниченная область.

8) О. р. u краевой задачи

$$\Delta u = f,\ u\big|_{\partial O} = 0,\ f \in L_2(O) \qquad (2)$$

в классе Соболева $W_2^{(1)}(O)$ возникает как решение классической вариационной задачи о минимуме квадратичного функционала

$$J(u) = \int_O \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + 2uf \right) dx$$

в классе $W_2^{(1)}(O)$. Решение этой вариационной задачи при любом f из $L_2(O)$ существует и единственно в классе $W_2^{(1)}(O)$. Таким образом, О. р. краевой задачи (2) при всех $f \in L_2(O)$ дают самосопряженное расширение оператора Δ (жесткое расширение, или расширение по Фридрихсу). О. р. краевой задачи (2), как и все их производные,— регулярные в O (т. е. типа локально интегрируемых функций в O), вторые их производные, вообще говоря,— сингулярные обобщенные функции.

Лит.: [1] Соболев С. Л., «Матем. сб.», 1936, т. 1, № 1, с. 39—72; [2] его же, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962; [3] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1—2, P., 1950—51; [4] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Некоторые вопросы дифференциальных уравнений, М., 1958; [5] Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, пер. с англ., М., 1965; [6] Hyperfunctions and pseudo-differential eduations, B.— [u. a.], 1973; [7] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; [8] его же, Обобщенные функции в математической физике, М., 2 изд., 1979.

В. С. Владимиров.

ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ НОСИТЕЛЬ — множество тех и только тех точек, ни в какой окрестности к-рых *обобщенная функция* не обращается в нуль. Обобщенная функция f из $D'(O)$ обращается в нуль в открытом множестве $O' \subset O$, если $(f, \varphi) = 0$ для всех $\varphi \in D(O')$. С помощью разложения единицы показано, что если обобщенная функция f из $D'(O)$ обращается в нуль в нек-рой окрестности $U_y \subset O$ каждой точки $y \in O$, то f обращается в нуль в O. Объединение всех окрестностей, где f обращается в нуль, наз. н у л е в ы м м н о ж е с т в о м обобщенной функции f и обозначается O_f. Носитель f, обозначаемый $\operatorname{supp} f$, есть дополнение к O_f до O, так что $\operatorname{supp} f = O \setminus O_f$ — это замкнутое множество в O. Если $\operatorname{supp} f \subseteq O$, то обобщенная функция f наз. ф и н и т н о й в O. Если функция $f(x)$ непрерывна в O, то эквивалентное определение носителя f таково: $\operatorname{supp} f$ есть замыкание в O множества тех точек, где $f(x)$ обращается в нуль. Напр., $\operatorname{supp} x\delta \in \mathbb{R}^1$, $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$.

С и н г у л я р н ы й н о с и т е л ь (sing supp) обобщенной функции — множество тех и только тех точек, ни в какой окрестности к-рых обобщенная функция не совпадает с C^∞-функцией. Напр., $\operatorname{sing\,supp} x\delta = \varnothing$, $\operatorname{sing\,supp} \delta = \{0\}$.

В. С. Владимиров.

ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДНАЯ — слабое расширение операции обычного дифференцирования. Пусть *обобщенная функция* $f \in D'(O)$. Обобщенная (слабая) производная

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ определяется равенством

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in D(O). \qquad (*)$$

Так как операция $\varphi \to (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi$ линейна и непрерывна из $D(O)$ в $D(O)$, то функционал $D^\alpha f$, определяемый правой частью равенства (*), есть обобщенная функция из $D'(O)$. Если $f \in C^p(O)$, то $D^\alpha f \in C^{p-|\alpha|}(O)$ при всех α таких, что $|\alpha| \leqslant p$.

Имеют место следующие свойства О. ф. п.: операция $f \to D^\alpha f$ линейна и непрерывна из $D'(O)$ в $D'(O)$; любая обобщенная функция из $D'(O)$ бесконечно дифференцируема (в обобщенном смысле); дифференцирование независит от порядка; справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения af, где $a \in C^\infty(O)$; $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f$.

Пусть $f \in L^1_{loc}(O)$. Может случиться, что нек-рая обобщенная производная $D^\alpha f$ может быть отождествлена с нек-рой $L^1_{loc}(O)$-функцией. В этом случае $D^\alpha f(x)$ — *обобщенная производная* т и п а ф у н к ц и и.

П р и м е р ы. 1) $\theta' = \delta$, где θ — функция Хевисайда и δ — функция Дирака.

2) Общее решение уравнения $u' = 0$ в классе D' есть произвольная постоянная.

3) Тригонометрический ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}, \quad |a_k| \leqslant A(1+|k|)^m$$

сходится в D' и его можно дифференцировать в D' почленно бесконечное число раз.

Лит.: [1] S c h w a r t z L., Théorie des distributions, v. 1, P., 1950; [2] С о б о л е в С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосиб., 1962.

В. С. Владимиров.

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — классы функций, являющиеся различными обобщениями почти периодич. функций. Каждый из них обобщает какую-то из сторон в определениях *Бора почти периодических функций* и *Бохнера почти периодических функций*. В этих определениях встречаются следующие математич. понятия (структуры): 1) пространство функций, определенных на всей прямой

как метрич. пространство с метрикой (расстоянием):

$$\rho\{f,\ g\}=\sup_{x\in\mathbb{R}^1}|f(x)-g(x)|; \qquad (*)$$

2) отображение прямой $\mathbb{R}^1$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}^1$ (функция); 3) прямая линия $\mathbb{R}^1$ как группа; 4) прямая линия как топологич. пространство.

Имеющиеся обобщения почти периодич. функций удобно классифицировать в согласии с этими структурами.

1) Если вместо непрерывности требовать от функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, измеримость и суммируемость с p-й степенью в каждом конечном промежутке, то в качестве расстояния можно принять одно из следующих трех выражений:

расстояние Степанова:

$$\rho_{S^pl}\{f,\ g\}=\sup_{x\in\mathbb{R}^1}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(x)-g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p};$$

расстояние Вейля:

$$\rho_{W^p}\{f,\ g\}=\lim_{l\to\infty}\rho_{S^pl}\{f,\ g\};$$

расстояние Безиковича:

$$\rho_{B^p}\{f,\ g\}=\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left|f(x)-g(x)\right|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Этим расстояниям соответствуют обобщенные *Степанова почти периодические функции*, *Вейля почти периодические функции* и *Безиковича почти периодические функции*.

2) Пусть прямая $\mathbb{R}^1$ отображается не в $\mathbb{C}^1$, а в банахово пространство B. Такое отображение наз. абстрактной функцией. Пусть абстрактные функции непрерывны и расстояние между ними определяется по формуле (*), в к-рой модуль заменен нормой. Тогда определения Бора и Бохнера обобщаются и приводят к т. н. абстрактным почти периодическим функциям.

Дальнейшее обобщение получается заменой банахова пространства на топологическое векторное пространство. В этом случае почти период $\tau=\tau_\varepsilon$ определяется так: для всякого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность нуля U_ε, что $f(x+\tau)-f(x)\in U_\varepsilon$.

Если топологию, определяемую нормой, заменить слабой топологией, то получаются т. н. слабо почти периодические функции: функция $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, $f(x)\in B$, наз. слабо почти периодической, если для любого функционала $\varphi\in B^*$, $\varphi(f(x))$ есть числовая почти периодич. функция.

3) Пусть вместо прямой $\mathbb{R}^1$ рассматривается произвольная группа G (не обязательно топологическая) и отображение $f(x)$, $x\in G$, группы G в топологическое векторное пространство (в частности, в $\mathbb{C}^1$). В качестве определения почти периодич. функций удобней принять определение Бохнера: $f(x)$ наз. почти периодической функцией на группе, если семейство функций $f(xh)$, $h\in G$ (или, что эквивалентно, семейство $f(hx)$), условно компактно.

3) В определении почти периодич. функции на группе важна не сама групповая операция, а операция сдвига на функциях: $T^hf(x)=f(xh)$ (или $f(hx)$), x, $h\in G$. Поэтому дальнейшее обобщение почти периодич. функций получается обобщением операции сдвига. Пусть Ω — абстрактное пространство (не обязательно группа) и $f(x)$, $x\in\Omega$, — функция, определенная на Ω. Семейство линейных операторов T^h, $h\in\Omega$, наз. обобщенного сдвига операторами, если выполняются следующие аксиомы:

1) ассоциативность: $T_h^gT_x^hf(x)=T_g^hT_x^gf(x)$;

2) существование нейтрального элемента, т. е. такого элемента $h_0\in\Omega$, что $T^{h_0}=I$, где I — единичный оператор.

Функция $f(x)$, $x\in\Omega$, наз. почти периодической относительно семейства операторов обобщенного сдвига T^h, если семейство функций $T^hf(x)$ (x — параметр) условно компактно относительно равномерной сходимости на Ω. Следует отметить, что теория таких функций относительно даже конкретных семейств операторов обобщенного сдвига еще слабо разработана (см. [1], [5]).

4) Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — произвольное конечное или счетное множество действительных чисел. Пусть прямая $\mathbb{R}^1$ превращена в топологическое векторное пространство заданием окрестности нуля как множества действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $|e^{i\lambda_n x}-1|<\varepsilon$, $k=1, \ldots, N$ (числа ε и N выбираются произвольно и определяют окрестность нуля). Оказывается, что почти периодич. функции Бора совпадают с функциями, равномерно непрерывными в этой топологии (в качестве чисел $\{\lambda_k\}$ можно взять показатели Фурье функции или их целый базис). Функции, непрерывные в указанной топологии, дают еще одно обобщение почти периодич. функций. Это — так наз. N-почти периодические функции Левитана. Определение N-почти периодич. функций очевидным образом переносится на функции, определенные на абелевой группе (и менее очевидно — на некоммутативные группы).

В указанную здесь классификацию О. п. п. ф. не совсем хорошо укладываются т. н. асимптотические почти периодич. функции, введенные М. Фреше (см. [9], [10]) в связи с нек-рыми проблемами эргодич. теории. Функция $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{C}^1$ наз. асимптотической почти периодической функцией, если для всех $\alpha\in\mathbb{R}^1$ и произвольной последовательности действительных чисел $\{h_n\}$, $h_n\to\infty$ существует подпоследовательность $\{k_n^{(\alpha)}\}$ последовательности $\{h_n\}$, для к-рой $f(x+k_n^{(\alpha)})$ сходится равномерно для всех $x>\alpha$.

Лит.: [1] Левитан Б. М., Почти-периодические функции, М., 1953; [2] Besicovitch A., Almost periodic functions, Camb., 1932; [3] Amerio L., Prouse G., Almost-periodic functions and functional equations, N. Y., 1971; [4] Bochner S., «Acta math.», 1933, v. 61, p. 149—84; [5] Марченко В. А., в кн.: Тр. Моск. матем. об-ва, т. 2, М., 1953, с. 3—83; [6] Левин Б. Я., «Укр. матем. ж.», 1949, т. 1, с. 49—101; [7] Besicovitch A., Bohr H., «Acta math.», 1931, v. 57, p. 203—92; [8] Левитан Б. М., Жиков В. В., Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, М., 1978; [9] Fréchet M., «C. r. Acad. sci», 1941, t. 213, p. 520—22; [10] его же, «Proc. Roy. Soc. Edinburgh (A)», 1950, v. 63, p. 61—68.

Б. М. Левитан.

ОБОБЩЕННЫЕ ТЕОРИИ КОГОМОЛОГИЙ, экстраординарные теории когомологий,— класс специальных функторов из категории пар пространств в категорию градуированных абелевых групп.

О. т. к. есть пара (h^*, δ), где h^* — функтор из категории P пар топологич. пространств в категорию GA градуированных абелевых групп (т. е. каждой паре пространств (X, A) отвечает градуированная абелева группа $h^*(X, A)=\oplus_{n=-\infty}^{\infty}h^n(X, A)$ и каждому непрерывному отображению $f(X, A)\to(\varphi, B)$ — набор гомоморфизмов $\{h^n(f): h^n(Y, B)\to h^n(X, A)\}_{n=-\infty}^{\infty}$), δ — заданный для каждой пары (X, A) набор гомоморфизмов

$$\{\delta^n_{(X, A)}: h^n(A)\to h^{n+1}(X, A)\},$$

естественных в том смысле, что для любого непрерывного $f_i(X, A)\to(Y, B)$ имеет место

$$\delta^n_{(X, A)}\circ h^n(f|_A)=h^n(f)\circ\delta^n_{(Y, B)},$$

причем должны выполняться следующие три аксиомы.

1) Аксиома гомотопии. Если два отображения $f, g: (X, A)\to(Y, B)$ гомотопны, то гомоморфизмы $h^n(f)$ и $h^n(g)$ совпадают для всех n.

2) Аксиома точности. Для любой пары (X, A) последовательность

$$\ldots \to h^n(X, A) \xrightarrow{h^n(j)} h^n(X) \xrightarrow{h^n(i)} h^n(A) \xrightarrow{\delta^n_{(X, A)}}$$

$$\xrightarrow{\delta^n_{(X, A)}} h^{n+1}(X, A) \xrightarrow{h^{n+1}(j)} \ldots$$

точна; здесь $i : A \to X$ и $j : X \quad (X, \varnothing) \subset (X, A)$ — очевидные включения.

3) Аксиома вырезания. Пусть (X, A) — пара пространств и пусть $U \subset A$ таково, что $\overline{U} \subset A$. Тогда включение $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ для всех n индуцирует изоморфизмы

$$h^n(X, A) \to h^n(X \setminus U, A \setminus U).$$

Для корасслоения (X, A) из аксиом следует, что проекция $(X, A) \to (X/A, pt)$, где pt — пространство, состоящее из одной точки, индуцирует изоморфизм

$$h^n(X, A) \to h^n(X \setminus U, A \setminus U).$$

Часто вместо $h^n(f)$ пишут просто f^*, а вместо $\delta^n_{(X, A)}$ — просто δ. Группу $h^n(X, A)$ наз. группой n-мерных (обобщенных) когомологий пары (X, A), а градуированную группу $h^*(pt)$ — группой коэффициентов О. т. к.

В определении О. т. к. можно вместо категории p брать категорию пар корасслоений или категорию $\mathfrak{S}$ пар клеточных пространств, или категорию $\mathfrak{S}_F$ пар конечных клеточных пространств (при этом в аксиоме вырезания надо потребовать, чтобы пара $(X \setminus U, A \setminus U)$ была изоморфна объекту соответствующей категории. В этих случаях говорят, что О. т. к. (h, δ) определена на категории $\mathfrak{S}$ (соответственно $\mathfrak{S}_F$).

Выбор термина О. т. к. мотивируется следующим обстоятельством. Доказано [2], что любой функтор $\mathfrak{S}_F \to GA$, удовлетворяющий аксиомам 1—3 и т. н. аксиоме размерности (состоящей в том, что $h^i(pt) = 0$ при $i \neq 0$), есть обычная теория *когомологий* H^* с коэффициентами в $h^0(pt)$. Позже было замечено, что многие полезные конструкции алгебраич. топологии (напр., *кобордизмы*, *K-теория*) удовлетворяют аксиомам 1—3 и что эффективность этих конструкций в значительной степени обусловлена свойствами, формально вытекающими из этих аксиом. Эти обстоятельства и привели к формированию понятия О. т. к.

Пусть X — пунктированное пространство и $\varepsilon : pt \to X$ — пунктированное отображение. Группу приведенных обобщенных когомологий $\tilde{h}^n(X)$ пространства X определяют, полагая

$$\tilde{h}^n(X) = \ker(h^n(\varepsilon) \cdot h^n(X) \to h^n(pt)).$$

Имеется очевидное расщепление

$$h^n(X) = \tilde{h}^n(X) \oplus h^n(pt),$$

и его можно сделать каноническим, считая, что вложение $h^n(pt) \subset h^n(X)$ индуцировано отображением $X \to pt$. Ясно, что $\tilde{h}^n(X) \approx h^n(X, pt)$. Кроме того, для корасслоения (X, A) из аксиом 1—3 следует изоморфизм $h^n(X, A) \approx h^n(X/A, pt)$ (см. [2], [3]), так что $h^n(X, A) \approx \approx \tilde{h}^n(X/A)$. Здесь, как обычно, $X/A = X \cup pt - X^t$ при $A \neq \varnothing$.

Если (X, A) — корасслоение, то из аксиом следует точность последовательности (естественной на категории корасслоений)

$$\ldots \tilde{h}^n(X/A) \xrightarrow{j^*} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\delta} \tilde{h}^{n+1}(X/A) \to \ldots \quad (*)$$

Здесь $i : A \to X$ и $j : X \to X/A$ — очевидные отображения, а δ есть композиция

$$\tilde{h}^n(A) \subset h^n(A) \to h^{n+1}(X, A) \approx \tilde{h}^{n+1}(X/A).$$

В частности, если X есть конус CA над A, то $\tilde{h}^*(X)=0$ (аксиома гомотопии), а X/A есть надстройка SA над A, и точность последовательности (*) влечет изоморфизмы надстройки $\sigma_A: \tilde{h}^i(A) \approx \tilde{h}^{i+1}(SA)$, естественные по A. При этом изоморфизмы σ позволяют восстановить гомоморфизмы δ (см. [2], [3]); это делается с использованием т. н. последовательности Пуппе. Применение к последней функтора h^N, $N \to \infty$, дает точную последовательность (*). Таким образом, по приведенной О. т. к. $(\tilde{h}^*, \sigma)$ полностью восстанавливается О. т. к. (h^*, δ).

О. т. к. h^* наз. мультипликативной, если для любых пар пространств (X, A), (Y, B) из P задано естественное спаривание

$$h^p(X, A) \otimes h^q(Y, B) \to h^{p+q}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y),$$

удовлетворяющее условиям коммутативности и ассоциативности (см. [4], [5]). В этом случае для $(X, A) \in P$ группа $h^*(X, A)$ является градуированным (коммутативным, ассоциативным) кольцом относительно умножения

$$h^p(X, A) \otimes h^q(X, A) \to h^{p+q}(X \times X, X \times A \cup A \times X) \xrightarrow{\Delta^*} h^{p+q}(X, A),$$

где

$$\Delta: (X, A) \to (X \times X, A \times A) \subset (X \times X, X \times A \cup A \times X)$$

— диагональ, и индуцированные отображения $f^*: h^*(Y, B) \to h^*(X, A)$ суть кольцевые гомоморфизмы. Более общим образом можно определить спаривание двух О. т. к. в третьей [5].

Обычные когомологии $H^n(X; G)$ можно определить как группу $[X, K(G, n)]$ гомотопич. классов непрерывных отображений из X в *Эйленберга — Маклейна пространство* $K(G, n)$. Это обобщается и на О. т. к. следующим образом. Спектром пространств наз. последовательность пространств $\{M_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и непрерывных отображений $s_n: SM_n \to M_{n+1}$, где SM_n - надстройка над M_n. Для пространства X определяется группа $\tilde{h}^n(X)$ равенством

$$\tilde{h}^n(X) = \lim_{k \to \infty} [S^k X, M_{n+k}].$$

Здесь отображения

$$[S^k X, M_{n+k}] \to [S^{k+1} X, M_{n+k+1}]$$

определяются композицией

$$[S^k X, M_{n+k}] \xrightarrow{S} [S^{k+1} X, SM_{n+k}] \xrightarrow{(s_{n+k})} [S^{k+1} X, M_{n+k+1}].$$

Очевидным образом строятся изоморфизмы надстройки $\sigma_X^n: \tilde{h}^n(X) \approx \tilde{h}^{n+1}(SX)$. Таким образом, каждый спектр пространств задает нек-рую О. т. к. (h^*, σ) и, значит, неприведенную О. т. к. $(\tilde{h}, \delta)$.

Если для О. т. к. (h^*, δ) существует спектр, из к-рого она получается описанным выше способом, то говорят, что этот спектр представляет О. т. к. (h^*, δ) или что теория (h^*, δ) представима этим спектром. Известно, что любая О. т. к. на категории $\mathfrak{S}_F$ представима спектром, единственным с точностью до слабой гомотопич. эквивалентности.

Если О. т. к. (h^*, δ) представима кольцевым спектром пространств, то она мультипликативна [5]. Для О. т. к., заданной на категории $\mathfrak{S}$, верно и обратное.

Пусть $F \to E \to B$ — расслоение в смысле Серра. Для любой О. т. к. h^* и любого n группы $h^n(F)$ образуют локальную систему групп на пространстве B. Существует спектральная последовательность Дольда — Атьи — Хирцебруха $\{E_r^{p,q}\}$, начальный член к-рой

есть $E_2^{p,q} = H^p(B;\ \{h^q(F)\})$. Если B — конечное клеточное пространство, то эта спектральная последовательность сходится и ее предельный член присоединен к группе $h^*(E)$ (см. [1]). В частности, если $F = pt$, то получается спектральная последовательность $H^p(X, h^q(pt)) \Rightarrow h^n(X)$, позволяющая (иногда) вычислять группу $h^*(X)$ по группам $H^*(X)$ и $h^*(pt)$.

С каждой О. т. к. h^* можно связать двойственную обобщенную теорию гомологий h_*, аксиоматика к-рой аналогична аксиоматике О. т. к. с учетом того, что гомологии — ковариантный функтор [4]. При этом если пространства X и Y $(n+1)$-двойственны (см. *S-двойственность*), то $\tilde{h}^i(X) \approx \tilde{h}_{n-i}(Y)$. Кроме того, если О. т. к. h^* представима спектром $\{M_n, s_n\}$, то

$$\tilde{h}_i(X) = \lim_{k \to \infty} \pi_{i+k}(X \wedge M_k).$$

При этом для мультипликативной О. т. к. h^* имеется спаривание высечения $\cap$:

$$\cap : h_n(X,\ X_1 \cup X_2) \oplus h^q(X,\ X_1) \to h_{n-q}(X,\ X_2).$$

Важнейшими примерами О. т. к. является K-теория и различные кобордизмы. Двойственные к кобордизмам обобщенные теории гомологий суть *бордизмы*.

Пусть ξ есть n-мерное векторное расслоение над X, ориентируемое в О. т. к. h^*, и $T\xi$ — его *Тома пространство*. В этом случае имеет место обобщенный *Тома изоморфизм* $h^i(X) \approx \tilde{h}^{i+n}(T\xi)$ (см. ([1])). Отсюда (и из теоремы двойственности Атьи [7]) следует обобщенная *Пуанкаре двойственность*: пусть P — *Пуанкаре пространство* формальной размерности n (напр., замкнутое n-мерное многообразие), нормальное расслоение к-рого ориентируемо в О. т. к. h^*. Тогда для любого целого i имеет место $h^i(P) \approx h^{n-i}(P)$. Пусть $A\nu$ есть N-мерное нормальное расслоение над P и $T\nu$ — его пространство Тома. Пространства $P^+ = P \cup pt$ и $T\nu(N+n)$-двойственны (отношение, названное в статье *S-двойственность* $(n+1)$-двойственностью, часто наз. n-двойственность). Поэтому

$$h_i(P) \approx \tilde{h}_i(P+) \approx \tilde{h}^{N+n-i}(T\nu) \approx h^{n-i}(P).$$

Элемент z группы $h_n(P)$, отвечающий при этом изоморфизме единице $1 \in h^0(P)$, наз. фундаментальным классом пространства P в О. т. к. h^*, это понятие обобщает классич. понятие *фундаментального класса*. Доказано, что изоморфизм $h^i(P) \approx h_{n-i}(P)$ задается «высечением на фундаментальном классе», т. е. имеет вид $x \to z \cap x_*$ (см. [4]).

Пусть F — одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$. Мультипликативная О. т. к. h^* наз. F-ориентируемой, если все F-векторные расслоения ориентируемы в h^*. Оказывается, что для любой F-ориентируемой О. т. к. h^* и любого F-векторного расслоения над X можно определить обобщенные *характеристические классы* расслоения ξ со значениями в группе $h^*(X)$, при этом для F, соответственно равного $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, и обычной теории когомологий H^* (или $H^*(\mathbb{Z}_2)$ для $F = \mathbb{R}$) получаются соответственно классы Штифеля, Чжэня или Бореля. При этом (см. *Кобордизм*) универсальной F-ориентированной О. т. к. является теория GF-кобордизмов. Это проявляется также в существовании спектральных последовательностей, связывающих $h^*(X)$ с $GF_0^*(X)$ и $h^*(pt)$, где F_0 — одно из полей $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Кроме того, с каждой $\mathbb{C}$-ориентированной О. т. к. h^* можно ассоциировать формальную группу над кольцом $h^*(pt)$, и универсальность кобордизмов отражается и в том факте, что формальная группа теории унитарных кобордизмов универсальна (чисто алгебраически) в классе всех формальных групп. При этом формальная группа О. т. к. h^* несет с последней довольно много информации.

Часто бывает необходимо продолжать О. т. к. с подкатегории на всю категорию. Напр., надо продолжить О. т. к. h^*, заданную на категории $\mathfrak{S}_F$, на всю категорию $\mathfrak{S}$.

Первый способ: берется спектр, представляющий (на $\mathfrak{S}_F$) О. т. к. h^*, и с его помощью строится О. т. к. на всем $\mathfrak{S}$.

Второй способ: пусть О. т. к. h^* задана на $\mathfrak{S}_F$ и $X \subset \mathfrak{S}$, $\{X_\alpha\}$ — семейство конечных клеточных подпространств пространства X и

$$\overleftarrow{h}(X) = \varprojlim h^*(X).$$

Тогда $\overleftarrow{h}^*$ — функтор на $\mathfrak{S}$, удовлетворяющий всем аксиомам О. т. к., кроме аксиомы точности (функтор $\varprojlim$ не сохраняет точность). При этом для любого $X \leftarrow \mathfrak{S}$ и любой О. т. к. $h^*: \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}A$, продолжающей О. т. к. $h^*: \mathfrak{S}_F \to \mathfrak{S}A$, естественный гомоморфизм

$$A^*(X) \to \overleftarrow{h}^*(X)$$

эпиморфен.

В общем случае должны, видимо, возникать спектральные последовательности, использующие высшие производные функторы $\varprojlim^p$ и вычисляющие $h^*(X)$ по $\varprojlim^p h^*(X_\alpha)$ и $\overleftarrow{h}^*(X)$ (эти спектральные последовательности известны (1982) лишь для H^*).

Для обобщенной теории гомологий h_*, заданной на $\mathfrak{S}_F$, функтор

$$\overrightarrow{h}_*(X) = \varinjlim h_*(X_\alpha)$$

удовлетворяет аксиоме точности и, следовательно, всегда является продолжением h_* с $\mathfrak{S}_F$ на $\mathfrak{S}$.

Третий способ является аналогом способа Александрова — Чеха и основывается на использовании конструкции *нерва*.

О. т. к. можно продолжить и на категорию спектров: пусть $M_n = \{M_n, s_n\}$ — спектр пространств. Группа $\tilde{h}^*(M)$ определяется соотношением

$$\tilde{h}^i(M) = \lim_{n \to \infty} \tilde{h}^{i+n}(M_n),$$

отображения

$$\tilde{h}^{i+n}(M_n) \leftarrow \tilde{h}^{i+n+1}(M_{n+1})$$

имеют вид

$$\tilde{h}^{i+n}(M_n) \approx \tilde{h}^{i+n+1}(SM_n) \leftarrow \tilde{h}^{i+n+1}(M_{n+1}).$$

Полученный функтор h^* на категории спектров удовлетворяет всем аксиомам приведенной О. т. к. (при правильном их переносе в категории спектров) (см. [5]).

Имеется естественная задача «сравнения» различных О. т. к., и в частности задача выражения одних О. т. к. через другие. Решение последней можно рассматривать как далеко идущее обобщение формулы универсальных коэффициентов. Наиболее мощный аппарат здесь представляют спектральные последовательности адамсовского типа. Один такой пример уже приводился: это спектральные последовательности «от кобордизмов к ориентированной О. т. к.». Другой пример: пусть h^* и k^* — две О. т. к. Пусть, далее, A_h — кольцо *когомологических операций* теории h^*, Y — спектр, представляющий теорию k^*, и X — нек-рый спектр (в частности, пространство). Тогда (при «хороших X, Y и h^*», см. [6]) существует спектральная последовательность, начальный член к-рой есть $\operatorname{Ext}^{**}_{A_h}(h^*(Y), h^*(X))$, а предельный член присоединен к $k^*(X)$. Есть и другие спектральные последовательности (см. [8], [9]), связывающие одни О. т. к. с другими.

Полезно было бы научиться трактовать О. т. к. как когомологический функтор, т. е. разлагать $h^*: P \to GA$

в композицию $P \xrightarrow{i} A \to GA$, где i — канонический (не зависящий от h^*) функтор в *абелеву категорию* A. Один из путей реализации этого намечен в [8].

Лит.: [1] Дольд А., «Математика», 1965, т. 9, № 2, с. 8—14; [2] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1958; [3] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, пер. с англ., М., 1969; [4] Уайтхед Дж., Новейшие достижения в теории гомотопий, пер. с англ., М., 1974; [5] Switzer R., Algebraic topology-homotopy and homology, B., 1975; [6] Новиков С. П., «Изв. АН СССР, Сер. матем.», 1967, т. 31, № 4, с. 855—951; [7] Атья М., «Математика», 1966, т. 10, № 5, с. 48—69; [8] Adams J., Stable homotopy and generalised homology, Chi.—[a. o.], 1974; [9] Dyer E., Kahn D., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1969, v. 145, p. 397—437; [10] Milnor J., «Pacific J. Math.», 1962, v. 12, № 1, p. 337—41; [11] Dyer E., Cohomology theories, N. Y. -Amst., 1969.

Ю. Б. Рудяк.

ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРОИЗВЕДЕНИЕ — произведение af — *fa обобщенной функции* f из $D'(O)$ с функцией $a \in C^\infty(O)$, определяемое равенством

$$(af,\ \varphi) = (f,\ a\varphi),\ \varphi \in D(O);$$

при этом $af \in D'(O)$ и для (обычных) функций $f(x)$ из $L^1_{\mathrm{loc}}(O)$ произведение af совпадает с обычным умножением функций $f(x)$ и $a(x)$.

Примеры. 1) $a(x)\delta(x) - a(0)\delta(x)$; 2) $x\mathcal{P}\frac{1}{x} - 1$.

Однако эта операция произведения не допускает распространения на любые обобщенные функции так, чтобы она была ассоциативной и коммутативной, иначе было бы противоречие:

$$(x\delta(x))\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = 0\mathcal{P}\frac{1}{x} = 0,$$

$$(x\delta(x))\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)\,x)\,\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x)\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x).$$

Чтобы определить произведение двух обобщенных функций f и g, достаточно, чтобы они обладали, грубо говоря, свойствами: насколько f «нерегулярна» в окрестности произвольной точки, настолько g должна быть «регулярной» в этой окрестности и наоборот, напр. если $\operatorname{sing\,supp} f \cap \operatorname{sing\,supp} g = \varnothing$ (см. *Обобщенной функции носитель*). В нек-рых классах обобщенных функций их произведение можно определить, однако оно может оказаться неоднозначным.

Примеры: 3) Граничные значения из алгебры голоморфных функций $H(C)$ (одночастотные обобщенные функции):

$$f(x+i0)\,g(x+i0) = \lim_{y \to 0,\ y \in C} f(x+iy)\,g(x+iy) \text{ в } S'.$$

Они образуют алгебру, ассоциативную и коммутативную с единицей [2].

4) $\delta^2(x) = c\delta(x)$, где c — произвольная постоянная. Действительно,

$$\delta_\varepsilon(x) \cdot \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)} \to \delta(x),\ \varepsilon \to +0 \text{ в } D'.$$

Но на основных функциях $\varphi(x)$ таких, что $\varphi(0) = 0$,

$$(\delta_\varepsilon^2,\ \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{\pi^2(x^2+\varepsilon^2)}\varphi(x)\,dx \to 0,\ \varepsilon \to +0.$$

Поэтому естественно положить $(\delta^2, \varphi) = 0$, если $\varphi \in D$, $\varphi(0) = 0$. Расширяя этот функционал на все основные функции φ из D, получают 4).

5) Определить произведение $\frac{\theta(x)}{x}$. Функция $\frac{\theta(x)}{x}$ не принадлежит к $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$, однако она определяет регулярные обобщенные функции: 0 из D', $x < 0$, и $\frac{1}{x}$ из D', $x > 0$. Их можно согласованно продолжить до обобщенных функций из D', напр., взяв конечную часть

по Адамару расходящегося интеграла (п е р е н о р м и р о в а в е г о)

$$\left(\left(\frac{\theta(x)}{x}\right)_M, \varphi\right) = \int_0^M \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_M^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,x, \quad \varphi \in D.$$

Обобщенная функция $\left(\frac{\theta(x)}{x}\right)_M$ (перенормированный функционал для $\frac{\theta(x)}{x}$) зависит от произвольного параметра $M > 0$. Произвол в перенормировке таков:

$$\left(\frac{\theta(x)}{x}\right)_M - \left(\frac{\theta(x)}{x}\right)_{M_1} = \mathrm{nl}\,\frac{M_1}{M}\,\delta(x).$$

Эти идеи привели к процедуре перенормировки амплитуд Фейнмана в квантовой теории поля. Перенормировочные константы (напр., массы и заряды) выступают как произвольные постоянные, аналогичные $\ln\frac{M_1}{M}$; наиболее общее определение О. ф. п. дается в терминах волновых фронтов.

Лит.: [1] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1--2, P., 1950—51; [2] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, М., 1976; [3] Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С., «Acta Math.», 1957, v. 97, p. 227—66; [4] Хепп К., Теория перенормировок, пер. с франц., М., 1974.

В. С. Владимиров.

ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРОСТРАНСТВО — пространство, сопряженное к п р о с т р а н с т в у о с н о в н ы х (достаточно хороших) ф у н к ц и й. Важную роль здесь играют *Фреше пространства* (типа FS) и сильно сопряженные к ним (типа DFS). Пространство типа FS есть проективный предел компактной последовательности банаховых пространств и его сопряженное есть пространство типа DFS. Пространство типа DFS есть индуктивный предел компактной последовательности банаховых пространств и его сопряженное есть пространство типа FS. Пространства типов FS и DFS — полные, сепарабельные, рефлексивные и монтелевские. В пространствах типов FS и DFS слабая и сильная сходимости совпадают.

П р и м е р ы п р о с т р а н с т в о с н о в н ы х и о б о б щ е н н ы х ф у н к ц и й.

1) Пространства S и S'. Пространство основных (б ы с т р о у б ы в а ю щ и х) функций $S = S(\mathbb{R}^n)$ состоит из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Это пространство есть проективный предел последовательности банаховых пространств S_p, $p = 0, 1, \ldots$, состоящих из $C^p(\mathbb{R}^n)$-функций, с нормой

$$\varphi \to \|\varphi\|_p = \sup_x (1+|x|^2)^{p/2}\,|D^\alpha \varphi(x)|,$$

причем вложение $S_{p+1} \subset S_p$ компактно; S типа FS. Сопряженное пространство $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ (пространство обобщенных функций м е д л е н н о г о р о с т а) есть индуктивный предел последовательности банаховых пространств S'_p, причем вложение $S'_p \subset S'_{p+1}$ компактно, так что S' типа DFS. Из (слабой) сходимости последовательности обобщенных функций в S следует сходимость по норме функционалов в нек-ром S'_p. В пространствах S и S' операция преобразования Фурье есть изоморфизм.

2) Пространства $D(O)$ и $D'(O)$ (O — открытое множество в $\mathbb{R}^n$). Пространство основных функций состоит из финитных в O $C^\infty(O)$-функций (см. *Обобщенной функции носитель*). Оно снабжается топологией строгого индуктивного предела (возрастающей) последовательности пространств $C_0^\infty(\overline{O}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, типа FS, где $\{O_k\}$ — строго возрастающая последовательность открытых множеств, исчерпывающая O : $O_k \Subset O_{k+1}$, $\bigcup O_k = O$. Пространство $C_0^\infty(\overline{O}_k)$ есть проективный

предел (убывающей) последовательности банаховых пространств $C_0^p(\overline{O}_k)$, $p=0, 1, \ldots$, состоящих из $C^p(\mathbb{R}^n)$-функций с носителем в $\overline{O}_k$, с нормой

$$\varphi \to \|\varphi\|_p' = \max_x |D^\alpha \varphi(x)|,$$

причем вложение $C_0^{p+1}(\overline{O}_k) \subset C_0^p(\overline{O}_k)$ компактно. Пусть $D'(O)$ — пространство, (сильно) сопряженное с $D(O)$; $D=D(\mathbb{R}^n)$ и $D'=D'(\mathbb{R}^n)$. Последовательность основных функций из $D(O)$ сходится в $D(O)$, если она сходится в каком-либо пространстве $C_0^\infty(\overline{O}_k)$. Последовательность обобщенных функций из $D'(O)$ сходится в $D'(O)$, если она сходится на каждом элементе из $D(O)$ (слабая сходимость). Для того чтобы линейный функционал на $D(O)$ был обобщенной функцией из $D'(O)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого множества $O' \Subset O$ существовали числа K и m такие, что

$$|(f, \varphi)| \leqslant K \|\varphi\|_m', \quad \varphi \in D(O').$$

Пространство $D'(O)$ — (слабо) полное: если последовательность обобщенных функций $f_k \in D'(O)$, $k=1, 2, \ldots$, такова, что для любой φ из $D(O)$ числовая последовательность (f_k, φ) сходится, то функционал

$$(f, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (f_k, \varphi)$$

принадлежит $D'(O)$. Обобщенная функция из $D'(O)$ имеет произвольный «рост» в окрестности границы ∂O, в частности любая функция $f \in L_{loc}^1(O)$ определяет обобщенную функцию из $D'(O)$ по формуле

$$\varphi \to (f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D(O).$$

3) Пространства Φ и Φ'. Пусть Φ_ρ — банахово пространство, состоящее из всех функций $\varphi(z)$, $z=x+iy$, голоморфных в трубчатой области $|y|<\rho$, $x \in \mathbb{R}^n$, с нормой

$$\varphi \to \|\varphi\|_\rho'' = \sup_{|y|<\rho,\, x\in\mathbb{R}^n} e^{\rho|x|} |\varphi(x+iy)|;$$

вложение $\Phi_\rho \subset \Phi_{\rho'}$, $\rho > \rho'$, компактно. Пусть Φ — индуктивный предел (возрастающей) последовательности пространств $\Phi_{1/n}$, $n\to\infty$. Пространство Φ типа DFS, а его сопряженное Φ' типа FS. Элементы Φ являются Фурье-гиперфункциями; Φ' изоморфно также пространству S_1^1.

Лит.: [1] Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1–2, P., 1950—51; [2] Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, пер. с франц., М., 1959; [3] Дьёдонне Ж., Шварц Л., «Математика», 1958, т. 2, № 2, с. 77—107; [4] Гротендик А., там же, № 3, с. 81—127; [5] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958; [6] Yoshinaga K., «J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A», 1957, v. 21, p. 89—98; [7] Kawai T., «J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A», 1970, v. 17, p. 467—517; [8] Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979.
В. С. Владимиров.

ОБОЛОЧЕК ТЕОРИЯ — направление в теории упругости и строительной механике, основная цель к-рого состоит в описании напряжений и деформаций, возникающих под действием внешних нагрузок в оболочке. Оболочка — твердое тело, ограниченное двумя поверхностями, к-рое обладает малой по сравнению с другими характерными размерами толщиной. В О. т. рассматриваются и другие внешние воздействия, напр. тепловые.

В О. т. вводится гладкая поверхность g, наз. срединной, по обе стороны к-рой на расстоянии $h(x)$ вдоль нормали к g расположены точки ограничивающих оболочку поверхностей. В большинстве случаев толщина постоянна: $h(x)=h$. Наиболее распространенный вариант О. т. использует т. н. гипотезу Кирхгофа — Лява, согласно к-рой всякое нормальное к

g волокно (отрезок прямой, перпендикулярный к срединной поверхности) сохраняет после деформации свою прямолинейность, длину и нормальное положение к срединной поверхности. При этом предположении систему уравнений трехмерной теории упругости, описывающей перемещения точек оболочки как упругого твердого тела, сводят к системе трех дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными x_1 и x_2 — криволинейными координатами точки x недеформированной срединной поверхности g. В общем случае эта система нелинейна. При дополнительных предположениях о малости деформаций и внешних нагрузок нелинейные члены могут быть отброшены. Задача сводится к решению линейной системы (см. [3], [4])

$$\sum_{j=1}^{3} m_{ij}u_j = q_i,\ i = 1,\ 2,\ 3, \qquad (1)$$

в к-рой q_i — компоненты внешней нагрузки, m_{ij} — линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от геометрич. характеристик поверхности g, а $u_j(x)$ — искомые компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности. Система (1) решается при четырех граничных условиях, к-рые зависят от характера закрепления края g. Операторы m_{ij} в (1) имеют специальный вид:

$$m_{ij} = h^2 n_{ij} + l_{ij},$$

малый параметр h^2 стоит при старших производных. Система (1) является эллиптической в смысле Дуглиса—Ниренберга (см. [5]) и формально самосопряженной (см. [7]). При естественно возникающих граничных условиях система (1) порождает эллиптич. краевую задачу. Систему (1) принято наз. системой уравнений м о м е н т н о й О. т., поскольку при ее получении учитываются члены, содержащие изгибающие и крутящие моменты. При дополнительных предположениях указанными членами пренебрегают, что приводит к б е з м о м е н т н о й (м е м б р а н н о й) О. т. Формально этот переход сводится к отбрасыванию в (1) членов, содержащих малый параметр h^2. Безмоментная система

$$\sum_{j=1}^{3} l_{ij}u_i = q_i,\ i = 1,\ 2,\ 3, \qquad (2)$$

существенно проще, чем система (1). Все операторы в (2) не выше 2-го порядка. Порядок определителя главного символа (характеристич. полинома) в случае системы (2) равен 4, а в случае (1) равен 8.

Наличие малого параметра в (1) позволяет воспользоваться процедурой асимптотич. интегрирования (см. [4]). Если гауссова кривизна K срединной поверхности g положительна, то система (2) эллиптична и при условиях полного или частичного закрепления края вырождение моментной задачи в безмоментную при $h \to 0$ регулярно. Заметное расхождение решений возможно лишь в малой окрестности края g (краевой эффект). При $K \leqslant 0$ картина вырождения моментной системы при $h \to 0$ существенно сложнее; переход от системы (1) к (2) может привести к значительным погрешностям не только у края g, но и всюду внутри. Используемая в О. т. процедура асимптотич. интегрирования при нерегулярном вырождении еще (1982) не нашла математич. обоснования.

Безмоментная О. т. тесно связана с проблемой бесконечно малых изгибаний поверхностей. Существенный вклад в безмоментную О. т. и одновременно в теорию бесконечно малых изгибаний был внесен благодаря привлечению аппарата *обобщенных аналитических функций* (см. [2]).

Важной задачей О. т. является исследование устойчивости форм равновесия, с к-рой связана проблема определения критич. нагрузки. Эти задачи рассматрива-

ются в линейной (точнее, использующей линеаризацию) и нелинейной постановках. Один из методов их решения в нелинейной постановке существенно использует теорию изгибаний (см. [8]).

В задачах статики эффективен метод комплексного представления уравнений О. т., позволяющий путем введения вспомогательных функций свести систему (1) к эквивалентной системе с характеристич. многочленом 4-го порядка (см. [7]).

Среди вопросов динамики, подвергшихся интенсивному математич. анализу, находится проблема свободных и вынужденных колебаний, совершаемых оболочкой. Методами асимптотич. интегрирования и спектральной теории операторов найдена структура спектра собственных частот и строение соответствующих форм свободных колебаний (см. [5], [9]).

В О. т. широко используются методы вычислительной математики. В случае разделяющихся переменных в статич. и динамич. задачах особенно эффективен метод прогонки, в случае оболочек произвольного очертания — метод конечных элементов.

Лит.: [1] Алумяэ Н. А., Теория упругих оболочек и пластинок, в кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3, М., 1972, с. 227—66; [2] Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959; [3] Власов В. З., Общая теория оболочек и ее приложение в технике, М.— Л., 1949; [4] Гольденвейзер А. Л., Теория упругих тонких оболочек, 2 изд., М., 1976; [5] Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е., Свободные колебания тонких упругих оболочек, М., 1979; [6] Муштари Х. М., Галимов К. З., Нелинейная теория упругих оболочек, Казань, 1957; [7] Новожилов В. В., Теория тонких оболочек, 2 изд., Л., 1962; [8] Погорелов А. В., Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, М., 1967; [9] Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник, т. 3, М., 1968.

В. Б. Лидский.

ОБРАЗ МОРФИЗМА категории — понятие, аналогичное понятию образа отображения одного множества в другое. Однако в теории категорий существует несколько подходов к определению этого понятия. Наиболее простой подход тесно связан с понятием *бикатегории*. Пусть в категории $\mathfrak{K}$ существует бикатегорная структура $\mathfrak{K} = (\mathfrak{M}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, где $\mathfrak{E}$ — класс допустимых эпиморфизмов, $\mathfrak{M}$ — класс допустимых мономорфизмов. Если $\alpha : A \to B$ — произвольный морфизм из $\mathfrak{K}$ и $\alpha = \nu\mu$ — допустимое разложение α, т. е. $\nu \in \mathfrak{E}$, $\mu \in \mathfrak{M}$, то подобъект (μ) объекта B, определяемый мономорфизмом μ, наз. (допустимым) образом морфизма α (относительно заданной бикатегорной структуры). Если в $\mathfrak{K}$ имеется единственная бикатегорная структура, то можно говорить об О. м. α. В частности, в категориях множеств, групп, векторных пространств над нек-рым полем сформулированное определение приводит к обычному понятию образа отображения или гомоморфизма.

С другой стороны, если в категории $\mathfrak{K}$ существует несколько бикатегорных структур, то один и тот же морфизм может иметь разные образы относительно различных бикатегорных структур. Подобная ситуация имеет место, напр., в категориях топологич. пространств и ассоциативных колец.

Другой подход к определению О. м. состоит в следующем. Говорят, что морфизм $\alpha : A \to B$ проходит через подобъект (μ) объекта B, если α можно представить в виде $\alpha = \alpha'\mu$. Наименьший подобъект объекта B, через к-рый проходит α, наз. образом α. Если категория $\mathfrak{K}$ локально мала слева и в $\mathfrak{K}$ существуют пределы семейств мономорфизмов с общим концом, то каждый морфизм из $\mathfrak{K}$ имеет образ.

Если в $\mathfrak{K}$ имеется бикатегорная структура, в к-рой все мономорфизмы допустимы, то второе определение О. м. эквивалентно определению О. м. относительно указанной бикатегорной структуры.

О. м. обычно обозначается $\mathrm{Im}\,\alpha$; через $\mathrm{im}\,\alpha$ обозначается любой представитель подобъекта $\mathrm{Im}\,\alpha$.

М. Ш. Цаленко.

ОБРАЗУЮЩИЙ ОБЪЕКТ категории, образующий категории,— понятие, позволяющее распознать различные морфизмы категории и, как правило, «моделировать» все объекты категории с помощью копроизведений одного и того же объекта. Объект U категории $\mathfrak{K}$ наз. образующим, если для любого объекта A из $\mathfrak{K}$, не являющегося левым нулем, множество $H_{\mathfrak{K}}(U, A)$ непусто и для любого необратимого мономорфизма $\mu : A \to B$ существует такой морфизм $\gamma : U \to B$, к-рый не представим в виде $\gamma = \gamma'\mu$. Если в категории $\mathfrak{K}$ каждая пара морфизмов обладает ядром, то для любой пары морфизмов $\alpha, \beta : A \to B$, $\alpha \neq \beta$, найдется такой морфизм $\gamma : U \to A$, что $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. Следовательно, если множество $H_{\mathfrak{K}}(U, A)$ непусто для любого $A \in \mathrm{Ob}\mathfrak{K}$, то О. о. U оказывается *интегральным объектом*. Поэтому иногда О. о. определяется как интегральный объект. В случае абелевых категорий понятия образующего и интегрального объектов эквивалентны.

В категории множеств каждое непустое множество есть О. о. В категориях, порождаемых многообразиями универсальных алгебр, каждая свободная алгебра есть О. о. В категории топологич. пространств каждое непустое пространство с дискретной топологией является О. о.

В бикатегориях обычно рассматриваются допустимые О. о., т. е. такие объекты, к-рые обладают всеми свойствами образующих только по отношению к допустимым мономорфизмам. *М. Ш. Цаленко.*

ОБРАТИМЫЙ МОДУЛЬ — модуль M над коммутативным кольцом A, для к-рого существует A-модуль N такой, что $M \otimes N \simeq A$ изоморфно A (изоморфизм A-модулей). Модуль M обратим тогда и только тогда, когда он конечно порожден, проективен и имеет ранг 1 над каждым простым идеалом кольца A. Классы изоморфных О. м. образуют группу Пикара кольца A; операция в этой группе индуцирована тензорным произведением модулей, а единичным элементом является класс модуля A. В некоммутативном случае (A, B)-бимодуль, где A и B — ассоциативные кольца, наз. обратимым, если существует такой (B, A)-бимодуль N, что

$$M \otimes_B N \simeq A \text{ и } N \otimes_A M \simeq B.$$

Лит.: [1] Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971; [2] Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1, М., 1977. *Л. В. Кузьмин.*

ОБРАТИМЫЙ ПУЧОК — локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей ранга 1 на окольцованном пространстве $(X, \mathcal{O}_X)$. Эквивалентное определение О. п.: пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, локально изоморфный пучку $\mathcal{O}_X$. О. п. на X, рассматриваемые с точностью до изоморфизма, образуют абелеву группу относительно операции тензорного умножения над $\mathcal{O}_X$. Эта группа наз. *Пикара группой* пространства X и обозначается $\mathrm{Pic}\, X$. Обратным к пучку $\mathcal{L}$ будет в ней пучок $\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$, двойственный к $\mathcal{L}$. В случае, когда $(X, \mathcal{O}_X)$ — схема (в частности, алгебраич. многообразие) или аналитич. пространство, пучок $\mathcal{O}_X$-модулей обратим тогда и только тогда, когда он изоморфен пучку регулярных (соответственно аналитических) сечений нек-рого линейного алгебраического (соответственно аналитического) расслоения над X.

О. п. на схемах тесно связаны с *дивизорами*. Каждому дивизору Картье D на X сопоставляется О. п. $\mathcal{O}_X(D)$, чем определяется инъективный гомоморфизм $\mathrm{Cl}X \to \mathrm{Pic}X$, где $\mathrm{Cl}X$ — группа классов дивизоров Картье на X. Для целых схем X этот гомоморфизм является изоморфизмом.

На проективной схеме X определяется подкручивающий обратимый пучок Серра $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}(1)$. А именно, если задано вложение схемы X в проективное пространство P^N, то $\mathcal{O}_X(1)$ соответствует

классу гиперплоского сечения. В частности, если $X = P^N(k)$ — проективное пространство над полем k, то пучок $\mathcal{O}(1)$ есть прямой образ пучка линейных функций на k^{N+1} при естественном отображении $k^{N+1} \setminus \{0\} \to P^N(k)$. Систему однородных координат $x_0, x_1, \ldots, x_N$ в $P^N(k)$ можно отождествить с базисом пространства сечений $\Gamma(P^N, \mathcal{O}(1))$.

О. п. на схеме X над полем k связаны с рациональными отображениями схемы X в проективные пространства. Пусть $\mathcal{L}$ — О. п. на схеме X, $s_0, \ldots, s_N$ — сечения пучка $\mathcal{L}$, значения к-рых в любой точке $x \in X$ порождают слой $\mathcal{L}_x$ над $\mathcal{O}_x$. Тогда существует единственный морфизм $\varphi : X \to P^N(k)$ такой, что $\varphi^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{L}$ и $\varphi^* x_i = s_i$, где $x_0, x_1, \ldots, x_N$ — однородные координаты в $P^N(1)$. О. п. $\mathcal{L}$ на X наз. о ч е н ь о б и л ь н ы м, если существует такое вложение $\varphi : X \to P^N(k)$, что $\varphi^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{L}$. О. п. $\mathcal{L}$ на X наз. о б и л ь н ы м, если существует такое целое положительное n, что $\mathcal{L}^n$ очень обилен. На нётеровой схеме X над k обратимый пучок $\mathcal{L}$ обилен тогда и только тогда, когда для каждого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X существует такое целое $n_0 > 0$, что пучок $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ порождается при $n \geqslant n_0$ своими глобальными сечениями.

Если $\mathcal{L}$ — обильный О. п. на X, соответствующий дивизору D, то D наз. о б и л ь н ы м д и в и з о р о м. Дивизор Картье D на схеме X, собственной над алгебраически замкнутым полем k, обилен тогда и только тогда, когда для каждой замкнутой целой подсхемы $Y \subseteq X$ индекс пересечения $D^r \cdot Y$ положителен, где $r = \dim Y$. По поводу других критериев обильности см. [5]. Существует также обобщение понятия обильного дивизора на подмногообразия большей коразмерности [2].

Понятия очень обильного и обильного О. п. переносятся также на случай аналитич. пространств (по поводу критериев обильности в этой ситуации см. *Положительное расслоение*).

Лит.: [1] H a r t s h o r n e R., Algebraic geometry, N. Y., 1977; [2] е г о ж е, Ample subvarieties of algebraic varieties, N. Y.—B., 1970; [3] М а м ф о р д Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, пер. с англ., М., 1968; [4] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; [5] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 10, М., 1972, с. 47—112. *В. А. Исковских.*

ОБРАТИМЫЙ ЭЛЕМЕНТ п о л у г р у п п ы с е д и н и ц е й — элемент x, для к-рого существует такой элемент y, что $xy = 1$ (п р а в а я о б р а т и м о с т ь) или $yx = 1$ (л е в а я о б р а т и м о с т ь). Если элемент обратим и справа и слева, то он наз. д в у с т о р о н н е о б р а т и м ы м (часто просто о б р а т и м ы м). Множество $G(S)$ всех двусторонне О. э. полугруппы S с единицей является наибольшей подгруппой из S, содержащей единицу. *Бициклическая полугруппа* доставляет пример существования элементов, обратимых только справа и только слева; более того, существование таких элементов в полугруппе S влечет наличие в S бициклич. подполугруппы, единица к-рой совпадает с единицей полугруппы S. Другой альтернативой является ситуация, когда всякий односторонне О. э. полугруппы S будет двусторонне обратим — это имеет место тогда и только тогда, когда либо $S = G(S)$, либо $S \setminus G(S)$ есть подполугруппа (являющаяся, очевидно, наибольшим идеалом в S); такая полугруппа наз. п о л у г р у п п о й с о т д е л я ю щ е й с я г р у п п о в о й ч а с т ь ю. Полугруппами с отделяющейся групповой частью будут, напр., всякая конечная полугруппа с единицей, всякая коммутативная полугруппа с единицей, всякая полугруппа с двусторонним сокращением и единицей, всякая мультипликативная полугруппа комплексных матриц, содержащая единичную матрицу.

Лит.: [1] К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г., Алгебраическая теория полугрупп, т. 1, пер. с англ., М., 1972; [2] Л я п и н Е. С., Полугруппы, М., 1960. *Л. Н. Шеврин.*

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА к в а д р а т н о й м а т р и ц е A н а д п о л е м K — матрица A^{-1}, для к-рой $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ — единичная матрица. Обратимость матрицы равносильна ее невырожденности (см. *Невырожденная матрица*). Для матрицы $A=\|\alpha_{ij}\|$ обратной является матрица $A^{-1}=\|\gamma_{ij}\|$, где

$$\gamma_{ij}=\frac{A_{ji}}{\det A},$$

A_{ji} — *алгебраическое дополнение* элемента α_{ji}. О методах вычисления О. м. см. *Обращение матрицы*.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА — теорема, условием к-рой служит заключение теоремы исходной (прямой), а заключением — условие. Обратной к О. т. будет исходная (прямая) теорема, так что прямая и О. т. взаимно обратны.

О. т. равносильна теореме, противоположной к прямой, т. е. теореме, в к-рой условие и заключение прямой теоремы заменены их отрицаниями. Поэтому прямая теорема равносильна противоположной к обратной, т. е. теореме, утверждающей, что если неверно заключение прямой теоремы, то неверно и ее условие. Известный способ «доказательства от противного» как раз и представляет собой замену доказательства прямой теоремы доказательством теоремы, противоположной к обратной. Справедливость обеих взаимно обратных теорем означает, что выполнение условия любой из них не только достаточно, но и необходимо для справедливости заключения. См. также *Теорема, Необходимые и достаточные условия*. *БСЭ-3.*

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, определенная на множестве значений заданной функции и ставящая в соответствие каждому его элементу множество всех тех элементов из области определения рассматриваемой функции, к-рые в него отображаются, т. е. его полный прообраз. Если данная функция обозначена символом f, то О. ф. обозначается символом f^{-1}. Таким образом, если $f: X\to Y$ и Y_f — множество значений функции f, $Y_f\subset Y$, то для любого $y\in Y_f$ справедливо равенство $f^{-1}(y)=\{x: f(x)=y\}$.

Если для любого элемента $y\in Y_f$ его полный прообраз состоит в точности из одного элемента $x\in X$, т. е. отображение $f: X\to Y_f$ является биекцией, то О. ф. является о д н о з н а ч н о й, в противном случае — м н о г о з н а ч н о й.

Если множества X и Y являются подмножествами числовой прямой (или вообще нек-рых упорядоченных множеств), то условие строгой монотонности функции f необходимо и достаточно для существования обратной однозначной функции.

По ряду свойств функции f можно судить о соответствующих свойствах О. ф. Так, напр., если функция f строго монотонна и непрерывна на нек-ром промежутке числовой оси, то ее О. ф. также монотонна и непрерывна на соответствующем промежутке. Если взаимно однозначное отображение бикомпакта на топологическое хаусдорфово пространство непрерывно, то и обратное отображение непрерывно, т. е. рассматриваемое отображение является гомеоморфизмом. Когда отображение f является биективным линейным ограниченным оператором, отображающим банахово пространство X на банахово пространство Y, то обратный оператор f^{-1} также является линейным и ограниченным.

Пусть f — непрерывное отображение замыкания $\overline{G}$ ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$ с достаточно хорошей границей в $\mathbb{R}^n$, f — дифференцируемо в G и отображает границу G на границу $f(G)$ и множество нулей его якобиана образует изолированное множество; тогда если отображение f взаимно однозначно на границе области G, то оно взаимно однозначно и на $\overline{G}$. Для существования локального обратного отображения в

окрестности данной точки достаточно необращения в нуль якобиана отображения в нек-рой окрестности этой точки. Если $f: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, f — дифференцируемое отображение с якобианом, неравным нулю во всех точках $x \in G$, то для любой точки $x_0 \in G$ существует такая ее окрестность $U = U(x_0)$, что сужение $f|_U$ отображения f на окрестности U взаимно однозначно отображает множество U на нек-рую окрестность $V = V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ и обратное отображение f^{-1} также дифференцируемо (на V). Эта теорема обобщается и на бесконечномерный случай: пусть X и Y — полные нормированные пространства, $G \subset X$ — открытое множество, $f: G \to Y$ — непрерывно дифференцируемое отображение. Если $f'(x_0)$ — обратимый элемент пространства линейных ограниченных операторов $\mathscr{L}(X, Y)$ (f' — производная Фреше), $x_0 \in G$, то существуют такие окрестности $U = U(x_0)$ и $V = V(y_0)$ соответственно точек x_0 и $y_0 = f(x_0)$ в пространствах X и Y, что отображение $f: U \to V$ является непрерывно дифференцируемым гомеоморфизмом вместе со своим *обратным отображением*.

Лит.: [1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [2] Шварц Л., Анализ, пер. с франц., т. 1, М., 1972.

Л. Д. Кудрявцев.

ОБРАТНО ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — уравнение вида

$$u_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\, u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t)\, u_{x_i} - a(x, t)\, u = f(x, t), \qquad (*)$$

где форма $\Sigma a_{ij}\xi_i\xi_j$ положительно определена. Переменная t играет роль «обратного» времени. При подстановке $t = -t'$ уравнение (*) приводится к обычному параболич. виду. Встречаются параболич. уравнения «смешанного» типа, напр. уравнение $u_t = xu_{xx}$ является прямым параболическим при $x > 0$, обратно параболическим при $x < 0$ с вырождением порядка при $x = 0$.

А. П. Солдатов.

ОБРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ (обратный оператор) к однозначному отображению (оператору)

$$f: M \xrightarrow{\text{на}} f(M)$$

— однозначное отображение g такое, что

$$g \circ f = I_X \text{ на } M, \qquad (1)$$

$$f \circ g = I_Y \text{ на } f(M), \qquad (2)$$

где $M \subset X$, $f(M) \subset Y$, X, Y — нек-рые множества.

Если g удовлетворяет лишь условию (1), то оно наз. правым обратным отображением к f, если лишь (2) — левым обратным отображением к f. О. о. f^{-1} существует тогда и только тогда, когда для любого $y \in f(M)$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из единственного элемента $x \in M$. Если отображение f имеет обратное отображение f^{-1}, то уравнение

$$f(x) = y \qquad (3)$$

однозначно разрешимо при любом $y \in f(M)$. Если существует только правое О. о. $f_{\text{п}}^{-1}$, то существует и решение уравнения (3), но вопрос об однозначности решения остается открытым. Наличие же лишь левого О. о. $f_{\text{л}}^{-1}$ обеспечивает единственность решения в предположении, что оно существует. Если X и Y — векторные пространства, и A — линейный оператор из X в Y, то A^{-1}, если он существует, тоже линеен. Вообще, в случае наделения X и Y той или иной структурой, случается, что нек-рые свойства оператора A сохраняются и при переходе к A^{-1} в предположении, что он существует. Так, если X и Y — банаховы пространства и $A: X \to Y$ — замкнутый оператор, то A^{-1} также замкнут; если H — гильбертово пространство и $A: H \to H$ самосопряжен, то A^{-1} также самосопряженный оператор; если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — нечетная функция,

то f^{-1} — также нечетная, и т. д. Непрерывность A не всегда сохраняется при переходе к A^{-1} для многих важных классов линейных операторов, напр. вполне непрерывных. Важными признаками непрерывности операторов, обратных к линейным, являются следующие.

Пусть X — конечномерное векторное пространство с нек-рым базисом и $A : X \to X$ задается в этом базисе матрицей $\|a_{ij}\|$. Для существования A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы $\det\|a_{ij}\| \neq 0$ (операторы A и A^{-1} в этом случае автоматически непрерывны).

Пусть X и Y — банаховы пространства и A — линейный непрерывный оператор из X в Y.

1) Если $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$, где $m>0$, то A^{-1} существует и непрерывен.

2) Если $X=Y$, $\|A\|<1$, то $(I-A)^{-1}$ существует и непрерывен, причем

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

где ряд справа сходится по норме в пространстве $\mathscr{L}(X)$.

3) Оператор A^{-1} существует и непрерывен на всем Y тогда и только тогда, когда его сопряженный A^* имеет обратный, определенный и непрерывный на всем X^*. При этом $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

4) Если оператор A^{-1} существует и непрерывен и $\|A-B\| \leqslant \|A\|^{-1}$, то оператор B^{-1} также существует и непрерывен, причем

$$B^{-1} = A^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(A-B)A^{-1}]^n.$$

Таким образом, множество обратимых операторов открыто в $\mathscr{L}(X, Y)$ в равномерной топологии этого пространства.

5) Теорема Банаха об изоморфизме: если A взаимно однозначно отображает X на Y, то О. о., к-рое существует, непрерывно. Эта теорема допускает обобщение: взаимно однозначное линейное непрерывное отображение совершенно полного пространства X на отделимое бочечное пространство Y является *топологич. изоморфизмом.*

Ряд утверждений о существовании и непрерывности оператора, обратного к линейному непрерывному, содержится в спектральной теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Так, если A самосопряжен и λ не действительно, то $(A-\lambda I)^{-1}$ существует и непрерывен.

Лит.: [1] Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, пер. с англ., М., 1962; [2] Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; [3] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; [4] Робертсон А.-П., Робертсон В.-Дж., Топологические векторные пространства, пер. с англ., М., 1967.

В. И. Соболев.

ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ — функции, обратные *гиперболическим функциям.* О. г. ф. наз. ареа-синус гиперболический, ареа-косинус гиперболический, ареа-тангенс гиперболический: Ar sh x, Ar ch x, Ar th x; другие обозначения: ar sh x, ar ch x, ar th x; $\mathrm{sh}^{-1}x$, $\mathrm{ch}^{-1}x$, $\mathrm{th}^{-1}x$.

О. г. ф. действительного переменного x определяются формулами

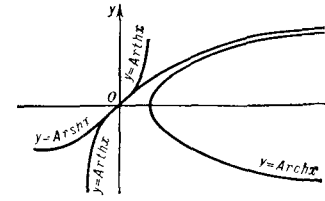
$$\mathrm{Ar\,sh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\mathrm{Ar\,ch}\, x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geqslant 1,$$

$$\mathrm{Ar\,th}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

О. г. ф. однозначны и непрерывны в каждой точке своей области определения за исключением О. г. ф. Ar ch x, к-рая двузначна. При изучении свойств О. г. ф. для Ar ch x выбирается одна из ее непрерывных ветвей, т. е. в формуле для Ar ch x выбирается только один знак (обычно — плюс).

Графики О. г. ф. см. на рисунке. О. г. ф. связаны между собой рядом соотношений. Напр.,



$$\operatorname{Ar\,sh}\, x = \operatorname{Ar\,th}\, \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\operatorname{Ar\,th}\, x = \operatorname{Ar\,sh}\, \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Производные О. г. ф. находятся по формулам

$$(\operatorname{Ar\,sh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$(\operatorname{Ar\,ch}\, x)' = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad (\operatorname{Ar\,th}\, x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

О. г. ф. комплексного переменного z определяются по таким же формулам, что и для действительного переменного x, причем под $\ln z$ понимается многозначная логарифмич. функция. О. г. ф. комплексного переменного являются аналитич. продолжениями соответствующих О. г. ф. действительного переменного в комплексную плоскость.

О. г. ф. выражаются через обратные тригонометрич. функции по формулам

$$\operatorname{Ar\,sh}\, z = -i \operatorname{arc\,sin}\, iz,$$

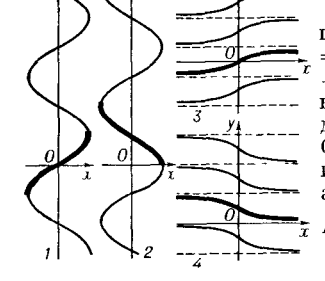
$$\operatorname{Ar\,ch}\, z = i \operatorname{arc\,cos}\, z,$$

$$\operatorname{Ar\,th}\, z = -i \operatorname{arc\,tg}\, iz.$$

Ю. В. Сидоров.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, а р к ф у н к ц и и, к р у г о в ы е ф у н к ц и и,— функции, обратные *тригонометрическим функциям*. Шести основным тригонометрич. функциям соответствуют шесть О. т. ф.: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арксеканс, арккосеканс; обозначаются соответственно $\operatorname{Arc\,sin}\, x$, $\operatorname{Arc\,cos}\, x$, $\operatorname{Arc\,tg}\, x$, $\operatorname{Arc\,ctg}\, x$, $\operatorname{Arc\,sec}\, x$, $\operatorname{Arc\,cosec}\, x$. Функции $\operatorname{Arc\,sin}\, x$ и $\operatorname{Arc\,cos}\, x$ определены (в действительной области) для $|x| \leqslant 1$, функции $\operatorname{Arc\,tg}\, x$ и $\operatorname{Arc\,ctg}\, x$ — для всех действительных x, а функции $\operatorname{Arc\,sec}\, x$ и $\operatorname{Arc\,cosec}\, x$ — для $|x| \geqslant 1$; две последние функции малоупотребительны. Другие обозначения: $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ и т. п.

Так как тригонометрич. функции периодические, то обратные к ним функции являются м н о г о з н а ч н ы м и функциями. Определенные однозначные ветви (г л а в н ы е в е т в и) этих функций обозначаются так: $\operatorname{arc\,sin}\, x$, $\operatorname{arc\,cos}\, x$, ... Именно, $\operatorname{arc\,sin}\, x$ есть та ветвь функции $\operatorname{Arc\,sin}\, x$, для к-рой $-\pi/2 \leqslant \operatorname{arc\,sin}\, x \leqslant \pi/2$. Аналогично, функции $\operatorname{arc\,cos}\, x$, $\operatorname{arc\,tg}\, x$ и $\operatorname{arc\,ctg}\, x$ определяются из условий: $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos}\, x \leqslant \pi$, $-\pi/2 < \operatorname{arc\,tg}\, x < \pi/2$, $0 < \operatorname{arc\,ctg}\, x < \pi$.



На рисунке изображены графики функций $y = \operatorname{Arc\,sin}\, x$, $y = \operatorname{Arc\,cos}\, x$, $y = \operatorname{Arc\,tg}\, x$, $y = \operatorname{Arc\,ctg}\, x$; главные ветви этих функций выделены жирной линией. О. т. ф. $\operatorname{Arc\,sin}\, x$, ... легко выражаются через $\operatorname{arc\,sin}\, x$, ..., напр.:

$$\operatorname{Arc\,sin}\, x = (-1)^n \operatorname{arc\,sin}\, x + \pi n,$$

$$\operatorname{Arc\,cos}\, x = \pm \operatorname{arc\,cos}\, x + 2\pi n,$$

$$\operatorname{Arc\,tg}\, x = \operatorname{arc\,tg}\, x + \pi n,$$

$$\operatorname{Arc\,ctg}\, x = \operatorname{arc\,ctg}\, x + \pi n,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

О. т. ф. связаны соотношениями

$$\operatorname{arc\,sin}\, x + \operatorname{arc\,cos}\, x = \pi/2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\operatorname{arc\,tg}\, x + \operatorname{arc\,ctg}\, x = \pi/2, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Поэтому функции $\arccos x$ и $\operatorname{arc\,ctg} x$ в нижеследующих формулах не фигурируют.

О. т. ф. бесконечно дифференцируемы и в окрестности каждой внутренней точки своей области определения могут быть разложены в ряды Тейлора. Производные, интегралы и разложения в ряды О. т. ф.:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C,$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

О. т. ф. комплексного переменного определяются как аналитические продолжения соответствующих О. т. ф. действительного переменного в комплексную плоскость.

О. т. ф. выражаются через логарифмическую функцию:

$$\arcsin z = -i \ln (iz + \sqrt{1-z^2}),$$

$$\arccos z = -i \ln (z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{arc\,tg} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\operatorname{arc\,ctg} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{iz-1}{iz+1}.$$

Ю. В. Сидоров.

ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦЫ — алгоритм, применяемый при численном нахождении *обратной матрицы*. Как и в задаче решения линейных систем, методы численного обращения подразделяются на прямые и итерационные; однако итерационные методы вследствие их трудоемкости играют здесь существенно меньшую роль.

Большинство прямых методов О. м. основано на идее разложения заданной матрицы в произведение легко обращаемых сомножителей.

Если

$$A = L_1 L_2 \ldots L_k$$

— такое разложение, то

$$A^{-1} = L_k^{-1} L_{k-1}^{-1} \ldots L_1^{-1}.$$

Типичным (и одним из наиболее употребительных) прямых методов О. м. является метод Жордана (см. [1]).

Пусть A — невырожденная матрица порядка n. Построение обратной матрицы A^{-1} происходит в n шагов; результатом k-го шага будет матрица A_k, первые k столбцов к-рой совпадают с одноименными столбцами единичной матрицы. Переход от A_k (пусть $A = A_0$) к A_{k+1} с матричной точки зрения эквивалентен умножению A_k слева на матрицу L_{k+1}, к-рая отличается от единичной лишь $(k+1)$-м столбцом. Элементы этого столбца выбираются так, чтобы привести $(k+1)$-й столбец A_k к единичному, и имеют вид

$$-\frac{a^{(k)}_{1,\,k+1}}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}}, \ldots, -\frac{a^{(k)}_{k,\,k+1}}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}},$$

$$\frac{1}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}}, \ldots, -\frac{a^{(k)}_{n,\,k+1}}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}}.$$

Из соотношений

$$A_{k+1} = L_{k+1} A_k, \quad A_n = E$$

вытекает

$$L_n L_{n-1} \dots L_1 A = E$$

и

$$A^{-1} = L_n L_{n-1} \dots L_1. \qquad (1)$$

Получение факторизованного представления (1) для обратной матрицы A^{-1} требует примерно $n^3/2$ операций умножения и примерно $n^3/2$ операций сложения. Приблизительно такое же число дополнительных операций необходимо для того, чтобы перемножить матрицы в (1) и получить явный вид A^{-1}. Во многих приложениях операции О. м. использование факторизованной формы (1) столь же удовлетворительно, что и явного вида. Напр., вычисление произведения $A^{-1}b$, где b — вектор-столбец, требует одинаковой арифметич. работы в обоих случаях. Одинаковы и требования к памяти при реализации на ЭВМ.

В приведенном описании метода Жордана предполагалось для простоты, что все элементы $a^{(k)}_{k+1,\,k+1}$ (называемые в е д у щ и м и э л е м е н т а м и) отличны от нуля. В действительности метод Жордана, как и методы типа Гаусса для решения линейных систем, как правило, применяется с той или иной схемой выбора ведущих элементов. Использование такой схемы равносильно введению в (1) дополнительных множителей, учитывающих перестановки строк и столбцов обратной матрицы. Точность вычисленного решения, как и в случае линейных систем, зависит от степени роста матричных элементов на промежуточных шагах метода. Такой рост и, следовательно, *ухудшение точности* вычисляемого решения в методе Жордана, даже при выборе ведущего элемента, более вероятны, чем в методах типа Гаусса.

Н е в я з к о й, соответствующей приближенной обратной матрице X для A, наз. матрица $R = E - AX$. Имеет место оценка

$$\frac{\| A^{-1} - X \|}{\| A^{-1} \|} \leqslant \| R \|.$$

Таким образом, *норма невязки является оценкой* относительной точности приближенной обратной матрицы X. В этом состоит важное отличие задачи численного О. м. от задачи решения линейных систем, где (напр., в ортогональных методах или методах типа Гаусса) невязка обычно мала, а качество полученного решения зависит от обусловленности системы.

Обращение ряда важных классов матриц может быть достигнуто значительно более экономичными, чем в общем случае, методами. Таковы теплицевы, ганкелевы, ленточные (и, в частности, трехдиагональные) матрицы, блочные матрицы, имеющие теплицеву структуру или структуру кронекерова произведения, и т. д. Напр., пусть T — теплицева матрица порядка $n+1$ с элементами из R или C:

$$T = \begin{Vmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n} & t_{-n+1} & t_{-n+2} & \dots & t_0 \end{Vmatrix}.$$

Предполагается, что не только T, но и ее главная подматрица порядка n невырождены. Тогда для матри-

цы T^{-1}, уже, вообще говоря, не являющейся теплицевой, справедливо представление (см. [2]):

$$T^{-1}=\frac{1}{p_n}\begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ b_1 & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & \\ b_n & \dots & b_1 & 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n \\ & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & a_1 \\ & & & 1 \end{Vmatrix}- \\ -\frac{1}{p_n}\begin{Vmatrix} 0 & & & 0 \\ a_n & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & \\ a_1 & \dots & a_n & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & b_n & \dots & b_1 \\ & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & b_n \\ & & & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2)$$

При этом векторы

$$\frac{1}{p_n}(1\ b_1\ \dots\ b_n)^T \quad \text{и} \quad \frac{1}{p_n}(a_n\ \dots\ a_1\ 1)^T$$

суть соответственно первый и последний столбцы T^{-1}. Таким образом, T полностью определяется заданием первого и последнего столбцов. При необходимости из (2) могут быть последовательно вычислены все элементы T^{-1}:

$$\{T^{-1}\}_{i+1,\,j+1}=\{T^{-1}\}_{i,\,j}+\frac{1}{p_n}(b_{i+1}a_{j+1}-a_{n-i}b_{n-j}).$$

Это вычисление требует $O(n^2)$ арифметич. операций.

В экономичных алгоритмах обращения теплицевых матриц (см., напр., [3]) вычисление a_i, b_j и p_n проводится по рекуррентным формулам и также требует $O(n^2)$ операций. Условие невырожденности главных подматриц может быть ослаблено с сохранением порядка $O(n^2)$ необходимой арифметич. работы.

Иногда операцию О. м. используют с тем, чтобы решать *линейные системы* $Ax=b$ по формуле $x=A^{-1}b$. В случае матрицы общего вида такой образ действий имеет мало смысла, т. к. сопровождается проигрышем и в арифметич. работе, и в численной устойчивости по сравнению с прямым решением линейной системы. Для теплицевых (и родственных им) матриц ситуация иная. Как показывает представление (2), вычисление $T^{-1}b$ сводится к выполнению четырех умножений теплицевых матриц на векторы и вычитанию векторов. Существуют экономичные алгоритмы умножения теплицевой матрицы на вектор, требующие (для порядка n) $O(n\log n)$ операций. Для задачи решения теплицевых систем такая асимптотика арифметич. работы пока не достигнута. Поэтому при многократном решении линейных систем $Tx=b$ с одной и той же теплицевой матрицей T и различными правыми частями b предварительное обращение T, по-видимому, целесообразно.

Предварительное О. м. может быть оправданным и в случае многократного решения линейных систем с одной и той же матрицей общего вида на ЭВМ с большим числом параллельно работающих процессоров. Причина в том, что по сравнению с операцией умножения матрицы на вектор прямые методы решения линейных систем не имеют столь же удобного распараллеливания.

Во многих случаях (напр., в квазиньютоновых методах математич. программирования) требуется обратить матрицу A, отличающуюся от матрицы B с известной обратной B^{-1} матрицей ранга 1 или (в случае симметричной матрицы B) симметричной матрицей ранга 2. Такая перестройка обратной матрицы может быть выполнена для матриц порядка n за $O(n^2)$ арифметич. операций. Примером может служить следующая формула (см. [4]): если u и v — векторы-столбцы, то

$$(B+uv^T)^{-1} \quad B^{-1}-\frac{1}{\gamma}B^{-1}uv^TB^{-1},$$

где $\gamma=1+v^TB^{-1}u$ считается отличным от нуля.

С точки зрения теории вычислительной сложности задача О. м. общего вида имеет (на последовательной машине) сложность того же порядка, что и задача решения линейной системы (при выполнении нек-рых естественных условий на скорость роста сложности обеих задач с увеличением их порядка [5]). Эта сложность имеет порядок, не превышающий $n^{\log_2 7}$.

Лит.: [1] Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966; [2] Гохберг И. Ц., Фельдман И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., 1971; [3] Trench W., «SIAM J. Contr.», 1964, v. 12, p. 512—522; [4] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963; [5] Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж., Построение и анализ вычислительных алгоритмов, пер. с англ., М., 1979.

С. Д. Икрамов.

ОБРАЩЕНИЕ РЯДА — получение по известному степенному ряду

$$w=f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} b_j (z-a)^j,\ b_1 \neq 0, \qquad (1)$$

ряда для обратной функции $z=\varphi(w)$ в виде

$$z=\varphi(w)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (w-b)^k, \qquad (2)$$

где $b=f(a)=b_0$, $a_0=a$,

$$a_k=\frac{1}{k!}\lim_{\zeta\to a}\frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}}\left[\frac{\zeta-a}{f(\zeta)-b}\right]^k,\ k\geqslant 1.$$

Ряд (2) наз. также О. р. (1), или *рядом Лагранжа*. Более общая задача о получении разложения произвольной сложной аналитич. функции $F[\varphi(w)]$ решается *Бюрмана — Лагранжа рядом*. Если круг сходимости ряда (1) есть $|z-a|<\rho$, то ряд (2) сходится в круге $|w-b|<\delta$, где δ есть расстояние от точки b до образа окружности $|z-a|=\rho$ при отображении $w=f(z)$.

Если функция $w=f(z)$ разлагается в ряд вида

$$w=f(z)=b+\sum_{j=m}^{\infty} b_j (z-a)^j,\ m\geqslant 2,\ b_m\neq 0, \qquad (3)$$

т. е. если a — *критическая точка* для $f(z)$, то обратная функция $z=\varphi(w)$ имеет в b *алгебраическую точку ветвления* порядка $m-1$ и О. р. (3) возможно только в виде ряда Пюизё:

$$z=\varphi(w)=a+\sum_{k=1}^{\infty} a_k (w-b)^{k/m},$$

$$a_k=\frac{1}{k!}\lim_{\zeta\to a}\frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}}\left\{\frac{\zeta-a}{[f(\zeta)-b]^{1/m}}\right\}^k,\ k\geqslant 1.$$

Аналогично решается задача обращения *Лорана ряда* по целым отрицательным и положительным степеням $z-a$ в том случае, когда в таком ряде имеется лишь конечное число отрицательных (или положительных) степеней (см. [1]).

Для аналитич. функций многих комплексных переменных $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $n>1$, вопросы обращения ставятся по-разному. Напр., если $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ — невырожденное (т. е. такое, что ранг матрицы Якоби $\|\partial f/\partial z_k\|$ равен n) голоморфное отображение окрестности нуля $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, $f(0)=0$, то существует в нек-рой окрестности нуля и голоморфное обратное отображение φ, к-рое можно записать в виде многомерного ряда Бюрмана — Лагранжа (см. [3]).

Лит.: [1] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1, М., 1967; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968; [3] Солтан Е. Е., в кн.: Голоморфные функции многих комплексных переменных, Красноярск, 1972, с. 129—37.

Е. Д. Соломенцев.

ОБРАЩЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА — проблема, состоящая в построении функции u как функции от z или однозначных сложных функций вида $f(u(z))$ в случае *эллиптического интеграла*

$$z=\int^u R(z,w)\,dz,$$

где R — рациональная функция от переменных z, w, связанных уравнением $w^2 = F(z)$, $F(z)$ — многочлен 3-й или 4-й степени без кратных корней. Полное решение этой проблемы дали почти одновременно в 1827—29 Н. Абель (N. Abel) и К. Якоби (C. Jacobi), показав, что ее решение приводит к новым трансцендентным *эллиптическим функциям*.

Существенно иной подход к теории эллиптич. функций принадлежит К. Вейерштрассу (K. Weierstrass). Для эллиптич. интеграла I рода в нормальной форме Вейерштрасса

$$z = \int^{u} \frac{dz}{w}, \quad w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

$u = \wp(z)$ оказывается $\wp$-функцией Вейерштрасса с инвариантами g_2, g_3 (см. *Вейерштрасса эллиптические функции*). Для эллиптич. интеграла I рода в нормальной форме Лежандра

$$z = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

обращение приводит к *Якоби эллиптическим функциям*.

Лит.: [1] Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; [2] Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968.

Е. Д. Соломенцев.

ОБРЫВА ЦЕПЕЙ УСЛОВИЕ — условие конечности возрастающих или убывающих цепей в частично упорядоченном множестве. Условие обрыва убывающих цепей: для всякой цепи $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k \geqslant \ldots$ элементов частично упорядоченного множества P найдется такой номер n, что $a_n = a_{n+1} = \ldots$ Выполнение этого условия эквивалентно каждому из следующих свойств частично упорядоченного множества P:

1) всякое непустое подмножество $M \subseteq P$ имеет хотя бы один минимальный (в M) элемент (условие минимальности);

2) все элементы из P обладают нек-рым свойством ε, если этим свойством обладают все минимальные элементы множества P и если справедливость свойства ε для любого $a \in P$ можно вывести из того, что ε справедливо для всех $x < a$, $x \in P$ (условие индуктивности).

Условие индуктивности позволяет для множеств с условием обрыва убывающих цепей проводить по индукции доказательства и построения. При этом если P вполне упорядочено,— получается *трансфинитная индукция*, а если P изоморфно множеству всех неотрицательных целых чисел,— обычная математич. индукция (см. *Индукции аксиома*).

Условие обрыва возрастающих цепей (и эквивалентные ему утверждения) формулируется двойственным образом (см. *Двойственности принцип* в частично упорядоченных множествах). В решетке с условием обрыва возрастающих цепей каждый идеал — главный. Всякое конечное множество очевидно удовлетворяет обоим О. ц. у., однако обратное утверждение (конечность множества, удовлетворяющего этим двум условиям) неверно. Решетка с условиями обрыва убывающих и возрастающих цепей полна.

О. ц. у. используются в алгебре, в основном в применении к упорядоченному по включению множеству подсистем различных алгебраич. систем (см., напр., *Артинов модуль*, *Артинова группа*, *Артиново кольцо*, *Композиционный ряд*, *Нётеров модуль*, *Нётерова группа*, *Нётерово кольцо*).

Лит.: [1] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952; [2] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [3] Скорняков Л. А., Элементы теории структур, М., 1970.

Т. С. Фофанова.

ОБЩАЯ АЛГЕБРА — часть алгебры, занимающаяся изучением тех или иных алгебраич. систем, включающая в себя теории групп, колец, модулей, полугрупп, решеток (структур) и т. п. Вне рамок О. а. остаются

такие направления, как изучение матриц и линейных уравнений, алгебраич. геометрия и алгебраич. теория чисел, полилинейная алгебра и т. п. Выделение О. а. как части алгебры довольно условно, и граница ее расплывчата. Напр., трудно сказать, относятся ли к О. а. теории полей, конечных групп или конечномерных алгебр Ли.

Если универсальная алгебра снабжена порядком или топологией, согласованными с операциями, то возникает частично упорядоченная или топологич. алгебра соответственно. Исследование этих объектов также относится к О. а. Наиболее развиты теории частично упорядоченных и топологич. групп и колец.

Начало развития О. а. относится к 19 в., когда были исследованы нек-рые конечные группы и конечномерные алгебры. Однако современная О. а. связана с проникновением в алгебру теоретико-множественного мышления и является продуктом 20 в. Так, первая монография (О. Ю. Шмидта, см. [1]), где группа не предполагается конечной, по определению, появилась лишь в 1916. В первую очередь эта перестройка коснулась теории групп, а затем теории колец. Результаты этой перестройки отражены в монографии Б. Ван дер Вардена (B. L. Van der Waerden), вышедшей в 1930—31.

Выявление общих моментов, содержащихся в теориях групп и колец, привело к рассмотрению решеток (структур), универсальных алгебр и категорий. Появление теории моделей и алгебраич. систем связано с вскрытием связей алгебры и математич. логики. Желание выяснить, в какой мере те или иные факты теории групп зависят от наличия обратных элементов и ассоциативности, породило полугруппы и квазигруппы. Все эти вновь появившиеся разделы О. а. через нек-рое время обрели собственную проблематику, нашли собственные пути развития и собственные области приложения (напр., полугруппы оказались чрезвычайно важными для алгебраич. теории автоматов). Более того, эти направления в свою очередь начали оказывать влияние на породившие их классич. разделы О. а. Так, напр., понятие многообразия алгебр, выкристаллизовавшееся в теории универсальных алгебр, играет важную роль в современной теории групп и колец. В качестве другого примера можно назвать изучение классов групп и колец, определяемых свойствами решетки их подгрупп и нормальных подгрупп, идеалов и подколец, а также вопросов, связанных с решеточными изоморфизмами. См. также *Универсальная алгебра*.

Лит.: [1] Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, 2 изд., М.— Л., 1933; [2] Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979. [3] Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; [4] его же, Общая алгебра. Лекции 1969 1970 учебного года, М., 1974; [5] Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; [6] Судзуки М., Строение группы и строение структуры ее подгрупп, пер. с англ., М., 1960. *Л. А. Скорняков.*

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ — ветвь геометрии, посвященная исследованию непрерывности и предельного перехода на том естественном уровне общности, к-рый определяется природой этих понятий. Исходными понятиями О. т. являются понятия *топологического пространства* и *непрерывного отображения*, выделенные в 1914 Ф. Хаусдорфом (F. Hausdorf).

Частным случаем непрерывных отображений являются гомеоморфизмы— непрерывные взаимно однозначные отображения топологич. пространств, обладающие непрерывным обратным отображением. Пространства, к-рые можно отобразить друг на друга посредством гомеоморфизма (т. е. гомеоморфные пространства), считаются в О. т. одинаковыми. Одной из основных задач О. т. является выделение и исследование естественных топологич. инвариантов — свойство пространств, сохраняющихся гомеоморфизмами. Разумеется, каждое свойство пространства, к-рое формулируется исключи-

тельно в терминах его топологии, автоматически является топологич. инвариантом. Доказательство топологич. инвариантности свойства пространства требуется лишь тогда, когда оно формулируется с привлечением каких-либо дополнительных структур, определенных на множестве точек пространства и так или иначе связанных с его топологией. Примером может служить топологич. инвариантность групп гомологий.

Топологич. инвариант не обязательно выражается числом; напр., связность, бикомпактность, метризуемость — топологич. инварианты. Среди числовых инвариантов (принимающих числовые значения на конкретных топологич. пространствах) важнейшими являются размерностные инварианты: малая индуктивная размерность ind, большая индуктивная размерность Ind и размерность Лебега dim (размерность в смысле покрытий).

Важную роль играют топологич. инварианты иной природы, значениями к-рых служат *кардинальные числа*. Среди них: *вес*, *характер*.

В связи с системой топологич. инвариантов возникают классы топологич. пространств — каждый класс определяется ограничением на тот или иной топологич. инвариант. Наиболее важны классы *метризуемых пространств*, *бикомпактных пространств*, *тихоновских пространств*, *паракомпактных пространств*, *перистых пространств*.

Основные «внутренние» задачи О. т. таковы: 1) выделение новых важных классов топологич. пространств; 2) сравнение различных классов топологич. пространств; 3) изучение пространств в пределах того или иного класса и категорных *свойств этого класса* в целом. Центральной в этой группе, безусловно, является задача 2), направленная на обеспечение внутреннего единства О. т.

Выделение новых важных классов топологич. пространств (т. е. новых топологич. инвариантов) часто связано с рассмотрением дополнительных структур на пространстве (числовых, алгебраических, порядковых), естественно согласованных с его топологией. Так, выделяются метризуемые пространства, упорядоченные пространства, пространства топологических групп, симметризуемые пространства и др. Важную роль при решении задач 1), 2), 3) играет метод покрытий. На языке покрытий и соотношений между покрытиями, важнейшими из к-рых являются отношения вписанности и звездной вписанности, выделяются фундаментальные классы бикомпактных и паракомпактных пространств, формулируются топологич. свойства типа компактности. Метод покрытий играет важную роль в *размерности теории*.

Для решения центральной задачи 2) особенно важен метод взаимной классификации пространств и отображений. Он направлен на установление связей между различными классами топологич. пространств посредством непрерывных отображений, подчиненных тем или иным простым ограничениям. Пространства весьма общей природы удается при этом описать как образы более простых пространств при «хороших» отображениях. Напр., пространства с первой аксиомой счетности характеризуются как образы метрич. пространств при непрерывных открытых отображениях. Связи такого рода составляют эффективную систему ориентиров при рассмотрении классов топологич. пространств.

Метод обратных *спектров*, тесно связанный с методом покрытий и методом отображений, позволяет сводить изучение сложных топологич. пространств к рассмотрению систем отображений пространств более простых.

Наконец, в решении задачи 2) существенно участвует метод кардинальнозначных топологич. инвариантов, или *мощностных характеристик*. Инварианты такого

рода наиболее созвучны теоретико-множественной природе О. т. В связи с этим система кардинальнозначных инвариантов обладает большой разветвленностью и оказывает влияние практически на все остальные топологич. свойства. Другая важная особенность кардинальнозначных инвариантов — их тесная взаимосвязь, в основе к-рой лежит возможность осуществлять над такими инвариантами арифметич. операции и сравнивать их по величине. Благодаря указанным чертам теория кардинальнозначных инвариантов играет унифицирующую роль в О. т. и дает подход к любому из ее разделов.

Среди внешних задач О. т. выделяется, прежде всего, следующая задача общего характера: как связаны и взаимодействуют свойства топологии и др. структур, согласованных с этой топологией. Конкретные задачи этого рода относятся к топологическим группам, к топологическим векторным пространствам и к мерам на топологических пространствах. Каждому бикомпакту отвечает *банахова алгебра* всех непрерывных действительных функций на этом бикомпакте. Этим теория топологич. пространств ставится в тесную связь с теорией банаховых алгебр. Большую роль в функциональном анализе играют *слабые топологии* на банаховых пространствах. Это — важный для приложений класс неметризуемых топологий. Каждое тихоновское пространство характеризуется однозначно кольцом всех непрерывных действительных функций на нем в топологии поточечной сходимости. Результаты этого рода соединяют О. т. и *топологическую алгебру*.

Понятие *бикомпактного расширения* нашло приложение в теории потенциала (*Кольцевая граница*, *Мартина граница*).

О. т. важна в методич. отношении при обучении математике. Только в рамках ее понятий и конструкций вполне выясняются и становятся прозрачными фундаментальные концепции непрерывности, сходимости, параллельного перехода. Трудно назвать области математики, в к-рых понятия и язык О. т. совсем бы не использовались. В этом, в частности, проявляется ее объединяющая роль в математике. Положение О. т. в математике определяется и тем, что целый ряд принципов и теорем, имеющих общематематич. значение, получает свою естественную (т. е. отвечающую природе этих принципов, теорем) формулировку только в рамках О. т. Примерами могут служить понятие бикомпактности — абстракции от леммы Гейне — Бореля о выборе конечного подпокрытия отрезка, теорема о бикомпактности произведения бикомпактных пространств (за к-рой стоит, в качестве прообраза, утверждение о бикомпактности конечномерного куба), теорема о том, что непрерывная действительная функция на бикомпакте ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений. Этот ряд примеров можно продолжить: понятие множества второй категории, понятие полноты, понятие расширения (сам характер этих понятий и относящихся к ним результатов, важных для математики в целом, делает наиболее естественным и прозрачным их исследование в рамках О. т.).

Лит.: [1] Александров П. С., Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств, М., 1978, с. 280—358; [2] его же, «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2, с. 25—95; [3] его же, там же, 1964, т. 19, в. 6, с. 3—46; 1965, т. 20, в. 1, с. 253—54; [4] Александров П. С., Федорчук В. В., там же, 1978, т. 33, в. 3, с. 3—48; [5] Архангельский А. В., там же, 1966, т. 21, в. 4, с. 133—84; [6] его же, там же, 1978, т. 33, в. 6, с. 29—84.

А. В. Архангельский.

ОБЩАЯ ТОЧКА — точка топологич. пространства, замыкание к-рой совпадает со всем пространством. Топологич. пространство, имеющее О. т., является *неприводимым топологическим пространством*; однако неприводимое пространство может как вообще не иметь ни одной О. т., так и иметь много О. т. Впрочем, если

пространство удовлетворяет *Колмогорова аксиоме*. то оно может иметь не более одной О. т. Любое неприводимое алгебраич. многообразие или неприводимая схема обладают и притом единственной О. т. В этом случае О. т. есть не что иное, как спектр поля рациональных функций многообразия.

Термин «О. т.» употребляется иногда также для обозначения *общего положения точки*. *В. И. Данилов.*

ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКА — точка, принадлежащая нек-рому открытому плотному в топологии Зарисского подмножеству алгебраич. многообразия. В алгебраич. геометрии О. п. т. часто наз. просто о б щ е й т о ч к о й. *О. А. Ивинова.*

ОБЩЕЕ ПОЛОЖЕНИЕ — словосочетание, употребляющееся в оборотах типа: «объекты O в О. п. имеют свойство S (или свойства S_i)», «S есть свойство О. п.», «приведение в О. п.», точный смысл к-рых зависит от контекста. Обычно совокупность $\mathfrak{D}$ всех рассматриваемых объектов снабжается структурой, позволяющей считать нек-рые подмножества $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{D}$ «малыми», «пренебрежимыми» или, наоборот, «большими», «массивными»; тогда S считается «свойством О. п.», если обладающие им объекты образуют в $\mathfrak{D}$ «большое» подмножество. $\mathfrak{D}$ обычно имеет одну из следующих структур: а) *алгебраического многообразия*, б) *дифференцируемого многообразия* (возможного, бесконечномерного), в) топологич. пространства, чаще всего *Бэра пространства* в первом значении этого термина, г) пространства с мерой. «Малыми» считаются соответственно: алгебраич. подмногообразия (меньшей размерности), дифференцируемые подмногообразия и конечные или счетные объединения таковых, нигде не плотные множества или множества первой категории, множества меры нуль. Множество $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{D}$ считается «большим», если дополнение к нему — «малое». Тогда говорят также, что $\mathfrak{A}$ содержит «большинство» объектов из $\mathfrak{D}$ или «почти все» эти объекты, а свойство S, выполняющееся для почти всех объектов, наз. «типичным», или свойством О. п. Нередко говорят о «типичном» объекте, объекте общего положения или объекте, находящемся в О. п., подразумевая (иногда молчаливо), что имеется одно или несколько «типичных» свойств (каких именно — должно быть ясно из контекста) и что речь идет об объекте, обладающем этими свойствами.

В более слабом смысле «большое» подмножество в случаях в) и г) может означать подмножество второй категории в непустом открытом подмножестве пространства $\mathfrak{D}$ или подмножество положительной меры. Тогда говорят, что «этим множеством объектов нельзя пренебрегать» (но уже не говорят о «типичности»).

В случаях а) и б) «малое» множество $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{D}$ имеет положительную коразмерность $\operatorname{codim}\mathfrak{A}$. Естественно считать, что $\mathfrak{A}$ тем меньше, чем больше $\operatorname{codim}\mathfrak{A}$. Близкой к б) (и более общей) является ситуация, когда можно говорить об n-параметрич. семействах объектов $O(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, достаточно гладко зависящих от n (скалярных) параметров, и всевозможные такие семейства образуют пространство Бэра. Если почти все (в смысле в)) эти семейства не содержат объектов из $\mathfrak{A}$, то говорят, что $\operatorname{codim}\mathfrak{A}>n$, а если это так при любом n, то полагают $\operatorname{codim}\mathfrak{A}=\infty$. Соображения коразмерности играют значительную роль в теории *бифуркаций* и теории *особенностей дифференцируемых отображений* (см. также [8]).

На объекты могут действовать нек-рые операции g; их совокупность G обычно является группой или хотя бы полугруппой с единицей e. О «приведении объекта O в О. п. посредством операции g» говорят, когда из контекста ясно, что рассматриваются определенные свойства; «приведение» означает, что gO обладает этими свойствами. Как и $\mathfrak{D}$, G обычно снабжается

структурой, позволяющей говорить о «большом» множестве операций или о том, что операцию g, переводящую O в объект gO с нужными свойствами, можно выбрать сколь угодно близкой к e («приведение в О. п. посредством малого шевеления»).

Напр., на плоскости прямая и окружность в О. п. либо не пересекаются, либо пересекаются в двух точках. В данном случае объект есть пара (a, b), где a — прямая, b — окружность, а в качестве операций можно взять евклидовы движения (либо одни только параллельные переносы), действующие на a при фиксированном b. Совокупность всевозможных объектов Σ и группа G естественно снабжаются всеми названными выше структурами, и О. п. можно понимать согласно любому из описанных вариантов. Первоначально об О. п. говорили именно в подобных геометрич. вопросах, поэтому данный термин употребляется в разделах математики, являющихся геометрическими по своему характеру или по крайней мере испытавших значительное геометрич. влияние (хотя соображения, связанные с множествами второй категории или полной меры, используются и за их пределами). По сей день термин «О. п.» часто применяется к ситуации, непосредственно обобщающей приведенный пример, когда речь идет о *трансверсальности* двух подмногообразий в нек-ром объемлющем многообразии (или к родственной ситуации с трансверсальными самопересечениями иммерсированного подмногообразия). В частности, в геометрич. топологии (рассматривающей кусочно линейные или топологич. многообразия и соответствующие классы отображений) термин «О. п.» употребляется почти исключительно как синоним трансверсальности.

В алгебраич. геометрии простые примеры (вроде приведенного) легко разбираются с помощью теории исключения, причем основное поле может быть довольно произвольным (обычно алгебраически замкнутым). Имеются теоремы, связанные с О. п. в более сложных ситуациях (напр., *Бертини теоремы*, *Лефшеца теорема* о гиперплоском сечении); при изучении действия алгебраич. группы на алгебраич. многообразии большую роль играют *общего положения точки* [1].

В дифференциальной топологии и теории особенностей дифференцируемых отображений О.п. используется очень широко. Доказательства обычно проводятся с помощью теоремы Сарда или ее следствий — теорем Абрахама и Тома о трансверсальности (см. [2], [3]), более удобных для непосредственного применения. В бесконечномерном случае теорема Сарда не верна, однако можно получить более слабые результаты, к-рых иногда бывает достаточно (см. [4], [5]).

В теории гладких динамич. систем имеется ряд результатов о «типичных» свойствах. Большинство из них (особенно в локальной теории бифуркаций [3]) доказывается с использованием редукции к теореме Сарда; положительные результаты, не связанные с такой редукцией, немногочисленны (см. [6], [7], [9], [10], а также лит. при ст. *Грубая система*). Для теории гладких динамич. систем характерно наличие существенного различия между О. п. в топологич. и метрич. смысле (в) и г) см. выше) [11].

Об О. п. в дифференциальной геометрии многообразий см. [12], [13].

Лит.: [1] Mumford D., Geometric invariant theory, B. Hdlb. N. Y., 1965; [2] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., М., 1967, приложение III; [3] Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1978; [4] Eells J., McAlpin J., «J. Math. and Mech.», 1968, v. 17, № 11, p. 1055—64; [5] Quinn F., в кн.: Global analysis, Providence, 1970, p. 213—22; [6] Gutierrez C., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1978, v. 241, p. 311—20; [7] его же, «J. Diff. Equations», 1978, v. 29, № 3, p. 388—95; [8] Kurland H., Robbin J., в кн.: Dynamical Systems – Warwick, 1974, B.— Hdlb.— N. Y., 1975, p. 135—50; [9] Takens F., там же, p. 293—304; [10] Добрынский В. А.,

Шарковский А. Н., «Докл. АН СССР», 1973, т. 211, № 2, с. 273—76; [11] Арнольд В. И., «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1964, т. 25, № 1, с. 21–86; 1964, т. 28, № 2, с. 479—80; [12] Wall C., в кн.: Geometry and topology, B. Hdlb.— N. Y., 1977, p. 707–74; [13] Klingenberg W., Lectures on closed geodesics, B.— Hdlb.— N. Y., 1978.

Д. В. Аносов.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ системы обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$x' = f(t, x),\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad (1)$$

в области G — гладкое по t и непрерывное по совокупности параметров n-параметрическое семейство вектор-функций

$$x = \varphi(t, C_1, \ldots, C_n),\ (C_1, \ldots, C_n) \in C \subset \mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

откуда при соответствующем выборе значений параметров получается любое решение системы, график к-рого проходит в области $G \subset D$; здесь $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — область, где выполнены условия теоремы существования и единственности для системы (1). (Иногда условливаются, что параметры могут принимать и значения $\pm\infty$.) Геометрически О. р. системы (1) в области G представляет собой семейство непересекающихся интегральных кривых этой системы, полностью заметающих всю область.

О. р. системы (1) в области G позволяет найти решение задачи Коши для этой системы с начальным условием $x(t_0) = x^0$, $(t_0, x^0) \in G$: нужно из системы n равенств $x^0 = \varphi(t_0, C_1, \ldots, C_n)$ определить значения n параметров $C_1, \ldots, C_n$ и подставить эти значения в (2). Если $x = \psi(t, t_0, x^0)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(t_0) = x^0$, $(t_0, x^0) \in D$, то n-параметрическое семейство

$$x = \psi(t, t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

где t_0 — фиксированное число, а $x_1^0, \ldots, x_n^0$ рассматриваются как параметры, является О. р. системы (1) в нек-рой области $G \subset D$ и наз. О. р. в форме Коши. Знание О. р. позволяет однозначно восстановить систему дифференциальных уравнений: для этого надо из n соотношений (2) и из n соотношений, получающихся дифференцированием соотношений (2) по t, исключить n параметров $C_1, \ldots, C_n$.

В случае обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (3)$$

О. р. в области G имеет вид n-параметрического семейства функций

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n),\ (C_1, \ldots, C_n) \in C \subset \mathbb{R}^n, \qquad (4)$$

из к-рого при соответствующем выборе значений параметров получается решение уравнения (3) с любыми начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G \subset D;$$

здесь $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — область, где выполнены условия теоремы существования и единственности для уравнения (3).

Функция, получающаяся из О. р. при конкретных значениях параметров, наз. частным решением. Семейство функций, содержащее все решения данной системы (уравнения) в нек-рой области, не всегда удается выразить в виде явной функции независимой переменной. Это семейство может оказаться записанным в виде неявной функции — и тогда оно наз. *общим интегралом* — или в параметрич. виде.

Если конкретное обыкновенное дифференциальное уравнение (3) допускает интегрирование в замкнутой форме (см. *Интегрирование дифференциальных уравне-*

ний в замкнутой форме), то часто удается получить соотношение типа (4), где параметры возникают как постоянные интегрирования и оказываются произвольными постоянными. (Именно поэтому часто говорят, что О. р. уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных.) Однако такое соотношение далеко не всегда является О. р. во всей области существования и единственности решения задачи Коши для исходного уравнения.

Лит.: [1] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959; [2] Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 3 изд., Минск, 1979. *Н. Х. Розов.*

ОБЩЕЗНАЧИМОСТЬ — свойство *логической формулы*, состоящее в том, что эта формула истинна при любой интерпретации входящих в нее нелогич. символов, т. е. предикатных и пропозициональных переменных. Логич. формулы, обладающие этим свойством, наз. о б щ е з н а ч и м ы м и, или т о ж д е с т в е н н о и с т и н н ы м и, или т а в т о л о г и я м и. Всякая общезначимая формула выражает *логический закон*. Вместо слов «формула A общезначима» часто пишут: «$\models A$». Важнейшими видами логич. формул являются пропозициональные и предикатные формулы. При классич. понимании *логических операций* О. п р о п о з и ц и о н а л ь н ы х ф о р м у л проверяется путем построения *истинностных таблиц*: формула общезначима тогда и только тогда, когда при любых истинностных значениях пропозициональных переменных она принимает значение И («истина»). О. п р е д и к а т н о й ф о р м у л ы означает истинность в любой *модели*. Множество общезначимых предикатных формул неразрешимо, т. е. не существует алгоритма, позволяющего для произвольной предикатной формулы выяснить, общезначима ли она. Из *Гёделя теоремы о полноте* следует, что все общезначимые предикатные формулы и только они выводимы в классич. исчислении предикатов.

Лит.: [1] Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973. *В. Е. Плиско.*

ОБЩЕРЕКУРСИВНАЯ ФУНКЦИЯ — *частично рекурсивная функция*, определенная для всех значений аргументов. Понятие О. ф. может быть определено и независимо от понятия частично рекурсивной функции следующим образом. Класс всех О. ф.— это наименьший класс функций, содержащий все *примитивно рекурсивные функции* и замкнутый относительно композиции функций и *наименьшего числа оператора* при условии, что последний применяется к функции $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ лишь тогда, когда

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0.$$

Однако изучение О. ф. обычно ведется в классе всех частично рекурсивных функций. Это связано, в частности, с тем, что ни при каком натуральном $n>0$ не существует О. ф., универсальной для класса всех n-местных О. ф.

Все О. ф. н у м е р и ч е с к и п р е д с т а в и м ы в *арифметике формальной*, так что для любой такой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно построить арифметич. формулу $F(x_1, \ldots, x_n, y)$, обладающую следующим свойством: каковы бы ни были натуральные числа $k_1, \ldots, k_n, k$, если $f(k_1, \ldots, k_n) = k$, то $\vdash F(k_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k})$; если же $f(k_1, \ldots, k_n) \neq k$, то $\vdash \neg F(k_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k})$, где $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k}$ — термы, изображающие числа $k_1, \ldots, k_n, k$, символ $\vdash$ означает выводимость в арифметич. исчислении.

Лит.: [1] Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; [2] Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., М., 1971. *В. Е. Плиско.*

ОБЩЕРЕКУРСИВНЫЙ ОПЕРАТОР — *частично рекурсивный оператор*, к-рый определен на всех всюду определенных функциях и переводит всюду определенные функции во всюду определенные. *В. Е. Плиско.*

ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ системы обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$x_i' = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

в области G — совокупность n соотношений

$$\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_n) = C_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

содержащая n параметров $(C_1, \ldots, C_n) \in C \subset \mathbb{R}^n$ и в неявном виде описывающая семейство функций, составляющих *общее решение* этой системы в области G. Часто О. и. системы (1) наз. не соотношения (2), а совокупность функций

$$\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Каждое из соотношений (2) [или каждая из функций (3)] наз. *первым интегралом* системы (1). Иногда под О. и. системы (1) понимают совокупность более общих, чем (2), соотношений

$$\Phi_i(t, x_1, \ldots, x_n, C_1, \ldots, C_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В случае обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

О. и. в области G представляет собой одно соотношение с n параметрами

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0,$$

в виде неявной функции описывающее общее решение этого уравнения в области G.

О. и. дифференциального уравнения с частными производными 1-го порядка наз. соотношение между входящими в уравнение переменными, содержащее одну произвольную функцию и определяющее при каждом выборе этой функции решение уравнения.

См. также *Интеграл дифференциального уравнения*. *Лит.* см. при ст. *Общее решение*. *Н. Х. Розов.*

ОБЩИХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ СИСТЕМА — множество R мощности m, являющееся *различных представителей системой* для каждого из t семейств подмножеств $F_1, F_2, \ldots, F_t$ заданного множества S, каждое из к-рых состоит из m членов. Пусть $t = 2$, m конечно, $F_1 = \{F_1', F_2', \ldots, F_m'\}$, $F_2 = \{F_1'', F_2'', \ldots, F_m''\}$, $S = \bigcup_{i=1}^m F_i' = \bigcup_{i=1}^m F_i''$. О. п. с. для F_1 и F_2 существует тогда и только тогда, когда никакие k из множеств семейства F_1 не содержатся менее чем в k множествах из F_2 для каждого $k = 1, 2, \ldots, m$. Эта теорема справедлива также при бесконечном m, если только все подмножества семейств F_1 и F_2 конечны. Известны условия существования О. и. с. при $t > 2$, к-рые формулируются более сложно.

Лит.: [1] Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970. *В. Е. Тараканов.*

ОБЩНОСТИ КВАНТОР — то же, что *всеобщности квантор*.

ОБЪЕДИНЕНИЕ (сумма, соединение) множеств — одна из основных операций над множествами. Пусть имеется нек-рая (конечная или бесконечная) совокупность множества A_α (индексы α служат для различения элементов данной совокупности). Тогда множество тех элементов, к-рые принадлежат хотя бы одному из множеств, входящих в эту совокупность, наз. объединением множеств, образующих данную совокупность.

О. множеств A_α обозначается $\bigcup A_\alpha$, иногда ΣA_α. *М. И. Войцеховский.*

ОБЪЕКТ геометрический — см. *Геометрических объектов теория*.

ОБЪЕКТ категории — термин, используемый для обозначения элементов произвольной категории, играющих роль множеств, групп, топологич. пространств и т. п. О. категории — неопределяемое понятие.

Каждая категория состоит из элементов двух классов, наз. *классом объектов* и *классом морфизмов* соответственно. Класс О. категории $\mathfrak{K}$ обычно обозначается $Ob\mathfrak{K}$. Любому объекту A категории $\mathfrak{K}$ однозначно соответствует единичный морфизм 1_A, причем разным О. отвечают разные единичные морфизмы. Поэтому формально можно определить понятие категории только с помощью морфизмов. Однако термин «объект категории» является удобным языковым средством, к-рое практически всегда используется. Деление элементов категории на О. и морфизмы имеет смысл только в пределах фиксированной категории, так как О. одной категории могут быть морфизмами другой и наоборот. Благодаря наличию морфизмов между О. категории устанавливаются определенные взаимосвязи, что позволяет выделить специальные классы О.: *интегральные объекты*, *нулевые объекты*, *малые объекты*, *проективные объекты*, *инъективные объекты* и т. д.

М. Ш. Цаленко.

ОБЪЕМ *трехмерного тела* — числовая характеристика тела, равная в простейшем случае, когда тело можно разбить на конечное множество единичных кубов (т. е. кубов с ребрами длины единица), числу этих кубов. О. трехмерных тел (т. е. множеств трехмерного евклидова пространства), для к-рых они определены, обладают свойствами, аналогичными свойствам *площадей* плоских фигур: 1) О. неотрицательны; 2) О. аддитивны: если для двух тел P и Q, не имеющих общих внутренних точек, определены О. $v(P)$ и $v(Q)$, то О. их объединения равен сумме их О. $v(P \cup Q) = v(P) + v(Q)$; 3) О. инвариантны относительно перемещений: если для тел P и Q определены О. и они конгруентны, то $v(P) = v(Q)$; 4) О. единичного куба равен единице. Из этих свойств следуют монотонность О.: если для тел P и Q определены О. $v(P)$, $v(Q)$ и $P \subset Q$, то выполняется неравенство $v(P) \leqslant v(Q)$, и равенство отношения О. подобных тел кубу коэффициента подобия.

На множестве всех многогранников существует и притом единственная неотрицательная функция, удовлетворяющая свойствам 1) — 4). Однако если на плоскости два любых равновеликих (имеющих одинаковую площадь) многоугольника равносоставлены, т. е. каждый из них допускает разбиение на многоугольники, из к-рых можно составить другой, то в пространстве аналогичное свойство уже не имеет места: существуют равновеликие (имеющие равные О.), но не равносоставленные многогранники (см. *Равновеликие и равносоставленные фигуры*).

Понятие О. распространяется с сохранением свойств 1) — 4) при помощи предельного перехода с множества многогранников на более широкие классы тел, напр. на тела с *кусочно гладкой границей*, в частности на шары, шаровые слои, шаровые сегменты и секторы, цилиндры, конусы и т. п. Если граница ограниченного тела G является кусочно гладкой поверхностью, то его О. $v(G)$ определяется следующим образом. Рассматриваются всевозможные многогранники P, лежащие в теле G, и всевозможные многогранники Q, содержащие в себе тело G: $P \subset G \subset Q$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{P \subset Q} v(P) = \inf_{Q \supset G} v(Q).$$

Это общее значение указанных нижней и верхней граней и наз. *объемом* $v(G)$ тела G. Аналогично случаю вычисления площадей плоских фигур для вычисления О. тел также применяется метод разбиения тела на части, для к-рых О. либо уже известен, либо может быть найден более простым путем. При этом для О. справедлив *принцип Кавальери*: если два тела, для к-рых определен О., пересекаются каждой плоскостью, параллельной нек-рой заданной, по конгруэнтным плоским фигурам, то они равновелики. Об-

щий метод вычисления О. дает интегральное исчисление: вычисление О. сводится к вычислению соответствующих кратных интегралов. Интегральное исчисление дает возможность обосновать и принцип Кавальери.

Расширение понятия О. на еще более широкий класс подмножеств трехмерного евклидова пространства приводит к понятию трехмерной *Жордана меры* и понятию кубируемого множества. Все упоминавшиеся выше тела являются кубируемыми множествами и потому для них определена мера Жордана.

Если M^3 — трехмерное непрерывно дифференцируемое многообразие с римановой метрикой

$$ds^2 = \sum_{i,\ j=1}^{3} g_{ij}dx^i dx^j$$

и $g = \det \| g_{ij} \|$, то о б ъ е м о м м н о ж е с т в а E, лежащего в многообразии M^3, наз. величина интеграла

$$\iiint_E |g|\, dx^1 dx^2 dx^3.$$

Так определенный О. множества инвариантен относительно выбора локальных координат на рассматриваемом многообразии.

Определение О. трехмерного тела обобщается на случай подмножества произвольного n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$; n-м е р н ы м о б ъ е м о м также наз. функция множества, удовлетворяющая условиям 1) — 4), если только под кубом понимать n-мерный куб. Вычисление О. множеств n-мерного пространства сводится к вычислению n-кратных интегралов.

Если E есть n-мерный параллелепипед, натянутый на радиус-векторы $a_1, \ldots, a_n$, то

$$v(E) = \sqrt{|\det \| a_i,\ a_j \| |}$$

(под корнем стоит абсолютная величина определителя Грама векторов $a_1, \ldots, a_n$).

О. подмножества E n-мерного риманова многообразия с метрикой

$$ds^2 = \sum_{i,\ j=1}^{n} g_{ij}dx^i dx^j$$

наз. величина интеграла

$$\int \ldots \int_E |g|\, dx^1 \ldots dx^n,$$

где $g = \det \| g_{ij} \|$.

Обобщением понятия О. является понятие *меры*. Иногда термины «О». и «мера» употребляются как синонимы.

Понятие О. рассматривается не только в евклидовых, но и в аффинных пространствах. Пусть E — подмножество n-мерного аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть в $\mathbb{R}^n$ задана аффинная система координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Пусть

$$V_x(E) = \int \ldots \int_E dx^1 \ldots dx^n.$$

Если $(y^1, \ldots, y^n)$ — другая система координат и $y^i = a^i_j x^j + b^i$, то

$$V_y(E) = \left| \det \left\| a^i_j \right\| \right| V_x(E),$$

т. е. интеграл $V_x(E)$ является знакопостоянным относительным инвариантом веса — 1. Относительный инвариант $V_x(E)$ наз. а ф ф и н н ы м О. множества E. Аффинный О. не меняется при параллельном переносе, и если $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ и $V_x(E_1)$, $V_x(E_2)$ определены, то $V_x(E) = V_x(E_1) + V_x(E_2)$. Аффинный О. обладает следующими свойствами, инвариантными относительно аффинного преобразования координат: 1) если О. двух тел равны в одной системе координат, то они равны и в другой; 2) если О. нек-рого множе-

ства равен сумме О. двух множеств в одной координатной системе, то это равенство верно и в другой; 3) отношение О. двух множеств является инвариантом аффинного преобразования координат.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — координатные векторы системы координат $x_1, \ldots, x_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ и пусть их начала находятся в нек-рой фиксированной точке $0 \in \mathbb{R}^n$. Если $a_i = a_i^j e_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— нек-рая система векторов с началом в точке O и E есть n-мерный параллелепипед, натянутый на векторы $a_1, \ldots, a_n$, то

$$V_x(E) = |\det \|a_i^j\||.$$

Величина $\det\|a_i^j\|$ наз. ориентированным объемом параллелепипеда E относительно выбранного базиса $e_1, \ldots, e_n$.

Лит.: [1] Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; [3] Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; [4] Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971.
Л. Д. Кудрявцев.

ОБЪЕМНОСТИ АКСИОМА — одна из аксиом теории множеств, утверждающая равенство двух множеств, если они содержат одни и те же элементы:

$$\forall u\, \forall v\, (\forall x\, (x \in u \Longleftrightarrow x \in v) \Rightarrow u = v).$$

В языке, не содержащем символа равенства и имеющем только один предикатный символ $\in$, О. а. имеет вид

$$\forall u\, \forall v\, (\forall x\, (x \in u \Longleftrightarrow x \in v) \Rightarrow \forall z\, (u \in z \Rightarrow v \in z)).$$

Для формализации математики в системе Цермело — Френкеля ZF О. а. не имеет существенного значения. Все, что может быть построено в рамках системы ZF, может быть формализовано в системе без О. а. Пусть ZF^- — система ZF, получающаяся из ZF удалением О. а. и заменой в остальных аксиомах формул вида $u = v$ на формулу

$$\forall x\, (x \in u \Longleftrightarrow x \in v).$$

Тогда можно показать, что существует *интерпретация* системы ZF в ZF^-. Аналогичное утверждение справедливо и для теории типов.

Для системы NF Куайна, получающейся из теории типов «стиранием» типовых индексов, положение меняется: в системе NF^- невозможно интерпретировать систему NF. Система NF^- (NF без О. а.) довольно слабая теория, ее непротиворечивость доказуема в формальной арифметике. В то время как система NF не слабее теории типов с аксиомой бесконечности.

Лит.: [1] Handbook of Mathematical Logic, Amst.—N. Y.—Oxf., 1977; [2] Boffa M., «J. Symbol. Logic», 1977, v. 42, № 2, p. 215—20.
В. Н. Гришин.

ОБЪЕМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ — выражение вида

$$u(x) = \int_D h(|x-y|)\, f(y)\, dv(y), \qquad (*)$$

где D — конечная область евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, ограниченная замкнутой поверхностью (при $N = 2$ — кривой) Ляпунова S, $h(|x-y|)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа,

$$h(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{(N-2)\,\omega_N\,|x-y|^{N-2}}, & N \geqslant 3; \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|}, & N = 2; \end{cases}$$

$\omega_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^N$, $|x-y|$ — расстояние между точками x и y, $dv(y)$ — элемент объема D.

Если $f(y) \in C^{(1)}(\bar{D})$, то О. п. определен для всех $x \in \mathbb{R}^N$ и $u(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^N)$. При этом в дополнительной области $C\bar{D}$ функция $u(x)$ имеет производные всех по-

рядков и удовлетворяет *Лапласа уравнению* $\Delta u(x)=0$, т. е. является *гармонической функцией*; при $N \geqslant 3$ эта функция регулярна на бесконечности, $u(\infty)=0$. В области D О. п. $u(x)$ принадлежит классу $C^{(2)}(D)$ и удовлетворяет *Пуассона уравнению* $\Delta u(x)=-f(x)$.

Эти свойства обобщаются в различных направлениях. Напр., если $f(y) \in L^{(\infty)}(D)$, то $u(x) \in C(\mathbb{R}^N)$, $u(x) \in C^{(\infty)}(C\overline{D})$, $\Delta u(x)=0$ в $C\overline{D}$, в D существуют обобщенные производные 2-го порядка от $u(x)$ и почти всюду в D удовлетворяется уравнение Пуассона $\Delta u(x)=-f(x)$. Изучены также свойства О. п. произвольной меры μ Радона, сосредоточенной на N-мерной области D:

$$u(x)=\int h(|x-y|)\,d\mu(y).$$

Здесь также $u(x) \in C^{(\infty)}(C\overline{D})$ и $\Delta u(x)=0$ в $C\overline{D}$, $\Delta u(x)=-\mu'(x)$ почти всюду в D, где $\mu'(x)$ — производная меры μ по мере Лебега в $\mathbb{R}^N$. В определении (*) фундаментальное решение оператора Лапласа можно заменить на произвольную функцию Леви для общего эллиптич. оператора 2-го порядка L с переменными коэффициентами класса $C^{(0,\,\lambda)}(\overline{D})$; при этом перечисленные выше свойства остаются в силе с заменой Δu на Lu (см. [2]—[4]).

О. п. применяется при решении краевых задач для эллиптич. уравнений с частными производными (см. [2] — [5]).

При решении краевых задач для параболич. уравнений используется также понятие объемного теплового потенциала вида

$$v(x,\ t)=\int_0^t d\tau \int_D G(x,\ t;\ y,\ \tau)\,f(y,\ \tau)\,dv(y),$$

где $G(x,\ t;\ y,\ \tau)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^N$:

$$G(x,\ t;\ y,\ \tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N (t-\tau)^{N/2}} \exp\left[-|x-y|^2/4(t-\tau)\right],$$

$f(y,\ \tau)$ — плотность. Функция $v(x,\ t)$ и ее обобщения на случай произвольного параболич. уравнения 2-го порядка имеют свойства, близкие к указанным выше для $u(x)$ (см. [3] — [6]).

Лит.: [1] Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953; [2] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, пер. с итал., М., 1957; [3] Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; [4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, 5 изд., т. 4, М., 1958; [5] Фридман А., Уравнения с частными производными параболического типа, пер. с англ., М., 1968; [6] Бицадзе А. В., Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.

Е. Д. Соломенцев.

ОВАЛ — замкнутая выпуклая C^2-гладкая линия в $\mathbb{R}^2$. Точки О., в к-рых кривизна достигает экстремума, наз. вершинами О. Число вершин О. не менее четырех.

Пусть E—О., пробегаемый против часовой стрелки, в плоскости с декартовыми прямоугольными координатами x, y; h — расстояние ориентированной касательной к E от начала O ($h>0$, если вращение касательной вокруг O происходит против часовой стрелки). Тогда уравнение касательной

$$x\cos\tau+y\sin\tau=h(\tau),$$

где τ — угол касательной с осью Ox. Величина $h(\tau)$ наз. опорной функцией О. Радиус кривизны О.:

$$r=h+\frac{d^2h}{d\tau^2};$$

длина О. (формула Коши):

$$L=\int_{-\pi}^{\pi} h(\tau)\,d\tau.$$

Между длиной L и площадью F области внутри О. выполняется соотношение

$$L^2 - 4\pi F \geqslant 0$$

(уточнение см. в ст. *Боннезена неравенство*).

А. Б. Иванов.

ОВОИД, о в а л о и д,— множество O точек нек-рого пространства, к-рое произвольная прямая пересекает не более чем в двух точках, а прямые, касательные к O в каждой его точке, лежат в гиперплоскости. В проективном пространстве нелинейчатая квадрика является О. Этот термин используется в основном для конечных геометрий.

В конечных проективных пространствах размерности большей трех О. не существует. В трехмерных пространствах порядка $q > 2$ О. является максимальной k-шапкой и состоит из q^2+1 точек, для нечетного q каждый О. является эллиптич. квадрикой (см. [1]). В плоскости порядка q О. наз. о в а л о м и содержит $q+1$ точек. В дезарговой плоскости нечетного порядка любой овал однозначно представим невырожденной коникой над полем Галуа (см. [2]).

Лит.: [1] S e g r e B., Introduction to Galois geometries, Roma, 1967; [2] е г о ж е, «Canad. J. Math.», 1955, v. 7, № 3, p. 414—16; [3] T i t s J., «Rend. mat. e applic.», 1962, v. 21, p. 37—59.

В. В. Афанасьев.

ОВРАЖНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ — численные методы отыскания минимумов функций многих переменных. Пусть задана ограниченная снизу дважды непрерывно дифференцируемая по своим аргументам функция

$$J(x) = J(x_1, \ldots, x_m),$$

для к-рой известно, что при нек-ром векторе $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)^T$ (^{T} — знак транспонирования) она принимает наименьшее значение. Требуется построить последовательность векторов $\{x_n\}$, $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{mn})^T$, такую, что

$$\lim_{n \to \infty} J(x_n) = J(x^*).$$

Существует много методов, позволяющих получить указанную последовательность векторов. Однако общим недостатком большинства алгоритмов является резкое ухудшение их свойств в случаях, когда поверхности уровня минимизируемой функции $J(x) = \text{const}$ имеют структуру, сильно отличающуюся от сферической. В этом случае нек-рую область Q, в к-рой норма вектора-градиента

$$J'(x) = \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial x_m} \right)^T$$

существенно меньше, чем в остальной части пространства, наз. д н о м о в р а г а, а саму функцию — о в р а ж н о й ф у н к ц и е й. Если размерность пространства аргументов минимизируемой функции больше двух, то структура поверхностей уровня овражных функций может оказаться весьма сложной. Появляются $(m-k)$-мерные овраги, где число k изменяется от 1 до $m-1$. В трехмерном пространстве, напр., возможны одномерные и двумерные овраги.

Функции овражного типа локально характеризуются плохой обусловленностью матриц двух производных (м а т р и ц Г е с с е)

$$J''(x) = \left\| \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

что приводит к сильному изменению функции $J(x)$ вдоль направлений, совпадающих с собственными векторами матрицы Гессе для больших собственных чисел, и к слабому изменению вдоль других направлений, отвечающих малым собственным значениям матрицы Гессе.

Большинство известных методов оптимизации позволяет достаточно быстро попадать на дно оврага, при-

водя иногда к существенному уменьшению значения функции $J(x)$ по сравнению с его значением в начальной точке (спуск на дно оврага). Однако далее процесс резко замедляется и практически останавливается в нек-рой точке из Q, к-рая может быть расположена очень далеко от истинной точки минимума.

Дважды непрерывно дифференцируемая по своим аргументам функция $J(x)$ наз. о в р а ж н о й ф у н к ц и е й (см. [1]), если существует нек-рая область $G \subset \mathbb{R}^m$, где собственные значения матрицы Гессе $J''(x)$, упорядоченные в любой точке $x \in G$ по убыванию модулей, удовлетворяют неравенствам

$$0 < \left| \min_i \lambda_i(x) \right| \ll \lambda_1(x). \tag{1}$$

Степень овражности характеризуется числом

$$S = \lambda_1 / \left| \min_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i \right|. \tag{2}$$

Если собственные значения $J''(x)$ в области G удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_m(x)| \ll \ldots \ll |\lambda_{m-r+1}(x)| \ll \lambda_{m-r}(x) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_1(x),$$

то число r наз. р а з м е р н о с т ь ю о в р а г а функции $J(x)$ при $x \in G$ (см. [1]).

Системы дифференциальных уравнений, описывающие траекторию спуска овражной функции $J(x)$,

$$\frac{dx}{dt} = -J'(x), \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

являются *жесткими дифференциальными системами*.

В частности, когда функция $J(x)$ сильно выпуклая и матрица Гессе положительно определена (все ее собственные значения строго больше нуля), неравенства (1) совпадают с известным требованием плохой обусловленности матрицы Гессе

$$k(J''(x)) = \max_i \lambda_i(x) / \min_i \lambda_i(x) \gg 1.$$

В этом случае спектральное число обусловленности совпадает со степенью овражности.

Метод покоординатного спуска (см. [2])

$$J(x_{1,\,k+1}, \ldots, x_{i-1,\,k+1}, x_{i,\,k+1}, x_{i+1,\,k}, \ldots, x_{m,\,k}) = \min_y J(x_{1,\,k+1}, \ldots, x_{i-1,\,k+1}, y, x_{i+1,\,k}, \ldots, x_{m,\,k}),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

несмотря на простоту и универсальность, в овражной ситуации эффективен лишь в редких случаях ориентации оврагов вдоль координатных осей.

Предложена (см. [2]) модернизация метода (4), состоящая в использовании процедуры вращения осей координат так, чтобы одна из осей была направлена вдоль $x_k - x_{k-1}$, после чего начинается поиск на $(k+1)$-м шаге. Такой подход приводит к тому, что одна из осей имеет тенденцию выстраиваться вдоль образующей дна оврага, позволяя в ряде случаев весьма успешно проводить минимизацию функций с одномерными оврагами. В случае многомерных оврагов метод непригоден.

Схема метода наискорейшего спуска задается разностным уравнением

$$x_{k+1} = x_k - h_k J'_k, \quad J'_k = J'(x_k), \tag{5}$$

где h_k выбирается из условия

$$J(x_{k+1}) = \min_{h>0} J(x_k - h J'_k).$$

Для сильно выпуклой овражной функции, в частности квадратичной

$$J(x) = \frac{1}{2} x^T D x - b^T x, \tag{6}$$

последовательность $\{x_k\}$, построенная алгоритмом (5), сходится к точке минимума функции x^* по закону геометрич. прогрессии (см. [3])

$$\| x_k - x^* \| \leqslant C q^k,$$

где $C = \text{const}$,

$$q = [k(J''(x^*)) - 1]/[k(J''(x^*)) + 1].$$

Так как для овражной функции $k(J''(x^*)) \geqslant 1$, то $q \simeq 1$ и сходимость практически отсутствует.

Аналогичная картина наблюдается и для простой градиентной схемы (см. [4])

$$x_{k+1} = x_k - hJ'_k, \quad J_{k+1} = J(x_{k+1}), \quad h = \text{const}. \tag{7}$$

Ускорение ее сходимости основано на использовании результатов предыдущих итераций для уточнения дна оврага. Может быть использован (см. [4] [5]) градиентный метод (7) с вычислением на каждой итерации отношения $q = \|J'_k\| / \|J'_{k-1}\|$. Когда оно устанавливается около нек-рого постоянного значения $q = 1$, делается большой ускоряющий шаг согласно выражению

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h}{1-q} J'_k.$$

Далее из точки x_{k+1} продолжается спуск градиентным методом до следующего ускоряющего шага.

Различные версии метода параллельных касательных (см. [4] — [6]) основаны на выполнении ускоряющего шага вдоль направления $x_{k+2} - x_k$, задаваемого точками x_k, x_{k+2} в градиентном методе. В методе «тяжелого шарика» (см. [4]) очередное приближение имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha J'_k + \beta (x_k - x_{k-1}).$$

В методе оврагов (см. [7]) предлагается провести локальные спуски градиентным методом (7) из двух случайно выбранных исходных точек, а затем выполнить ускоряющий шаг по направлению, задаваемому двумя полученными на дне оврага точками.

Все эти методы немногим сложнее градиентного метода (7) и построены на его основе. Ускорение сходимости получается для одномерных оврагов. В более общих случаях многомерных оврагов, где сходимость этих схем резко замедляется, приходится обращаться к более мощным методам квадратичной аппроксимации, в основе к-рых лежит метод Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - (J''_k)^{-1} J'_k, \quad J''_k = J''(x_k). \tag{8}$$

Точка минимума функции (6) удовлетворяет системе линейных уравнений

$$D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{9}$$

и при условии абсолютной точности всех вычислений для квадратичной функции метод Ньютона независимо от степени овражности (2) и размерности оврагов приводит к минимуму за один шаг. На самом деле, при больших числах обусловленности $k(D)$ при ограниченной разрядности вычислений задача получения решения (9) может быть некорректной, и небольшие деформации элементов матрицы D и вектора $\boldsymbol{b}$ могут приводить к большим вариациям x^*.

При умеренных степенях овражности в выпуклой ситуации метод Ньютона часто оказывается более предпочтительным по скорости сходимости, чем другие, напр. градиентные, методы.

Большой класс квадратичных (квазиньютоновских) методов основан на использовании сопряженных направлений (см. [2], [3], [8]). Эти алгоритмы для случая минимизации выпуклой функции оказываются весьма эффективными, ибо, имея квадратичное окончание, они не требуют вычисления матрицы двух производных.

Иногда (см. [8]) итерации строятся по схеме

$$x_{k+1}=x_k-(\beta_k E+J''_k)^{-1}J'_k, \qquad (10)$$

где E — единичная матрица. Скаляр β_k подбирается так, чтобы матрица $J''_k+\beta_k E$ была положительно определенной и чтобы

$$\|x_{k+1}-x_k\|\leqslant\varepsilon_k.$$

Существует ряд *аналогичных подходов* (см. [8]), основанных на получении строго положительно определенных аппроксимаций матрицы Гессе. При минимизации овражных функций такие алгоритмы оказываются малоэффективными из-за трудностей в подборе параметров β_k, ε_k и т. д. Выбор этих параметров основан на информации о величине наименьших по модулю собственных значений матрицы Гессе, а при реальных вычислениях и большой степени овражности эта информация сильно искажена.

Более целесообразно обобщение метода Ньютона на случай минимизации овражных функций проводится на базе непрерывного принципа оптимизации. Функции $J(x)$ ставится в соответствие дифференциальная система (3), интегрируемая системным методом (см. *Жесткая дифференциальная система*). Алгоритм минимизации принимает вид

$$\left.\begin{gathered}
x_{k+1}=x_k-\Phi\left(2^N h_k^0\right)J'_k,\\
\Phi\left(2^N h_k^0\right)=\int_0^{2Nh_k^0}\exp\left(-J''_k\tau\right)d\tau,\\
J_{k+1}=\min_N J\left(x_k-\Phi\left(2^N h_k^0\right)J'_k\right),\\
h_k^0\leqslant 1/\|J''_k\|,\\
\Phi\left(h_k^0\right)=h_k^0\left[E-\frac{h_k^0}{2}J''_k+\frac{\left(h_k^0\right)^2}{6}(J''_k)^2-\ldots\right],\\
\Phi\left(2^{s+1}h_k^0\right)=\Phi\left(2^s h_k^0\right)\left[2E-J''_k\Phi\left(2^s h_k^0\right)\right],\\
s=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.
\end{gathered}\right\} \qquad (11)$$

Предложен [1] алгоритм минимизации овражной функции, основанный на использовании свойств жестких систем. Пусть функция $J(x)$ в окрестности x_0 аппроксимируется квадратичной функцией (6). Матрица D и вектор b вычисляются, напр., с помощью конечно-разностной аппроксимации. Из представления элементов матрицы

$$d_{ij}=\sum_{s=1}^m u_{is}u_{js}\lambda_s,$$

где $u_s=(u_{1s},\ \ldots,\ u_{ms})^T$, $s=1,\ \ldots,\ m$,—ортонормированный базис собственных векторов D, следует, что неточное измерение этих элементов искажает информацию о малых собственных значениях плохо обусловленной матрицы, а следовательно, приводит к некорректности задачи минимизации функции (6).

Вместе с тем система дифференциальных уравнений спуска для овражной функции (6)

$$\frac{dx}{dt}=-Dx+b,\quad x(0)=x_0$$

имеет решение, в к-ром в силу условия (1) слагаемые с сомножителями $\exp(-\lambda_1 t)$ оказывают влияние лишь на малом начальном отрезке длиной $\tau_{\text{пс}}=O(\lambda_1^{-1})$.

Другими словами, компоненты вектора $x(t)$ удовлетворяют равенству

$$x^T(t)u_1-\lambda_1^{-1}b^Tu_1=\left(x_0^Tu_1-\lambda_1^{-1}b^Tu_1\right)\exp(-\lambda_1 t),$$

быстро переходящему в стационарную связь

$$\sum_{i=1}^m u_{i1}\bar{x}_i-\lambda_1^{-1}\sum_{i=1}^m b_iu_{i1}=0, \qquad (12)$$

где $\bar{x}_i$ — компоненты вектора, удовлетворяющие равенству (12). Это свойство используется в алгоритме. Выражая j-ю компоненту вектора $\bar{x}$, к-рой соответствует максимальная компонента вектора u_1, через остальные компоненты, вместо функции $J(x)$ получают новую функцию с аргументом размерности $(m-1)$:

$$J\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, -\right.$$
$$\left. -u_{j1}^{-1}\sum_{i=1,\ i\neq j}^{m}\left(u_{i1}\bar{x}_i - \lambda_1^{-1}b_i u_{i1}\right),\ x_{j+1}, \ldots, x_m\right) =$$
$$= \bar{J}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{j-1}, \bar{x}_{j+1}, \ldots, \bar{x}_m). \qquad (13)$$

По функции (13) с помощью конечноразностной аппроксимации находится новая матрица $\bar{D}$ порядка $(m-1)$ и вектор $\bar{b}$. Здесь важно не только и не столько понижение размерности пространства поиска, сколько уменьшение степени овражности, т. к. при минимизации новой функции в подпространстве, ортогональном вектору u_1, большое собственное значение уже не оказывает влияния на вычислительный процесс. Самым существенным моментом здесь является требование получения $\bar{D}$ и $\bar{b}$ по функции (13), а не по матрице D и вектору b. Коэффициенты связи (12) находят степенным методом, как коэффициенты любого уравнения системы

$$D^k x = D^{k-1} b.$$

Если степень овражности не понижается или понижается незначительно, то процесс исключения координат вектора x продолжается рекурсивно до необходимого ее уменьшения.

Лит.: [1] Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г., Численные методы решения жестких систем, М., 1979; [2] Сеа Ж., Оптимизация. Теория и алгоритмы, пер. с франц., М., 1973; [3] Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975; [4] Поляк Б. Т., «Экономика и математич. методы», 1967, т. 3, № 6, с. 881—902; [5] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М., 1963; [6] Уайлд Д.-Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ., М., 1967; [7] Гельфанд И. М., Цетлин М. Л., «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, № 2, с. 295—98; [8] Численные методы условной оптимизации, пер. с англ., М., 1977.

Ю. В. Ракитский.

ОГИБАЮЩАЯ семейства кривых на плоскости — кривая, к-рая в каждой точке касается одной из кривых семейства, причем касания вдоль О. переходит от одной кривой семейства к другой. Напр., для семейства окружностей одинакового радиуса с центрами на прямой О. состоит из двух параллельных прямых. Если C — параметр семейства, t — параметр вдоль О., $C(t)$ — значение C для одной из кривых семейства, касающихся О. в точке с параметром t, то предполагается возможность выбора $C(t)$ так, что функция $C(t)$ ни на каком участке изменения t не постоянна.

Для семейства кривых, заданного уравнением $f(x, y, z)=0$, где $f\in C^1$ и $|f'_x|+|f'_y|\neq 0$, необходимым признаком существования О. является выполнение при $x(t)$, $y(t)$, $C(t)$ условий

$$f=0,\ f'_C=0. \qquad (1)$$

Система (1) служит для нахождения точек О., но (1) могут удовлетворять и другие особые точки семейства. Достаточным признаком точек О. является $f\in C^2$ и выполнение, кроме (1), условия

$$f''_{CC}\neq 0,\ \frac{D(f,\ f'_C)}{D(x,\ y)}\neq 0. \qquad (2)$$

Для семейства плоских кривых, заданных C^1-гладкой функцией

$$r(u,\ C)=\{x(u,\ C),\ y(u,\ C)\},$$

где C — параметр семейства, u — параметр вдоль

его кривых, необходимым признаком точек О. является $r_u \| r_C$ или, что то же,

$$\varphi = \frac{D(x, y)}{D(u, C)} = 0. \tag{3}$$

Достаточным признаком является $r \in C^2$ и выполнение, кроме (3), условия

$$r_u \varphi'_C - r_C \varphi'_u \neq 0. \tag{4}$$

Нарушение условий (2), (4) чаще всего связано с появлением на О. точки возврата.

Для зависящего от одного параметра C **семейства поверхностей** в пространстве О. есть поверхность, к-рая в каждой ее точке с внутренними параметрами (u, v) касается поверхности семейства с параметром $C(u, v)$, причем функция $C(u, v)$ ни в какой области изменения (u, v) не постоянна. Напр., для сфер одинакового радиуса с центрами на прямой О. является цилиндром. Для семейства, заданного уравнением $f(x, y, z, C) = 0$, где $f \in C^1$ и $|f'_x| + |f'_y| + |f'_z| \neq 0$, необходимым признаком О. является система равенств

$$f = 0, \ f'_C = 0, \tag{5}$$

а достаточным: $f \in C^2$ и выполнение, кроме (5), условий

$$f''_{CC} \neq 0, \quad \left| \frac{D(f, f'_C)}{D(x, y)} \right| + \left| \frac{D(f, f'_C)}{D(y, z)} \right| + \left| \frac{D(f, f'_C)}{D(z, x)} \right| \neq 0. \tag{6}$$

Для семейства $r(u, v, C)$, где $r \in C^1$ и $r_u \times r_v \neq 0$, необходимым признаком О. служит равенство

$$\varphi = (r_u r_v r_C) = 0, \tag{7}$$

а достаточным: $r \in C^2$ и выполнение, кроме (7), условий

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_C \\ r_u^2 & r_u r_v & r_u r_C \\ r_u r_v & r_v^2 & r_v r_C \end{vmatrix} \neq 0, \ |\varphi'_u| + |\varphi'_v| \neq 0. \tag{8}$$

С нарушением первых из условий (6), (8) чаще всего связано появление на О. ребра возврата. Линию касания О. с одной поверхностью семейства наз. **характеристикой**. Ребро возврата на О. в свою очередь обычно является О. характеристик.

Для зависящего от **двух параметров** A, B семейства поверхностей в пространстве О. есть поверхность, касающаяся в каждой своей точке (u, v) поверхности семейства с параметрами $A(u, v)$, $B(u, v)$, причем ни в какой области изменения (u, v) не существует такой функции $\Phi \in C^1$, что $A(u, v) = \Phi(B(u, v))$. Для семейства, заданного уравнением $f(x, y, z, A, B) = 0$, где $f \in C^1$ и $|f'_x| + |f'_y| + |f'_z| \neq 0$, необходимым признаком О. является система

$$f = 0, \ f'_A = 0, \ f'_B = 0, \tag{9}$$

а достаточным: $f \in C^2$ и выполнение, кроме (9), условий

$$\frac{D(f, f'_A, f'_B)}{D(x, y, z)} \neq 0, \ \frac{D(f'_A, f'_B)}{D(A, B)} \neq 0.$$

Для семейства $r(u, v, A, B)$, где $r \in C^1$ и $r_u \times r_v \neq 0$, необходимым признаком О. служит система

$$\varphi = (r_u r_v r_A) = 0, \ \psi = (r_u r_v r_B) = 0, \tag{10}$$

а достаточным: $r \in C^2$ и выполнение, кроме (10), условий

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_A & \varphi'_B \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_A & \psi'_B \\ r_u^2 & r_u r_v & r_u r_A & r_u r_B \\ r_v r_u & r_v^2 & r_v r_A & r_v r_B \end{vmatrix} \neq 0, \ \frac{D(\varphi, \psi)}{D(A, B)} \neq 0.$$

Более сложное понятие О. для зависящего от k параметров семейства m-мерных подмногообразий в n-мерном многообразии вводится (см. [1]) на основе теории осо-

бенностей дифференцируемых отображений как специальный вид особенности семейства.

Лит.: [1] Залгаллер В. А., Теория огибающих, М., 1975; [2] Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, пер. с франц., М., 1960; [3] Толстов Г. П., «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 4, с. 173—79.

В. А. Залгаллер.

ОГРАНИЧЕННО КОМПАКТНОЕ МНОЖЕСТВО в линейном топологическом пространстве X — такое множество M, что замыкание $\overline{N}$ всякого ограниченного подмножества $N \subset M$ компактно и содержится в M (для нормированного пространства в сильной, соответственно слабой, топологии это равносильно компактности, соответственно слабой компактности, пересечений M с шарами). Выпуклое замкнутое множество в нормированном пространстве является О. к. м. в том и только в том случае, когда оно локально компактно. О. к. м. находят применение в теории приближения в банаховых пространствах; они обладают свойством существования *наилучшего приближения элемента*. Бочечное линейное топологич. пространство, являющееся (в самом себе) О. к. м. в слабой, соответственно сильной, топологии есть рефлексивное пространство, соответственно монтелево пространство. Нормированное пространство, являющееся О. к. м., конечномерно.

Лит.: [1] Klee V. L., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1953, v. 74, p. 10—43; [2] Эдвардс Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969.

Л. П. Власов.

ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА ФУНКЦИЯ в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ — *мероморфная функция* $f(z)$ в области D, представимая в D в виде отношения двух ограниченных аналитич. функций:

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}, \quad |g_1|, |g_2| \leqslant 1, \quad z \in D. \tag{1}$$

Наиболее изучен класс $N(\Delta)$ О. в. ф. в единичном круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Для того чтобы мероморфная в Δ функция $f(z) \in N(\Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы ее характеристика $T(r; f)$ была ограниченной (теорема Неванлинны):

$$T(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta + \sum \ln \frac{r}{|b_\nu|} + \lambda \ln r \leqslant C(f) < \infty, \quad 0 < r < 1. \tag{2}$$

Здесь сумма в правой части составлена по всем полюсам b_ν функции $f(z)$ таким, что $0 < |b_\nu| < r$, причем каждый полюс берется столько раз, каков его порядок; $\lambda \geqslant 0$ — порядок полюса в начале координат. Поэтому О. в. ф. класса $N(\Delta)$ наз. также функциями с ограниченной характеристикой. Представляет интерес также следующее достаточное условие: если мероморфная функция $f(z)$ в Δ не принимает множества значений E положительной *емкости*, cap $E > 0$, то $f(z) \in N(\Delta)$.

Функции $f(z)$ класса $N(\Delta)$ обладают следующими свойствами: 1) почти всюду на единичной окружности $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ функция $f(z)$ имеет угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$, причем $\ln |f(e^{i\theta})| \in L^1(\Gamma)$; 2) если $f(e^{i\theta}) = 0$ на множестве точек Γ положительной меры, то $f(z) \equiv 0$; 3) функции $f(z) \in N(\Delta)$ характеризуются интегральным представлением вида

$$f(z) = z^m e^{i\lambda} \frac{B_1(z; a_\mu)}{B_2(z; b_\nu)} \times \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\theta})| \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \, d\theta \times \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \, d\Phi(\theta), \tag{3}$$

где m — целое число такое, что $f(z) - z^m\varphi(z)$, $\varphi(0)\neq 0, \infty$; λ — действительное число; $B_1(z; a_\mu)$ и $B_2(z; b_\nu)$ — *Бляшке произведения*, составленные по всем нулям $a_\mu\neq 0$ и полюсам $b_\nu\neq 0$ функции $f(z)$ внутри Δ с учетом их кратности; $\Phi(\theta)$ — сингулярная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$ с производной, равной нулю почти всюду.

Важное значение имеет также подкласс $N^*(\Delta)$ класса $N(\Delta)$, состоящий из всех голоморфных О. в. ф. $f(z)$ в Δ. Для того чтобы голоморфная функция $f(z)\in N^*(\Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось вытекающее из (2) условие

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant C(f)<\infty,\ 0<r<1. \quad (4)$$

Для функций $f(z)\in N^*(\Delta)$ в характеристич. представлении (3) $B_2(z; b_\nu)\equiv 1$, $m\geqslant 0$.

Условие (4) равносильно требованию, чтобы субгармонич. функция $\ln^+|f(z)|$ имела гармонич. мажоранту во всем круге Δ. В такой форме это условие употребляется обычно для определения класса $N^*(D)$ голоморфных функций $f(z)$ в произвольных областях $D\subset\mathbb{C}$: $f(z)\in N^*(D)$ тогда и только тогда, когда $\ln^+|f(z)|$ имеет гармонич. мажоранту во всей области D.

Пусть функция $w=w(z)$ реализует конформное универсальное накрывающее отображение $\Delta\to D$; это — однозначная аналитич. функция в Δ, автоморфная относительно соответствующей области D группы G дробно-линейных отображений круга Δ на себя. Для того чтобы $f(w)\in N^*(D)$, необходимо и достаточно, чтобы суперпозиция $f(w(z))$ была автоморфной относительно G и $f(w(z))\in N^*(\Delta)$. Если область D конечносвязная и ее граница ∂D спрямляемая, то угловые граничные значения $f(\zeta)$, $\zeta\in\partial D$, функции $f(z)\in N^*(D)$ существуют почти всюду на ∂D, причем $\ln|f(\zeta)|$ суммируем по гармонич. мере на ∂D (подробнее см. обзор [4]).

Пусть теперь $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$, $n>1$,— голоморфная функция многих переменных в единичном поликруге $\Delta^n=\{z\in\mathbb{C}^n : |z_j|<1,\ j=1, \ldots, n\}$, T^n — остов поликруга Δ^n, $T^n=\{z\in\mathbb{C}^n : |z_j|=1,\ j=1, \ldots, n\}$. Класс $N^*(\Delta^n)$ функций с ограниченной характеристикой определяют условием, обобщающим условие (4):

$$\int_{T^n}\ln^+|f(r\zeta)|\,dm_n(\zeta)\leqslant C(f)<\infty,\ 0<r<1,$$

где $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\in T^n$, $m_n(\zeta)$ — нормированная мера Хаара на T^n, $m_n(T^n)=1$. Голоморфная функция $f(z)$ класса $N^*(\Delta^n)$ почти всюду на T^n по мере Хаара m^n имеет радиальные граничные значения $\lim\limits_{r\to 1} f(r\zeta)=f(\zeta)$, $\zeta\in T^n$, причем $\ln|f(\zeta)|$ суммируем на T^n. Оставляя для О. в. ф. в $D=\Delta^n$ первоначальное определение (1), получают, что О. в. ф. $f(z)$ является функцией с ограниченной характеристикой, $N(\Delta^n)\subset N^*(\Delta^n)$. Однако при $n>1$ имеются функции $g(z)\in N^*(\Delta^n)$, заведомо не представимые в виде отношения двух ограниченных голоморфных функций (см. [5]).

Лит.: [1] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, пер. с нем., М.— Л., 1941; [2] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [3] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.— Л., 1950; [4] Итоги науки. Математический анализ. 1963, М., 1965, с. 5—80; [5] Рудин У., Теория функций в поликруге, пер. с англ., М., 1974.

Е. Д. Соломенцев.

ОГРАНИЧЕННО-ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ — словарная функция, характеризующая поведение *автомата конечного*. (Функция наз. словарной, если областью определения и областью значений ее являются множества слов или сверхслов.)

Если A — какой-либо алфавит, то пусть A^* обозначает множество всех слов, а A° — множество всех слов

или множество всех сверхслов в алфавите A. Функция f, отображающая A° в B°, где A и B — произвольные конечные алфавиты, наз. детерминированной функцией, если выполняются следующие два условия:

1) для любого α из A° длина $f(\alpha)$ равна длине α и

2) если α — слово длины l и $\alpha_1=\alpha\alpha'$, $\alpha_2=\alpha\alpha''$, где $\alpha', \alpha''\in A^\circ$, то значения $f(\alpha_1)$ и $f(\alpha_2)$ имеют одинаковые начала длины l.

Если детерминированная функция f определена на множестве A^∞ всех сверхслов в алфавите A, то в силу условий 1) и 2) она однозначно распространяется на множество A^*: для произвольного слова α длины l значение $f(\alpha)$ совпадает с началом длины l значения $f(\alpha\beta)$, где β — произвольное сверхслово в алфавите A. Таким образом, всякая детерминированная функция f удовлетворяет условию:

3) для любого слова α из A^* и любого β из A° справедливо равенство $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f_\alpha(\beta)$, где f_α — нек-рая детерминированная функция на множестве A°, однозначно определяемая словом α.

Функция f_α наз. остаточной функцией для f. Из условия 3) следует, что всякая детерминированная функция f определяет на множестве A^* отношение эквивалентности $R: \alpha R\beta$ тогда и только тогда, когда $f_\alpha=f_\beta$. Ранг этого отношения, или, что то же, максимальное число попарно различных остаточных функций, наз. весом детерминированной функции f. Если вес детерминированной функции конечен, то она наз. ограниченно-детерминированной функцией. Это понятие распространяется и на функции от m переменных, где $m\geqslant 2$, если наборы из m слов одинаковой длины (или сверхслов) в алфавитах $A_1, \ldots, A_m$ соответственно рассматривать как слова (сверхслова) в алфавите $A_1\times\ldots\times A_m$, являющемся декартовым произведением алфавитов $A_1, \ldots, A_m$. Таким же образом можно рассматривать О.-д. ф. с несколькими выходами, т. е. значениями к-рых являются наборы из k слов или сверхслов соответственно в алфавитах $B_1, \ldots, B_k$. Класс всех О.-д. ф. совпадает с классом функций, вычислимых конечными автоматами. Поэтому для задания О.-д. ф. могут быть использованы те же средства, что и для задания конечных автоматов, напр. канонич. уравнения (см. *Автомат конечный*, *Автоматов способы задания*). Отсюда следует, в частности, что класс О.-д. ф. с совпадающими алфавитами $A_1=\ldots=A_m=B$ замкнут относительно суперпозиций. Минимальный (по числу состояний) автомат $\mathfrak{A}(A, S, B, \varphi, \psi, s_1)$, вычисляющий О.-д. ф. f веса m, содержит n состояний и может быть построен следующим образом. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные представители всех классов эквивалентности отношения R. Каждому классу $R(\alpha_i)$, $i=1, \ldots, n$, ставится в соответствие нек-рое состояние s_i автомата $\mathfrak{A}$. Функция переходов φ и функция выходов ψ определяются следующими условиями: если $a\in A$ и $1\leqslant i\leqslant n$, то $\varphi(s_i, a)=s_j$, где состояние s_j соответствует классу $R(\alpha_i a)$; $\psi(s_i, a)=f_{\alpha_i}(a)$. В качестве начального берется состояние, соответствующее классу $R(e)$, где e — пустое слово.

Лит.: [1] Кудрявцев В. Б., Лекции по теории конечных автоматов, М., 1976; [2] Яблонский С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979. *Ю. И. Янов.*

ОГРАНИЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО — 1) О. м. в метрическом пространстве X (с метрикой $\rho(.,.)$) — множество A, диаметр к-рого

$$\delta(A)=\sup_{x,\ y\in A}\rho(x,\ y)$$

конечен.

2) О. м. в топологич. векторном пространстве E (над полем k) — множество B, к-рое поглощается

каждой окрестностью нуля U (т. е. существует такое $\alpha \in k$, что $B \subset \alpha U$). *М. И. Войцеховский.*

ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИЯ — функция, имеющая ограниченную вариацию (см. *Вариация функции*). Для функций одного действительного переменного понятие О. в. ф. введено К. Жорданом [1] в связи с обобщением *Дирихле теоремы* о сходимости рядов Фурье кусочно монотонных функций (см. *Жордана признак* сходимости ряда Фурье). Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, является О. в. ф. тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — возрастающие (убывающие) на $[a, b]$ функции (см. *Жордана разложение* О. в. ф.). Всякая О. в. ф. ограничена и может иметь не более чем счетное множество точек разрыва, причем все 1-го рода. О. в. ф. может быть представлена в виде суммы абсолютно непрерывной функции (см. *Абсолютная непрерывность*), *сингулярной функции* и *скачков функции* (см. *Лебега разложение* О. в. ф.).

В случае нескольких переменных понятие О. в. ф. не является однозначным, т. к. в этом случае существует несколько определений вариации функции (см. *Арцела вариация*, *Витали вариация*, *Пьерпонта вариация*, *Тонелли плоская вариация*, *Фреше вариация*, *Харди вариация*).

Лит.: [1] Jordan C., «C. r. Acad. sci.», 1881, t. 92, p. 228—30; [2] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, 3 изд., М., 1974. *Б. И. Голубов.*

ОГРАНИЧЕННЫЙ КВАНТОР — квантор, используемый для характеризации предикатов не на всей области изменения данной предметной переменной, а на ее части, выделяемой нек-рым предикатом $R(x)$. При использовании в качестве О. к. *всеобщности квантор* $(\forall x)$ и *существования квантор* $(\exists x)$ обычно обозначаются $(\forall x)_{R(x)}$ и $(\exists x)_{R(x)}$. Если $P(x)$ — нек-рый предикат, то $(\forall x)_{R(x)} P(x)$ означает

$$\forall x\,(R(x) \supset P(x)),$$

т. е. что предикат $P(x)$ истинен при всех значениях переменной x, удовлетворяющих предикату $R(x)$. Высказывание $(\exists x)_{R(x)} P(x)$ означает

$$\exists x\,(R(x)\ \&\ P(x)),$$

т. е. что пересечение областей истинности предикатов $R(x)$ и $P(x)$ непусто.

В *арифметике формальной* важную роль играют О. к. вида $(\forall x)_{x<t}$ и $(\exists x)_{x<t}$, где t — терм, не содержащий переменной x. При применении таких кванторов к *разрешимым предикатам* получаются также разрешимые предикаты. *В. Е. Плиско.*

ОГРАНИЧЕННЫЙ ОПЕРАТОР — отображение A топологического векторного пространства X в топологическое векторное пространство Y такое, что $A(M)$ — ограниченное подмножество в Y для любого ограниченного подмножества M пространства X. Всякий оператор $A : X \to Y$, непрерывный на X, является О. о. Если $A : X \to Y$ — линейный оператор, то для ограниченности A достаточно, чтобы существовала окрестность нуля $U \subset X$ такая, что $A(U)$ ограничено в Y. Пусть X, Y — векторные нормированные пространства и линейный оператор $A : X \to Y$ ограничен. Тогда

$$\gamma = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| < \infty.$$

Это число наз. н о р м о й о п е р а т о р а A и обозначается $\|A\|$. При этом

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|,$$

и $\|A\|$ есть наименьшая из констант C таких, что

$$\|Ax\| \leqslant C\,\|x\|$$

для любого $x \in X$. Обратно, выполнение этого неравенства означает, что A ограничен. Для линейных опера-

торов, отображающих нормированное пространство X в нормированное пространство Y, понятия ограниченности и непрерывности эквивалентны. Для случая произвольных топологических векторных пространств X и Y это не так, но если X — борнологическое, Y — локально выпуклое пространство, то из ограниченности линейного оператора $A : X \to Y$ следует его непрерывность. Если H — гильбертово пространство и $A : H \to H$ — ограниченный симметрич. оператор, то квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$ ограничена на единичном шаре $K_1 = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$. Числа

$$\beta = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \langle Ax, x\rangle \text{ и } \alpha = \inf_{\|x\| \leqslant 1} \langle Ax, x\rangle$$

наз. верхней и нижней границами оператора A. Точки α и β принадлежат спектру A, и весь спектр лежит на отрезке $[\alpha, \beta]$. Примеры О. о.: оператор проектирования (*проектор*) на дополняемое подпространство банахова пространства и *изометрический оператор*, действующий в гильбертовом пространстве.

Если пространства X и Y наделены структурой частично упорядоченного множества, напр. являются *векторными решетками*, то помимо рассмотренной выше топологич. ограниченности вводится понятие порядковой ограниченности оператора. Именно, оператор $A : X \to Y$ наз. порядково ограниченным, если $A(M)$ есть порядково ограниченное множество пространства Y для любого порядково ограниченного множества M пространства X. Пример: изотонный оператор, т. е. такой оператор, что из $x \leqslant y$ следует $Ax \leqslant Ay$.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Рудин У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; [3] Биркгоф Г., Теория структур, пер. с англ., М., 1952.

В. И. Соболев.

ОДНОЛИСТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция f, регулярная или мероморфная в области B расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ и такая, что для всяких z_1, $z_2 \in B$, $z_1 \neq z_2$, выполняется соотношение $f(z_1) \neq f(z_2)$, то есть f отображает B в $\overline{\mathbb{C}}$ взаимно однозначно. При этом обратная функция $z = f^{-1}(w)$ также однолистна. Обобщением О. ф. являются *многолистные функции*, в частности p-листные функции.

При изучении О. ф. одним из основных является вопрос о возможности однолистного отображения заданной области B на заданную область B' (т. е. отображения с помощью О. ф.). Необходимым условием существования такого отображения является равенство порядков связности областей B и B' (см., напр., [1] с. 28). Если B и B' — односвязные области, границы к-рых содержат более одной точки, то это условие является и достаточным (см. *Римана теорема*) и задача сводится к отображению заданной области на круг. В связи с этим особую роль в теории О. ф. в односвязных областях играет класс S функций f, регулярных и однолистных в круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и имеющих разложение

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \quad z \in \Delta. \qquad (1)$$

В случае многосвязных областей изучают отображение заданной многосвязной области на т. н. канонич. области (см. *Конформное отображение*). Пусть $\Sigma(B)$ — класс функций F, мероморфных и однолистных в области B, содержащей точку ∞, и имеющих в окрестности точки ∞ разложение

$$F(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \ldots + \alpha_n z^{-n} + \ldots \qquad (2)$$

Если $B = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\} = \Delta'$, то этот класс обозначают Σ.

Основные задачи теории О. ф. следующие: 1) изучение соответствия границ при конформном отображении (см. *Соответствия границ принцип*, *Граничные элементы*, *Достижимая граничная точка*); 2) получение *однолистности условий*; 3) решение различных экстремальных задач теории функций, в частности получение оценок различных функционалов и областей значений функционалов (см. ниже) и их систем в том или другом классе.

Пусть имеется нек-рый класс (множество) K регулярных или мероморфных функций и пусть на K задан комплексный функционал $w=\Phi(f)$ (или система функционалов $\{\Phi_k(f)\}_{k=1}^n$). Областью значений функционала $\Phi(f)$ (или системы функционалов $\{\Phi_k(f)\}_{k=1}^n$) на классе K наз. множество D точек $w=\Phi(f)$ комплексного пространства $\mathbb{C}$ (соответственно множество точек $(\Phi_1(f), \ldots, \Phi_n(f))$ n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$) таких, что $f\in K$. Рассматриваются также действительные функционалы. Всякое множество D', содержащее D, наз. мажорантной областью функционала (или системы функционалов). Знание области значений функционала позволяет свести решение ряда экстремальных задач к более простым задачам анализа. Напр., если известна область D значений функционала $f(z_0)$, $f\in K$ (z_0 фиксировано), то задача оценки $|f(z_0)|$ сверху и снизу сводится к нахождению самой далекой и самой близкой точек из D по отношению к точке $w=0$.

Первые существенные результаты в теории О. ф. получены использованием *площадей принципа*. С помощью внешней теоремы площадей Л. Бибербах (L. Bieberbach, 1916) получил точные оценки $|f(z)|$ и $|f'(z)|$ сверху и снизу для $f\in S$ (см. *Искажения теоремы*), дал оценку $|c_2|\leqslant 2$ для $f\in S$ и высказал гипотезу, что $|c_n|\leqslant n$ для $f\in S$ (см. *Бибербаха гипотеза*, *Коэффициентов проблема*). Им же было найдено точное значение постоянной Кёбе. Были также получены оценки модуля функции, модуля ее производной и другие оценки в классах *выпуклых функций*, *звездообразных функций*, *типично вещественных функций* и др. В ряде классов были найдены *выпуклости радиус* и радиус звездообразности (см. *Звездообразности граница*).

Ниже приведены основные методы теории О. ф. и нек-рые результаты, полученные с их помощью.

1. Метод интегральных представлений дает возможность достаточно просто решать многие задачи теории функций, в частности экстремальные задачи в классах функций, имеющих представление с помощью интегралов Стилтьеса: выпуклых функций, почти выпуклых функций, звездообразных функций, типично вещественных функций, функций с положительной действительной частью (см. *Каратеодори класс*). Для классов функций, представимых посредством интеграла Стилтьеса, был разработан нек-рый вариационный метод (см. [1] с. 504—19), с помощью к-рого решен ряд экстремальных задач. Для таких классов разработан *внутренних вариаций метод*.

Найдены выпуклые оболочки нек-рых подклассов класса S (см. [3]). Здесь, в частности, доказано, что для всякой звездообразной функции f существует неубывающая на $[0,2\pi]$ функция μ такая, что $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ и

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}\,d\mu(\theta).$$

См. также *Интегральное представление аналитической функции*, *Параметрическое представление*, *Параметрических представлений метод*.

2. Метод контурного интегрирования. С помощью этого метода было, в частности, доказано, что для $f\in S$

справедливо неравенство (см. [1] с. 135—39)

$$\left|\frac{z}{f(z)}+c_2z+1-|z|^2-2\frac{E(|z|)}{K(|z|)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\left(1-\frac{E(|z|)}{K(|z|)}\right),\quad |z|<1,$$

где E и K — полные *эллиптические интегралы*. Если z фиксировано $(0<|z|<1)$, то это неравенство определяет область значений функционала $\frac{z}{f(z)}+c_2z$ в классе S. Получены усиления теорем искажения и доказаны теоремы об искажении хорд в классах Σ и $\Sigma(B)$ (см. *Искажения теоремы* и [1] с. 118—35).

См. также *Контурного интегрирования метод*, *Площадей принцип*.

3. Метод площадей. Пусть $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$ — класс систем функций $\{f_k(z)\}_{k=1}^n$, конформно и однолистно отображающих круг $\Delta=\{|z|<1\}$ на области $B^k\ni a_k$, попарно не имеющие общих точек (неналегающие области), и нормированных условиями $f_k(0)=a_k$. С помощью теоремы площадей в классе $\mathfrak{M}(\infty, a_1, \ldots, a_n)$, в частности, получены следующие результаты: 1) если

$$\{f_k\}_{k=1}^n\in\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n),\ a_k\neq\infty,$$

то

$$\prod_{k=1}^n |f_k'(0)|^{\gamma_k|^2}\leqslant$$
$$\leqslant\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}|a_k-a_l|^{-2\operatorname{Re}(\gamma_k,\bar{\gamma}_l)},\qquad(3)$$
$$\sum_{k=1}^n\gamma_k=0;$$

это неравенство обобщает на случай комплексных γ известное ранее неравенство для действительных γ_k;

2) если $\{f_0, f_1\}\in\mathfrak{M}(0, \infty)$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_0(e^{it})|^2\,dt\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_1(e^{it})|^{-2}\,dt\leqslant 1.\qquad(4)$$

Для *Бибербаха — Эйленберга функций*

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty a_kz^k,$$

отсюда следует неравенство

$$\sum_{k=1}^\infty|a_k|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^2\,dt\leqslant 1;\qquad(4')$$

выяснены условия, при выполнении к-рых в (4) и (4′) имеет место знак равенства.

С помощью теоремы площадей для неналегающих областей получена оценка приближения функции, регулярной на замкнутой многосвязной области, рациональной функцией, интерполирующей заданную функцию в узлах, равнорасположенных на границе области (см. [4] с. 143—54). Получена область значений шварциана

$$\{F(z),\ z\}=\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{F''(z)}{F'(z)}\right)$$

для $F\in\Sigma(B)$ и ряд других областей значений в классах функций, заданных в многосвязных областях (см. [4], [5]).

4. Метод Лёвнера. Сам К. Лёвнер (K. Löwner, 1923) получил точную оценку $|c_3|\leqslant 3$ для функций $f\in S$ и точные оценки коэффициентов разложения функции, обратной к f, в окрестности точки $w=0$. В частности, этим методом получена точная форма теоремы вращения в классе S (см. *Вращения теоремы*). Доказана теорема: для $f\in S$ при заданных $z\in\Delta$ и $|f(z)|$ справедливо неравенство

$$|f'(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}\left|\frac{f(z)}{z}\right|^2(1-x^2)^2\left|\frac{x}{z}\right|^{4x^2/(1-x^2)},\qquad(5)$$

где x, $|x|<|z|$, определяется условием

$$\left|\frac{f(x)}{z}\right|(1+x)^2\left|\frac{z}{x}\right|^{2x/(1+x)}=1.$$

Неравенство (5) точное. Из (5) следуют точные неравенства в классе S ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r < 1$):

$$\left.\begin{aligned} |f(re^{i\theta})| + |f(-re^{i\theta})| &\leqslant \frac{r}{(1-r)^2} + \frac{r}{(1+r)^2}, \\ |f'(re^{i\theta})| + |f'(-re^{i\theta})| &\leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3} + \frac{1-r}{(1+r)^3}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Был введен весьма широкий подкласс функций $f \in S$, представимых в виде

$$f(z) = \left[(\alpha + i\beta) \int_0^z p(s)\, g(s)^{\alpha}\, s^{i\beta - 1}\, ds \right]^{1/(\alpha + i\beta)},$$

где g — звездообразная функция, p — регулярная в Δ функция и такая, что $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma} p(z)\} > 0$ для нек-рого $\gamma \in [-\pi/2,\ \pi/2]$, $p(0) = 1$, $\alpha > 0$, $-\infty < \beta < +\infty$ (см. [6] с. 47).

С помощью теорем искажения было установлено, что функция Кёбе

$$K_{\alpha}(z) = z(1 - e^{i\alpha} z)^{-2} \in S$$

(α — действительное) реализует максимум линейной меры покрытия окружности $|w| = \rho$ образом $B(r)$ круга $\Delta_r = \{|z| < r < 1\}$ при отображении функциями класса S, когда $\rho > e^{\pi/e} r$. Из этого свойства функций класса S следуют оценки площади $\sigma(r)$ области $B(r)$, оценки среднего модуля функции и другие оценки в классе S, асимптотически точные при $r \to 1$ (см. [1] с. 561).

Была предложена нек-рая удобная редукция экстремальных задач на классе S и нек-рых его подклассах к определенным экстремальным задачам на более простом классе (см. *Каратеодори класс*), оказавшаяся применимой к решению ряда экстремальных задач, в частности к нахождению области значений системы функционалов $\{\ln \frac{f(z)}{z},\ \ln f'(z)\}$ (здесь z, $0 < |z| < 1$, фиксировано) для $f \in S$ (см. [6] с. 115—58).

Метод Лёвнера успешно применялся к исследованию свойств линий уровня и к решению экстремальных задач на подклассе S_M ограниченных функций $f \in S$: $|f(z)| \leqslant M$, $z \in \Delta$ (см. [6] с. 150—77).

См. также *Лёвнера уравнение*, *Лёвнера метод*, *Параметрических представлений метод*.

5. Вариационные методы. Граничные и внутренние вариации при решении экстремальных задач приводят к дифференциальным уравнениям для границ экстремальных областей и, соответственно, для экстремальных функций. Левая часть этих уравнений, как правило, есть нек-рый *квадратичный дифференциал*. Различные качественные характеристики функций, реализующих экстремум, получаются при исследовании свойств соответствующих квадратичных дифференциалов. В частности, для большого числа экстремальных задач в классе S (и в других классах) оказывается, что экстремальная функция отображает круг Δ на всю плоскость с конечным числом аналитич. разрезов. Иногда дифференциальное уравнение для экстремальной функции удается проинтегрировать и тем самым получить величину экстремума в исследуемой задаче и все экстремальные функции. Чаще удается лишь получить одно или несколько конечных уравнений для величины экстремума. Нек-рые результаты, полученные вариационным методом, перечислены ниже.

Пусть $F \in \Sigma$, w_k, $k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 2$, не принадлежат образу области $\Delta' = \{|z| > 1\}$ при отображении $w = F(z)$ и пусть

$$d_n(F) = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} |w_k - w_l|.$$

Доказано, что

$$d_3(F) = |(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)(w_3 - w_1)| \leqslant 12\sqrt{3}$$

и знак равенства имеет место только для

$$F(z) = z(1 + e^{i\alpha} z^3)^{2/3},$$

где α — действительное (см. [1] с. 140—46).

Доказано (см. [1] с. 127—35), что область значений функционала

$$w=\sum_{\nu,\,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\gamma_{\nu'}\ln\frac{F(\zeta_\nu)-F(\zeta_{\nu'})}{\zeta_\nu-\zeta_{\nu'}}$$

для $F\in\Sigma$, где γ_ν — заданные числа, не равные одновременно нулю, ζ_ν — заданные точки из области Δ', является кругом

$$|w|\leqslant-\operatorname{Re}\sum_{\nu,\,\nu'=1}^{n}\gamma_\nu\overline{\gamma}_{\nu'}\ln\left(1-\zeta_\nu^{-1}\overline{\zeta_{\nu'}^{-1}}\right).$$

Исследована задача об экстремуме $|c_n|$, $n\geqslant1$, в классе S_a функций $f(z)=c_1z+c_2z^2+\ldots$, регулярных и однолистных в круге Δ и не принимающих в нем заданных значений $a_1, \ldots, a_n$ (см. [1] с. 151—56). Частный случай $n=1$ является задачей определения континуума наименьшей емкости (рассмотрение этой задачи и ее обобщений см. в [7]).

С помощью вариационного метода исследовались различные задачи для неналегающих областей. Так, рассматривалась задача о максимуме произведения

$$I_n=\prod_{k=1}^{n}|f_k'(0)|$$

в классе $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$ (см. [1] с. 156—65). Получена точная оценка произведения

$$\prod_{k=1}^{n}|f_k'(0)|^{\alpha_k},$$

где α_k — любые заданные положительные числа при $n=2$ и 3 (см. [1] с. 550—51).

Эта задача равносильна задаче нахождения области D системы функционалов $(|f_1(0)|, \ldots, |f_n(0)|)$ в классе $\mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_n)$.

См. также *Вариационные принципы*, *Вариация однолистной функции*, *Внутренних вариаций метод*, *Граничных вариаций метод*, *Вариационно-параметрический метод*.

6. Метод экстремальной метрики. При решении экстремальных задач методом экстремальной метрики основную роль, как правило, играет метрика, порожденная нек-рым квадратичным дифференциалом $Q(z)dz^2$. Это тот же квадратичный дифференциал, к-рый возникает при решении задачи вариационным методом. Ниже для примера указаны два результата, полученные этим методом (см. [1] с. 532—611, [7] — [9]).

При помощи общей теоремы коэффициентов (о. т. к.) Дж. Дженкинс (J. Jenkins, 1960) получил решение задачи об области значений функционала $f(z)$ при фиксированном z из круга $\Delta=\{|z|<1\}$ на классе S_r функций из S с действительными коэффициентами c_2, c_3, ... В классах Σ и M, где M — класс функций f, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, мероморфных и однолистных в круге Δ, он выяснил влияние обращения в нуль нек-рого числа из начальных коэффициентов на рост последующих.

Было дано добавление к о. т. к. в случае, когда дифференциал $Q(z)dz^2$ не имеет полюсов порядка, большего единицы; кроме того, с помощью экстремально-метрического подхода были установлены весьма общие теоремы покрытия линий при однолистном конформном отображении односвязных и двусвязных областей, в частности уточнен результат о покрытии отрезков для функций, мероморфных и однолистных в круге, и аналогичный результат для кругового кольца (см. [1] с. 559, 560, 564).

См. также *Грётша принцип*, *Грётша теоремы*, *Полос метод*, *Квадратичный дифференциал*, *Бибербаха — Эйленберга функции*, *Экстремальной метрики метод*.

7. Метод симметризации. С помощью этого метода, часто в сочетании с другими, решен ряд сложных экстремальных задач, не поддающихся решению иными методами. Таковы, напр., следующие задачи (см. [1]

с. 536—611, [7] — [10]). В классе S функций f была получена точная оценка сверху меры множества точек окружности $|w|=R$, $1/4\leqslant R<1$, не принадлежащих образу круга Δ при отображении $w=f(z)$ ($\in f(\Delta)$). В сочетании с методом экстремальных метрик найдена точная оценка сверху $|f(z)|$ при фиксированном $|z|=r$, $0<r<1$, для

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots\in S$$

с заданным $c_2=c=\text{const}$, $0\leqslant c\leqslant 2$; обобщены и распространены неравенства (6) на класс p-листных в среднем по окружности функций

$$f(z)=z^p+c_{p+1}z^{p+1}+\ldots$$

(см. *Многолистная функция*).

С использованием метода симметризации было доказано, что если Φ — выпуклая неубывающая на $(-\infty, +\infty)$ функция, то для $f\in S$ при $0<r<1$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\ln|f(re^{it})|)\,dt\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(\ln|K(re^{it})|)\,dt,$$

где $K(z)=z(1-z)^{-2}$ (см. [11]). Если имеет место знак равенства при нек-ром r, $0<r<1$, и при нек-рой строго выпуклой функции Φ, то

$$f(z)=e^{-i\alpha}K(e^{i\alpha}z),$$

где α действительно.

О приложениях метода симметризации к многосвязным областям см. в [12], [13]. См. также *Симметризации метод*.

Лит.: [1] Голузин Г.М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [2] Александров И. А., Лебедев Н. А., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1968, т. 94, с. 79—89; [3] Brickman L., MacGregor T. H., Wilken D. R., «Trans. Amer. Math. Soc.», 1971, v. 156, p. 91—107; [4] Лебедев Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975; [5] Милин И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., 1971; [6] Александров И. А., Параметрические продолжения в теории однолистных функций, М., 1976; [7] Кузьмина Г. В., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1980, т. 139, с. 1—241; [8] Дженкинс Дж., Однолистные функции и конформные отображения, пер. с англ., М., 1962; [9] Pommerenke Ch., Univalent Functions, Göttl., 1975; [10] Хейман В. К., Многолистные функции, пер. с англ., М., 1960; [11] Baernstein A., «Acta math.», 1974, v. 133, p. 139—69; [12] Митюк И. П., «Укр. матем. ж.», 1965, т. 17, № 4, с. 46—54; [13] его же, «Сиб. матем. ж.», 1965, т. 6, № 6, с. 1282—91. *Н. А. Лебедев.*

ОДНОЛИСТНОСТИ РАДИУС — радиус $\rho(M)$ наибольшего круга $|z|<\rho$, в к-ром однолистны все функции семейства регулярных в круге $|z|<1$ функций

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

таких, что $|f(z)|\leqslant M$ при $|z|<1$. Оказывается, что

$$\rho(M)=M-\sqrt{M^2-1},\quad M\geqslant 1,$$

причем функция

$$f_0(z)=Mz(1-Mz)/(M-z)$$

однолистна в круге $|z|<\rho(M)$, но не в большем круге (имеющем центр в начале). Для функций, регулярных в круге $|z|<R$ и таких, что $f(0)=0$, $f'(0)=c$, $c\neq 0$, и $|f(z)|\leqslant M$, О. р. $\rho^*(M)$ определяется аналогично, и его значение легко получается из $\rho(M)$.

Г. К. Антонюк.

ОДНОЛИСТНОСТИ УСЛОВИЯ — необходимые и достаточные условия, при к-рых регулярная (или мероморфная) функция $f(z)$ однолистна в нек-рой области комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Необходимым и достаточным условием однолистности $f(z)$ в достаточно малой окрестности точки a является $f'(a)\neq 0$. Такая (локальная) однолистность во всех точках области еще не гарантирует однолистности в области. Напр., функция e^z неоднолистна в круге $|z|\leqslant R$, где $R>\pi$, хотя для нее выполняется условие локальной однолистности в каждой точке плоскости. Необходимым условием одно-

листности является всякое свойство однолистной функции, в частности всякое неравенство, к-рому удовлетворяет однолистная функция. Справедливы следующие необходимые и достаточные О. у.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ в окрестности $z=0$ разлагается в ряд

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots, \qquad (1)$$

и пусть

$$\ln\frac{f(t)-f(z)}{t-z}=\sum_{p,\ q=1}^{\infty}\omega_{p,\ q}t^pz^q$$

с постоянными коэффициентами a_k и $\omega_{p,q}$. Для того чтобы $f(z)$ была регулярной и однолистной в $E=\{z:|z|<1\}$ функцией, необходимо и достаточно, чтобы при всяком натуральном N и для всяких x_p, $p=1,\ldots,N$, выполнялось неравенство Грунского

$$\left|\sum_{p,\ q=1}^{N}\omega_{p,\ q}x_px_q\right|\leqslant\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}|x_p|^2.$$

Аналогичные условия имеют место для класса $\Sigma(B)$ (класс функций $F(\zeta)=\zeta+c_0+c_1/\zeta+\ldots$, мероморфных и однолистных в области $B\ni\infty$) (см. [2] с. 599—602, а также *Площадей принцип*).

Теорема 2. Пусть граница l конечной области D есть жорданова кривая. Для того чтобы регулярная в D и непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$ функция $f(z)$ была однолистной в $\overline{D}$, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ взаимно однозначно отображала l на нек-рую замкнутую жорданову кривую.

Необходимые и достаточные условия однолистного отображения на области выпуклые, звездообразные или спиралеобразные относительно начала для функции (1) в круге E связаны с теоремой 2 и записываются соответственно в виде

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)+1\geqslant0,\quad \operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\geqslant0,$$

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\gamma}z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\geqslant0.$$

Многие достаточные О. у. описываются с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема 3) и уравнений с частными производными (теорема 4).

Теорема 3. Мероморфная в круге E функция $f(z)$ будет однолистной в E, если шварциан

$$\{f,\ z\}=[f''(z)/f'(z)]'-2^{-1}[f''(z)/f'(z)]^2$$

подчиняется неравенству

$$|\{f,\ z\}|\leqslant2S(|z|),\quad |z|<1,$$

причем мажоранта $S(r)$ является непрерывной неотрицательной функцией и удовлетворяет условиям: а) $S(r)(1-r^2)^2$ не возрастает по r при $0<r<1$, б) дифференциальное уравнение $y''+S(|t|)y=0$ при $-1<t<1$ имеет решение $y_0(t)>0$.

Частными случаями теоремы 3 являются условия однолистности Нехари — Покорного:

$$|\{f,\ z\}|\leqslant C(\mu)(1-|z|^2)^{-\mu},$$

где $C(\mu)=[2^{3\mu-1}\pi^{2(1-\mu)},\ 0\leqslant\mu\leqslant1;\ 2^{3-\mu},\ 1\leqslant\mu\leqslant2]$.

Теорема 4. Пусть $f(z,t)$ есть функция, регулярная в круге E, непрерывно дифференцируемая по t, $0\leqslant t<\infty$, $f(0,t)=0$, и удовлетворяющая уравнению Лёвнера — Куфарева

$$\frac{\partial f}{\partial t}=zh(z,t)\frac{\partial f}{\partial z},\ 0<t<\infty,\ z\in E,$$

где $h(z,t)$ — функция, регулярная в E, непрерывная по t, $0\leqslant t<\infty$, и $\operatorname{Re}h(z,t)\geqslant0$. Если

$$f(z,t)=a_0(t)f(z)+O(1),$$

где $\lim_{t\to\infty} a_0(t) = \infty$, $O(1)$ — конечная величина при $t \to \infty$ для каждого $z \in E$ и $f(z)$ — непостоянная регулярная функция в E с разложением (1), то все функции $f(z, t)$ однолистны, в том числе однолистными являются функции $f(z, 0)$ и $f(z)$.

Теорема 4 приводит к следующим конкретным О. у.:

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}$$

и

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\gamma} \left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha+i\beta-1} \frac{f'(z)}{\varphi'^{\alpha}(z)} \right] \geqslant 0,$$

где α, β, γ — действительные постоянные, $\alpha > 0$, $|\gamma| < \pi/2$, $\varphi(z)$ — регулярная функция, отображающая круг E на выпуклую область.

Однолистность функции

$$w = f(z) \qquad (2)$$

равносильна однозначной разрешимости уравнения (2) относительно z. В таком понимании достаточные О. у. распространяются на широкий класс операторных уравнений. Для этих уравнений, в частности, обобщено условие $\operatorname{Re}[e^{i\gamma} f'(z)] \geqslant 0$ на класс действительных преобразований выпуклых и невыпуклых областей n-мерного евклидова пространства.

Лит.: [1] Лебедев Н. А., Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975; [2] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966; [3] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; [4] Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 4, с. 3—60; [5] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, 3 изд., М., 1977; [6] Тумашев Г. Г., Нужин М. Т., Обратные краевые задачи и их приложения, 2 изд., Казань, 1965. *Л. А. Аксентьев.*

ОДНОМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — топологическое пространство X, каждая точка к-рого обладает окрестностью, гомеоморфной прямой (внутренняя точка) или полупрямой (граничная точка). Связное паракомпактное хаусдорфово О. м. X без граничных точек гомеоморфно окружности, если оно компактно, и прямой, если оно некомпактно; при наличии одной или двух граничных точек X гомеоморфно соответственно полуоткрытому или замкнутому конечному интервалу. Любое такое О. м. сглаживаемо, так что в вышеприведенном утверждении гомеоморфность можно заменить диффеоморфностью.

Континуум (связное (би)-компактное хаусдорфово пространство) K, каждая точка к-рого, за исключением двух, разделяет его, гомеоморфен замкнутому интервалу. Если же каждая точка является разделяющей, то K гомеоморфен окружности. При этом $x \in K$ разделяет K, если существуют два непустых непересекающихся открытых множества A и B таких, что $K \setminus x = A \cup B$. Другими словами, нек-рые линии являются О. м.

Лит.: [1] Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология. Начальный курс, пер. с англ., М., 1972; [2] Рохлин В. А., Фукс Д. Б., Начальный курс топологии. Геометрические главы, М., 1977; [3] Хирш М., Дифференциальная топология, пер. с англ., М., 1979. *М. И. Войцеховский.*

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, поток,— действие аддитивной группы действительных чисел $\mathbb{R}$ на многообразии M.

Таким образом, однопараметрическое семейство $\{\varphi_t, t \in \mathbb{R}\}$ преобразований многообразия M является О. г. п., если выполнены следующие условия:

$$\varphi_{t+s}x = \varphi_t(\varphi_s x), \quad \varphi_{-t}x = \varphi_t^{-1}x, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \ x \in M. \qquad (*)$$

Если многообразие M гладкое, то обычно предполагается, что О. г. п. тоже гладкая, т. е. соответствующее отображение

$$\varphi: \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, \ (t, x) \longrightarrow \varphi_t x$$

является дифференцируемым отображением дифференцируемых многообразий.

Более общим, чем понятие О. г. п., является понятие локальной однопараметрической группы преобразований многообразия M. Оно определяется как отображение $\varphi: U \to M$ нек-рого открытого подмногообразия $U \subset \mathbb{R} \times M$ вида $U = \bigcup_{x \in M} (]\varepsilon_-(x), \varepsilon_+(x)[, x)$, где $\varepsilon_+(x) > 0$, $\varepsilon_-(x) < 0$ для $x \in M$, удовлетворяющее условиям (*) при всех $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in M$, для к-рых обе части равенств определены.

С каждой гладкой локальной О. г. п. $\{\varphi_t\}$ многообразия M связывается векторное поле

$$M \ni x \longrightarrow X_x = \frac{d}{dt}\, \varphi_t x \Big|_{t=0},$$

наз. полем скоростей, или инфинитезимальной образующей, О. г. п. $\{\varphi_t\}$. Обратно, любое гладкое векторное поле X порождает локальную О. г. п. φ_t, имеющую полем скоростей поле X. В локальных координатах x^i на M эта О. г. п. задается как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi^i(t, x^j)}{dt} = X^i(x^j)$$

с начальными условиями $\varphi^i(0, x^j) = x^i$, где $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Если локальная О. г. п., порождаемая векторным полем X, продолжается до глобальной О. г. п., то поле X наз. полным. На компактном многообразии любое векторное поле является полным, и, таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между О. г. п. и векторными полями. На некомпактном многообразии это уже не так, причем множество полных векторных полей даже не замкнуто относительно сложения.

Лит.: [1] Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1971; [2] Palais R., A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Providence, 1957.

Д. В. Алексеевский.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПОДГРУППА группы Ли G над нормированным полем K — аналитический гомоморфизм аддитивной группы поля K в G, т. е. такое аналитическое отображение $\alpha: K \to G$, что

$$\alpha(s+t) = \alpha(s)\,\alpha(t), \quad s, t \in K.$$

О. п. наз. также образ этого гомоморфизма, к-рый, собственно, и является подгруппой группы G. Если $K = \mathbb{R}$, то уже из непрерывности гомоморфизма $\alpha: K \to G$ следует его аналитичность. Если $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то для любого касательного вектора $X \in T_e G$ к группе G в точке e существует единственная О. п. $\alpha: K \to G$, имеющая X своим касательным вектором в точке $t = 0$. При этом $\alpha(t) = \exp tX$, $t \in K$, где $\exp: T_e G \to G$ — *экспоненциальное отображение*. В частности, любая О. п. в полной линейной группе $G = \mathrm{GL}(n, K)$ имеет вид

$$\alpha(t) = \exp tX = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, t^n X^n.$$

Если G — вещественная группа Ли, снабженная двусторонне инвариантной псевдоримановой метрикой или аффинной связностью, то О. п. группы G — это геодезические, проходящие через единицу e.

Лит.: [1] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; [2] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, пер. с англ. и франц., М., 1969; [3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964.

А. Л. Онищик.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА — семейство операторов $T(t)$, $t > 0$, действующих в банахо-

вом или топологическом векторном пространстве X, обладающее свойством

$$T(t+\tau)x = T(t)[T(\tau)x],\ t,\ \tau > 0,\ x \in X.$$

Если операторы $T(t)$ линейны, ограничены и действуют в банаховом пространстве X, то из измеримости всех функций $T(t)x$, $x \in X$, следует их непрерывность. Функция $||T(t)||$ растет на бесконечности не быстрее экспоненты. Классификация О. п. основана на их различном поведении при $t \to 0$. В простейшем случае $T(t)$ сильно стремится к единичному оператору при $t \to 0$ (см. *Полугруппа операторов*).

Важной характеристикой О. п. является *производящий оператор* полугруппы. Основной проблематикой теории О. п. является установление связи между свойствами полугрупп и их производящих операторов. Достаточно полно изучены О. п. линейных непрерывных операторов в локально выпуклых пространствах.

О. п. нелинейных операторов в банаховом пространстве исследованы в том случае, когда операторы $T(t)$ сжимающие. Здесь имеются глубокие связи с теорией диссипативных операторов.

Лит.: [1] Иосида К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; [2] Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967; [3] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., М., 1962; [4] Butzer P., Berens H., Semigroups of operators and approximation, B., 1967; [5] Barbu V., Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces, Buc.— Leyden, 1976. *С. Г. Крейн.*

ОДНОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, простопериодическая функция,— периодическая функция $f(z)$ комплексного переменного z, все периоды p к-рой суть целые кратные одного единственного основного, или примитивного, периода $2\omega \neq 0$, $p = 2n\omega$. Напр., целой О. ф. является показательная функция e^z с основным периодом $2\omega = 2\pi i$, мероморфными О. ф.— тригонометрич. функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ с основным периодом $2\omega = \pi$. *Е. Д. Соломенцев.*

ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД — см. *Гиперболоид.*

ОДНОРОДНАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ОБЛАСТЬ — *однородное комплексное многообразие*, изоморфное ограниченной области в $\mathbb{C}^n$. Примером О. о. о. является «комплексный шар»

$$\{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < 1\},$$

в к-ром транзитивно действует псевдоунитарная группа $SU_{n,1}$, представленная проективными преобразованиями пространства $\mathbb{C}^n$.

Если D — любая ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, то эрмитова дифференциальная форма

$$d'd'' \ln K(z, \bar{z}) = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j,$$

где K — *Бергмана кернфункция* области D, определяет в D кэлерову метрику, наз. метрикой Бергмана и инвариантную относительно всех автоморфизмов области D (см. [1], [2]). Группа $G(D)$ всех автоморфизмов области D является вещественной группой Ли, не содержащей нетривиальных связных комплексных подгрупп. Если D — однородна, то метрика Бергмана полна.

Среди О. о. о. выделяются симметрич. области. Ограниченная область D наз. симметрической, если для любой точки $z \in D$ существует инволютивный автоморфизм области D, имеющий z изолированной неподвижной точкой. Всякая симметрич. область однородна и является эрмитовым симметрич. пространством относительно метрики Бергмана. Получена [3] классификация симметрич. областей. Имеются 4 серии неприводимых симметрич. областей, связанных с классич. простыми группами Ли, и две особые области раз-

мерностей 16 и 27. К числу классических симметрич. областей относятся, в частности, комплексный шар и верхняя полуплоскость Зигеля (см. *Зигеля область*). Всякая симметрич. область изоморфна прямому произведению неприводимых симметрич. областей [1].

Всякая О. о. о. размерности $\leqslant 3$ является симметрической [3]. Начиная с размерности 4, существуют и несимметрические О. о. о. (см. [4]). Более того, при $n \geqslant 7$ имеется континуум n-мерных О. о. о., среди к-рых лишь конечное число симметрических. Каждая О. о. о. гомеоморфна клетке и аналитически изоморфна аффинно однородной области Зигеля, определенной однозначно с точностью до аффинного изоморфизма. Классификация О. о. о. производится алгебраич. средствами [5].

С О. о. о. связаны многомерные обобщения эйлеровых интегралов (интегралы Зигеля 1-го и 2-го рода), а также гипергеометрич. функции [6].

Лит.: [1] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [2] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963; [3] Cartan E., «Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.», 1935, Bd 11, S. 116–62; [4] Пятецкий-Шапиро И. И., Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, М., 1961; [5] Винберг Э. Б., Гиндикин С. Г., Пятецкий-Шапиро И. И., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1963, т. 12, с. 359—88; [6] Гиндикин С. Г., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 4, с. 3–92.

Э. Б. Винберг.

ОДНОРОДНАЯ ФУНКЦИЯ степени λ — числовая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что для всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$ из области ее определения и всех действительных $t>0$ выполняется равенство

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^{\lambda} f(x_1, \ldots, x_n),$$

где λ — действительное число; при этом предполагается, что вместе с каждой точкой $(x_1, \ldots, x_n)$ из области определения функции f при любом $t>0$ к этой области определения принадлежит и точка $(tx_1, \ldots, tx_n)$. Если функция

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\nolimits_{0 \leqslant k_1 + \ldots + k_n \leqslant m} a_{k_1 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

т. е. является многочленом степени не выше чем m, то она будет О. ф. степени m в том и только в том случае, когда все коэффициенты $a_{k_1 \ldots k_n}$ при $k_1 + \ldots + k_n < m$ равны нулю. Понятие О. ф. может быть расширено на многочлены от n переменных над любым коммутативным кольцом с единицей.

Пусть область определения E функции f лежит в первом квадранте: $x_1>0, \ldots, x_n>0$ и вместе с любой точкой $(x_1, \ldots, x_n)$ содержит и весь луч $(tx_1, \ldots, tx_n)$, $t>0$. Для того чтобы функция f была однородной степени λ, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция φ от $n-1$ переменных, определенная на множестве точек вида $\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$, где $(x_1, \ldots, x_n) \in E$, что для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in E$ выполняется равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\lambda} \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Если область определения E функции f открытое множество и функция f непрерывно дифференцируема на E, то функция является О. ф. степени λ в том и только в том случае, когда она при всех $(x_1, \ldots, x_n)$ из ее области определения удовлетворяет равенству (формула Эйлера)

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = \lambda f(x_1, \ldots, x_n).$$

Л. Д. Кудрявцев.

ОДНОРОДНОЕ КОМПЛЕКСНОЕ МНОГООБРАЗИЕ — комплексное многообразие M, группа автоморфизмов к-рого транзитивно действует на M. Все односвязные одномерные комплексные многообразия — сфера Ри-

мана, комплексная плоскость и верхняя комплексная полуплоскость — однородны. Многообразие G/H смежных классов комплексной группы Ли G по замкнутой комплексной подгруппе H является О. к. м.

Среди компактных О. к. м. выделяются комплексные флаговые многообразия, к числу к-рых относятся все компактные эрмитовы *симметрические пространства* [8]. Комплексные флаговые многообразия могут быть охарактеризованы как односвязные компактные однородные *кэлеровы многообразия* [4], а также как многообразия G/U, где G — полупростая комплексная группа Ли, U — ее параболич. подгруппа. Всякое компактное О. к. м. допускает однородное коломорфное расслоение над флаговым многообразием со слоем, изоморфным многообразию смежных классов комплексной группы Ли по дискретной подгруппе (см. *Титса расслоение*, а также [6], [9]).

Другой важный класс О. к. м. составляют *однородные ограниченные области* (о. о. о.), к числу к-рых относятся, в частности, симметрич. области, двойственные компактным эрмитовым симметрич. пространствам.

Флаговые многообразия и о. о. о. представляют собой частные случаи однородных кэлеровых многообразий (т. е. кэлеровых многообразий, на к-рых транзитивно действует группа аналитич. автоморфизмов, сохраняющих кэлерову метрику). Существует гипотеза [2], что всякое однородное кэлерово многообразие допускает однородное голоморфное расслоение, базой к-рого служит о. о. о., а слоем — прямое произведение флагового многообразия и многообразия смежных классов комплексного векторного пространства по дискретной подгруппе. Эта гипотеза доказана для однородных кэлеровых многообразий, допускающих полупростую [1] или вполне разрешимую [2] транзитивную группу автоморфизмов, а также для компактных однородных кэлеровых многообразий, которые, таким образом, изоморфны прямым произведениям флаговых многообразий и комплексных торов [10].

В теории О. к. м. важную роль играет каноническая эрмитова форма h_μ. По любой гладкой мере μ на комплексном многообразии M, задаваемой внешней дифференциальной формой

$$i^n K\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n,$$

может быть построена эрмитова дифференциальная форма

$$h_\mu = d'd'' \ln K - \sum_{i,\,j} \frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\, dz_i\, d\bar{z}_j$$

(вообще говоря, вырожденная), не зависящая от выбора системы координат и не меняющаяся при умножении меры μ на константу. Если мера μ определена стандартным образом по какой-либо кэлеровой метрике на M, то форма $(-h_\mu)$ совпадает с формой Риччи этой метрики [7]. Если потребовать, чтобы мера μ была инвариантна относительно какой-либо транзитивной группе автоморфизмов многообразия M, то она будет определена этой группой однозначно с точностью до умножения на константу, а форма h_μ — вполне однозначно. В случае, когда M — о. о. о., определенная таким образом эрмитова форма h_μ положительно определена и совпадает с метрикой Бергмана. Для флаговых многообразий форма h_μ отрицательно определена.

Каноническ. эрмитова форма О. к. м. может быть вычислена в терминах соответствующей алгебры Ли [3]. Это служит основой для алгебраизации теории о. о. о. и других О. к. м.

Одно из направлений в теории О. к. м. состоит в изучении голоморфных функций на них при помощи аппарата линейных представлений групп Ли. Напр.

этим способом доказано [5], что многообразие G/H смежных классов полупростой комплексной группы Ли G по связной замкнутой комплексной подгруппе H является многообразием Штейна тогда и только тогда, когда подгруппа H редуктивна.

Существуют О. к. м., не допускающие транзитивной группы Ли автоморфизмов [11].

Лит.: [1] Borel A., «Proc. Nath. Acad. Sci. USA», 1954, v. 40, p. 1147—51; [2] Винберг Э. Б., Гиндикин С. Г., «Матем. сб.», 1967, т. 74, № 3, с. 357—77; [3] Koszul J. L., «Canad. J. Math.», 1955, v. 7, № 4, p. 652—76; [4] Lichnerowicz A., в кн.: Géométrie différentielle, P., 1953, p. 171—84; [5] Онищик А. Л., «Докл. АН СССР», 1960, т. 130, с. 726—29; [6] Tits J., «Comm. math. helv.», 1962/1963, t. 37, p. 111—20; [7] Фукс Б. А., Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., 1963; [8] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [9] Wang H.-C., «Amer. J. Math.», 1954, v. 76, № 1, p. 1—32; [10] Borel A., Remmert R., «Math. Ann.», 1962, Bd 145, № 5, p. 429—39; [11] Kaup W., «Invent. math.», 1967, v. 3, № 1, p. 43—70.

Э. Б. Винберг.

ОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО — множество вместе с заданным на нем транзитивным действием нек-рой группы. Точнее, M есть *однородное пространство группы* G, если задано отображение

$$(g,\ x) \longrightarrow gx$$

множества $G\times M$ в M такое, что:

1) $(gh)\,x = g\,(hx)$;

2) $ex = x$;

3) для любых $x,\ y \in M$ существует такой $g \in G$, что $gx = y$.

Элементы множества M наз. точками О. п., группа G — *группой движений*, или *основной (фундаментальной) группой*, О. п.

Любая точка x О. п. M определяет подгруппу

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

основной группы G. Она наз. *изотропии группой*, или стационарной подгруппой, или *стабилизатором точки* x. Стабилизаторы разных точек сопряжены в группе G с помощью внутренних автоморфизмов.

С произвольной подгруппой H группы G связано нек-рое О. п. группы G — множество $M = G/H$ левых классов смежности группы G по подгруппе H, на к-ром G действует по формуле

$$g\,(aH) = (ga)\,H;\ g,\ a \in G.$$

Это О. п. наз. *факторпространством группы* G *по подгруппе* H, а подгруппа H оказывается стабилизатором точки $eH = H$ этого пространства (e — единица группы G). Любое О. п. M группы G можно отождествить с факторпространством группы G по подгруппе $H = G_x$, являющейся стабилизатором фиксированной точки $x \in M$, с помощью биекции

$$M \ni y \leftrightarrow gH \in G/H,$$

где g — любой элемент из G, для к-рого $gx = y$.

Если группа G является топологич. группой, а H — ее подгруппой (соответственно G — группа Ли, а H — замкнутая подгруппа в G), то факторпространство $M = G/H$ канонич. образом снабжается структурой топологич. пространства (соответственно структурой аналитич. многообразия), относительно к-рой действие группы G на M является непрерывным (соответственно аналитическим). Если группа Ли G транзитивно и аналитически действует на аналитич. многообразии M, то для любой точки $x_0 \in M$ подгруппа $H = G_{x_0}$ замкнута и указанная выше биекция $gH \to gx_0$ аналитична; если при этом число связных компонент группы G не более чем счетно, то эта биекция является диффеоморфизмом.

Изучаются также случай, когда G — алгебраич. группа, а M — алгебраич. многообразие (см. *Однород-*

ное пространство алгебраической группы), и случай, когда M — комплексное многообразие, а G — вещественная (или комплексная) группа Ли (см. *Однородное комплексное многообразие*).

В дальнейшем всюду M — аналитич. многообразие, а G — группа Ли.

Геометрия однородных пространств. Согласно Эрлангенской программе Ф. Клейна (F. Klein), предмет геометрии О. п. есть изучение инвариантов группы движений О. п. Классич. направлением исследований здесь является классификация тех или иных подмножеств О. п., прежде всего подмногообразий и их объединений, семейств подмногообразий и т. п. с точностью до движений из группы G. Такая классификация может быть получена при помощи построения полной системы инвариантов подмножества данного типа (примерами таких систем инвариантов служат длины сторон треугольника, а также кривизна и кручение гладкой кривой в трехмерном евклидовом пространстве). Общий метод построения полной системы локальных инвариантов (*подвижного репера метод*) для гладкого подмногообразия в произвольном О. п. группы Ли разработан Э. Картаном (см. [6], [16]).

Другое направление исследований состоит в отыскании и изучении инвариантных геометрич. объектов на О. п. (см. *Инвариантный объект* на однородном пространстве). Действие основной группы Ли G в О. п. M индуцирует действие группы G в пространстве различных геометрич. объектов на M (функций, векторных и тензорных полей, связностей, дифференциальных операторов и т. п.). Геометрич. объекты, неподвижные относительно этого действия, наз. инвариантными объектами. Примерами таких объектов являются евклидова метрика в евклидовом пространстве, рассматриваемом как О. п. группы евклидовых движений, и конформная метрика, задающая угол между кривыми в конформном пространстве. С этим же направлением тесно связана задача описания и изучения О. п., обладающих тем или иным инвариантом. Напр., рассматриваются римановы и псевдоримановы, аффинной связности, симплектические О. п., однородные комплексные многообразия, то есть О. п., обладающие инвариантной метрикой (римановой или псевдоримановой), аффинной связностью, симплектич. структурой, комплексной структурой соответственно. См. *Риманово пространство однородное*, *Симплектическое пространство однородное*, *Однородное комплексное многообразие*.

Важным классом О. п. является класс редуктивных О. п., т. е. таких О. п. G/H, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G допускает разложение

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m},\ \mathfrak{h}\cap\mathfrak{m}=\{0\},\qquad(*)$$

где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H, а $\mathfrak{m}$ — подпространство, инвариантное относительно присоединенного представления подгруппы H в $\mathfrak{g}$. Такое разложение определяет в О. п. G/H геодезически полную линейную связность с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. Обратно, односвязное многообразие с полной линейной связностью, имеющей ковариантно постоянные тензоры кривизны и кручения, является редуктивным О. п. относительно группы автоморфизмов этой связности (см. [5]). Частным случаем редуктивного О. п. является симметрич. пространство, для к-рого разложение (*) удовлетворяет дополнительно условию $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subseteq\mathfrak{h}$. Геометрически это условие означает, что соответствующая связность имеет нулевое кручение. Примерами симметрич. пространств являются *глобально симметрические римановы пространства*, а также пространство произвольной

группы Ли, на к-ром группа движений порождается левыми и правыми сдвигами.

Однородные расслоения и теория представлений. Действие основной группы G продолжается не только на расслоения геометрич. объектов, но и на более широкий класс т. н. *однородных расслоений*. Однородное расслоение π над О. п. G/H задается левым действием подгруппы H на произвольном многообразии F (типовом слое) и определяется как естественная проекция

$$\pi: G\times_H F \longrightarrow G/H,$$

где $G\times_H F$ — расслоенное произведение, получаемое факторизацией прямого произведения $G\times F$ по отношению эквивалентности

$$(g,\ f) \sim (gh^{-1},\ hf),\ g\in G,\ h\in H,\ f\in F.$$

Если P — векторное пространство, на к-ром группа H действует линейно, то соответствующее однородное расслоение π является векторным, а в пространстве $\Gamma(\pi)$ его сечений возникает линейное представление группы G, индуцированное представлением подгруппы H в F. Изучение *индуцированных представлений* (свойства к-рых оказываются тесно связанными с геометрией соответствующего О. п.) и их обобщений играет важную роль в теории представлений групп Ли (см. [7]).

Анализ на однородных пространствах. К числу наиболее разработанных разделов относятся: 1) изучение различных функциональных пространств на О. п. (пространств функций, пространств сечений однородных векторных расслоений, пространств когомологий со значением в соответствующих пучках), 2) изучение инвариантных дифференциальных операторов, действующих на этих пространствах, 3) изучение различных динамич. систем, связанных с О. п.

К первому разделу относится теория сферич. функций (и, более общо, сферич. сечений), изучающая конечномерные инвариантные относительно основной группы пространства функций на О. п. (см. *Представляющая функция*). Многие специальные функции математич. физики интерпретируются как сферич. функции на том или ином О. п., и изучение представлений основной группы в пространствах таких функций позволяет единым образом получить основные результаты теории специальных функций (интегральные представления, рекуррентные формулы, теоремы сложения и т. п., см. [2]). Естественным обобщением теории рядов и интегралов Фурье является *гармонический анализ абстрактный* на О. п., одна из основных задач к-рого состоит в описании разложения пространства квадратично интегрируемых функций на О. п. в сумму подпространств, неприводимых относительно действия основной группы. Большинство полученных здесь результатов относится к случаю, когда О. п. есть пространство полупростой группы Ли (см. [4]).

Теория автоморфных функций приводит к более общей задаче о разложении на неприводимые компоненты пространства квадратично интегрируемых сечений однородного векторного расслоения над О. п. G/H, инвариантных относительно нек-рой дискретной подгруппы $\Gamma\subset G$.

Кроме пространств функций, изучаются также и различные пространства мер на О. п., напр. в связи с приложениями в теории вероятностей (см. [3], [9]).

Ко второму разделу относятся вопросы описания *инвариантных дифференциальных операторов* на О. п., изучение их свойств, нахождение спектра и фундаментального решения, исследование решений соответствующих дифференциальных уравнений с частными производными (см. [8], [15]).

К третьему разделу относится изучение различных *динамических систем*, связанных с О. п., напр. потока, порожденного однопараметрич. подгруппой основной группы, потока, порожденного канонич. связностью группы Ли, *геодезического потока* однородного риманова пространства и т. п. Исследуются условия эргодичности потоков, дается описание их первых интегралов (см. [1]).

К анализу на О. п. примыкает также *интегральная геометрия*, представляющая собой теорию инвариантных мер на О. п. и на связанных с ними многообразиях, точками к-рых являются подмногообразия того или иного типа.

Топология однородных пространств. Методы алгебраич. топологии позволяют в широком классе случаев свести задачу о вычислении основных топологич. инвариантов О. п. (кольцо когомологий, характеристич. классы, K-функтор, гомотопич. группы и т. д.) к нек-рым алгебраич. задачам, связанным с алгебраич. строением основной группы и группы изотропии О. п. Для ряда классов О. п. получены явные результаты в этом направлении. Напр., теорема А. Картана (H. Cartan) дает алгоритм для вычисления алгебры вещественных когомологий $H^*(G/H;\ \mathbb{R})$, где G и H — связные компактные группы Ли, в терминах инвариантов групп Вейля для G и H (см. [10]). В частности, если G/H имеет ненулевую эйлерову характеристику (это равносильно совпадению рангов групп G и H), то многочлен Пуанкаре многообразия G/H имеет вид

$$P(G/H,\ t)=\prod_{i=1}^{r}\frac{1-t^{2k_i}}{1-t^{2l_i}},$$

где $k_1,\ \ldots,\ k_r$ и $l_1,\ \ldots,\ l_r$ — степени базисных инвариантных многочленов групп Вейля для G и H соответственно (формула Хирша).

Наиболее детально изучено топологич. строение О. п. компактных групп Ли, симметрич. пространств и солвмногообразий (однородных пространств разрешимых групп Ли). Теорема Мостова — Карпелевича, утверждающая, что любое О. п. группы Ли, имеющее конечную фундаментальную группу, диффеоморфно векторному расслоению над О. п. компактной группы Ли, в значительной мере сводит изучение топологии О. п. к случаю, когда основная группа компактна.

Классификация однородных пространств. Основные задачи этого направления состоят в определении тех многообразий, к-рые являются О. п. связных групп Ли, и в перечислении всех транзитивных действий связных групп Ли на этих многообразиях. Напр., единственными О. п. размерности 2 являются плоскость, цилиндр, сфера, тор, лист Мёбиуса, проективная плоскость и бутылка Клейна. К настоящему времени (1982) проведена также классификация всех трехмерных О. п. и (с точностью до конечнолистных накрытий) всех компактных О. п. размерностей $\leqslant 6$ (см. [11]).

Для ряда важных классов О. п. M высших размерностей известна классификация всех транзитивных действий групп Ли на M (см. [12]). Напр., классификация всех транзитивных действий компактных групп Ли на сферах выглядит следующим образом. Любое непрерывное транзитивное и эффективное действие связной компактной группы Ли на S^n переводится нек-рым гомеоморфизмом сферы S^n в стандартное линейное действие группы $\mathrm{SO}(n+1)$ или одной из следующих ее подгрупп:

$$G=\mathrm{SU}(k)\ \text{или}\ U(k),\ \text{если}\ n=2k-1;$$
$$G=\mathrm{Sp}(k),\ \mathrm{Sp}(k)\times U(1)\ \text{или}\ \mathrm{Sp}(k)\times\mathrm{Sp}(1),\ \text{если}\ n=4k-1;$$
$$G=\mathrm{Spin}(7)\ \text{или}\ \mathrm{Spin}(9),\ \text{если}\ n=7,15;$$
$$G=G_2,\ \text{если}\ n=6$$

(теорема Монтгомери — Самельсона — Бореля, см. [10]). Что касается транзитивных действий некомпактных групп Ли на сфере S^n, то для четного n единственными такими действиями по существу являются проективное действие группы $\mathrm{SL}(n+1)$ и конформное действие группы $\mathrm{SO}(1, n+1)$. Для нечетного n результат выглядит сложнее: здесь могут существовать транзитивные и эффективные действия групп Ли с радикалом сколь угодно большой размерности.

Лит.: [1] Аусландер Л., Грин Л., Хан Ф., Потоки на однородных пространствах, пер. с англ., М., 1966; [2] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., 1965; [3] Гренандер У., Вероятности на алгебраических структурах, пер. с англ., М., 1965; [4] Желобенко Д. П., Гармонический анализ на полупростых комплексных группах Ли, М., 1974; [5] Картан Э., Геометрия групп Ли и симметрические пространства, пер. с франц., М., 1949; [6] его же, Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера, пер. с франц., М., 1963; [7] Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; [8] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, пер. с англ., М., 1964; [9] Хеннан Э., Представления групп и прикладная теория вероятностей, пер. с англ., М., 1970; [10] Борель А., в кн.: Расслоенные пространства и их приложения, М., 1958; [11] Горбацевич В. В., в сб.: Геометрические методы в задачах алгебры и анализа, Ярославль, 1980, с. 37—60; [12] Онищик А. Л., «Матем. сб.», 1963, т. 60, № 4, с. 447—85; 1968, т. 75, № 2, с. 255—63; [13] Итоги науки. Алгебра. Топология, 1963, М., 1964; [14] Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, т. 11, М., 1974; [15] Helgason S., Analisis on Lie groups and homogeneous spaces, Providence, 1972; [16] Jensen G., Higher order contact of submanifolds of homogeneous spaces, B.-[u. a.], 1977; [17] Кобаяси Ш., Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 2, М., 1981; [18] Wolf J. A., Spaces of constant curvature, N. Y., 1967. *Д. В. Алексеевский.*

ОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГРУППЫ — алгебраическое многообразие M вместе с заданным на нем регулярным и транзитивным действием алгебраич. группы G. Если $x \in M$, то *изотропии группа* G_x замкнута в G. Обратно, если H — замкнутая подгруппа нек-рой алгебраич. группы G, то на множестве левых смежных классов G/H существует структура алгебраич. многообразия, превращающая его в О. п. а. г. G, причем естественное отображение $\pi\colon G \to G/H$ регулярно, сепарабельно и обладает следующим универсальным свойством: для любого морфизма $\varphi\colon G \to X$, постоянного на смежных классах, существует такой морфизм $\psi\colon G/H \to X$, что $\psi\pi = \varphi$. Если M — любое О. п. а. г. G и $H = G_x$ для какого-либо $x \in M$, то естественное биективное отображение $\psi\colon G/H \to M$ регулярно, а если основное поле K имеет характеристику 0, то ψ бирегулярно (см. [1], [3]).

Пусть связная группа G, однородное пространство M и действие группы G на M определены над нек-рым подполем $k \subset K$. Тогда группа k-рациональных точек $G(k)$ переводит $M(k)$ в себя и $G(k)_x = G_x(k)$ для $x \in M(k)$. Если k конечно, то $M(k) \neq \phi$, а если при этом подгруппа изотропии G_x связна, то $G(k)$ транзитивно действует на $M(k)$. В общем случае изучение k-рациональных точек в M сводится к задачам теории *Галуа когомологий* (см. [2]).

О. п. а. г. G всегда является гладким квазипроективным многообразием (см. [5]). Если G — аффинная алгебраич. группа, то многообразие G/H проективно тогда и только тогда, когда H — *параболическая подгруппа* в G (см. [3]). Если G редуктивна, то многообразие G/H аффинно тогда и только тогда, когда подгруппа H редуктивна (см. *Мацусимы критерий*). Известно также описание замкнутых подгрупп H линейной алгебраич. группы G над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, для к-рых G/H квазиаффинно (см. [4], [6]).

Лит.: [1] Борель А., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1972; [2] Серр Ж.-П., Когомологии Галуа, пер. с франц., М., 1968; [3] Хамфри Дж., Линейные алгебраи-

ческие группы, пер. с англ., М., 1980; [4] Суханов А. А., «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 2, с. 182—83; [5] Chow W., в кн.: Algebraic geometry and topology. Symp. in Honour of S. Lefschetz, Princeton, 1957, p. 122—28; [6] Hochschild G. P., Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, N. Y.— Hdld.— B., 1981.
А. Л. Онищик.

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ — координаты, обладающие тем свойством, что определяемый ими объект не меняется при умножении всех координат на одно и то же число. Таковы, напр., *проективные координаты*, *плюккеровы координаты*, *пентасферические координаты*.
Д. Д. Соколов.

ОДНОРОДНЫЙ ВЫПУКЛЫЙ КОНУС — открытый строго выпуклый конус V в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$, однородный относительно группы линейных преобразований $\alpha \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ таких, что $\alpha V = V$ (автоморфизмов конуса V). О. в. к. V_1 и V_2 наз. изоморфными, если существует изоморфизм объемлющих векторных пространств, переводящий V_1 в V_2.

Примеры. 1) Шаровой конус

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 > x_1^2 + \ldots + x_n^2\}.$$

Группа автоморфизмов конуса K_n есть прямое произведение подгруппы индекса 2 группы Лоренца $O_{n,1}(\mathbb{R})$ (изоморфной группе движений n-мерного пространства Лобачевского) и группы $\mathbb{R}^+$ гомотетий с положительными коэффициентами.

2) Конус $P_n(\mathbb{R})$ положительно определенных симметрических действительных матриц порядка n. Группа автоморфизмов этого конуса состоит из преобразований вида

$$x \longrightarrow gxg^t, \quad g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

3) Конус $P_n(\mathbb{C})$ положительно определенных эрмитовых комплексных матриц порядка n.

4) Конус $P_n(\mathbb{H})$ положительно определенных эрмитовых кватернионных матриц порядка n.

Выпуклый конус V', сопряженный О. в. к. V (т. е. конус в сопряженном пространстве, состоящий из всех линейных форм, положительных на V), также однороден. О. в. к. V наз. самосопряженным, если в объемлющем векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ существует такая евклидова метрика, что $V = V'$ при отождествлении пространства $\mathbb{R}^n$ со своим сопряженным с помощью этой метрики. Все приведенные выше О. в. к. являются самосопряженными.

Классификация самосопряженных О. в. к. основана на их связи с компактными *йордановыми алгебрами* (см. [1], [2]). Действительная йорданова алгебра A наз. компактной, если $\mathrm{Tr}\, T(a)^2 > 0$ для любого $a \in A$, $a \neq 0$, где $T(a)$ — оператор умножения на a в алгебре A. Комплексификация устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами изоморфных компактных йордановых алгебр и классами изоморфных полупростых комплексных йордановых алгебр. Множество квадратов обратимых элементов компактной йордановой алгебры является самосопряженным О. в. к., и все самосопряженные О. в. к. получаются таким способом. Отсюда выводится, что всякий самосопряженный О. в. к. изоморфен прямому произведению конусов описанных выше четырех типов и 27-мерных конусов, связанных с особой простой йордановой алгеброй.

Произвольные О. в. к. могут быть представлены в виде конуса положительно определенных эрмитовых матриц в нек-рых обобщенных матричных алгебрах [3]. Простейшим примером несамосопряженного О. в. к. является 5-мерный конус положительно определенных симметрических действительных матриц $x = [x_{ij}]$ 3-го порядка, удовлетворяющих условию $x_{23} = x_{32} = 0$. Начиная с $n = 11$ в $\mathbb{R}^n$ имеется континуум неизоморфных О. в. к.

Во всяком О. в. к. нек-рым канонич. образом может быть определена полная риманова метрика, инвариантная относительно всех его автоморфизмов. Самосопряженные О. в. к. характеризуются тем, что они являются *симметрическими пространствами* относительно этой метрики. Стационарная подгруппа любой точки О. в. к. является максимальной компактной подгруппой в группе его автоморфизмов. Стационарная подгруппа единицы компактной йордановой алгебры A в группе автоморфизмов О. в. к., ассоциированного с A, совпадает с группой автоморфизмов алгебры A. Всякий О. в. к. допускает просто транзитивную группу автоморфизмов, приводящуюся в нек-ром базисе к треугольному виду.

О. в. к. представляют особый интерес для теории *однородных ограниченных областей* в связи с тем, что указанные области реализуются в виде *Зигеля областей*, а для однородности области Зигеля 1-го или 2-го рода необходимо, чтобы был однороден ассоциированный с ней выпуклый конус. О. в. к. и связанные с ними области Зигеля являются естественными носителями нек-рых аналитич. конструкций, в частности обобщения эйлеровых интегралов и гипергеометрич. функций [8]. С каждым О. в. к. связывается многопараметрич. группа интегралов Римана — Лиувилля, включающая нек-рые гиперболические дифференциальные операторы (напр., в случае шарового конуса таким образом получается волновой оператор). Для этих операторов может иметь место усиленный принцип Гюйгенса [9].

Исследование дискретных групп автоморфизмов самосопряженных О. в. к. важно для компактификации и разрешения особенностей локально симметрич. пространств [4]. Многие результаты классич. теории приведения, полученные для группы $SL_n(\mathbb{Z})$, действующей в конусе $P_n(\mathbb{R})$, могут быть обобщены на произвольные самосопряженные О. в. к. (см. [5], [6]).

Лит.: [1] Koecher M., «Math. Ann.», 1958, Bd 135, № 3, S. 192—202; [2] Винберг Э. Б., «Докл. АН СССР», 1960, т. 133, № 1, с. 9—12; [3] его же, «Тр. Моск. матем. об-ва», 1963, т. 12, с. 303—58; 1965, т. 13, с. 56—83; [4] Ash A. [a. o.], Smoth compactifications of locally symmetric varieties, Brookline, 1975; [5] Helwig K.-H., «Math. Z.», 1966, Bd 91, S. 152—78, 355—62; [6] Ash A., «Canad. J. Math.», 1977, v. 29, № 5, p. 1040—54; [7] Rothaus O. S., «Ann. Math.», 1966, v. 83, № 2, p. 358—76; [8] Гиндикин С. Г., «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 4, с. 3—92; [9] Вайнберг Б. Р., Гиндикин С. Г., «Тр. Моск. матем. об-ва», 1967, т. 16, с. 151—80.

Э. Б. Винберг.

ОДНОРОДНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение A векторного пространства X в векторное пространство Y такое, что существует симметрическое полилинейное отображение

$$B: \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}} \longrightarrow Y,$$

причем $B(x, \ldots, x) = A(x)$. Число n наз. степенью О. о. A. Однородным оператором степени 1 (обычно говорят, просто однородным) является линейный оператор $L: X \to Y$. Вместо $(x, \ldots, x)$ пишут для сокращения x^n, понимая под этим элемент пространства $X \times \ldots \times X$, у к-рого все координаты равны, но не степень элемента, к-рая в произвольном векторном пространстве не определена. Если A есть О. о. степени n, то

$$A(tx) = t^n A(x).$$

Более общо:

$$A(t_1 x_1 + \ldots + t_k x_k) =$$

$$= \sum_{n_1 + \ldots + n_k = n,\ n_i \geqslant 0} \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}\, t_1^{n_1} \ldots$$

$$\ldots t_k^{n_k} B\left(x_1^{n_1}, \ldots, x_k^{n_k}\right).$$

В случае, когда X и Y — векторные нормированные пространства, непрерывность О. о. A эквивалентна его ограниченности и из непрерывности A в нуле следует непрерывность его на всем X.

Лит.: [1] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965; [2] Картан А., Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, пер. с франц., М., 1971. *В. И. Соболев.*

ОДНОРЯДНОЕ КОЛЬЦО — кольцо, все неразложимые односторонние идеалы к-рого обладают единственным композиционным рядом и к-рое разлагается в прямую сумму примарных колец. Отказ от последнего требования приводит к определению обобщенно однорядного кольца, наз. также рядным кольцом. Всякое обобщенно О. к. является полуцепным как слева, так и справа (см. *Полуцепной модуль*, *Полуцепное кольцо*). Всякий модуль над обобщенно О. к. разлагается в прямую сумму циклич. подмодулей. Кольцо является обобщенно однорядным тогда и только тогда, когда все левые модули над ним полуцепные. Примером О. к. может служить кольцо верхних треугольных матриц над телом. *Л. А. Скорняков.*

ОДНОСВЯЗНАЯ ГРУППА — топологическая группа (группа Ли, в частности), топологич. пространство к-рой односвязно. Значение О. г. в теории групп Ли объясняется следующими теоремами:

1) всякая связная группа Ли G изоморфна факторгруппе нек-рой О. г. (называемой универсальной накрывающей группы G) по дискретной центральной подгруппе, изоморфной $\pi_1(G)$;

2) две О. г. Ли изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их алгебры Ли; более того, всякий гомоморфизм алгебры Ли О. г. G_1 в алгебру Ли произвольной группы Ли G_2 является дифференциалом (однозначно определенного) гомоморфизма G_1 в G_2.

Центр Z односвязной полупростой компактной или комплексной группы Ли G конечен. Для различных типов простых групп Ли он приведен в таблице:

G	A_n	B_n	C_n	D_{2n}	D_{2n+1}	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
Z	$\mathbb{Z}_{n+1}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\{e\}$	$\{e\}$	$\{e\}$

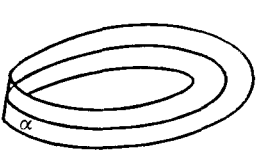
В теории *алгебраических групп* О. г. наз. связную алгебраич. группу G, не допускающую нетривиальных *изогений* φ: $\tilde{G}\to G$, где $\tilde{G}$ — также связная алгебраич. группа. Для полупростых алгебраич. групп над полем комплексных чисел это определение равносильно данному выше. *Э. Б. Винберг.*

ОДНОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ линейно связного пространства — область D, в к-рой все замкнутые пути гомотопны нулю или, иначе говоря, *фундаментальная группа* к-рой тривиальна. Это означает, что любой замкнутый путь в D можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь все время в О. о. D. Граница О. о. D, вообще говоря, может состоять из любого числа k, $0\leqslant k\leqslant\infty$, связных компонент, даже в случае О. о. евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, или $\mathbb{C}^m$, $m\geqslant 1$. Граница конечной плоской О. о. состоит из одной связной компоненты; все плоские О. о. гомеоморфны между собой.

См. также *Граничные элементы*. *Е. Д. Соломенцев.*

ОДНОСТОРОННИЕ И ДВУСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ — два типа поверхностей, различающихся по способу их расположения в объемлющем пространстве (одностороннее расположение и двустороннее расположение). Напр., цилиндр представляет собой двустороннюю поверхность (д. п.), а *Мёбиуса лист* — одностороннюю поверхность (о. п.). Характерное отличие этих поверхностей — граница цилиндра состоит из двух кривых, а граница листа Мёбиуса — из одной кривой. Среди

замкнутых поверхностей двусторонней является *сфера* и *тор*, а односторонней — *Клейна поверхность*. Примерами двустороннего и одностороннего расположения кривой могут служить вложения окружности в лист Мёбиуса. Так, цикл α (см. рис.) является односторон-



ней кривой, а цикл β — двусторонней (и вообще, любой *дезориентирующий путь* лежит в поверхности односторонне).

Более точно О. и д. п.— два типа многообразий, различающихся способом вложения их в объемлющее пространство (на единицу большей размерности). Двусторонность и односторонность связаны с ориентируемостью и неориентируемостью (см. *Ориентация*), но в отличие от последних не являются внутренними свойствами поверхности и зависят от объемлющего пространства. Так, напр., существуют ориентируемые д. п.: $S^2 \subset S^3$, $T^2 \subset \mathbb{R}^3$; неориентируемые д. п.: $\mathbb{R}P^2 \times 0 \subset \mathbb{R}P^2 \times S^1$; ориентируемые о. п.: $T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}P^2 \times S^1$; неориентируемые о. п.: $\mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$ (здесь S^2 — сфера, T^2 — тор, $\mathbb{R}P^2$ — проективная плоскость, $\mathbb{R}P^3$ — проективное пространство, S^1 — дезориентирующий путь на $\mathbb{R}P^2$).

В ориентируемом пространстве (напр., в $\mathbb{R}^n$) гиперповерхность является ориентируемой в том и только в том случае, когда она является д. п.

Пусть вдоль замкнутой кривой на гладкой поверхности, погруженной в нек-рое пространство, относится нормальный вектор так, чтобы он оставался нормальным. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным независимо от выбора кривой, то поверхность наз. д в у с т о р о н н е й; в противном случае (когда нормаль окажется противонаправленной исходной) — о д н о с т о р о н н е й. Более общо, двусторонность расположения поверхности П равносильна тривиальности ее нормального расслоения (в таком расслоении существует ненулевое сечение). Наоборот, нормальное расслоение о. п. нетривиально: существует кривая на П, над к-рой расслоение является листом Мёбиуса.

Локально всякая (гипер)поверхность M^{n-1} в пространстве N^n разбивает его на две части, т. е. для точки $x \in M^{n-1} \subset N^n$ имеется такая окрестность $U \subset N$, что U состоит из двух компонент U' и U'' и $U \cap M^{n-1}$ принадлежит их общей границе. С другой стороны, достаточно тесная окрестность M^{n-1} в N^n (если M замкнуто в N) имеет либо одну, либо две компоненты, границы к-рых содержат M. В первом случае (гипер) поверхность M^{n-1} также наз. о д н о с т о р о н н е й, а во втором — д в у с т о р о н н е й. Таким образом, хотя поверхность локально и имеет две стороны, глобально она может быть о. п. и в противоположность д. п. не разбивать свою окрестность в пространстве.

Для д. п. M^n, лежащей в N^{n+1}, *пересечения индекс* в N^{n+1} для любой замкнутой кривой α на M^n удовлетворяет равенству $(\alpha, M^n) = 0 \bmod 2$. Если же M^n — о. п., то $(\alpha, M^n) \neq 0$ для нек-рой кривой $\alpha \in M^n$. Этот факт также можно принять за определение одно- и двусторонности (наряду с обносом нормального вектора и разбиением окрестности).

Лит.: [1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М., 1981; [2] Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.—Л., 1938; [3] Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, 2 изд., [М., 1969]. *М. И. Войцеховский.*

ОДНОСТОРОННИЙ ПРЕДЕЛ — предел функции в нек-рой точке справа или слева. Пусть f — отображе-

ние упорядоченного множества X (напр., множества, лежащего на числовой прямой), рассматриваемого как топологич. пространство с топологией, порожденной отношением порядка, в топологич. пространство Y и $x_0 \in X$. Предел отображения f по любому интервалу $(a, x_0) = \{x : x \in X \ a < x < x_0\}$ наз. предел слева отображения f и обозначают

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

(он не зависит от выбора $a < x_0$), а предел по интервалу $(x_0, b) = \{x : x \in X \ x_0 < x < b\}$ наз. предел справа и обозначают

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

(он не зависит от выбора $b > x_0$). Если точка x_0 является предельной как слева, так и справа для множества определения функции f, то обычный предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

по проколотой окрестности точки x_0 (в этом случае его наз. также двусторонним, в отличие от односторонних пределов) существует тогда и только тогда, когда в точке x_0 существуют пределы слева и справа и они равны между собой. *Л. Д. Кудрявцев.*

ОДНОСТОРОННЯЯ ПРОИЗВОДНАЯ — обобщение понятия производной, в к-рой обычный предел заменяется односторонним пределом. Если для функции $f(x)$ действительного переменного существует

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right),$$

то этот предел наз. правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке x_0. В случае равенства этих О. п. функция имеет в точке x_0 обычную производную. См. также *Дифференциальное исчисление.* *Г. П. Толстов.*

ОДНОЧЛЕН — простейший вид алгебраич. выражений — *многочлен*, состоящий из одного члена.

Как и многочлены (см. *Многочленов кольцо*), О. могут рассматриваться не только над полем, но и над кольцом. О. над коммутативным кольцом A от множества переменных $\{x_i\}$, где i пробегает нек-рое множество индексов I, наз. пара (a, ν), где $a \in A$, а ν — отображение из множества I в множество неотрицательных целых чисел, причем $\nu(i) = 0$ для всех i кроме конечного числа. О. принято записывать в виде

$$a x_{i_1}^{\nu(i_1)} \dots x_{i_n}^{\nu(i_n)},$$

где $i_1, \dots, i_n$ — все те индексы, для к-рых $\nu(i) > 0$. Число $\nu(i)$ наз. степенью одночлена относительно переменной x_i, а сумма $\sum_{i \in I} \nu(i)$ наз. полной степенью одночлена. Элементы кольца можно рассматривать как О. степени 0. Одночлен с $a = 1$ наз. примитивным. Любой О. с $a = 0$ отождествляется с элементом $0 \in A$.

Множество О. над A от переменных $\{x_i\}$, $i \in I$, образует коммутативную полугруппу с единицей. При этом произведение О. (a, ν) и $(b, \varkappa)$ определяется как $(ab, \nu + \varkappa)$.

Пусть B — нек-рая коммутативная A-алгебра. Тогда О. $a x_{i_1}^{\nu(i_1)} \dots x_{i_n}^{\nu(i_n)}$ определяет отображение из B^n в B по формуле $(b_1, \dots, b_n) \longrightarrow a b_1^{\nu(i_1)} \dots b_n^{\nu(i_n)}$.

Иногда рассматривают О. от некоммутирующих переменных. Такие О. определяются как выражения вида

$$a x_{i_1}^{\nu(i_1)} \dots x_{i_n}^{\nu(i_n)},$$

где последовательность индексов $i_n, \dots, i_n$ фиксирована, причем не обязательно все эти индексы различны.

Лит.: [1] Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968.

Л. В. Кузьмин.